



В.И. ШМОЙЛОВ, Я.С. КОРОВИН, Д.Я. ИВАНОВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ
и суммирование рядов



ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМ ИМ. АКАДЕМИКА А.В. КАЛЯЕВА



В.И. ШМОЙЛОВ, Я.С. КОРОВИН, Д.Я. ИВАНОВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ и суммирование рядов

Ростов-на-Дону
Издательство Южного федерального университета
2018

УДК 517.524

ББК 22.161.5

Ш 742

Печатается по решению Учёного совета
НИИ МВС им. акад. А.В. Каляева
Южного федерального университета

Рецензенты

Профессор кафедры вычислительной техники ИКТИБ ИТА ЮФУ,
доктор техн. наук В.Ф. Гузик

Доцент кафедры высшей математики ИКТИБ ИТА ЮФУ,
канд. физ. -мат. наук А.Г. Клово

Шмойлов, В.И.

Ш 742 Непрерывные дроби и суммирование рядов / Шмойлов В.И.,
Коровин Я.С., Иванов Д.Я. / Южный федеральный университет. –
Таганрог – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2018. – 524 с.

В книге рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов. Предложен общий подход к построению производящих функций рядов. Рассматриваются операции с комплексными числами, представленными подходящими непрерывными дробей.

В заключительном разделе помещены материалы о некоторых российских математиках, внесших значительный вклад в теорию непрерывных дробей.

Книга может быть полезна специалистам, работающим в прикладной и вычислительной математике, а также студентам и аспирантам, обучающимся по этим направлениям.

Илл. 111. Табл. 357. Библиогр.: с. 508-514 (150 назв.)

*Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского научного фонда, проект № 15-19-00196*

УДК 517.524

ББК 22.161.5

© Шмойлов В.И., Коровин Я.С., Иванов Д.Я., 2018

Памяти
Алексея
Николаевича
Хованского

*Есть многое на свете, друг Горацио,
что и не снилось нашим мудрецам*

В. Шекспир, «Гамлет», д.1. сц. 5.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главу “О непрерывных дробях”, которая венчает первый том классического труда “Введение в анализ бесконечных” [108], Эйлер предваряет небольшим вступлением, в котором есть такие строки о непрерывных дробях: “Хотя этот род выражений до настоящего времени разработан мало, однако мы не сомневаемся, что когда-нибудь применение его весьма широко распространится в анализе бесконечных”.

И все сбылось, и не сбылось... Феликс Браудер – главный редактор серии “Анализ”, пишет [28]: “По иронии судьбы в двадцатом веке теория непрерывных дробей резко отделилась от большинства главных направлений развития математики. Специалисты по теории чисел продолжали использовать непрерывные дроби и изучали их свойства. С другой стороны, аналитики, даже работающие в классических областях, стали сравнительно редко интересоваться непрерывными дробями. За небольшими исключениями, трудно найти современный учебник по аналитическим функциям комплексного переменного, в котором этому кругу методов и задач уделялось бы сколько-нибудь заметное внимание.

В минувшем столетии цепные дроби действительно расположились на периферии математической жизни. Для работ по цепным дробям не находилось даже рубрики в реферативных журналах – нередко они получали пристанище в разделе “Ряды и последовательности”. Трагедия однако состояла не в том, что исчезли рубрики в реферативных журналах или крупные имена среди авторов работ по цепным дробям. Беда была в другом – цепные дроби не заняли достойного места в математическом образовании. Этот феномен сложно объяснить с рациональных позиций. Но факт остается фактом. Если, к примеру, в фундаментальном трехтомном Курсе дифференциального и интегрального исчисления Г.М. Фихтенгольца рядам в общей сложности отводился едва ли не целый том, то цепным дробям – “ни полслова”, если вспомнить знаменитые строчки Дениса Давыдова, в которых тот сокрушался, правда, по совсем иному поводу. Были проигнорированы цепные дроби и в монументальном пятитомном “Курсе высшей математики” В.И. Смирнова. Не упоминались они и в более поздних курсах математического анализа С.М. Никольского и Л.Д. Кудрявцева, равно как и в бесчисленном множестве других Курсов. Изучая численные методы по университетским и вузовским учебникам, а также обращаясь к специальной литературе по вычислительной математике, окончив курс наук, вполне можно остаться на всю жизнь в твердом убеждении, что никаких цепных дробей в природе не существует.

О цепных дробях заговорили, когда западные физики-теоретики с удивлением обнаружили, что таблицы Паде, то есть дробно-рациональные аппроксимации, могут с большим эффектом применяться при решении насущных задач, причем тех, для решения которых прекрасно знакомый аппарат рядов оказывался совершенно бесполезным.

На Западе в 70-е – 90-е годы, спустя не одно десятилетие после выхода в свет книг О. Перрона [137 - 139], Х. Уолла [149] и А.Н. Хованского [73], появляются обстоятельные монографии по цепным дробям [127, 128, 131], одна из которых – У. Джоунса и В. Трона – в 1985 году была издана в переводе на русском языке [28]. В эти же годы выходят несколько книг по ветвящимся и интегральным цепным дробям [9, 58] – оригинальным направлениям, возникшем благодаря усилиям львовской математической школы профессора В.Я. Скоробогатко.

Как известно, один из подходов к проблеме восстановления функции по степенному ряду связан с аппроксимациями Паде. Аппроксимации Паде – это рациональные приближения функций, то есть приближения отношением полиномов. Аппроксимации Паде в последние десятилетия приобрели чрезвычайную популярность, стали, можно сказать, модными. По аппроксимациям Паде проводятся десятки международных научных конференций, публикуются тысячи работ.

Аппроксимации Паде приближают функцию отношением двух полиномов

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_M z^M},$$

коэффициенты которых устанавливаются по алгоритму Паде [4] из представления этой функции рядом Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots.$$

Основной целью аппроксимаций Паде является получение информации о функции по коэффициентам её степенного разложения. Часто аппроксимации Паде используют для восстановления функции по расходящемуся ряду. Следует отметить, однако, что существуют дробно-рациональные аппроксимации, которые не являются аппроксимациями Паде. Примерами таких аппроксимаций могут служить подходящие дроби некоторых типов непрерывных дробей [4].

В практическом отношении, пожалуй, самым важным классом являются, так называемые, диагональные аппроксимации Паде, записываемые отношением полиномов, к которым приводит свертка классических функциональных цепных дробей:

$$w_0 + \frac{w_1 z}{1} + \frac{w_2 z}{1} + \dots + \frac{w_n z}{1} + \dots. \quad (1)$$

Поэтому словосочетание “диагональные аппроксимации Паде” следует рассматривать как иное обозначение функциональных цепных дробей (1), которые часто именуют как С-дроби.

Важнейшие вопросы аналитической теории непрерывных дробей – это вопросы сходимости. Приведём общепринятое определение сходимости непрерывных дробей:

Непрерывная дробь того или иного вида называется сходящейся, если последовательность её подходящих дробей имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = A. \quad (2)$$

Непрерывная дробь расходится, если последовательность её подходящих пределов не имеет [28].

Для цепных дробей, то есть непрерывных дробей вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (3)$$

которые имеют подходящие дроби

$$\frac{P_0}{Q_0} = b_0; \quad \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}, \dots$$

определение сходимости традиционно определяется следующим образом:

Цепная дробь (3) называется сходящейся, если последовательность её подходящих дробей имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha. \quad (4)$$

В [76] было предложено отличное от традиционного определение сходимости непрерывных дробей:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i / Q_i|} = r_0, \quad (5)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (6)$$

где

P_i / Q_i – значения i -й подходящей дроби;

k_n – число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей n подходящих дробей.

Определенную так сходимость непрерывных дробей будем называть r/φ -сходимостью или «сходимостью по Никипорцу».

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо предполагает, что непрерывные дроби с вещественными элементами могут иметь как вещественные, так и комплексные значения. Признаком комплексности расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Параметры комплексного числа, т.е. его модуль r_0 и аргумент φ_0 , могут быть определены, так называемым, r/φ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6).

Если аргумент φ комплексного числа $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, которое по определению принимается за значение непрерывной дроби, примет значения 0 или π , то такая непрерывная дробь сходится в классическом смысле. Если $\varphi_0 = 0$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0 :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0.$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0.$$

Предложенный r/φ -алгоритм даёт возможность устанавливать значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, а также решать множество других задач из различных разделов вычислительной математики [75-80, 82, 83, 85-102].

Сравнивая два определения сходимости непрерывных дробей – классическое определение, задаваемое формулами (2) или (4), и определение сходимости через r/φ -алгоритм, то есть при использовании формул (5) и (6), можно отметить следующее. Для удобства изложения будем полагать, что мы имеем дело не с непрерывными дробями произвольной структуры, а с обыкновенными непрерывными дробями, то есть цепными дробями (3).

Классическое определение сходимости цепной дроби (3) с действительными элементами a_i и b_i устанавливает её сходимость, если имеет место вещественный предел её подходящих дробей. Если такого предела подходящих дробей цепной дроби (3) нет,

то цепная дробь считается расходящейся. Разнообразные и всё более чувствительные признаки сходимости цепных дробей (3) при принятом классическом определении сходимости устанавливаются математиками уже без малого два с половиной столетия, если отсчёт вести от работ Д. Бернулли [117].

В отличие от классического определения сходимости непрерывных дробей, сходимость непрерывных дробей, устанавливаемая r/φ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6), допускает, что значения цепных дробей (3) с вещественными элементами могут быть как вещественными, так и комплексными. Поэтому о цепных дробях с вещественными элементами, не имеющими вещественного предела подходящих дробей, следует говорить как о цепных дробях, расходящихся в классическом смысле. Признаки сходимости, которые устанавливаются для непрерывных дробей с вещественными элементами в случае “классической” сходимости, гарантируют вещественный предел значений их подходящих дробей. При определении сходимости с использованием r/φ -алгоритма непрерывные дроби с вещественными элементами, как уже отмечалось, могут иметь пределами своих подходящих дробей как вещественные, так и комплексные числа.

Очевидно, что критерии сходимости непрерывных дробей с вещественными элементами при сходимости, определяемой r/φ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6), не столь жёсткие в сравнении с критериями сходимости, которые установлены в классическом случае, когда требуется существование вещественных пределов подходящих дробей (2) или (4). Существующие теоремы о сходимости непрерывных дробей следовало бы дополнять словами: “при определении сходимости в классическом смысле”.

Остановимся несколько подробнее на r/φ -алгоритме. Надо сразу заметить, что r/φ -алгоритм нельзя “вывести” или “доказать”, оставаясь в рамках классического анализа. Однако можно прояснить механизм возникновения этого алгоритма.

Из формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

можно записать дроби:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}} \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}} \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем подходящие дроби непрерывной дроби (7):

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= 2 \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi}}}} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}. \quad (8)$$

При $n \rightarrow \infty$ можно прийти к непрерывной дроби

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots}}}. \quad (9)$$

Значения подходящих цепных дробей (9) определяются формулой:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}.$$

В 1948 году таганрогский математик Аким Захарович Никипорец записал весьма странный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = e^{i\varphi}. \quad (10)$$

Надо сказать, что несмотря на парадоксальность предела (10), А.З. Никипорец никак не выделял его из «троицы» пределов, записывая следом за пределом (10) два других, «правильных» предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(n+1)u}{\operatorname{sh} nu} = e^u. \quad (12)$$

Предел (10) А.З. Никипорец называл «эллиптической единицей», предел (11) – «параболической единицей», а предел (12) – «гиперболической единицей» [89]. Эти три единицы были совершенно естественны в рамках его учения о тройственном принципе в математике и естествознании, которое он последовательно развивал многие годы.

Вернемся, однако, к необычному пределу Никипорца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = e^{i\varphi}$$

и покажем, что он может быть установлен, если сходимость непрерывной дроби

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots}}}$$

определять через r/φ -алгоритм, то есть, используя формулы (5) и (6). В табл. 1 показаны результаты определения при помощи r/φ -алгоритма значения цепной дроби, представляющей комплексное число $e^{i0,2}$:

$$e^{i0,2} = 2 \cos 0,2 - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \dots - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \dots}}} \quad (13)$$

Таблица 1

Определение значения цепной дроби (13)

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	1.44996373	1.20414440	0.20414440	0.00000000	0.20000000
10	0.88914406	1.07578670	0.07578670	0.00000000	0.20000000
100	1.06887080	1.00922857	0.00922857	0.18849556	0.01150444
1000	0.86923462	1.00066770	0.00066770	0.19792034	0.00207966
10000	0.90157212	1.00007670	0.00007670	0.19980529	0.00019471
100000	1.25766463	1.00000631	0.00000631	0.19999379	0.00000621
1000000	-1.79328941	0.99999889	0.00000111	0.20000007	0.00000007

В колонках 3 и 5 табл. 1 показаны значения модуля и аргумента комплексного числа $e^{i0,2}$, установленные из цепной дроби (13).

Некоторые осложнения возникают при определении значений $e^{i\varphi}$, когда $\varphi = \pi/s$, где s – рациональное число. Например,

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i = 0 - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \dots \quad (0, -\infty, 0, \infty), \quad (14)$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \dots \quad (1, 0, -\infty, 1, 0, \infty). \quad (15)$$

Значения подходящих дробей (14) и (15) периодически повторяются. Такие цепные дроби называют ультрапериодическими [85]. Так как определить значения ультрапериодических цепных дробей на компьютере нельзя, то эти цепные дроби заменяют «близкими». Например, устанавливают значение не цепной дроби (14), а цепной дроби

$$\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \dots \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Используя непрерывную дробь (9), мы можем прояснить смысл формул r/φ -алгоритма, то есть формул (5) и (6). Восстановим комплексное число $e^{i\varphi}$, которое «представлено» бесконечной непрерывной дробью (9). Изобразим графически значения первых подходящих дробей непрерывной дроби (9). Используя выражение (8) для подходящих дробей, запишем:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \quad \dots$$

Очевидно, с ростом номера n угол $(n+1)\varphi$ станет больше угла π :

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin(n+1)\varphi} < 0.$$

Этот момент может быть зафиксирован, так как подходящая дробь P_n/Q_n примет отрицательное значение. Таким образом, перемещение радиуса – вектора от угла φ до угла $(n+1)\varphi$, несколько превышающего значение π , дает возможность, пусть и приближенно, определить аргумент комплексного числа $e^{i\varphi}$, представленного непрерывной дробью (9). Продолжая наблюдение за значениями подходящих дробей, запишем формулу, по которой можно определить аргумент φ_0 комплексного числа $e^{i\varphi_0}$:

$$\varphi_0 = \frac{\pi k_n + \tilde{\varphi}}{n}, \quad (17)$$

где k_n – количество подходящих дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа n подходящих дробей разложения (9), $\tilde{\varphi}$ – некоторый угол, причем, $\tilde{\varphi} < \varphi_0$.

Если $n \rightarrow \infty$, то формула (17) примет вид

$$\varphi_0 = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}.$$

Рассмотренная выше процедура позволяет установить однако не значение аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$, а модуль этого аргумента. Знак аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$ определяется из динамики распределения значений подходящих дробей (10) на “периоде”. Эти правила определения знака установлены после “калибровки” на тестовых непрерывных дробях, имеющих комплексные значения [77].

На рис. 1 показано распределение значений подходящих дробей P_n/Q_n разложений (18) и (19) в зависимости от номера n .

$$2 \cos 0.2 - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin(n+1)0.2}{\sin n0.2}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin n0.2}{\sin(n+1)0.2}. \quad (19)$$

Из непрерывной дроби (9), представляющей комплексное число $e^{i\varphi_0}$, можно получить, помимо аргумента, модуль этого комплексного числа, равный единице.

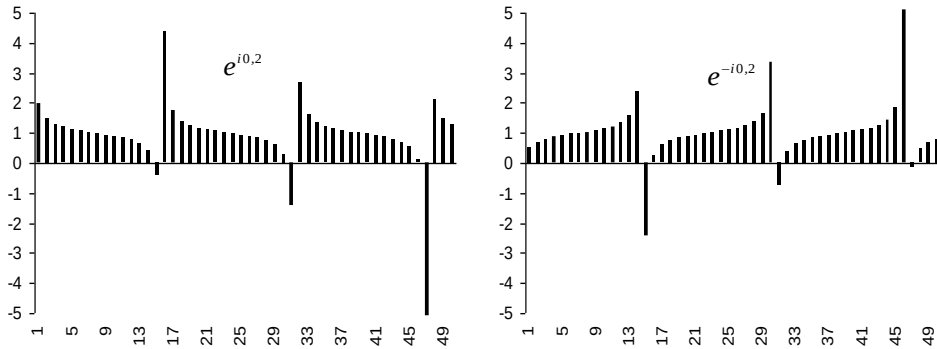


Рис. 1. Распределение значений подходящих непрерывных дробей (18) и (19).

В табл. 2 приведены результаты суммирования при помощи r/φ -алгоритма расходящейся непрерывной дроби:

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{15}}{2} = 2e^{i \arctg \sqrt{15}} = 1 - \frac{4}{1-1} - \frac{4}{1-1} - \dots - \frac{4}{1-1} - \dots. \quad (20)$$

Таблица 2

Определение значения расходящейся цепной дроби (20)

$r_0 = 2.0$, $\varphi_0 = 1.318116071652 \dots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	-3.0000000000	1.732050807568	0.267949192431	1.570796326794	0.252680255142
4	-0.7142857142	1.495348781221	0.504651218778	1.570796326794	0.252680255142
8	1.4369747899	1.901623404084	0.098376595915	1.178097245096	0.140018826556
16	-1.0326336812	1.893923277888	0.106076722111	1.374446785945	0.056330714292
32	0.9570674702	1.954777493792	0.045222506207	1.276272015520	0.041844056131
64	-3.3737052603	1.992211007792	0.007788992207	1.325359400733	0.007243329080
128	-0.9528199343	1.985483211714	0.014516788285	1.325359400733	0.007243329080
256	1.0641835576	1.995010880870	0.004989119129	1.313087554430	0.005028517222
512	-2.5412946875	1.998634135542	0.001365864457	1.319223477581	0.001107405928
1024	-0.4041335913	1.996749737389	0.003250262610	1.319223477581	0.001107405928
2048	2.1217417851	1.999829743244	0.000170256755	1.317689496793	0.000426574859
4096	0.1547065652	1.998758806916	0.001241193083	1.317689496793	0.000426574859
8192	5.7575173443	2.00006649905	0.00006649905	1.318072991990	0.000043079662
16384	2.7721264678	1.999990952659	0.000009047340	1.318072991990	0.000043079662
32768	0.8108450840	1.999946089818	0.000053910181	1.318072991990	0.000043079662
65536	-5.3765210082	1.999995713264	0.000004286735	1.318120928890	0.000004857237

В первой колонке таблицы даны номера n подходящих дробей разложения. Номера подходящих дробей составляют степень 2. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей P_n/Q_n с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения асимптотически приближаются к 2, т.е. к модулю комплексного числа. Даже беглого взгляда на колонки 5 и 6 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (20) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

На рис. 2 показаны значения подходящих дробей непрерывной дроби (20).

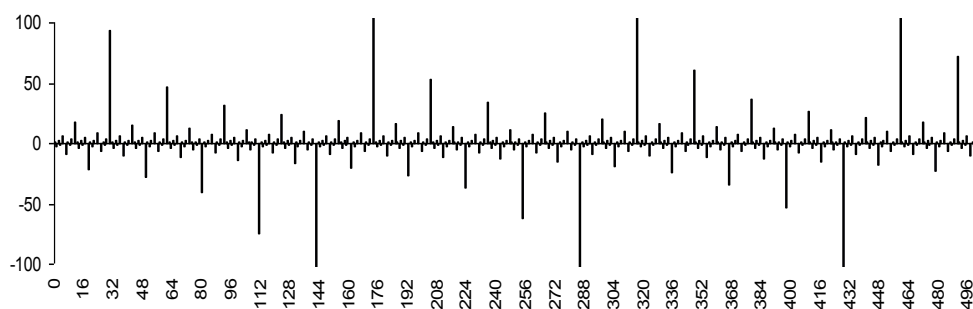


Рис. 2. Распределение значений подходящих дробей непрерывной дроби (20).

Формулы (5) и (6) можно распространить на непрерывные дроби других классов, в частности, на практически важные предельно-периодические непрерывные дроби, которыми представляются элементарные и многие специальные функции.

В табл. 3 показаны результаты суммирования расходящейся непрерывной дроби (21), представляющих $\ln(-2)$.

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \dots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1} - \dots \quad (21)$$

Таблица 3

Определение значения расходящейся цепной дроби (21)

$$r_0 = 3.2171505117 \dots, \varphi_0 = 1.3536398454 \dots$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754	1.5707963267	0.2171564813
4	-3.0000000	3.0000000000	0.2171505117	1.5707963267	0.2171564813
8	-97.5000000	4.9614481602	1.7442976485	1.5707963267	0.2171564813
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386	1.3744467859	0.0208069405
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367	1.3744467859	0.0208069405
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	1.3744467859	0.0208069405
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	1.3499030933	0.0037367521
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	1.3621749396	0.0085350941
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618	1.3499030933	0.0037367521
1024	-15.4772571	3.2219262392	0.0047757275	1.3560390164	0.0023991710
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336	1.3529710549	0.0006687905
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676	1.3529710549	0.0006687905
8192	-0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	1.3533545501	0.0002852953
16384	-1.7591587	3.2167104407	0.0004400709	1.3533545501	0.0002852953
32768	-6.4347291	3.2170964982	0.0000540134	1.3536421715	0.0000023260
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610	1.3536421715	0.0000023260

Легко понять, почему непрерывная дробь (21) расходится. При отрицательном аргументе, логарифмическая функция имеет комплексное значение: $\ln(-2) = 3.2171505117e^{i1.3536398454}$, которое, естественно, не может приближаться непрерывной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, r/φ -алгоритм позволяет установить значение непрерывной дроби (21).

Рассмотрим еще одну практически важную задачу, решаемую при помощи r/φ -алгоритма.

Известно, что при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений встречаются принципиальные трудности. В книге С.К. Годунова и В.С. Рябенского “Разностные схемы” [18] отмечается: “Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что, казалось бы, разумная разностная схема имеет решение, не сходящееся при измельчении сетки к истинному решению дифференциального уравнения”.

Рассмотренный выше способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Поясним примером. Как известно, удобный метод решения разностной краевой задачи, представляющий один из вариантов исключения неизвестных и носящий название “прогонки”, фактически эквивалентен записи решения обыкновенной непрерывной дробью, то есть для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений решения могут представляться как сходящимися непрерывными дробями, так и расходящимися [90]. Имеет место ситуация: решения системы существуют, но при измельчении шага сетки значения решений системы изменяются, причем, скачкообразно, т.е. с ростом размерности СЛАУ не могут быть найдены пределы, к которым бы эти решения стремились. В этом случае говорят, что система является “расходящейся” и решения не могут быть записаны. Возникает вопрос: что это означает для рассматриваемой СЛАУ с матрицей вещественных коэффициентов? Ответ состоит в следующем: если решаемая система

“расходится”, то возможно существование комплексных решений СЛАУ, которые традиционными методами решения не могут быть установлены.

Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи r/φ -алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX = B, \quad (22)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{pmatrix}, \quad X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], \quad B = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T.$$

где A – матрица вещественных коэффициентов, X – вектор искомых решений, B – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, “расходится” данная система или нет, решаем одним из классических методов подсистемы смежных порядков, например 1, 2, 3, ... и строим последовательности, состоящие из их решений $\{\bar{x}_i\}$, т.е. последовательности вида

$$\{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)}\}, \{\bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)}\}, \dots, \{\bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}. \quad (23)$$

Если каждая последовательность стремится к некоторому “своему” пределу с ростом размерности m системы, то последовательность корней $\{\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \bar{x}_3^{(m)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}$, $m \rightarrow \infty$, будет являться искомым решением рассматриваемой БСЛАУ. В случае, если пределы последовательностей (23) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше r/φ -алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении расходящихся СЛАУ $m \gg n$, что обусловлено r/φ -алгоритмом, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных “отсчетов”. Этот алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае “по Гауссу” вещественные решения расширяющейся системы (22) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль r_i комплексного корня x_i находится по формуле

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

где $\bar{x}_i^{(m)}$ – значение вещественной неизвестной $\bar{x}_i$, полученное “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ размерности m .

Модуль аргумента φ_i комплексного корня x_i БСЛАУ определяется следующим образом:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (25)$$

где $k_i^{(m)}$ – количество отрицательных значений $\bar{x}_i$, полученных “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ из общего количества m значений $\bar{x}_i$, найденных из “расширяющейся” системы.

Данный способ решения БСЛАУ достаточно экономичен, а главное – метод позволяет решать расходящиеся в традиционном смысле БСЛАУ, что не обеспечивают известные алгоритмы решения БСЛАУ.

В качестве примера рассмотрим решение при помощи r/φ -алгоритма расходящейся бесконечной системы (26).

Решить систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (26)$$

В табл. 4 приведены результаты определения x_i системы (26) с использованием r/φ -алгоритма, то есть формул (24) и (25). В первой колонке таблицы указана размерность решаемых систем. Во второй колонке помещены значения $\bar{x}_1$, полученные по методу прогонки. Как видно из таблицы, значения, полученные “по прогонке” для расходящейся системы, не стремятся к какому-либо пределу. В то же время в колонках 3 и 4 табл. 3 с ростом размерности системы (26) устанавливаются значения, соответственно, модуля и аргумента комплексного решения $\bar{x}_1$ системы (26).

Таблица 4

Определение значения $\bar{x}_1$ системы (26)

Размерность системы, m	Значение $\bar{x}_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(m)}$
2	2.500000000000E-01	5.000000000000E-01	0.000000000000E+00
3	1.176470588235E-01	3.086789594993E-01	0.000000000000E+00
4	-2.000000000000E-01	2.769413275131E-01	7.853981633974E-01
7	5.511811023622E-02	2.22264956834E-01	4.487989505128E-01
8	-4.250000000000E+00	3.213623350779E-01	7.853981633974E-01
15	-4.316594612571E-01	2.586318164389E-01	8.377580409573E-01
16	3.566826367091E-01	2.638802890571E-01	7.853981633974E-01
31	2.368807660622E-01	2.338062307929E-01	7.093918895203E-01
32	1.059969835469E-01	2.280970928948E-01	6.872233929728E-01
63	3.535238227882E-01	2.262750841807E-01	7.479982508547E-01
64	1.745241108523E-01	2.253588030476E-01	7.363107781851E-01
127	-3.252270368534E-01	2.200670942025E-01	7.421085008480E-01
128	3.769412205239E-01	2.209942810126E-01	7.363107781851E-01
255	2.545459857837E-01	2.245282017180E-01	7.022383578612E-01
256	1.213393341306E-01	2.239890962004E-01	6.994952392759E-01
511	4.544313219042E-01	2.191004764571E-01	7.070120453284E-01
512	2.021042090470E-01	2.190659250807E-01	7.056311624274E-01
1023	-1.468533026117E-02	2.191323997622E-01	7.063209289596E-01
1024	8.316406972992E-01	2.194179980411E-01	7.056311624274E-01
2047	7.182382967496E-01	2.184842239440E-01	7.029064168755E-01
2048	2.349945882313E-01	2.184919957063E-01	7.025632008516E-01
4095	8.970276633117E-02	2.184996917478E-01	7.027347669568E-01
4096	-5.225224025607E-01	2.185462070065E-01	7.033301912456E-01

Аналогично находятся значения x_i , $i = 2, 3, \dots$, системы (26).

На рис. 3 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных x_i , $i = 1, 2, \dots, 2048$ бесконечной системы (26).

В табл. 5 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (26), полученного при помощи r/φ -алгоритма. В первой колонке табл. 4 указаны номера строк системы (26), по которым проводилась проверка. Во второй колон-

ке приведены значения проверяемых строк системы (26) после подстановки найденных комплексных x_i из решаемой системы (26) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (26), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (26) с использованием r/φ -алгоритма.

Из табл. 5 можно заключить, что погрешности, допущенные при решении системы (19) с использованием r/φ -алгоритма, весьма невелики ($\varepsilon = 10^{-3} - 10^4$).

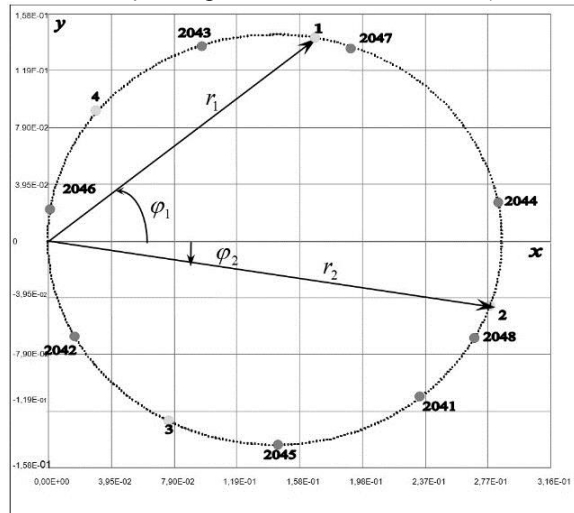


Рис. 3. Расположение x_i БСЛАУ (26) на комплексной плоскости.

Таблица 5

Результаты проверки решения системы (26)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1.001299469052E+00 i1.762678328659E-03	1	1.299469051622E-03 i1.762678328659E-03
2	1.001615385287E+00 i1.823158910945E-03	1	1.615385286690E-03 i1.823158910945E-03
4	1.001420584071E+00 i1.786263723479E-03	1	1.420584071188E-03 i1.786263723479E-03
8	1.000966887833E+00 i1.224856975491E-03	1	9.668878325528E-04 i1.224856975491E-03
16	1.001094874798E+00 i1.078635879098E-03	1	1.094874797582E-03 i1.078635879098E-03
32	1.001217090677E+00 i1.378751449401E-03	1	1.217090677040E-03 i1.378751449401E-03
64	1.000939873348E+00 i9.321736272402E-04	1	9.398733476283E-04 i9.321736272402E-04
128	1.001321599553E+00 i3.972567037168E-04	1	1.321599553336E-03 i3.972567037168E-04
256	1.000792866804E+00 i1.707477617846E-03	1	7.928668038036E-04 i1.707477617846E-03
512	1.001030405321E+00 i1.250966938645E-03	1	1.030405321258E-03 i1.250966938645E-03
1024	1.000587637913E+00 i2.199988158475E-03	1	5.876379127570E-04 i2.199988158475E-03
2048	1.000849453587E+00 i4.776958470371E-03	1	8.494535870614E-04 i4.776958470371E-03

Выше уже отмечалось, что r/φ -алгоритм применим не только к классическим цепным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга. В [78] было показано, что периодической непрерывной дробью Хессенберга естественным образом представляется корень алгебраического уравнения n -й степени. Под периодической непрерывной дробью Хессенберга будем понимать отношение определителей матриц Хессенберга, когда каждая i -я диагональ матрицы содержит один и тот же элемент α_i . Структура матрицы Хессенберга при этом становится аналогичной структуре матрицы Тейлора, в которой на диагоналях, параллельных главной, располагаются одинаковые элементы.

Важно подчеркнуть, что периодические непрерывные дроби Хессенберга всегда сходятся к вещественному или комплексному корню соответствующего алгебраиче-

ского уравнения. Если корни комплексные, то непрерывные дроби Хессенберга, естественно, расходятся в классическом смысле, но суммируются при помощи r/φ -алгоритма.

Опираясь на формулы Эйткена, появившиеся в работе 1926г. [111], была построена конструкция [82], определяющая i -й корень алгебраического уравнения n -й степени:

$$x_i = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}. \quad (27)$$

Формула (27) – аналитическое выражение, позволяющее представить корни алгебраического уравнения через коэффициенты этого уравнения. Если использовать r/φ -алгоритм, то можно находить, как действительные, так и комплексные корни алгебраического уравнения степени n .

Конструкция (27) была названа функцией Никипорца, или непрерывной дробью Никипорца [82]. Таким образом, формула (27) вкупе с r/φ -алгоритмом, полностью решают старинную проблему аналитической записи всех корней уравнений n -й степени по коэффициентам уравнения.

Некоторые другие применения r/φ -алгоритма приведены в [93]. Особо следует подчеркнуть эффективность использования методов теории непрерывных дробей при суммировании расходящихся рядов. Именно вопросы суммирования рядов через, так называемые, соответствующие непрерывные дроби составляют, в значительной степени, содержание книги.

В [78] суммирование рядов было определено через соответствующие цепные дроби.

Степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (28)$$

сходится к значению соответствующей ряду цепной дроби

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \dots, \quad (29)$$

которая является производящей функцией, порождающей этот ряд. Коэффициенты ω_i соответствующей цепной дроби (28) и степенного ряда (29) связаны формулами Хейлсманна-Стилтьеса [28]:

$$\omega_0 = c_0, \quad \omega_1 = c_1, \\ \omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \cdot \psi_{n+1}}{\varphi_n \cdot \psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \cdot \psi_n}{\varphi_n \cdot \psi_{n+1}},$$

где φ_n и ψ_n – определители Ганкеля:

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (30)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1$$

Числовой ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (31)$$

суммируется значением цепной дроби (2.1.5) при $x = 1$.

При определении сходимости степенных рядов через соответствующие цепные дроби область сходимости рядов совпадает с областью сходимости соответствующих цепных дробей. Следует подчеркнуть, что сходимость цепных дробей определяется не в классическом смысле, а в более общей формулировке, при помощи r/φ -алгоритма, что во многих важных случаях приводит к расширению области сходимости цепных дробей.

Приведём примеры суммирования расходящихся числовых рядов через соответствующие цепные дроби. Определение значений расходящихся в классическом смысле соответствующих цепных дробей производилось с использованием r/φ -алгоритма, то есть формул (5) и (6).

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = 1 + \frac{2}{1-1} = -1,$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = 1 - \frac{2}{1-2} \cdot \frac{3}{-3+1} = \frac{1}{4},$$

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots = 1 - \frac{3}{1+3} \cdot \frac{5}{-5+1} = 0,$$

$$1 + 1 - 1 + 2 - 5 + 14 - 42 + 132 - \dots = 1 + \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1+\dots} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033\dots,$$

$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 14 + 42 + 132 + \dots = 1 - \frac{1}{1-1} \cdot \frac{1}{-1-\dots} = e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \dots = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} \cdot \frac{2}{1+\dots} = \frac{n}{1+1} = 0.596347\dots,$$

$$1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots = \frac{1}{1-1} \cdot \frac{1}{-1-1} \cdot \frac{2}{-1-1} \cdot \frac{2}{-1-\dots} = \frac{n}{-1-1} = 1.349725e^{i1.028001},$$

$$1 - 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} \cdot \frac{3}{1+\dots} = \frac{n}{1+\dots} = 0.655680\dots,$$

$$1 + 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots = \frac{1}{1-1} \cdot \frac{1}{-1-1} \cdot \frac{2}{-1-1} \cdot \frac{3}{-1-\dots} = \frac{n}{-1-\dots} = 1.050320e^{i0.809228}.$$

Как правило, непрерывные дроби неожиданны и изящны, и их можно долго рассматривать, как завораживающий своими гранями кристалл:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7 + \dots}}}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7 + \dots}}}}}}}$$

Более ста лет известна уникальная по красоте формула Рамануджана [45]:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Можно предложить, пожалуй, более неожиданную формулу, полученную суммированием расходящейся цепной дроби [75]:

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots - \frac{1}{1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots} = i \sqrt{\frac{\pi}{2e}},$$

Нелишне обратить внимание, что суммирование с использованием r/φ -алгоритма сопряжено с выполнением достаточно больших объемов вычислений и вряд ли осуществимо без использования компьютеров. Видимо, этим и объясняется, почему метод суммирования “расходящихся” непрерывных дробей так запоздал со своим появлением.

Математические факты могут быть зафиксированы не только в виде теорем, но и в столбцах чисел. Академик В. И. Арнольд в предисловии к книге американских математиков Р. Грехема и О. Паташника “Конкретная математика” [24] утверждал: “Примеры учат не меньше, чем правила”. Он же в своей книге “Цепные дроби” [2] написал весьма примечательную фразу: “Математика – экспериментальная наука”. Любопытно также, что последняя монография выдающегося теоретика В.И. Арнольда имеет название: “Экспериментальное наблюдение математических фактов” [3].

О насущной необходимости даже для математика-теоретика пользоваться вычислениями высказывался украинский академик М.Ф. Кравчук еще в конце 30-х годов прошлого столетия [109]: “Мы не умеем, как следует, привить молодёжи охоты до эффективных вычислений. И до сих пор имеет место “забобон”, что высшая математика не нуждается в вычислениях, что вычисления для неё – низкая материя, что суть высшей математики в абстрактных теориях. Чтение Эйлера – один из лучших воспитательных приёмов в преодолении этих ошибочных воззрений”.

В последнее время вычислительный эксперимент все чаще рассматривается как новая технология научного поиска в разных областях знания, в том числе такой абстрактной, как математика. Становится очевидно: закономерности, лежащие на поверхности или на относительно небольшой глубине, в основном уже обнаружены и описаны. Разумеется, это не касается пустопорожних теорем – все их зафиксировать на бумаге никогда и никому не удастся. Глубинные же связи аналитически, то есть на кончике пера, устанавливаются со всё большим трудом. Это хорошо понимали уже классики – непревзойденные аналитики, например, Эйлер, Лежандр, Гаусс, когда фундаментальные теоремы в теории чисел находили, пристально всматриваясь в числовые таблицы, так сказать, в экспериментальный материал, Деррик Лемер, автор популярных “Таблиц простых чисел”, известный также работами по цепным дробям [117], писал: “Несмотря на утверждение некоторых выдающихся ученых, что математика – наука, ничего общего не имеющая с практикой, история теории чисел была в основном создана теми, кто следовал методам естествоиспытателей”.

“Continue fraction” – непрерывная дробь, – именно так была наречена конструкция (27) английским математиком Джоном Валлисом в “Arithmetica in forma arithmetica” (“Арифметика бесконечных”), которая вышла в 1655 г. [117]. Как отмечается в [89], термин “Kettenbrüche” – цепная дробь, появился в Германии в середине XVIII в.

Немного о терминологии. Обычно “цепные дроби” и “непрерывные дроби” рассматриваются как синонимы. Например:

Хованский А.Н., [72]. *Бесконечной цепной или непрерывной дробью называют разложение*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots + \frac{a_n}{b_n + \ddots}}}} \quad (32)$$

Следует здесь отметить, что российские математики вплоть до двадцатых годов прошлого столетия использовали в своих работах термин “непрерывные дроби”. И лишь стараниями А.Я. Хинчина, кстати, активно публиковавшегося в немецких журналах, “цепные дроби” получили права гражданства и, более того, существенно потеснили “непрерывные дроби” в сочинениях русскоязычных авторов. Надо сказать, что “цепные дроби” (*chain fraction*) вводились и в английском языке, но, похоже, термин остался невостребованным.

В русской литературе, в отличие от “прочих разных шведов”, в ходу два практически равноценных термина: “цепные дроби” и “непрерывные дроби” для обозначения одного и того же понятия. Таков уж наш менталитет, если говорить попросту. Отдать предпочтение одному из этих терминов затруднительно. Некоторые преимущества имеются у цепных дробей. Например, не вызывает нареканий фраза: “Конечная цепная дробь”, что не скажешь о выражении “Конечная непрерывная дробь”. Словосочетание “цепная дробь” вполне определенно указывает на дискретность структуры. С другой стороны, цепная дробь (32) – это очень частный случай непрерывных дробей, которые могут иметь структуры, неизмеримо более сложные, нежели классические цепные дроби, соответствующие линейному, то есть цепному графу.

Учитывая бесконечное многообразие непрерывных дробей, классические непрерывные дроби (32) будем называть *цепными дробями*. Дроби других классов следует именовать иначе. Например, “непрерывные дроби Хессенберга”, “ветвящиеся непрерывные дроби”, “восходящие непрерывные дроби” и т.д. Определяя выражение (32) как “цепную дробь”, мы тем самым выделяем классические непрерывные дроби из множества непрерывных дробей, задаваемых графом той или иной структуры.

В книге много таблиц, может быть, более, чем обычно случается в книгах математического содержания. Возможно, это вызовет некоторую аллергию при чтении. Мы сознательно шли на включение в текст большого количества экспериментального материала, ибо рассматриваем математические таблицы, как математические факты. Джон-Карло Рота, редактор американской Математической энциклопедии, утверждал [28]: «Математика состоит главным образом из фактов».

Авторы выражают глубокую признательность Г.А. Кириченко, С.В. Плющенко, И.С. Семёнову, М.В. Хисамутдинову и другим программистам, которые во многом способствовали обнаружению и фиксации математических фактов, представленных на страницах книги.

В заключительном разделе «Из истории непрерывных дробей» повествуется о «математике из княжеского рода» Алексея Николаевича Хованском, опубликовавшем в уже далёком 1956 г. замечательную книгу: «Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа». Книга А.Н. Хованского, наряду с небольшой книгой А.Я. Хинчина «Цепные дроби», первое издание которой вышло в 1935 г., многие десятилетия поддерживали интерес к цепным дробям среди российских читателей. Светлой памяти А.Н. Хованского посвящается эта книга.

г. Таганрог,
7 марта 2018 г.

В. И. Шмойлов

ВВЕДЕНИЕ

1. В своей книге [28] У. Джоунс и В. Трон пишут: "Хотя уже греки знали об алгоритме Евклида, нет сведений о том, что они использовали его для получения непрерывных дробей".

Г. Цейтен в "Истории математики в XVI и XVII веках" отмечает [73]: "К настоящему образованию непрерывных дробей приходит только Бомбелли в своей "Алгебре" 1572 года."

Действительно, Бомбелли принял

$$-a + \sqrt{a^2 + r} = x, \quad \text{то есть} \quad \sqrt{a^2 + r} = a + x,$$

и отсюда нашёл

$$r = 2ax + x^2,$$

что, в свою очередь, позволило записать

$$x = \frac{r}{2a + x}.$$

Ряд все более точных приближений получается, если вместо x в знаменатель последовательно помещать уже полученные приближенные значения этой величины.

И все же решающий шаг в оформлении аппарата цепных дробей сделал в 1613 году Кательди [73],— он вводит в эти вычисления повторное применения дробной черты, то есть получает настоящее обозначение непрерывных дробей:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}}, \quad (1)$$

только вместо знака "+" Кательди пишет "et."

В главе "О непрерывных дробях", помещенной в первом томе "Введения в анализ бесконечных", Эйлер пишет [108]: "Непрерывной дробью я называю такую дробь, знаменатель которой состоит из целого числа с дробью, у которой знаменатель опять представляет совокупность целого и дроби, которая далее составлена таким же образом, причём, это может либо продолжаться до бесконечности, либо где-нибудь приостановиться. Такого рода дробью будет выражение

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{c + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \text{etc}}}}}}$$

или

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

2. Леонард Эйлер в трактате "Defractionibus continuis dissertatio" [120] заложил основы теории цепных дробей. Это первая работа Эйлера по непрерывным дробям. Она была написана в 1737 г. Эйлер в основном рассматривал *правильные* цепные дроби, то есть цепные дроби, частные числители которых равны единице, а частные знаменатели – натуральные числа. Именно к таким цепным дробям приводит алгоритм Евклида. Поэтому естественней эти цепные дроби называть не правильными или регулярными, а *цепными дробями Евклида*.

Раскладывая $\sqrt{2}$ в цепную дробь, Эйлер записывает:

$$\sqrt{2} = 1.41421356 = \frac{141421356}{100000000}.$$

Производя последовательно выделение целой части числа, Эйлер приходит к разложению

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}} \quad (2)$$

Эйлер приводит еще одну правильную цепную дробь, период которой состоит уже из двух элементов:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}} \quad (3)$$

Позже, в 1748 г., Эйлер сформулировал знаменитую теорему: "*Всякая периодическая цепная дробь представляет квадратическую иррациональность*". Спустя двадцать лет, в 1768 г., Лагранж доказал обратную теорему: "*Всякая квадратическая иррациональность изображается периодической цепной дробью*".

Для числа e Эйлер записывает цепную дробь:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}} \quad (4)$$

Следует заметить, что разложение числа e в правильную цепную дробь, значительно ранее Эйлера, в 1714 г., получил английский математик Коутс [32].

Цепную дробь (4) будем называть *цепной дробью Коутса*. Роджер Коутс, ученик Исаака Ньютона, более известен всё же как Котес. Широкой популярностью пользу-

ются формулы Котеса для приближённого вычисления определённых интегралов по значениям подынтегральной функции в конечном числе равноотстоящих точек.

Коутс в работе "Измерение соотношений" (Logometria), увидевшей свет в 1717 г., уже после смерти автора, привел замечательное равенство

$$\ln(\cos x + i \sin x) = xi,$$

эквивалентное формуле Эйлера, связывающей в комплексной области показательную и тригонометрические функции. Знаменитая формула

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

о которой Лагранж отозвался, как о прекраснейшем открытии века в математическом анализе, была опубликована Эйлером лишь в 1743 г.

Эйлер установил другие правильные цепные дроби:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \text{etc.}}}}}}}}}}}$$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}$$

В работе [94] Эйлер приводит первые функциональные дроби:

$$\frac{1}{e^s} = 1 + \frac{1}{s-1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3s-1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5s-1 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}, \quad (5)$$

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{2}{2s-1 + \frac{1}{6s + \frac{1}{10s + \frac{1}{14s + \frac{1}{18s + \text{etc.}}}}}}, \quad (6)$$

Эйлер рассматривает непрерывные дроби столь же важным инструментом анализа, как и ряды.

Если в (5) заменить $s = 1/x$, то получим

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^2}{18} + \dots + \frac{x^2}{2(2n+1)} + \dots \quad (7)$$

В 1776г. Лагранж опубликовал такую цепную дробь для показательной функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \dots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \dots \quad (8)$$

Все подходящие дроби разложения (7) совпадают с нечетными подходящими дробями разложения (8). Цепную дробь (7) называют *сжатой* цепной дробью. Напротив, цепную дробь (8) можно назвать *растянутой* цепной дробью, так как все подходящие дроби разложения (7) включаются, как подмножество, в множество подходящих дробей разложения (8).

Эйлер неоднократно в своих работах обращался к изучению непрерывных дробей и применял их для представления функций и определенных интегралов, интегрирования дифференциальных уравнений, суммирования рядов и т.д. Популяризации непрерывных дробей содействовал труд Эйлера "Introductio in analysin infinitorum", вышедший в Лозанне в 1748 г. В первом томе этого сочинения Эйлера непрерывным дробям, как уже отмечалось, отводилась отдельная глава. Эта монография Эйлера неоднократно переиздавалась в Европе на протяжении XVIII-XX столетий, что, несомненно, способствовало тому, что интерес к непрерывным дробям постоянно поддерживался. "Введение в анализ бесконечных" издавалось и на русском языке: в 1936 г. (первый том) и в 1961 г. [108].

3. Цепная дробь Ламберта

$$tgx = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \frac{x^2}{11 - \dots}}}}} \quad (9)$$

одна из самых впечатляющих формул во всей математике. Многие если что и знают из цепных дробей, так именно это разложение. Эта цепная дробь часто приводится даже в тех справочниках, в которых больше о цепных дробях не найти ни слова. Цепная дробь для tgx имеет классически выразительную форму, и эту дробь не так просто забыть. Кстати, коэффициенты степенного ряда

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

по памяти воспроизведет редко кто из математиков. Можно, конечно, воспользоваться формулой:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{2^{2\kappa}(2^{2\kappa}-1)}{(2\kappa)!} |B_{2\kappa}| x^{2\kappa-1},$$

но для этого надо держать в голове значения первых чисел Бернулли:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \dots,$$

которые, впрочем, могут быть определены при помощи весьма практичной формулы

$$B_{2\kappa} = (-1)^{\kappa-1} \frac{2(2\kappa)!}{(2\pi)^{2\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2\kappa}}.$$

Цепная дробь для тангенса впервые получена в работе Ламберта "Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга", опубликованной в 1770 г. Публикацию Ламберт предваряет словами: *"Я имею некоторое основание сомневаться, что настоящая статья будет прочитана и понята теми, для кого это было бы особенно полезно"*.

Ламберт в своей работе приводит разложение

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \dots}}}}}}}. \quad (10)$$

Очевидно, что цепная дробь (10) следует из цепной дроби Эйлера (7) при $x = 1$.

Цепная дробь (10) является сжатой по отношению к цепной дроби

$$e = 1 + \frac{1}{1-} \frac{1}{2+} \frac{1}{3-} \frac{1}{2+} \frac{1}{5-} \frac{1}{2+} \dots + \frac{1}{2n-1-} \frac{1}{2+} \dots, \quad (11)$$

которая получается из цепной дроби Лагранжа (8) при $x=1$. Подходящие дроби разложения (10) совпадают с нечетными подходящими дробями цепной дроби (11). Вместе с тем, цепную дробь (11) можно рассматривать как сжатую цепную дробь относительно правильной цепной дроби Коутса (4). Подходящие дроби (11) совпадают со значениями цепной дроби (4), имеющими порядковые номера

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots, 3n-2, 3n-1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Значения подходящих дробей разложений (4), (11) и (10) приведены, соответственно, в таблицах 1а, 1в и 1с.

4. Приведем таблицы, из которых видна скорость сходимости некоторых цепных дробей для числа e .

Таблица 1а

Значения подходящих дробей цепной дроби Коутса

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

Номер звена	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значения подходящих дробей	2	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{1264}{465}$	$\frac{1437}{536}$	$\frac{2721}{1001}$

Таблица 1б

Значения подходящих дробей цепной дроби Лагранжа

$$e = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 - \frac{1}{2 + \frac{1}{5 - \frac{1}{2 + \frac{1}{7 - \frac{1}{2 + \frac{1}{9 - \dots}}}}}}}}}$$

Номер звена	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значения подходящих дробей	1	2	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{1457}{536}$	$\frac{2721}{1001}$

Таблица 1с

Значения подходящих дробей цепной дроби Эйлера

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \dots}}}}}}}$$

Номер звена	1	2	3	4	5
Значения подходящих дробей	1	3	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$

В табл. 2 приведены результаты вычислений числа e при помощи правильной цепной дроби (4) – цепной дроби Коутса.

Таким образом, 20 подходящих дробей правильной цепной дроби Коутса обеспечивают вычисление числа e с точностью 14 десятичных знаков.

В табл. 3 приведены результаты вычислений числа e с использованием цепной дроби Лагранжа.

Таблица 2

Определение значения цепной дроби Коутса

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	2,000000000000000	0,71828182845905
2	3,000000000000000	0,28171817154096
3	2,666666666666667	0,05161516179238
4	2,750000000000000	0,03171817154095
5	2,71428571428571	0,00399611417333
6	2,718750000000000	0,00046817154095
7	2,71794871794872	0,00033311051033
8	2,71830985915493	0,00002803069588
9	2,71827956989247	0,00000225856657
10	2,71828358208955	0,00000175363051
11	2,71828171828172	0,00000011017733
12	2,71828183520599	0,00000000674695
13	2,71828182294395	0,00000000551510
14	2,71828182873570	0,00000000027665
15	2,71828182844540	0,0000000001364
16	2,71828182847058	0,00000000001154
17	2,71828182845856	0,00000000000048
18	2,71828182845907	0,00000000000002
19	2,71828182845903	0,00000000000000
20	2,71828182845905	0,00000000000000

Таблица 3

Определение значения цепной дроби Лагранжа

$$e = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 - \frac{1}{2 + \frac{1}{5 - \frac{1}{2 + \frac{1}{7 - \frac{1}{2 + \frac{1}{9 - \dots}}}}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,000000000000000	1,71828182845905
2	2,000000000000000	0,71828182845905
3	3,000000000000000	0,28171817154096
4	2,750000000000000	0,03171817154095
5	2,71428571428571	0,00399611417333
6	2,71794871794872	0,00033311051033
7	2,71830985915493	0,00002803069588
8	2,71828358208955	0,00000175363050
9	2,71828171828172	0,00000011017733
10	2,71828182294395	0,00000000551510
11	2,71828182873570	0,00000000027665
12	2,71828182845058	0,0000000001154
13	2,71828182845856	0,00000000000048
14	2,71828182845903	0,00000000000002
15	2,71828182845905	0,00000000000000

Как видно из табл. 3, пятнадцатая подходящая дробь цепной дроби Лагранжа позволяет вычислить число e с точностью 14 десятичных знаков.

В табл. 4 приведены результаты вычислений числа e с использованием «сжатой» цепной дроби Эйлера.

Таблица 4

Определение значения цепной дроби

$$e = 1 + \frac{2}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{2(2n+1)} + \dots$$

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	1,71828182845905
2	3,00000000000000	0,28171817154095
3	2,71428571428571	0,00399611417334
4	2,71830985915493	0,00002803069588
5	2,71828171828172	0,00000011017733
6	2,71828182873570	0,00000000027665
7	2,71828182845856	0,00000000000049
8	2,71828182845905	0,00000000000000

Таблица 5

Определение значения цепной дроби

$$e = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{2}{4} - \frac{3}{5} - \frac{4}{6} - \dots - \frac{n-2}{n} - \dots$$

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	1,71828182845905
2	2,00000000000000	0,71828182845905
3	2,50000000000000	0,21828182845905
4	2,66666666666666	0,05161516179239
5	2,70833333333333	0,00994849512572
6	2,71666666666667	0,00161516179238
7	2,71805555555556	0,00022627290349
8	2,71825396825397	0,00002786020507
9	2,71827876984127	0,00000305861778

Восьмая подходящая дробь цепной дроби определяет число e с точностью 14 десятичных разрядов.

Интересно сравнить скорость сходимости цепных дробей (4), (10) и (11) со скоростью сходимости следующей цепной дроби:

$$e = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{2}{4} - \frac{3}{5} - \frac{4}{6} - \dots - \frac{n-2}{n} - \dots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (12)$$

Цепная дробь (12) – так называемая *равноценная* цепная дробь. Для степенного ряда, представляющего показательную функцию

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (13)$$

равноценной, то есть эквивалентной, будет цепная дробь

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2+x} - \frac{2x}{3+x} - \frac{3x}{4+x} - \frac{4x}{5+x} - \dots - \frac{(n-1)x}{n+x} - \dots \quad (14)$$

Подходящие дроби разложения (14) совпадают с частичными суммами степенного ряда (13). При $x = 1$ из цепной дроби (14) получим дробь (12).

В табл. 5 приведены результаты вычисления числа e с использованием равноценной ряду цепной дроби (12). Необходимо использование 18 звеньев равноценной дроби или 18 членов ряда, чтобы определить число e с точностью 14 десятичных разрядов.

Следовательно, ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

сходится несколько быстрее, чем правильная цепная дробь Коутса (4), но этот же ряд сходится несколько медленнее, чем "соответствующая" цепная дробь (11), и значительно медленней, чем "сжатая" (10).

В [23] приведены сравнительные характеристики скорости сходимости цепных дробей и степенных рядов для элементарных функций. Как правило, цепные дроби, аппроксимирующие элементарные функции, сходятся значительно быстрее соответ-

вующих степенных рядов. Кроме того, цепные дроби, учитывая возможность суммирования по Никипорцу, представляют элементарные функции на всей плоскости комплексного переменного.

5. Число Лудольфа, то есть к число π , имеет следующую правильную цепную дробь:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14 + \dots}}}}}}}}}}}} \quad (15)$$

Ф.Кымпан [117] пишет: "Весьма распространено мнение, что обозначение π очень древнего происхождения. Но это вовсе не так. Обозначение отношения окружности к диаметру буквой π , равно как и обозначение основания натурального логарифма буквой e , введено Эйлером." Здесь можно лишь уточнить, что согласно позднейшим исследователям [20], впервые обозначение π употребил Вильям Джонс (1675-1749), английский преподаватель математики в своем "Обзоре достижений математики" (Synopsis palmariorum matheseos, London, 1706), то есть за год до рождения Л. Эйлера.

Перрон в своей монографии [139] приводит правильную цепную дробь для π , содержащую сто звеньев. Правильная цепная дробь дается в стандартной компактной форме:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,99,1,2,2,6,3,5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,1,8,1,1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,1,22,1,2,2,1,4,1,2,24,1,2,1,3,1,2,1,1,10,2, \dots /}$$

Как видим, никакой закономерности в правильной цепной дроби для π нет.

Правильная цепная дробь (15), представляющая число π , сходится быстро, как можно видеть из табл.6. Тринадцатая подходящая дробь обеспечивает точность вычисления числа с 14-ю десятичными знаками.

Вообще, все правильные цепные дроби сходятся быстро, во всяком случае, быстрее, чем самая медленно сходящаяся правильная цепная дробь – цепная дробь Фибоначчи (табл. 7).

Таблица 6

Определение значения цепной дроби

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	3,000000000000000	0,14159265358979
2	3,14285714285714	0,00126448926734
3	3,14150943396226	0,00008321962753
4	3,14159292035398	0,00000026676418
5	3,14159265301190	0,0000000057789
6	3,14159265392142	0,00000000033162
7	3,14159265346744	0,00000000012235
8	3,14159265361894	0,00000000002914
9	3,14159265358108	0,00000000000871
10	3,14159265359140	0,00000000000160
11	3,14159265358939	0,00000000000040
12	3,14159265358982	0,00000000000002
13	3,14159265358979	0,00000000000000

Таблица 7

Определение значения цепной дроби

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,000000000000000	0,618033988749894
2	2,000000000000000	0,381966011250105
3	1,500000000000000	0,118033988749894
4	1,666666666666666	0,048632677916771
5	1,600000000000000	0,018033988749894
6	1,625000000000000	0,006966011250105
7	1,61538461538461	0,002649373365279
8	1,61904761904761	0,001013630297724
9	1,61764705882352	0,000386929926365
10	1,61818181818181	0,000147829431923
11	1,61797752808988	0,000056460600007
...	...	...
38	1,61803398874990	0,000000000000001
39	1,61803398874989	0,000000000000000

Можно привести несколько разложений, связанных с числом π :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{7^2}{2} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \dots$$

(Броункер, 1655 г.)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{1}}}} + \dots$$

(Эйлер, 1739 г.)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \dots + \frac{n^2}{2n+1}}}}} + \dots$$

(Ламберт, 1770 г.)

Цепная дробь Ламберта получается из цепной дроби (16), представляющей арктангенс:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \dots + \frac{n^2 x^2}{2n+1}}}}} + \dots \quad (16)$$

Цепная дробь (16) получена Ламбертом в 1770 г. Цепная дробь (16) – так называемая соответствующая цепная дробь. Эта дробь не равноценна степенному ряду для арктангенса, то есть ряду

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (17)$$

В отличие от медленно сходящегося степенного ряда (17), цепная дробь Ламберта имеет высокую скорость сходимости. В табл. 8 приведены результаты вычислений цепной дроби Ламберта.

Таблица 8

Определение значения цепной дроби Ламберта

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \dots + \frac{n^2}{2n+1}}}}} + \dots$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	0,21460183660255
2	0,75000000000000	0,03539816339744
3	0,79166666666666	0,00626850326921
4	0,78431372549019	0,00108443790725
5	0,78558558558558	0,00018742218813
6	0,78536585365853	0,00003230973891
7	0,78540372670807	0,00000556331062
8	0,78539720627303	0,00000095712441
9	0,78539832796998	0,00000016457253
10	0,78539813511163	0,00000002828581
11	0,78539816825758	0,00000000486013
12	0,78539816256256	0,00000000083488
13	0,78539816354084	0,00000000014339
14	0,78539816337282	0,00000000002462
15	0,78539816340167	0,00000000000422
16	0,78539816339672	0,00000000000072
17	0,78539816339757	0,00000000000012
18	0,78539816339742	0,00000000000002
19	0,78539816339745	0,00000000000000

Таким образом, 19-я подходящая дробь разложения Ламберта позволяет определить $\pi/4$ с точностью 14-ти десятичных знаков.

6. В первых параграфах работы [108] Эйлер приводит ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}, \quad (18)$$

бесконечное произведение Валлиса

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad (19)$$

и цепную дробь Броункера

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \dots}}}}} \quad (20)$$

Ряд Лейбница равен $\pi/4$, бесконечное произведение Валлиса, записанное в форме Эйлера (19), равно также $\pi/4$, а цепная дробь Броункера (20) равна $4/\pi$.

Обычно в математической литературе цепную дробь Броункера связывают с бесконечным произведением Валлиса. Легко установить, что цепная дробь Броункера не связана с бесконечным произведением Валлиса, а получается из цепной дроби

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1 + 3 - x^2} + \frac{x^2}{5 - 3x^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{(2n+1) - (2n-1)x^2} + \dots \quad (21)$$

при $x=1$.

Разложение (21) – это эквивалентная степенному ряду Грегори цепная дробь:

$$\operatorname{arctg} x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{x}{1 + 3 - x^2} + \frac{x^2}{5 - x^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{(2n+1) - (2n-1)x^2} + \dots$$

Сходимость цепной дроби Броункера столь же медленная, что и сходимость эквивалентного этой дроби ряда Лейбница (табл. 9).

Таблица 9

Определение значения цепной дроби

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \dots}}}}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
10	0,7939003542573	0,0086021908599
100	0,7863166101355	0,0003164467381
1000	0,7854907225214	0,0000925591840
10000	0,7854074264839	0,0000052630865

Таблица 10

Определение значения ряда

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Номер звена дроби	Значения частичных сумм	Погрешность аппроксимации
10	0,7939003542573	0,0086021908599
100	0,7863166101355	0,0003164467381
1000	0,7854907225214	0,0000925591840
10000	0,7854074264839	0,0000052630865

В табл. 10 приведены значения $\pi/4$, найденные из ряда Лейбница.

Аналогично преобразованию ряда в цепную дробь имеет место эквивалентное преобразование бесконечного произведения в цепную дробь, полученное английским математиком Глейшером в 1874 г. [117]:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + \alpha_n) = 1 + \alpha_0 + \frac{(1 + \alpha_0)\alpha_1}{1} - \frac{(1 + \alpha_1)\alpha_2}{\alpha_1 + (1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{(1 + \alpha_2)\alpha_3}{\alpha_2 + (1 + \alpha_2)\alpha_3} - \dots - \frac{(1 + \alpha_n)\alpha_{n+1}}{\alpha_n + (1 + \alpha_n)\alpha_{n+1}} - \dots \quad (22)$$

Запишем формулу Валлиса в виде

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right), \quad (23)$$

и используя тождество (22), получим после преобразований:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1} + \frac{2 \cdot 3}{1} + \frac{3 \cdot 4}{1} + \dots + \frac{(n-1) \cdot n}{1} + \dots \quad (24)$$

Разложение (24), как отмечает О. Перрон [139], имеется в работе Эйлера [121], опубликованной в 1739 г.

Цепная дробь (24) может быть записана также в эквивалентном виде:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n} + \dots}}}}$$

Так как цепная дробь Эйлера эквивалентна бесконечному произведению Валлиса, то можно записать:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \dots + 1/n + \dots}}}}$$

В табл. 11 и табл. 12 приведены результаты вычислений константы $\pi/2$ с использованием цепной дроби Эйлера (24) и бесконечного произведения Валлиса (23).

Таблица 11

Определение значения цепной дроби

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \dots + 1/n + \dots}}}}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	2,000000000000000	0,42920367320511
10	1,65119677500630	0,08040044821141
100	1,57866984460879	0,00787351781389
1000	1,57158192120960	0,00078559441471
10000	1,57087486857463	0,00007854177974
100000	1,57080418079617	0,00000785400128
1000000	1,57079711219326	0,00000078539837
10000000	1,57079640533471	0,00000007853982
100000000	1,57079633464888	0,00000000785399

Таблица 12

Определение значения произведения

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \dots$$

Число сомножителей	Значения частичных произведений	Погрешность аппроксимации
2	2,000000000000000	0,42920367320511
10	1,65119677500630	0,08040044821141
100	1,57866984460879	0,00787351781389
1000	1,57158192120960	0,00078559441471
10000	1,57087486857463	0,00007854177974
100000	1,57080418079617	0,00000785400128
1000000	1,57079711219326	0,00000078539837
10000000	1,57079640533471	0,00000007853982
100000000	1,57079633464888	0,00000000785399

Интересна другая цепная дробь

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots + \frac{(n-1)}{n} + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{1 + \dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}} \quad (26)$$

которая может быть получена из ряда

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

при помощи эквивалентного преобразования Эйлера.

В табл. 13 приведены результаты вычислений цепной дроби (26), представляющей константу $e-1$.

Таблица 13

Определение значений цепной дроби

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{1 + \dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,000000000000000	0,71828182845905
2	2,000000000000000	0,28171817154095
3	1,666666666666667	0,05161516179238
4	1,727272727272727	0,00899089881368
5	1,71698113207547	0,00130069638357
6	1,71844660194175	0,00016477348270
7	1,71826333176026	0,00001849669878
8	1,71828369389345	0,00000186543440
9	1,71828165766640	0,00000017079264
10	1,71828184277783	0,00000001431878
11	1,71828182735187	0,00000000110717
12	1,71828182853849	0,00000000007944
13	1,71828182845373	0,00000000000532
14	1,71828182845938	0,00000000000033
15	1,71828182845903	0,00000000000002

Таблица 14

Определение значения цепной дроби

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,000000000000000	0,34432045758120
2	0,500000000000000	0,15567954241880
3	0,750000000000000	0,09432045758120
4	0,600000000000000	0,05567954241880
5	0,69230769230769	0,03662814988889
6	0,63157894736842	0,02410059505038
7	0,67241379310345	0,01673425068465
8	0,64397905759162	0,01170048482718
9	0,66412213740458	0,00844259498578
10	0,64953664700927	0,00614289540953
11	0,66024204392649	0,00456250150769
12	0,65226325703522	0,00341628538358
13	0,65827505171468	0,00259550929588
...	...	...
290	0,65567954241879	0,00000000000001
291	0,65567954241880	0,00000000000000

Цепные дроби (25) и (26), содержащие коэффициенты гармонического ряда, указывают на глубокую связь между двумя фундаментальными константами π и e .

Запишем цепную дробь, частные числители которой есть числа натурального ряда:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} \quad (27)$$

Цепную дробь (27) можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{1 + \dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}} \quad (28)$$

В разложении (28) частными числителями и частными знаменателями являются числа гармонического ряда. Не случайно поэтому цепная дробь (28) имеет своим значением выражение, содержащее как число π , так и число e [77]:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,6556795424188... \quad (29)$$

Цепная дробь (29) входит в знаменитую формулу Рамануджана, приведенную в предисловии.

В табл. 14 даны результаты вычислений цепной дроби, имеющей частными числителями числа натурального ряда.

Еще более медленно сходящейся цепной дробью, нежели цепная дробь (29), будет цепная дробь, имеющая частными числителями квадраты натуральных чисел (табл. 15).

Таблица 15

Определение значения цепной дроби

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0,500000000000000	0,19314718055994
10	0,64563492063492	0,04751225992502
100	0,68817217931020	0,00497500124974
1000	0,69264743055982	0,00049975000012
10000	0,69309718305996	0,00004999749998
100000	0,69314218058498	0,00000499997496
1000000	0,69314668056025	0,00000049999969
10000000	0,69314713056010	0,00000004999984
100000000	0,69314717556042	0,00000000499952

Цепная дробь

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}} \quad (30)$$

равноценная цепная дробь, то есть она эквивалентна ряду

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots, \quad (31)$$

чем и объясняется чрезвычайно медленная сходимость цепной дроби (30).

Помимо эквивалентных или равноценных цепных дробей существуют так называемые соответствующие цепные дроби, которые сходятся, как правило, значительно быстрее, чем ряды. Ранее рассматривался пример соответствующей цепной дроби:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{9}{7} + \frac{16}{9} - \dots + \frac{n^2}{2n+1} - \dots$$

В табл. 16 приведены результаты вычислений ряда Меркатора.

Приведем еще одну быстро сходящуюся цепную дробь, которая может быть получена из соответствующей цепной дроби Лагранжа:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \dots + \frac{nx}{2} + \frac{nx}{2n+1} + \dots$$

При $x = 1$ имеем:

$$\ln 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{2n+1} + \dots \quad (32)$$

В табл. 17 приведены результаты вычисления цепной дроби (32).

Таблица 16

Определение значения ряда

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Число членов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность аппроксимации
2	0,50000000000000	0,19314718055994
10	0,64563492063492	0,04751225992502
100	0,68817217931020	0,00497500124974
1000	0,69264743055982	0,00049975000012
10000	0,69309718305996	0,00004999749998
100000	0,69314218058498	0,00000499997496
1000000	0,69314668056025	0,00000049999969
10000000	0,69314713056010	0,00000004999984
100000000	0,69314717556042	0,00000000499952

Таким образом, использование цепной дроби (32), содержащей 18 звеньев, обеспечивает точность вычисления $\ln 2$ с 13 десятичными разрядами.

Таблица 17

Определение значения цепной дроби

$$\ln 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

Число звеньев	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0,66666666666666	0,02648051389328
3	0,70000000000000	0,00685281944005
4	0,69230769230769	0,00083948825225
5	0,69333333333333	0,00018615277339
6	0,69312169312169	0,00002548743825
7	0,69315245478036	0,00000527422042
8	0,69314641744548	0,00000076311446
9	0,69314733235438	0,00000015179444
10	0,69314715785304	0,00000002270690
11	0,69314718496213	0,00000000440219
12	0,69314717988653	0,00000000067341
13	0,69314718068816	0,00000000012822
14	0,69314718054001	0,00000000001993
15	0,69314718056369	0,00000000000375
16	0,69314718055936	0,00000000000058
17	0,69314718056005	0,00000000000012
18	0,69314718055993	0,00000000000001

Для сравнения: применение для определения $\ln 2$ ряда (31), или равноценной цепной дроби (30), включающих 100 миллионов звеньев, позволяет вычислить $\ln 2$ с точностью всего 8 десятичных знаков.

ГЛАВА 1

НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

1. Обобщенные непрерывные дроби

Несколько отступим от традиции и определим непрерывную дробь отношением определителей вида:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & \cdots & . & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ . & \cdots & . & \cdots \end{vmatrix}}, \quad (1.1.1)$$

где элементы a_{ij} – независимые переменные величины.

Что же общего между отношением определителей (1.1.1) и конструкцией

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{\vdots}{\vdots + \frac{a_n}{b_n + \frac{\vdots}{\vdots}}}}} \quad (1.1.2)$$

которая в математической литературе собственно и определяется как непрерывная или цепная дробь? Связь между выражениями (1.1.1) и (1.1.2), тем не менее, существует. Если определять выражение (1.1.1) как непрерывную дробь, то выражение (1.1.2) следовало бы называть обыкновенной непрерывной дробью. Будем, однако, называть выражение (1.1.1) *обобщенной непрерывной дробью* [78], оставляя за выражением (1.1.2) традиционное название – *цепная дробь*.

Подходящие дроби разложения (1.1.2) записываются так:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}, \dots$$

Подходящие дроби обобщенной непрерывной дроби (1.1.1) введем следующим образом:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_{11}}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \dots$$

Легко заметить, что обобщенная непрерывная дробь (1.1.1) записывается отношением определителя квадратной матрицы общего вида к определителю главного минора

M_{11} этой же матрицы, то есть определитель, стоящий в знаменателе, получается из определителя, записанного в числителе, вычеркиванием элементов первой строки и первого столбца.

Представление обобщённой непрерывной дроби отношением определителей квадратных матриц общего вида имеет то основание, что все известные классы непрерывных дробей есть частные случаи этой непрерывной дроби. Например, обыкновенные непрерывные дроби, или цепные дроби, могут быть записаны отношением трёхдиагональных определителей:

$$a_{11} + \frac{a_{12}}{a_{22} + \frac{a_{23}}{a_{33} + \frac{a_{34}}{a_{44} + \frac{a_{45}}{a_{55} + \dots}}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (1.1.3)$$

Ветвящиеся непрерывные дроби с числом ветвления $N=2$, представляются отношением определителей характерной ступенчатой структуры:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \dots} + \frac{a_4}{b_4 + \dots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \dots} + \frac{a_6}{b_6 + \dots}} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}.$$

Непрерывные дроби с расположением звеньев “вниз” и “вверх”

$$\omega = b_0 + \frac{a_1 + \frac{a_2}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4 + \frac{a_5}{b_5 + \frac{a_6 + \dots}}{b_6}}}}{b_2}}{b_4}}{b_6}}{b_8}}{b_{10}} \dots$$

также могут быть определены отношением определителей [78].

Старший по модулю корень алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \quad (1.1.4)$$

представляется непрерывной дробью Хессенберга, которую можно записать отношением определителей матриц Хессенберга:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (1.1.5)$$

Важно подчеркнуть, что непрерывной дробью (1.1.5) представляется как действительный, так и комплексный корень уравнения (1.1.4). В случае, если корень комплексный, значение его по подходящим дробям непрерывной дроби Хессенберга может быть установлено при помощи r/φ -алгоритма [75].

Цепные дроби рассматриваются как важный, но далеко не единственный класс непрерывных дробей, бесчисленное разнообразие структур которых нашло в определителях практически идеальное средство для их записи, а также для выполнения операций над ними. Возможность изучения непрерывных дробей различных классов с единых позиций представляется существенным завоеванием теории.

Классифицировать непрерывные дроби наиболее естественным образом можно с использованием графов, которые определяют их структуру. В [77] было предложено обыкновенные цепные дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (1.1.6)$$

описывать линейным ориентированным взвешенным графом [54]:



Рис. 1.1. Граф цепной дроби (1.1.6).

Ветвящиеся непрерывные дроби [77]:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \dots} + \frac{a_4}{b_4 + \dots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \dots} + \frac{a_6}{b_6 + \dots}} \quad (1.1.7)$$

можно задавать графом типа дерева:

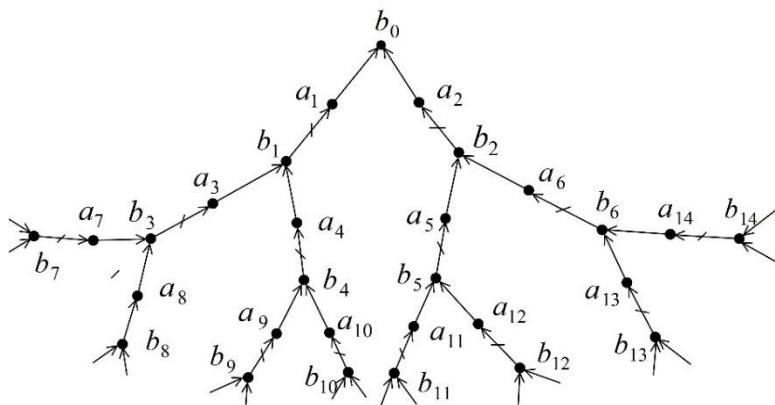


Рис. 1.2. Граф ветвящейся непрерывной дроби (1.1.7).

Для непрерывной дроби Хессенберга с четырьмя диагоналями

$$\varpi = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right| \end{array} \quad (1.1.8)$$

граф имеет вид [54]:

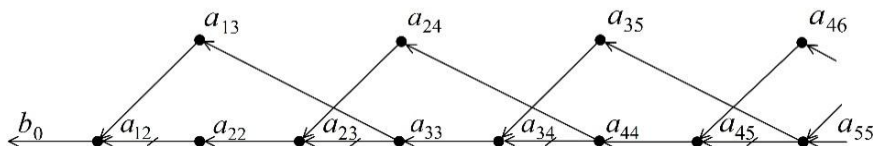


Рис. 1.3. Граф непрерывной дроби Хессенберга (1.1.8).

2. Цепные дроби

Считается, что цепные дроби впервые появились на страницах «Алгебры» Бомбелли, вышедшей в 1572 г. [73] Естественная запись цепных дробей (1.1.2) имеет единственный недостаток — занимает значительную площадь страницы. Поэтому предлагалось множество «экономичных» форм представления цепных дробей [117]. В настоящее время наибольшее распространение получили две формы компактной записи цепных дробей:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}, \quad (1.2.1)$$

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|} + \dots \quad (1.2.2)$$

Запись (1.2.1) была предложена в 1820 г. известным английским астрономом и математиком Джоном Гершелем, а запись (1.2.2) появилась в работе немецкого математика Альфреда Прингсхайма в 1898 г. В книге мы используем запись Гершеля (1.2.1).

Иногда используются такие компактные записи цепных дробей:

$$\begin{aligned} & b_0 + a_1 / (b_1 + a_2 / (b_2 + a_3 / (b_3 + a_4 / (b_4 + a_5 / (b_5 + \dots))))), \\ & b_0 + a_1 / b_1 + a_2 / b_2 + a_3 / b_3 + a_4 / b_4 + \dots + a_n / b_n + \dots, \\ & [b_0; a_1 / b_1, a_2 / b_2, a_3 / b_3, a_4 / b_4, a_5 / b_5, \dots]. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для компактной записи цепных дробей используются также обозначения:

$$b_0 + K \frac{a_n}{1} = b_0 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots + \frac{a_n}{1} + \dots, \quad (1.2.4)$$

$$b_0 + K \frac{1}{b_n} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} + \dots, \quad (1.2.5)$$

$$b_0 + K \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (1.2.6)$$

Обозначения (1.2.4) – (1.2.6) аналогичны каноническим обозначениям $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ для рядов

и $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ для бесконечных произведений. Выбор символа K определился немецким словом Kettenbruch (цепная дробь).

Если в (1.2.5) частные знаменатели натуральные числа, то такие цепные дроби, именуемые как правильные, записываются скобками Гаусса:

$$(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots).$$

Конечную цепную дробь

$$\frac{P_{k,k+n}}{Q_{k,k+n}} = b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2} + \dots + b_{k+n}}}$$

называют *отрезком* цепной дроби (1.2.1).

Используется также бесконечная цепная дробь

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \frac{a_{n+3}}{b_{n+3} + \dots}}}.$$

Эту цепную дробь называют *остатком* цепной дроби (1.2.1) и обозначают r_n .

Таким образом, запишем:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + b_k + r_k}}.$$

Выражение (1.2.1) называется *цепной (Kettenbruch) или непрерывной дробью (continued fraction)*. Обычно a_i, b_i – это действительные или комплексные числа, а также функции, как правило, полиномы первой или второй степени. Но компонентами цепной дроби (1.2.1) могут быть и иные объекты, такие как матрицы, элементы абстрактных пространств, в которых введены операции сложения и деления, и т.д. [104].

Давно уже изучаются операторные дроби, интегральные непрерывные дроби [64] и другие подобные агрегаты.

Элементы a_i называют *частными числителями* (*partial numerator*), b_i — *частными знаменателями* (*partial denominator*), b_0 — *свободным членом*. Иногда a_i и b_i называют *элементами* (*elements*). Дроби a_i/b_i именуют *звеньями* или *частными отношениями* (*partial quotient*) цепной дроби. Конечную цепную дробь (1.2.1) называют *n-й подходящей дробью* или *аппроксимантой* (*approximant*) цепной дроби. Числитель P_n и знаменатель Q_n подходящей дроби P_n/Q_n называют *n-м — числителем* (*nth numerator*) и *n-м — знаменателем* (*nth denominator*). P_n и Q_n , записанные в виде трехдиагональных определителей, принято называть *континуантами* (*continuants*).

Помимо символов P_n/Q_n используют и другие обозначения подходящих дробей. Например, в монографиях [28, 139] подходящие дроби записываются как A_n/B_n . Для обозначения подходящих дробей используется также символ $T_n(0)$, когда речь идет о дробно-линейных преобразованиях. Кроме того, аналогично символу s_n для частичных сумм ряда используется символ f_n , обозначающий *n-ю* подходящую дробь [28]:

$$f_n = P_n / Q_n .$$

Мы будем применять для обозначения подходящих дробей символ ω_n :

$$\omega_n = P_n / Q_n ,$$

так как символ f традиционно используется для обозначения функций. Символом ω иногда будем обозначать цепную дробь:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}} .$$

Из определения *n-й* подходящей дроби в виде отношения трехдиагональных определителей используются *рекуррентные формулы*:

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} , \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} , \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

которые при начальных условиях

$$P_{-1} = 1, \quad P_0 = b_0, \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

справедливы при $n \geq 1$.

Таким образом, числители и знаменатели подходящих дробей цепной дроби (1.2.6) можно последовательно определять, используя простые рекуррентные соотношения второго порядка (1.2.7). Обычно справедливость рекуррентных формул (1.2.7) устанавливают методом математической индукции. В самом деле, для $n = 2$ определяем непосредственно:

$$\frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 b_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0} .$$

Можно записать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}} .$$

Используя соотношение (1.2.7), установим:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} &= \frac{\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{\left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}} = \\ &= \frac{P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}}{Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}} = \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, рекуррентные соотношения (1.2.7) справедливы для всех целых $n \geq 2$.

Соотношения (1.2.7) впервые установлены Валлисом и подробнее были рассмотрены Эйлером. Эйлером введен термин “непрерывная дробь” (fractio continua)[120].

Аналогично ситуации с рядами, само по себе выражение

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

никакого определенного смысла не имеет, ибо, как известно, действие сложения в своем непосредственном содержании имеет дело лишь с конечным числом слагаемых. Смысл конструкций, имеющих бесконечное число арифметических действий, всякий раз надо определять. Если ряд удобно определять через частичные суммы, то цепную дробь столь же естественно толковать через понятие подходящей дроби.

Определив цепную дробь как выражение (1.2.6) и введя понятие подходящей дроби, остается сделать заключительный и, казалось бы, совершенно очевидный шаг, – определить значение цепной дроби как предел, к которому стремится последовательность подходящих дробей. Именно так авторы в теории цепных дробей и поступают, утверждая:

“Цепная дробь называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega.$$

Этот предел является значением цепной дроби” [28].

В [76] введено иное, отличное от традиционного, определение сходимости цепных дробей, которое позволяет суммировать расходящиеся в классическом смысле цепные дроби, то есть находить их значения. Метод суммирования расходящихся цепных дробей [77-102] (r/φ – алгоритм) нашел разнообразные применения в вычислительной математике, некоторые из них будут рассмотрены далее.

1.3. Цепные дроби и дробно-линейные преобразования

Х. Уолл в монографии “Analytic the or yof continued fractions” [149] определял цепные дроби, как произведение дробно-линейных преобразований. Х.Уолл рассматривает дробно-линейную функцию общего вида

$$t_n(z) = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}, \quad \gamma_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.1)$$

и произведения дробно-линейных преобразований:

$$t_0 t_1(z) = t_0(t_1(z)), \quad t_0 t_1 t_2(z) = t_0 t_1(t_2(z)), \quad t_0 t_1 t_2 t_3(z) = t_0 t_1 t_2(t_3(z)), \dots$$

К цепной дроби канонического вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}$$

придем, если рассмотрим частный случай дробно-линейных преобразований (1.3.1).

Запишем цепную дробь

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + z}}}, \quad a_n \neq 0 \quad (1.3.2)$$

и введем обозначения

$$t_0(z) = b_0 + z, \quad t_n(z) = \frac{a_n}{b_n + z}, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + t_n(z)}}},$$

$$T_n(z) = T_{n-1}(t_n(z)). \quad (1.3.3)$$

Из (1.3.2) видим, что

$$\frac{P_n}{Q_n} = T_n(0) = T_{n+1}(\infty).$$

Последовательно применяя преобразование (1.3.3), получим:

$$T_n(z) = T_{n-2}(t_{n-1}(t_n(z))) = T_{n-3}(t_{n-2}(t_{n-1}(t_n(z)))) = t_0(t_1(\dots(t_{n-1}(t_n(z))))). \quad (1.3.4)$$

Таким образом, n -ю подходящую дробь можно рассматривать как результат последовательного применения дробно-линейных преобразований в точке $z = 0$:

$$T_n(0) = t_0 t_1 \dots t_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_n}{Q_n}}}. \quad (1.3.5)$$

Бесконечная цепная дробь может быть записана следующим образом:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(\infty) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}. \quad (1.3.6)$$

Х. Уолл, как и другие авторы [128, 150], определяет значение бесконечной цепной дроби

$$\omega = b_0 + K \frac{a_n}{b_n},$$

как значение предела дробно-линейных преобразований

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(\infty).$$

Цепная дробь (1.3.6) сходится или является сходящейся, если предел последовательности подходящих дробей (1.3.6) существует и конечен. Значение цепной дроби определяется значением предела последовательности аппроксимант.

Как отмечает Уолл, проблема сходимости непрерывных дробей значительно сложнее и интереснее, чем соответствующая проблема для рядов.

1.4. Правильные цепные дроби и некоторые их применения

Правильными цепными дробями называют цепные дроби, у которых все частные числители равны единице, а все частные знаменатели, кроме b_0 , являются натуральными числами:

$$\omega = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}} \quad (1.4.1)$$

Из равенства

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

следует, что все подходящие дроби правильной цепной дроби *несократимы*.

Алгоритм Евклида дает возможность находить наибольший общий делитель (НОД) чисел u и v . Пусть даны два натуральных числа u и v , причем $u > v$. Разделив u на v , имеем

$$\frac{u}{v} = q_0 + \frac{u_1}{v}.$$

Разделив v на u_1 , имеем аналогично

$$\frac{v}{u_1} = q_1 + \frac{u_2}{v_1}.$$

Продолжая, получим

$$\frac{u_1}{u_2} = q_2 + \frac{u_3}{u_2}$$

и т.д. Такой процесс последовательных делений называется *алгоритмом Евклида*. Так как $u, u_1, u_2, \dots$ — монотонно убывающая последовательность натуральных чисел, то

такой процесс конечен, т.е. существует такой индекс n , что $\frac{u_{n-1}}{u_n} = q_n$ (следовательно,

$u_n \neq 0, u_{n+1} = 0$). Отсюда u_n является *наибольшим общим делителем* чисел u и v . Часто его обозначают через (u, v) .

Пример. Найти наибольший общий делитель чисел 5291 и 4514. Раскладывая по алгоритму Евклида отношение 5291/4514 в цепную дробь, получим

$$\frac{5291}{4514} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{148/37}}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}.$$

Следовательно, НОД (5291, 4514) = 37.

Пример. Найти НОД (353, 136).

$$\frac{353}{136} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3/2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Следовательно, числа 353 и 136 взаимно простые.

Алгоритм Евклида используется для решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени. Уравнение $ax + by = c$, где a, b и c известны, а x и y неизвестны, называют *неопределенным уравнением первой степени*.

Будем считать, что a, b взаимно простые. Тогда общее решение в целых числах рассматриваемого уравнения имеет вид [50]:

$$\begin{aligned}x &= (-1)^{n-1} c Q_{n-1} + t Q_n, \\ y &= (-1)^n c P_{n-1} - t P_n,\end{aligned}$$

где t – произвольное целое число, P_{n-1} и Q_{n-1} – числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби в разложении $a/b = P_n/Q_n$ в правильную цепную дробь.

Одной из важнейших задач диофантова анализа является решение в целых числах уравнения Пелля

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

где a – положительное целое число, не являющееся квадратом. Эта задача была решена Л. Лагранжем при помощи цепных дробей [32].

Подходящие дроби правильной цепной дроби являются *наилучшими приближениями*. Пусть любое действительное число A разложено в правильную цепную дробь. Обозначим через P_n/Q_n подходящую дробь n -го порядка этой цепной дроби. Тогда имеет место неравенство

$$\left| A - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \quad (1.4.2)$$

Эти подходящие дроби являются наилучшими приближениями к числу A в том смысле, что никакая рациональная дробь со знаменателем, не превышающим Q_n , не может отличаться от A меньше, чем дробь P_n/Q_n .

Всякое действительное иррациональное число можно однозначно представить в виде бесконечной правильной дроби. Всякая бесконечная правильная цепная дробь по теореме Зейделя сходится и является разложением одного и только одного иррационального действительного числа.

Несколько слов о периодических правильных цепных дробях. Правильная цепная дробь $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$ называется *чисто периодической*, если последовательность ее

частных знаменателей $q_0, q_1, q_2, \dots$ представляет собой повторение одного и того же периода из n чисел $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$. Если же такое повторение начинается не с q_0 , а с некоторого $q_k (k \geq 1)$, то правильная цепная дробь называется *смешанной периодической*. Аналогично вводится понятие периодических цепных дробей и для цепных дробей общего вида.

В теории чисел важную роль играет теорема Лагранжа, утверждающая, что всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую *правильную* цепную дробь.

1.5. Некоторые формулы теории цепных дробей

Получим так называемую детерминантную формулу. Запишем разность между двумя соседними подходящими дробями:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.1)$$

Заменяя P_n и Q_n с помощью рекуррентных формул

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= \frac{1}{Q_{n-1}Q_n} [(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2})Q_{n-1} - (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2})P_{n-1}] = \\ &= -a_n \frac{P_{n-1}Q_{n-2} - Q_{n-1}P_{n-2}}{Q_{n-1}Q_n}. \end{aligned}$$

Применяя то же преобразование к соотношению $P_{n-1}Q_{n-2} - Q_{n-1}P_{n-2}$, получим

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^2 a_n a_{n-1} \frac{P_{n-2}Q_{n-3} - Q_{n-2}P_{n-3}}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Повторяя подобные преобразования, получим *формулу разности между соседними подходящими дробями*:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1}Q_n}, \quad (1.5.3)$$

то есть

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n. \quad (1.5.4)$$

Формула (1.5.4) называется *детерминантной формулой* (determinant formula).

Определим разность между двумя подходящими дробями, причём, разность индексов подходящих равна двум.

Можно записать

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}. \quad (1.5.5)$$

Сложив (1.5.3) и (1.5.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n} \left(\frac{a_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{1}{Q_{n-1}} \right) = \\ &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1}Q_n Q_{n+1}} (a_{n+1}Q_{n-1} - Q_{n+1}) = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1}}{Q_{n-1}Q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем формулу разности между подходящими дробями, индексы которых отличаются на 2:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1}}{Q_{n-1}Q_{n+1}}. \quad (1.5.6)$$

Заменив в (1.5.6) n на $2k$, запишем:

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} = - \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}. \quad (1.5.7)$$

Используя формулу (1.5.7), можно получить

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{Q_1 Q_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 b_5}{Q_3 Q_5} - \dots - \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{Q_{2k-1} Q_{2k+1}}. \quad (1.5.8)$$

Аналогично запишем

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{Q_{2k-2} Q_{2k}}, \quad (1.5.9)$$

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{Q_0 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 b_4}{Q_2 Q_4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{Q_{2k-2} Q_{2k}}. \quad (1.5.10)$$

Если все элементы цепной дроби положительны, то есть $a_i > 0$, $b_i > 0$, то для подходящих дробей разложения

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \quad (1.5.11)$$

имеет место, так называемое, *свойство «вилки»*.

Из формулы (1.5.10) видно, что подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность. Очевидно, что все подходящие дроби разложения (1.5.11) четного порядка меньше величины $b_0 + a_1/b_1$. Следовательно, подходящие дроби четного порядка образуют при положительных членах звеньев монотонно возрастающую, ограниченную сверху числом $b_0 + a_1/b_1$, последовательность. Такая последовательность имеет предел, то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}/Q_{2k}$ существует.

Из формулы (1.5.8) следует, что при положительных членах звеньев подходящие дроби нечетного порядка образуют монотонно убывающую последовательность. При этом ясно, что все подходящие дроби нечетного порядка больше b_0 . Таким образом, подходящие дроби нечетного порядка образуют при положительных членах звеньев монотонно убывающую, ограниченную снизу числом b_0 последовательность. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k-1}/Q_{2k-1}$ существует. Отсюда еще не следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}/Q_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k-1}/Q_{2k-1}$.

В общем случае для знакоположительных цепных дробей имеет место расположение подходящих дробей (рис. 1.4).

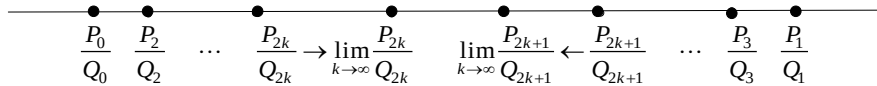


Рис. 1.4. Расположение подходящих дробей знакоположительной цепной дроби.

А.Н.Хованский [72] так определяет *сходимость* цепных дробей: “Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} \neq \infty,$$

то есть, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

существует и конечен, то цепная дробь называется *сходящейся* “.

В этом случае при положительных членах звеньев ее значение $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n$ больше любой ее подходящей дроби четного порядка и меньше любой ее подходящей дроби нечетного порядка, то есть имеет место свойство «вилки».

Из соотношения

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \quad (1.5.12)$$

следует, что

$$\left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.13)$$

Для знакоположительных цепных дробей существует практически удобная оценка погрешности аппроксимации:

$$\Delta_n = \left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right|. \quad (1.5.14)$$

Значение ω для знакоположительной цепной дроби P_{n-1}/Q_{n-1} и P_n/Q_n , однако, все же несколько ближе к значению P_n/Q_n .

Ситуация аналогична с оценкой погрешности аппроксимации сходящимися знакопеременными рядами. Собственно, для знакоположительных цепных дробей эквивалентный цепной дроби ряд является знакопеременным.

Можно записать тождество

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} \right) + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} \right) + \dots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right). \quad (1.5.15)$$

Сложив в тождестве (1.5.15) разности, определяемые формулой (1.5.12), получим

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.16)$$

То есть для цепной дроби можно записать ряд

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} + \dots \quad (1.5.17)$$

Ряд и цепную дробь, удовлетворяющие равенству (1.5.17), называют *равноценными*.

Пример. Найти равноценный ряд для цепной дроби

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{4 + \frac{2^2}{5 + \dots + \frac{n^2}{2n + \frac{n^2}{2n+1 + \dots}}}}}} \quad (1.5.18)$$

По формулам (1.5.17) имеем:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{4 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{6 + \frac{3^2}{7 + \dots}}}}} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} - \frac{1}{130} + \frac{1}{975} - \frac{1}{4725} + \frac{1}{32508} - \dots \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

Частичные суммы ряда (1.5.19) и n -е подходящие дроби разложения (1.5.18) равны:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1} = 1, & s_1 &= 1, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2}} = \frac{2}{3}, & s_2 &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{3}}} = \frac{7}{10}, & s_3 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{7}{10}, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

1.6. Эквивалентные преобразования цепных дробей

Цепные дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}, \quad (1.6.1)$$

$$b_0^1 + \frac{a_1^1}{b_1^1 + \frac{a_2^1}{b_2^1 + \dots + \frac{a_n^1}{b_n^1} + \dots}} \quad (1.6.2)$$

называются *эквивалентными*, если

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n^1}{Q_n^1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6.3)$$

где $\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_n^1}{Q_n^1}$ —подходящие дроби цепных дробей (1.6.1) и (1.6.2) соответственно. Переход от цепной дроби (1.6.1) к цепной дроби (1.6.2) называется *эквивалентным преобразованием* дроби (1.6.1). Эквивалентные преобразования всегда можно записать в виде

$$b_0 + \frac{\rho_1 a_1}{\rho_1 b_1 + \frac{\rho_1 \rho_2 a_2}{\rho_2 b_2 + \dots + \frac{\rho_{n-1} \rho_n a_n}{\rho_n b_n} + \dots}}, \quad (1.6.4)$$

где ρ_k — некоторые отличные от нуля комплексные числа.

Основное тождество (1.6.4) широко применяется при преобразованиях цепных дробей.

Если $b_k \neq 0$, то используя (1.6.4), где $\rho_k = \frac{1}{b_k}$, дробь (1.6.1) преобразуется к эквивалентной дроби с частными знаменателями, равными единице:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} = b_0 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{1 + \dots + \frac{c_n}{1} + \dots}} \quad (1.6.5)$$

$$\text{где} \quad c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad c_n = \frac{a_n}{b_{n-1} b_n}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.6.6)$$

Цепную дробь (1.6.1) можно преобразовать к эквивалентной дроби с частными числителями, равными единице:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} = b_0 + \frac{1}{d_1 + \frac{1}{d_2 + \dots + \frac{1}{d_n} + \dots}}, \quad (1.6.7)$$

где

$$d_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad d_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{a_1 a_3 \dots a_{2k+1}},$$

$$d_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

1.7. Равноценные цепные дроби

Цепную дробь и ряд называют *равноценными*, если n -я подходящая дробь цепной дроби совпадает с n -й частичной суммой ряда, и наоборот, n -я частичная сумма ряда имеет то же значение, что и n -я подходящая дробь цепной дроби.

Равноценные цепные дроби находятся по коэффициентам исходного степенного ряда с использованием тождественного преобразования:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = c_0 + \frac{c_1x}{1 - c_1 + c_2x - c_2 + c_3x - \dots - c_{n-1} + c_nx - \dots} \quad (1.7.1)$$

Помимо формулы (1.7.1), можно записать еще одно тождество:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \frac{c_0}{1 - c_0 + c_1x - c_1 + c_2x - c_2 + c_3x - \dots - c_{n-1} + c_nx - \dots} \quad (1.7.2)$$

Тождества (1.7.1) и (1.7.2) принадлежат Эйлеру [121].

Частичные суммы ряда и значения подходящих дробей разложений (1.7.1) и (1.7.2) совпадают. В самом деле, для цепной дроби (1.7.1):

$$\begin{aligned} c_0 + \frac{c_1x}{1} &= c_0 + c_1x, \\ c_0 + \frac{c_1x}{1 - c_1 + c_2x} &= c_0 + c_1x + c_2x^2, \\ c_0 + \frac{c_1x}{1 - c_1 + c_2x - c_2 + c_3x} &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для цепной дроби (1.7.2):

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{1 - c_0 + c_1x} &= c_0 + c_1x, \\ \frac{c_0}{1 - c_0 + c_1x - c_1 + c_2x} &= c_0 + c_1x + c_2x^2, \\ \frac{c_0}{1 - c_0 + c_1x - c_1 + c_2x - c_2 + c_3x} &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Заметим, что к тождествам Эйлера (1.7.1) и (1.7.2) можно прийти, производя эквивалентные преобразования определителей.

Используя тождества Эйлера (1.7.1) и (1.7.2), можно записать равноценные цепные дроби для элементарных функций.

Например, для логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \frac{x}{1 + \frac{1^2x}{2 - x} + \frac{2^2x}{3 - 2x} + \frac{3^2x}{4 - 3x} + \dots + \frac{n^2x}{n+1 - nx} + \dots} \quad (1.7.3)$$

При $x = 1$ получим равноценную цепную дробь:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + 1} + \frac{2^2}{1 + 1} + \frac{3^2}{1 + 1} + \dots + \frac{n^2}{1 + 1} + \dots} \quad (1.7.4)$$

Цепная дробь (1.7.4) сходится так же медленно, как и ряд для $\ln 2$. Частичные суммы ряда и подходящие дроби разложения совпадают:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, & \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1} = 1, \\
s_2 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\
s_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, & \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Для ряда Лейбница запишем равноценную дробь – цепную дробь Броункера:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots + \frac{(2n+1)^2}{2} + \dots}}}} \quad (1.7.5)$$

Тождества Бернулли позволяют по заданной последовательности

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_n, \dots,$$

совпадающей со значениями подходящих дробей некоторой цепной дроби, найти эту цепную дробь. Эта цепная дробь может быть записана [72]:

$$k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1 + \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2} + \dots}, \quad (1.7.6)$$

или в ином виде

$$\frac{k_0}{1 + \frac{k_0 - k_1}{k_1} + \frac{k_0(k_1 - k_2)}{k_2 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2} + \dots}. \quad (1.7.7)$$

Например, для цепной дроби (1.7.6) можно записать:

$$\begin{aligned}
&k_0, \\
&k_1 = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1}, \\
&k_2 = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_0}, \\
&\dots \\
&k_n = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2}}.
\end{aligned}$$

Имеет место также тождество [49]:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = k_1 + \frac{k_2 - k_1^2}{k_1} + \frac{k_1 k_3 - k_2^2}{k_1 k_2 - k_3} + \frac{(k_2 k_4 - k_3^2)(k_1^2 - k_2)}{k_2 k_3 - k_1 k_4} + \dots + \frac{(k_{n-1} k_{n+1} - k_n^2)(k_{n-2}^2 - k_{n-3} k_{n-1})}{k_{n-1} k_n - k_{n-2} k_{n+1}} \quad (1.7.8)$$

Рассмотрим задачу Бернулли в более общей постановке: построить цепную дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}, \quad (1.7.9)$$

если заданы две последовательности чисел

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \text{ и } Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n,$$

Здесь P_n и Q_n , соответственно, значения числителей и знаменателей подходящих дробей цепной дроби (1.7.9). Используя известные рекуррентные соотношения

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2},$$

получим формулы, определяющие частные числители a_n и частные знаменатели b_n через заданные значения P_n и Q_n подходящих дробей разложения (1.7.9):

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}}{P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.7.10)$$

$$b_n = \frac{\begin{vmatrix} P_n & P_{n-2} \\ Q_n & Q_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n}{P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.7.11)$$

Если построить цепную дробь, значения подходящих которой будут совпадать со значениями частичных сумм ряда:

$$k_0 = c_0,$$

$$k_1 = c_0 + c_1,$$

$$k_2 = c_0 + c_1 + c_2,$$

$$k_3 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \quad (1.7.12)$$

.....

то подставляя значения k_m , определяемые соотношениями (1.7.12), в тождества Бернулли (1.7.6) и (1.7.7), получим цепные дроби Эйлера (1.7.1) и (1.7.2).

Равноценные цепные дроби можно построить не только для рядов, но и для бесконечных произведений.

В 1833 г. Штерн опубликовал тождества [117]:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{P_3}{Q_3} \cdot \dots \cdot \frac{P_n}{Q_n} \cdot \dots = \frac{1}{1 - \frac{P_1 - Q_1}{P_1}} - \frac{(P_2 - Q_2)P_1Q_1}{P_1P_2 - Q_1Q_2} - \frac{(P_3 - Q_3)(P_2 - Q_2)P_2Q_2}{P_2P_3 - Q_2Q_3} - \dots - \frac{(P_{n-1} - Q_{n-1})(P_{n-1} - Q_{n-1})P_nQ_n}{P_nP_{n+1} - Q_nQ_{n+1}} - \dots \quad (1.7.13)$$

При $Q_n = 1$ имеем:

$$\prod_{i=1}^{\infty} P_i = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n \cdot \dots = P_0 + \frac{P_1(P_1 - 1)}{1} - \frac{P_1(P_2 - 1)}{P_1P_2 - 1} - \frac{P_2(P_3 - 1)(P_1 - 1)}{P_2P_3 - 1} - \dots - \frac{P_{n-1}(P_n - 1)(P_{n-2} - 1)}{P_{n-1}P_n - 1} - \dots \quad (1.7.14)$$

В 1874 г. Глейшер предложил преобразование бесконечного произведения в цепную дробь [117]:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) = 1 + \alpha_0 + \frac{(1 + \alpha_0)\alpha_1}{1} - \frac{(1 + \alpha_1)\alpha_2}{\alpha_1 + (1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{(1 + \alpha_2)\alpha_3}{\alpha_2 + (1 + \alpha_2)\alpha_3} - \dots - \frac{(1 + \alpha_n)\alpha_{n+1}}{\alpha_n + (1 + \alpha_n)\alpha_{n+1}} - \dots \quad (1.7.15)$$

Применяя тождество Глейшера к бесконечному произведению Валлиса, получим цепную дробь:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdot \dots = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1} + \frac{2 \cdot 3}{1} + \frac{3 \cdot 4}{1} + \dots + \frac{n(n+1)}{1} + \dots = 1 + \frac{1}{1+1/2} + \frac{1}{1+1/2+1/3} + \frac{1}{1+1/2+1/3+1/4} + \dots + \frac{1}{1+1/2+\dots+1/n+\dots} \quad (1.7.16)$$

В монографии Перрона [139] отмечается, что цепная дробь (1.7.16) впервые встречается в работе Эйлера, опубликованной в 1739 г.

1.8. Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей

Если цепная дробь ω_1 имеет своими подходящими дробями некоторую подпоследовательность подходящих дробей цепной дроби ω_2 , то говорят, что цепная дробь ω_1 является *сжатой* относительно дроби ω_2 . Если же цепная дробь ω_1 имеет множество подходящих дробей, которое включает в себя, в частности, все подходящие дроби разложения ω_2 , то цепная дробь ω_1 в этом случае называется *растянутой* дробью относительно дроби ω_2 .

Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей относятся к основным преобразованиям и часто используются при исследовании сходимости цепных дробей, для построения параллельных алгоритмов, для улучшения аппроксимационных свойств аппарата цепных дробей, при получении цепных дробей заданной структуры.

Формулы для преобразования сжатия и растяжения цепных дробей получим, исходя из матричной записи цепных дробей. Запишем обыкновенную цепную дробь

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 + \dots + b_{2k-1}} + \frac{a_{2k-1}}{b_{2k-1}} + \frac{a_{2k}}{b_{2k}} + \frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1} + \dots} \quad (1.8.1)$$

Сжатая цепная дробь имеет вид:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{\frac{a_1 a_2}{b_1^2}}{b_2 + \frac{a_2}{b_1} + \frac{a_3}{b_3} - b_4 + \frac{a_4}{b_3} + \frac{a_5}{b_5} - \dots - b_{2k} + \frac{a_{2k}}{b_{2k-1}} + \frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}} - \dots} \quad (1.8.2)$$

Подходящие дроби сжатой цепной дроби (1.8.2) могут быть определены по четным или нечетным диагональным элементам. Подходящие дроби (1.8.2) совпадают со значениями четных подходящих дробей разложения (1.8.1).

Сжатые цепные дроби, подходящие которых равны четным или нечетным подходящим дробям разложения (1.8.1), соответственно, имеют вид

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{(b_2 b_3 + a_3) b_1 + a_2 b_3 - (b_4 b_5 + a_5) b_3 + a_4 b_5 - \dots - \frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n+1}}{(b_{2n} b_{2n+1} + a_{2n+1}) b_{2n-1} + a_{2n} b_{2n+1}} - \dots} \quad (1.8.3)$$

$$\omega = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + a_4 b_2 - (b_4 b_5 + a_5) b_6 + a_6 b_4 - \dots} \dots - \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{b_{2n} (b_{2n-2} b_{2n-1} + a_{2n-1}) + a_{2n} b_{2n-2}} - \dots \quad (1.8.4)$$

Растяжение цепной дроби сводится к построению такой цепной дроби, подходящие которой, в частности, включают все подходящие исходной дроби.

1.9. Алгоритмы вычисления значений непрерывных дробей

Алгоритм вычисления значения обыкновенной цепной дроби часто приводят в качестве примера классического последовательного алгоритма. Действительно, рассмотрим конечную цепную дробь:

$$\frac{p_5}{Q_5} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_5}{b_5}}}}}.$$

Чтобы вычислить ее значение, надо выполнить операции в естественном последовательном порядке, а именно: некоторое число a_5 разделить на число b_5 , полученный результат просуммировать с числом b_4 , затем число a_4 разделить на эту сумму, результат этой операции сложить с числом b_3 и так далее, продвигаясь *снизу вверх*, пока не выполним все операции, то есть не определим значение цепной дроби.

На первый взгляд может показаться, что иначе вычислить значение цепной дроби нельзя, нежели как последовательно выполняя операции, определяемые самой записью цепной дроби. Но это только на первый взгляд. Всякий, кто хотя бы в малой степени соприкасался с цепными дробями, знает, что вычислять значения цепных дробей можно с помощью простых рекуррентных соотношений

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

при начальных условиях: $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$.

Рассмотрим кратко алгоритмы вычисления значений цепных дробей, прежде всего, обращая внимание на количество операций, необходимых при вычислении единичной цепной дроби и серии подходящих дробей.

Обратный рекуррентный алгоритм

Алгоритм вычисления цепной дроби “снизу – вверх” или, как он обычно именуется, *BR-алгоритм* [28], т.е. *обратный рекуррентный алгоритм* (backward recurrence algorithm), определяется самой записью цепной дроби:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}. \quad (1.9.1)$$

Для вычисления цепной дроби (1.9.1) надо последовательно выполнять операции в естественном порядке: a_n разделить на b_n , результат деления сложить со значением b_{n-1} . Число a_{n-1} делится на полученную на предыдущем шаге сумму и т.д.. BR-алгоритм можно записать в скобочной форме:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + a_1 : (b_1 + a_2 : (b_2 + \dots + a_{n-1} : (b_{n-1} + a_n : b_n) \dots)). \quad (1.9.2)$$

Процесс вычисления цепной дроби (1.9.1) “снизу-вверх”, то есть BR-алгоритм, запишем в несколько иной форме:

$$d_{n-i} = b_{n-i} + c_{n-i+1},$$

$$c_{n-i} = \frac{a_{n-i}}{d_{n-i}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad c_{n+1} = 0, \quad (1.9.3)$$

то есть

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + c_1. \quad (1.9.4)$$

Запишем BR-алгоритм в еще более простых обозначениях:

$$F_k = \frac{a_k}{b_k + F_{k+1}}, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \quad (1.9.5)$$

где $F_{n+1} = 0$.

Таким образом,

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = b_0 + F_1. \quad (1.9.6)$$

Для вычисления цепной дроби (1.9.6) с n звеньями, если используется BR-алгоритм, требуется n операций деления и n операций сложения. BR-алгоритм очень удобен в обращении. В ходе вычислений по этому методу не возникает проблемы переполнения разрядной сетки компьютера, как то имеет место в прямом рекуррентном алгоритме (FR-алгоритме). Кроме того, у BR-алгоритма сложилась твердая репутация алгоритма, устойчивого к накоплению вычислительной погрешности. Короче, BR-алгоритм очень эффективен при счете конкретной цепной дроби. Очевидно, BR-алгоритм применим только к *конечным* (terminatory) цепным дробям. В самом деле, так как вычисления проводятся “снизу-вверх”, то заранее, до начала счета, должна быть определена “длина” цепной дроби. Если после проведенных вычислений окажется, что значение функции установлено с недостаточной точностью, то придется брать более длинную цепную дробь и счет производить заново, без учета вычислений, осуществленных ранее. Это, конечно, не экономичная схема вычислений серий подходящих дробей, но такова специфика BR-алгоритма.

Рассмотрим так называемый *адитивный* алгоритм, позволяющий записать цепную дробь в виде суммы цепных дробей [78]:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_k^*}{b_{k+1}^* + b_{k+2} + \dots + b_n},$$

где

$$b_{k+1}^* = \frac{Q_{k+1}}{Q_k}, \quad a_{k+1}^* = b_{k+1}^* \left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right),$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k},$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_k}{b_{k+1}},$$

$$\frac{Q_{k+1}}{Q_k} = b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{b_k + \dots + b_1},$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = (-1)^{k+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Подробно параллельные алгоритмы вычисления значений цепных дробей рассмотрены в [78].

Необходимость в вычислении серий подходящих дробей, таким образом, возникает при аппроксимации функций цепными дробями, если заранее не известно количество звеньев для приближения функции в данной точке с определенной точностью. Многократные пересчеты цепной дроби могут, однако, оказаться неприемлимыми при жестких временных ограничениях, как то бывает в системах управления. BR-алгоритм становится непригодным, если имеем дело с определением значений длинных после-

довательностей подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$. Но есть ли практически важные задачи, которые приводят к необходимости вычислять длинные серии подходящих дробей? Оказывается, есть. И прежде всего с длинными сериями подходящих дробей приходится сталкиваться при суммировании и расхождении в классическом смысле цепных дробей при помощи r/φ -алгоритма [75]. Для нахождения с достаточно высокой точностью модуля и аргумента комплексного числа, являющегося значением “расходящейся” цепной дроби, могут потребоваться сотни тысяч и даже миллионы подходящих дробей или “отсчетов”. Поэтому на самом деле необходимы эффективные рекуррентные алгоритмы для вычисления значений длинных серий подходящих дробей. Самый известный рекуррентный алгоритм – это алгоритм Валлиса, опубликованный в середине семнадцатого столетия, хотя этот алгоритм был открыт задолго до Валлиса [117].

Прямой рекуррентный алгоритм

Прямой рекуррентный алгоритм (forward recurrence algorithm) или FR-алгоритм – это не что иное, как рекуррентные формулы Валлиса:

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

при начальных условиях $P_{-1}=1$, $P_0=b_0$, $Q_{-1}=0$, $Q_0=1$.

Рекуррентные соотношения (1.9.7) – алгоритм последовательного вычисления числителей P_n и знаменателей Q_n подходящих дробей цепной дроби. Напомним, что BR-алгоритм считает цепную дробь с “хвоста”, при этом длина цепной дроби определяется до начала счета. FR-алгоритм считает цепную дробь с начала, и вовсе не обязательно заранее устанавливать номер конечного звена дроби.

Приллюстрируем FR-алгоритм примером:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4 - \frac{2}{2 + \frac{3}{1 + \dots}}}}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 P_0 + a_1 P_{-1} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5, & Q_1 &= b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, \\ P_2 &= b_2 P_1 + a_2 P_0 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 26, & Q_2 &= b_2 Q_1 + a_2 Q_0 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11, \\ P_3 &= b_3 P_2 + a_3 P_1 = 2 \cdot 26 - 2 \cdot 5 = 42, & Q_3 &= b_3 Q_2 + a_3 Q_1 = 2 \cdot 11 - 2 \cdot 2 = 18, \\ P_4 &= b_4 P_3 + a_4 P_2 = 1 \cdot 42 + 3 \cdot 26 = 120, & Q_4 &= b_4 Q_3 + a_4 Q_2 = 1 \cdot 18 + 3 \cdot 11 = 51, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

FR-алгоритм позволяет вычислять величины P_n и Q_n , но при необходимости всегда можно определять текущие значения подходящих дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{26}{11}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{42}{18}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51} \dots$$

Следует обратить внимание, что при использовании FR-алгоритма нельзя “по ходу дела” сокращать соответствующие P_n и Q_n . Например, если вместо $P_3=42$ и $Q_3=18$ взять уменьшенные в шесть раз величины $P_3=7$ и $Q_3=3$, то такое сокращение приведет к неправильному значению очередной подходящей дроби:

$$P_4 = 7 \cdot 1 + 26 \cdot 3 = 85,$$

$$Q_4 = 3 \cdot 1 + 11 \cdot 3 = 36,$$

то есть получим $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{85}{36}$ вместо $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51}$.

Для вычисления при помощи FR-алгоритма значения цепной дроби с n звеньями необходимо произвести $2n$ операции сложения, $4n$ операции умножения и одну опера-

цию деления, то есть всего $6n + 1$ операций, что втрое более, чем при счете n звеньев цепной дроби с использованием BR-алгоритма. Но основной недостаток прямого рекуррентного алгоритма все же в другом. Для сходящейся цепной дроби, то есть дроби, у которой $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n / Q_n)$ существует и конечен, величины P_n и Q_n в отдельности неограниченно возрастают или убывают, выходя, как правило, достаточно быстро за разрядную сетку компьютера.

Основное преимущество классического прямого рекуррентного алгоритма – эффективность вычисления последовательности подходящих дробей. Для определения значений n подходящих дробей при помощи FR-алгоритма необходимо $7n$ операций, в то время как используя BR-алгоритм нужно выполнить $n(n+1)$ арифметических операций.

Матричный алгоритм

Матричный алгоритм вычисления значений цепных дробей весьма близок к FR-алгоритму.

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (1.9.8)$$

Формула (1.9.8) – это так называемый *матричный алгоритм* определения значения цепной дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}. \quad (1.9.9)$$

Матричное представление цепных дробей предложил английский математик Милн-Томсон в работе, опубликованной в 1932 г. [117]. Поэтому алгоритм (1.9.8) будем называть *алгоритмом Милн-Томсона*. Алгоритм Милн-Томсона можно использовать для организации параллельных вычислений значений цепной дроби, когда счет дроби выполняют одновременно несколько процессоров. Если осуществлять последовательно перемножение слева направо, то получим вычислительную процедуру, совпадающую с классическим рекуррентным FR-алгоритмом.

Рассмотрим пример. Имеется дробь:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4 - \frac{2}{2 + \frac{3}{1}}}}.$$

Используя формулу (1.9.8), запишем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_4 \\ Q_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 26 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 51 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51}.$$

Формула (1.9.8) называется, как уже отмечалось, матричным алгоритмом определения значения цепной дроби. Во избежание недоразумений здесь надо привести некоторые разъяснения. На самом деле, вычислительная процедура, состоящая из произведений матриц, то есть выражение (1.9.8), определяет матрицу-столбец, состоящую из двух чисел:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix},$$

и ничего более. Однако эти числа P_n и Q_n как раз и являются числителями и знаменателями подходящих дробей цепной дроби (1.9.8), значения которой устанавливаются.

В [55] было введено обозначение:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \right].$$

Следовательно, матричный алгоритм примет модифицированную форму:

$$\omega_n = \frac{P_n}{Q_n} = \left[\begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} \right]. \quad (1.9.10)$$

Для бесконечной цепной дроби можно дать такое матричное представление:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} \right]. \quad (1.9.11)$$

Поэтому можно сказать, что цепная дробь (1.9.9) сходится в классическом смысле, если существует предел произведения матриц (1.9.11).

Представим некоторые цепные дроби бесконечным произведением матриц:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_n \right] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right] = \frac{\sqrt{2/\pi e}}{\operatorname{erfc}(1/\sqrt{2})}.$$

Метод континуант

Цепную дробь

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}}}$$

можно представить отношением трехдиагональных определителей:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_k & a_{k+1} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k+1} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{M_{b_0}} \quad (1.9.12)$$

M_{b_0} – определитель главного минора, то есть определитель, стоящий в знаменателе, получающийся из определителя, записанного в числителе, вычёркиванием элементов первой строки и первого столбца.

Определители, стоящие в числителе и знаменателе выражения (1.9.12), очевидно, могут быть определены при помощи известных рекуррентных формул (1.9.7). Вычислить трехдиагональные определители можно не только используя рекуррентные формулы (1.9.7). Применяя формулу Лапласа, запишем числитель P_n и знаменатель Q_n следующим образом:

$$P_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k-1} & a_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+2} & a_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{k+1} \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+3} & a_{k+4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+4} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.9.13)$$

Аналогично можно записать Q_n :

$$Q_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-1} & a_k \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{k+1} \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.9.14)$$

Выражения (1.9.13) и (1.9.14) запишем в более компактном виде:

$$P_n = P_k P_{k+1,n} + a_{k+1} P_{k-1} P_{k+2,n},$$

$$Q_n = Q_k P_{k+1,n} + a_{k+1} Q_{k-1} P_{k+2,n}, \quad (1.9.15)$$

где P_i ($i = k-1, k, k+1, n, k+2, n$), Q_i ($i = k-1; k$) – соответственно, числители и знаменатели цепных дробей:

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}},$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k},$$

$$\frac{P_{k+1,n}}{Q_{k+1,n}} = b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2} + b_{k+3} + \dots + b_n},$$

$$\frac{P_{k+2,n}}{Q_{k+2,n}} = b_{k+2} + \frac{a_{k+3}}{b_{k+3}} + \frac{a_{k+4}}{b_{k+4}} + \dots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Вычисления значений P_n и Q_n по формулам (1.9.15) целесообразно выполнять на многопроцессорных ЭВМ, или, как говорят в последние годы, на суперкомпьютерах.

Алгоритм Тейкроу

Тейкроу[127] предложил следующий рекуррентный алгоритм вычисления значений цепных дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{i=1}^n \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_i, \quad (1.9.16)$$

где
$$r_i = \frac{a_i}{b_{i-1}b_i}, \quad 1 + \rho_i = \frac{1}{1 + r_i(1 + \rho_{i-1})}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Начальные значения

$$\rho_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad 1 + \rho_2 = \frac{1}{1 + r_2},$$

Можно показать, что *алгоритм Тейкроу* (ρ -алгоритм) эквивалентен построению равноценного ряда для цепной дроби, т.е.

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^{k+1} \prod_{j=1}^k a_j}{Q_{k-1} Q_k} \right].$$

Для нахождения значения очередной подходящей дроби по алгоритму Тейкроу необходимо выполнение 8 операций: 3 операции сложения, 3 операции умножения и 2 операции деления. Для подсчета значения цепной дроби, содержащей n звеньев, требуется $8n$ операций. Число операций при вычислении подряд n подходящих дробей по алгоритму Тейкроу равно $9n$.

Можно предложить более экономичные рекуррентные формулы [75].

Δ - алгоритм

Известна формула

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_n Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\phi_n} - 1, \quad (1.9.17)$$

где

$$\phi_n = Q_n / Q_{n-1},$$

$$\phi_n = b_n + \frac{a_n}{\phi_{n-1}}, \quad \phi_1 = b_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из соотношения (1.9.17) имеем

$$\Delta f_n = \left(\frac{b_n}{\phi_n} - 1 \right) \Delta f_{n-1}, \quad (1.9.18)$$

$$\Delta f_1 = \frac{a_1}{b_1}.$$

Так как $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$, то используя формулы (1.9.17) и (1.9.18), можно находить значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления. Такое же количество арифметических операций, но другого состава, необходимо провести для нахождения значения подходящей дроби в ψ/φ -алгоритме.

ψ/φ -алгоритм

Имеет место рекуррентная формула

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\psi_n}{\varphi_n} \cdot \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad (1.9.23)$$

где

$$\psi_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\psi_{n-1}}, \quad \psi_1 = b_1 + \frac{a_1}{b_0},$$

$$\varphi_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\varphi_{n-1}}, \quad \varphi_1 = b_1.$$

В ψ/φ алгоритме для определения значения последующей подходящей дроби необходимо выполнить 6 операций: 3 операции деления, 1 операцию умножения и 2 операции сложения.

Рассмотренные выше рекуррентные алгоритмы Тейкроу, Δ и ψ/φ - алгоритмы позволяют на каждом этапе вычислений получать значение очередной подходящей дроби. Хотя по этим алгоритмам цепная дробь вычисляется "сверху-вниз" и используются рекуррентные формулы, однако вычисляется значение подходящей дроби P_n/Q_n , а не величины P_n и Q_n , как в прямом рекуррентном алгоритме, т.е. они не имеют недостатка FR - алгоритма, связанного с возможностью переполнения разрядной сетки ЭВМ. При этом, в отличие же от BR - алгоритма, не возникает трудностей с вычислением серии подходящих дробей.

Количество операций, необходимое для вычисления n -звенной обыкновенной цепной дроби и последовательности подходящих дробей $P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots, P_n/Q_n$ при использовании различных алгоритмов, приведено в табл. 1.1.

Из табл. 1.1 видно, что BR -алгоритм, весьма эффективный при вычислении n -звенной цепной дроби, оказывается мало пригодным для нахождения значений серии подходящих дробей, которые применяются при суммировании по Никипорцу. Наиболее пригодными при вычислении серий подходящих дробей можно рассматривать Δ - алгоритм и ψ/φ -алгоритм. При вычислениях, как правило, используется Δ -алгоритм.

Таблица 1.1

Характеристики алгоритмов вычисления значений цепных дробей

№	Алгоритм	Число операций при вычислении n -звенной дроби				Число операций при вычислении серии $\{ P_i/Q_i \}$
		Сложение	Умножение	Деление	Общее число	
1	BR -алгоритм	n		n	$2n$	$n(n+1)$
2	FR -алгоритм	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
3	Матричный	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
4	Континуант	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
5	Тейкроу	$3n$	$3n$	$2n$	$8n$	$9n$
6	Δ -алгоритм	$3n$	n	$2n$	$6n$	$7n$
7	ψ/φ -алгоритм	$2n$	n	$3n$	$6n$	$7n$

1.10. Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей

Приведем определение сходимости цепных дробей, данное С.С. Хлопониным [71]. Это определение вполне традиционно.

Цепная дробь

$$\omega(a, b) = b_0 + K_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad (1.10.1)$$

у которой существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega$$

называется *сходящейся*. Значение ее принимает равным этому пределу. В противном случае, цепная дробь называется *расходящейся*.

Как известно, сходимость рядов и бесконечных произведений не зависит от их первых членов а зависит лишь от характера изменения их общего члена при неограниченном возрастании n . Сходимость же цепной дроби, вообще говоря, зависит и от их первых звеньев. Это обстоятельство заставляет ввести понятие *безусловной* и *условной* сходимости.

Сходящаяся цепная дробь

$$b_0 + K_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

называется *безусловно сходящейся*, если она остается сходящейся при отбрасывании любого числа начальных звеньев, т.е. если цепные дроби

$$b_m + K_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad m = 0, 1, \dots$$

все сходятся. В противном случае сходящаяся цепная дробь называется *условно сходящейся*.

В теории цепных дробей часто рассматривается также понятие *несущественной* и *существенной расходимости*.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \infty$, то цепная дробь называется *несущественно расходящейся*.

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ не существует, то цепную дробь называют *существенно расходящейся*.

Будем говорить, что цепная дробь (1.10.1) сходится *в широком смысле*, если она не является существенно расходящейся, иными словами, если существует конечный или бесконечный предел последовательности ее подходящих дробей.

В этом параграфе приведем некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей, доказательство которых можно найти в монографиях [28, 133].

Теорема 1.1. Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}} \quad (1.10.2)$$

с действительными положительными b_i ($i = 1, 2, \dots$) сходится тогда и только тогда, ко-

гда расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$.

Теорема 1.2. Цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots} \quad (1.10.3)$$

с действительными положительными элементами сходится тогда и только тогда, когда расходится по крайней мере один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} b_{2k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_3 a_5 \dots a_{2k+1}} b_{2k+1}.$$

Утверждение теоремы 1.2 следует из теоремы 1.1, если, используя эквивалентные преобразования, дробь (1.10.3) привести к виду (1.10.2). Теоремы 1.1 и 1.2 принадлежат Зейделю.

Теорема 1.3. (Штерн [132]) Цепная дробь (1.10.3) с положительными элементами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} = \infty.$$

Более общий достаточный признак сходимости, установлен Прингсхеймом [104].

Теорема 1.4. Непрерывная дробь (1.10.3) с действительными положительными членами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{n-1} b_n}{a_n}} = \infty.$$

Приведем признаки сходимости цепных дробей с комплексными элементами. Рассмотрим периодическую цепную дробь

$$\frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots} \quad (1.10.4)$$

с комплексными элементами и связанную с ней цепную дробь

$$S(w) = \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + 1} \frac{a_2}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + 1} \dots \frac{a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + 1} \frac{w}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + 1},$$

где w — комплексная переменная. Рассматривая $S(w)$ как $(k+1)$ -ю подходящую дробь, находим

$$S(w) = \frac{A_k + wA_{k-1}}{B_k + wB_{k-1}} \quad (1.10.5)$$

Неподвижной точкой дробно-линейного преобразования (1.10.5) называется точка x .

$$x = \frac{A_k + wA_{k-1}}{B_k + wB_{k-1}}.$$

Если $B_{k-1} \neq 0$, то неподвижные точки являются корнями квадратного уравнения

$$B_{k-1}x^2 + (B_k - A_{k-1})x - A_k = 0.$$

Теорема 1.5. (Уолл [150].) Пусть x_1 и x_2 — две неподвижные точки дробно-линейного отображения (1.10.5). Непрерывная дробь (1.10.4) с комплексными элементами сходится тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 — конечные числа, удовлетворяющие одному из условий:

$$x_1 = x_2,$$

или

$$\left| \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x_2 \right| > \left| \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x_1 \right|,$$

причем дробь (1.10.4) сходится к неподвижной точке x_1 .

Теорема 1.6. (Кох [132].) Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}} \quad (1.10.6)$$

с комплексными частными знаменателями b_i расходится, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty \quad (1.10.7)$$

сходится. Более того, существуют конечные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1} = F_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = F_2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n+1} = G_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n} = G_2$$

и выполняется условие

$$F_1 G_1 - F_2 G_2 = 1. \quad (1.10.8)$$

Отсюда следует, что расходимость ряда (1.10.7) *необходима* для сходимости дроби (1.10.6).

Теорема 1.7. (Ван Флек [132].) Пусть элементы цепной дроби (1.10.6) b_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) принадлежат области

$$D = \left\{ z \in C, z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\},$$

где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Тогда цепная дробь (1.10.6) сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ расходится.}$$

Теорема 1.8. (Ворпицкий [132].) Цепная дробь с комплексными элементами

$$\frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots + \frac{a_n}{1 + \dots}}}$$

сходится, если для всех $n \geq 2$

$$|a_n| \leq \frac{1}{4}.$$

Теорема 1.9. (Слешинский – Прингсхейм [132].) Цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}$$

с комплексными элементами сходится, если для всех n

$$|b_n| > |a_n| + 1.$$

ГЛАВА 2

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

2.1. Классификация непрерывных дробей

Так как алгоритмы суммирования рядов и цепных дробей связаны с так называемыми соответствующими цепными дробями, рассмотрим различные способы построения таких цепных дробей.

Соответствующие цепные дроби не тождественны степенным рядам. Разъясним это понятие следующим образом. Для степенного ряда

$$1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots + c_nz^n + \dots \quad (2.1.1)$$

можно построить по определенному алгоритму цепную дробь

$$1 + \frac{a_1z}{1} + \frac{a_2z}{1} + \frac{a_3z}{1} + \dots + \frac{a_nz}{1} + \dots \quad (2.1.2)$$

такую, что разложение в ряд n -й подходящей дроби будет совпадать с исходным степенным рядом (2.1.1) вплоть до члена c_nz^n включительно:

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \gamma_{n+1}z^{n+1} + \dots \quad (2.1.3)$$

Цепную дробь (2.1.2) называют – *соответствующей* (korrespondierende) данному ряду. Произведя сжатие соответствующей цепной дроби, получим цепную дробь, разложение n -й подходящей которой в степенной ряд совпадает с исходным рядом до члена z^{2n} . Такую цепную дробь, следуя Перрону [139], именуют *присоединенной* (assozierte) к данному ряду.

Цепную дробь и ряд называют *равноценными*, если n -я подходящая дробь цепной дроби совпадает с n -й частичной суммой ряда, и наоборот, – n -я частичная сумма ряда имеет то же значение, что и n -я подходящая дробь цепной дроби.

Известны цепные дроби Эйлера:

$$c_0 + \frac{c_1x}{1} - \frac{c_2x}{c_1 + c_2x} - \frac{c_3x}{c_2 + c_3x} - \dots - \frac{c_{n-2}c_nx}{c_{n-1} + c_nx} + \dots, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{c_0}{1} - \frac{c_1x}{c_0 + c_1x} - \frac{c_2x}{c_1 + c_2x} - \frac{c_3x}{c_2 + c_3x} - \dots - \frac{c_{n-2}c_nx}{c_{n-1} + c_nx} + \dots \quad (2.1.5)$$

Эти цепные дроби равноценны степенному ряду

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (2.1.6)$$

потому что n -е подходящие дроби разложений (2.1.4) или (2.1.5) совпадают с частичными суммами степенного ряда (2.1.6).

В теории цепных дробей основное внимание уделяется неравноценным цепным дробям, которые тесно связаны со степенными рядами. Эту связь можно определить одним словом: *соответствие*.

Приведем по Хенриччи [127] некоторую классификацию соответствующих цепных дробей.

В аналитической теории цепных дробей изучаются цепные дроби вида

$$b_0(z) + \frac{a_1(z)}{b_1(z) + \frac{a_2(z)}{b_2(z) + \dots + \frac{a_n(z)}{b_n(z) + \dots}}}, \quad (2.1.7)$$

где $a_n(z)$ и $b_n(z)$ – функции комплексного переменного.

С-дроби – это цепные дроби вида

$$\frac{a_1 z^{k_1}}{1} + \frac{a_2 z^{k_2}}{1} + \frac{a_3 z^{k_3}}{1} + \dots + \frac{a_n z^{k_n}}{1} + \dots, \quad (2.1.8)$$

где k_n – положительное целое число,

Если $k_n = 1$ при всех n , то получаем *правильную С-дробь* или *соответствующую цепную дробь*:

$$\frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots + \frac{a_n z}{1} + \dots. \quad (2.1.9)$$

Следующие две цепные дроби эквивалентны правильной С-дроби

$$\frac{a_1}{\zeta + 1} + \frac{a_2}{\zeta + 1} + \frac{a_3}{\zeta + 1} + \dots + \frac{a_{2n-1}}{\zeta + 1} + \frac{a_{2n}}{\zeta + 1} + \dots, \quad \zeta = \frac{1}{z}. \quad (2.1.10)$$

$$\frac{a_1 / \omega}{\omega} + \frac{a_2}{\omega + \omega} + \frac{a_3}{\omega + \omega} + \frac{a_4}{\omega + \omega} + \dots + \frac{a_n}{\omega + \omega} + \dots, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{z}}. \quad (2.1.11)$$

Если $a_n > 0$ при всех n , то цепная дробь (2.1.10) называется *С-дробью* или *цепной дробью Стильеса*.

Частным случаем правильной С-дроби является *g-дробь*:

$$\frac{s_0}{1} + \frac{g_1 z}{1} + \frac{(1 - g_1)g_2 z}{1} + \frac{(1 - g_2)g_3 z}{1} + \frac{(1 - g_3)g_4 z}{1} + \dots, \quad (2.1.12)$$

где $s_0 > 0$, $0 < g_n < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Присоединенные цепные дроби – это дроби вида

$$\frac{k_1 z}{1 + l_1 z - 1} + \frac{k_2 z^2}{-1 + l_2 z - 1} + \frac{k_3 z^2}{-1 + l_3 z - 1} + \frac{k_4 z^2}{-1 + l_4 z - \dots} + \frac{k_n z^2}{-1 + l_n z - \dots}, \quad (2.1.13)$$

где k_n и l_n – комплексные константы.

Разложение в ряд n -й подходящей дроби будет совпадать с исходным степенным рядом вплоть до члена $c_{2n} z^{2n}$ включительно.

Сжатая правильная С-дробь (2.1.9) является присоединенной цепной дробью

$$\frac{a_1 z}{1 + a_2 z - 1} + \frac{a_2 a_3 z^2}{1 + (a_3 + a_4)z - 1} + \frac{a_4 a_5 z^2}{(a_5 + a_6)z - \dots}. \quad (2.1.14)$$

Пусть

$$L = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (2.1.15)$$

формальный степенной ряд. Тогда n -я подходящая дробь P_n/Q_n цепной дроби (2.1.13) является (n, n) -аппроксимацией Паде ряда L .

J-дроби – это цепные дроби вида

$$\frac{1}{d_1 + z - d_2} + \frac{c_1^2}{z - d_2 + z - d_3} + \frac{c_2^2}{z - d_3 + z - d_4} + \frac{c_3^2}{z - d_4 + z - \dots}, \quad (2.1.16)$$

где c_n^2 и d_n – комплексные константы. *J-дробь* называется *G-дробью*, если все c_n и d_n – вещественные числа.

P-дроби – это цепные дроби вида

$$b_0 z + \frac{1}{b_1(z)} + \frac{1}{b_2(z)} + \frac{1}{b_3(z)} + \dots + \frac{1}{b_n(z)} + \dots \quad (2.1.17)$$

Общие T -дроби имеют вид

$$\frac{z}{e_1 + d_1 z} + \frac{z}{e_2 + d_2 z} + \dots + \frac{z}{e_n + d_n z} + \dots, \quad (2.1.18)$$

где e_n и d_n – комплексные константы.

Если $e_n=1$ при всех n , то цепная дробь называется T -дробью или *цепной дробью Трона*.

Ветвящиеся непрерывные дроби имеют вид

$$b_0 + \cfrac{\sum_{i_1=1}^N a_{i_1}}{b_{i_1} + \cfrac{\sum_{i_2=1}^N a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \dots + \cfrac{\sum_{i_k=1}^N a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{b_{i_1 i_2 \dots i_k}}}} \quad (2.1.19)$$

Ветвящиеся непрерывные дроби были предложены львовским математиком В.Я. Скоробогатко в 1966г. [58].

При N равном двум функциональная ветвящаяся цепная дробь записывается следующим образом:

$$b_0 + \cfrac{a_1 z}{b_1 + \cfrac{a_5 z}{b_3 +} + \cfrac{a_4 z}{b_4 +}} + \cfrac{a_2 z}{b_2 + \cfrac{a_5 z}{b_5 +} + \cfrac{a_6 z}{b_6 +}} \quad (2.1.20)$$

Ветвящиеся непрерывные дроби могут быть также представлены отношением операторов характерной ступенчатой структуры [78].

Интегральные непрерывные дроби – континуальный аналог ветвящейся цепной дроби, полученный при замене символа суммы на символ интегрирования:

$$b_0 + \cfrac{\int_{E_1} a_1(s_1) \mu_1(ds_1)}{b_1(s_1) + \cfrac{\int_{E_2} a_2(s_1, s_2) \mu_2(ds_2)}{b_2(s_1, s_2) + \dots + \cfrac{\int_{E_i} a_i(s_1, \dots, s_i) \mu_i(ds_i)}{b_i(s_1, \dots, s_i) + \dots}}} \quad (2.1.21)$$

Интегральные непрерывные дроби были предложены львовским математиком М.С. Сявков в 1975г. [64].

Непрерывные дроби Хессенберга имеют вид:

$$\omega = \cfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{14} & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{24} & \dots \\ 0 & -1 & a_{34} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \end{vmatrix}} = a_{11} + \cfrac{a_{13} + \cfrac{a_{14} + \dots}{a_{44} + \dots}}{a_{12} + \cfrac{a_{23} + \cfrac{a_{24} + \dots}{a_{44} + \dots}}{a_{22} + \cfrac{a_{33} + \cfrac{a_{34} + \dots}{a_{44} + \dots}}}} \quad (2.1.22)$$

Непрерывными дробями Хессенберга были названы непрерывные дроби, задаваемые отношением определителей матриц Хессенберга, для которых характерна одна поддиагональ элементов. Дроби Хессенберга – своеобразные непрерывные дроби, звенья которых распространяются не только «вниз», но и «вверх». Непрерывные дроби Хессенберга удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению n -го порядка

$$P_n = a_{nn}P_{n-1} + a_{n-1,n}P_{n-2} + \dots + a_{2n}P_1 + a_{1n}.$$

Непрерывные дроби Хессенберга следует рассматривать как обобщение обыкновенных цепных дробей, для числителей и знаменателей подходящих дробей которых имеют место рекуррентные соотношения второго порядка, – рекуррентные формулы Валлиса. Непрерывные дроби Хессенберга впервые были описаны немецким математиком Фюрстенау в 1874 г. [117], поэтому их следовало бы именовать непрерывными дробями Фюрстенау, хотя и в термине «непрерывные дроби Хессенберга» есть свой резон.

Следует отметить, что в настоящее время наибольшие применения получили соответствующие цепные дроби или правильные C -дроби:

$$\frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots + \frac{a_n z}{1} + \dots$$

Иногда эти цепные дроби называют *цепными дробями Тиле* и рассматривают их как аналог ряда Тейлора в дробно-рациональном анализе [28].

2.2. Формулы Хейлсманна – Стильеса

Если известно разложение функции $f(x)$ в степенной ряд, то коэффициенты ω_i разложения этой функции в правильную цепную дробь находятся по формулам Хейлсманна – Стильеса [28]:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n} x}{1} - \frac{\omega_{2n+1} x}{1} + \dots,$$

$$\text{где} \quad \omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \psi_{n+1}}{\varphi_n \psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \psi_n}{\varphi_n \psi_{n+1}}, \quad (2.2.1)$$

φ_n и ψ_n – определители Ганкеля:

$$\phi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (2.2.2)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1.$$

Используя формулы (2.2.1) и (2.2.2), запишем несколько первых коэффициентов ω_i соответствующей цепной дроби:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= c_0, \\ \omega_1 &= \varphi_1 = c_1, \\ \omega_2 &= \frac{\varphi_0 \psi_2}{\varphi_1 \psi_1} = \frac{c_2}{c_1}, \\ \omega_3 &= -\frac{\varphi_2 \psi_1}{\varphi_1 \psi_2} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} \cdot \frac{1}{c_2} = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1 c_2}, \end{aligned}$$

$$\omega_4 = \frac{\varphi_1 \psi_3}{\varphi_2 \psi_2} = \frac{c_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_2} = \frac{c_1(c_3^2 - c_2 c_4)}{c_2(c_2^2 - c_1 c_3)},$$

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} c_2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{c_2 [c_5(c_2^2 - c_1 c_3) + c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_3(c_3^2 - c_2 c_4)]}{(c_2^2 - c_1 c_3)(c_3^2 - c_2 c_4)},$$

$$\omega_6 = \frac{\varphi_2 \psi_4}{\varphi_3 \psi_3} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{(c_2^2 - c_1 c_3) [c_6(c_3^2 - c_2 c_4) + c_5(c_2 c_5 - c_3 c_4) + c_4(c_4^2 - c_3 c_5)]}{(c_3^2 - c_2 c_4) [c_5(c_2^2 - c_1 c_3) + c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_3(c_3^2 - c_2 c_4)]},$$

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \psi_3}{\varphi_3 \psi_4} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}},$$

$$\omega_7 = \frac{P_7}{Q_7}, \quad P_7 = (c_3^2 - c_2 c_4) [(c_2^2 - c_1 c_3)(c_6^2 - c_5 c_7) + (c_1 c_4 - c_2 c_3)(2a_5 a_6 - a_4 a_7) +$$

$$+ (c_3^2 - c_2 c_4)(2c_4 c_6 - c_3 c_7) + c_4^2(c_4^2 - c_3 c_5) + c_5^2(c_3^2 - c_1 c_5) + 2c_4 c_5(c_2 c_5 - c_3 c_4)] \quad (2.2.3)$$

$$Q_7 = [c_6(c_3^2 - c_2 c_4) + c_5(c_2 c_5 - c_3 c_4) + c_4(c_4^2 - c_3 c_5)] [c_5(c_2^2 - c_1 c_3) + c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_3(c_3^2 - c_2 c_4)].$$

Сделаем одно замечание относительно соответствующих цепных дробей и рядов. Для ряда можно построить две соответствующие цепные дроби:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \frac{\omega_{2n+1} x}{1} + \dots, \quad (2.2.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{\omega_1' x}{1} - \frac{\omega_2' x}{1} + \frac{\omega_3' x}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n}' x}{1} + \frac{\omega_{2n+1}' x}{1} - \dots. \quad (2.2.5)$$

Нечетные подходящие этих соответствующих цепных дробей одинаковы.

Например,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{1^2 x}{2} + \frac{1^2 x}{3} + \frac{2^2 x}{4} + \frac{2^2 x}{5} + \dots + \frac{n^2 x}{2n} + \frac{n^2 x}{2n+1} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2^2 x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{3^2 x}{5} - \dots + \frac{(n-1)^2 x}{2n+1} - \frac{n^2 x}{2(n+1)} + \dots,$$

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = p - \frac{q}{p} - \frac{q}{p} - \dots - \frac{q}{p} - \dots,$$

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{p}{1} - \frac{q}{p^2 - 1} - \frac{2q}{-2p^2 - 1} - \frac{3q}{-1} - \dots - \frac{nq}{-1} - \frac{(n-1)q}{np^2} - \dots.$$

Для цепных дробей соответствующие ряды единственные:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = p - \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^3} - \frac{2q^3}{p^5} - \frac{14q^4}{p^7} - \frac{42q^5}{p^9} - \dots.$$

Коэффициенты ω'_1 для цепной дроби

$$\frac{\omega'_1 x}{1} - \frac{\omega'_2 x}{1} + \frac{\omega'_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega'_{2n} x}{1} + \frac{\omega'_{2n+1} x}{1} - \dots \quad (2.2.6)$$

связаны с коэффициентами ряда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

формулами:

$$\omega'_1 = c_0,$$

$$\omega'_{2n} = \frac{\phi'_{n-1} \psi'_{n+1}}{\phi'_n \psi'_n}, \quad \omega'_{2n+1} = -\frac{\phi'_{n+1} \psi'_n}{\phi'_n \psi'_{n+1}}, \quad (2.2.7)$$

где

$$\phi'_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad \psi'_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix}, \quad (2.2.8)$$

$$\phi'_0 = 1, \psi'_1 = 1$$

Запишем значения нескольких коэффициентов ω'_i :

$$\omega'_1 = c_0,$$

$$\omega'_2 = \frac{c_1}{c_0},$$

$$\omega'_3 = \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_0 c_1},$$

$$\omega'_4 = \frac{c_0(c_2^2 - c_1 c_3)}{c_1(c_1^2 - c_0 c_2)},$$

$$\omega'_5 = \frac{c_1[c_4(c_1^2 - c_0 c_2) + c_3(c_0 c_3 - c_1 c_2) + c_2(c_2^2 - c_1 c_3)]}{(c_1^2 - c_0 c_2)(c_2^2 - c_1 c_3)},$$

$$\omega'_6 = \frac{(c_1^2 - c_0 c_2)[c_5(c_2^2 - c_1 c_3) + c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_3(c_3^2 - c_1 c_4)]}{(c_2^2 - c_1 c_3)[c_4(c_1^2 - c_0 c_2) + c_3(c_0 c_3 - c_1 c_2) + c_2(c_2^2 - c_1 c_3)]}. \quad (2.2.9)$$

Пример. Разложить в соответствующую цепную дробь вида (2.2.6) степенной ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Здесь

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = -\frac{1}{4}, \quad c_4 = \frac{1}{5}, \dots$$

По формулам (2.2.9) имеем:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{6}, \quad \omega_4 = -\frac{1}{3}, \quad \omega_5 = \frac{1}{5}, \dots$$

Подставляя найденные коэффициенты в цепную дробь (2.2.6), получим

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \dots}}}}}$$

В следующем параграфе рассматриваются более общие формулы, нежели формулы Хейлсманна – Стильтеса, которые получены С.С. Хлопониным. Формулы Хлопонина дают возможность находить в явном виде соответствующие цепные дроби не только для степенных рядов, как формулы Хейлсманна – Стильтеса, но и для отношения степенных рядов.

2.3. Формулы Хлопонина

С.С. Хлопониным [71] предложены формулы, обобщающие формулы Хейлсманна – Стильтеса. В отличие от рекуррентного алгоритма Висковатова, формулы Хлопонина дают возможность в явном виде через отношения определенным образом составленных определителей из элементов исходных рядов найти коэффициенты соответствующей цепной дроби. Определители, входящие в формулы Хлопонина, не являются уже определителями Ганкеля, но имеют простую и регулярную структуру. Может, конечно, удивлять тот факт, что явные формулы для нахождения коэффициентов правильной С-дроби, в которую раскладывается отношение степенных рядов, были установлены спустя 170 лет после того, как Висковатовым был опубликован рекуррентный алгоритм преобразования отношения степенных рядов в соответствующие цепные дроби. Впрочем, вызывает некоторое недоумение и другое: отсутствие важных формул Хлопонина, появившихся на страницах одного из ведущих советских математических журналов в 1975 г. как в монографии У. Джоунса и В.Трона [28], так и в обширном труде Л. Лорентзена и Х. Воделанда [131]. В книге Джоунса и Трона [28] ни слова нет и об алгоритме Висковатова.

Формулы Хлопонина имеют вид:

$$\frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = 1 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{\delta_n \cdot \Theta_{n-1}}{\Theta_n \cdot \delta_{n-1}} x}{1} + \frac{\frac{\Theta_{n+1} \cdot \delta_{n-1}}{\delta_n \cdot \Theta_n} x}{1} \right), \quad (2.3.1)$$

где

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n & b_{2n-1} & b_{2n-2} & b_{2n-3} & \dots & b_n \end{vmatrix}, \quad \delta_0 = 1,$$

$$\Theta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_{n+1} & b_{2n} & b_{2n-1} & b_{2n-2} & \dots & b_n \end{vmatrix}, \quad \Theta_0 = \Theta_1 = 1.$$

При $b_n=0$ имеем формулы Хейлэрманна – Стильтьеса. Запишем несколько первых коэффициентов δ_n и Θ_n , входящих в формулы Хлопонина (2.3.1):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, & \Theta_1 &= 1, \\ \delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}, & \Theta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}, \\ \delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & b_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & b_2 & b_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, & \Theta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}, & (2.3.2) \\ \delta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & b_7 & b_6 & b_5 & b_4 \end{vmatrix}, & \Theta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \\ & \dots \end{aligned}$$

В связи с тем, что явные формулы нахождения коэффициентов ω_i соответствующих цепных дробей для степенных рядов или их отношения – формулы Хейлэрманна–Стильтьеса (2.2.1) и формулы Хлопонина (2.3.1), практически малоприменимы, используются рекуррентные алгоритмы.

2.4. Рекуррентный алгоритм Хлопонина

Коэффициенты ω_i соответствующей цепной дроби для отношения степенных рядов можно вычислять при помощи следующего рекуррентного алгоритма, который был разработан С.С. Хлопоным, исходя из явных формул (2.3.1), рассмотренных в предыдущем разделе.

$$f(x) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} x^i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} x^i} = 1 + K_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{n-1,1} - a_{n1})x}{1}, \quad (2.4.1)$$

где

$$a_{k+1,n} = \frac{a_{k,n+1} - a_{k-1,n+1}}{a_{k1} - a_{k-1,1}}, \quad (n \geq 1, k \geq 1). \quad (2.4.2)$$

В развернутой записи схема вычислений коэффициентов правильной С-дроби, то есть коэффициентов соответствующей цепной дроби для отношения степенных рядов по рекуррентному алгоритму Хлопонина, имеет вид:

a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{05}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$a_{01} - a_{11} = \omega_{10}$	$a_{02} - a_{12} = \omega_{11}$	$a_{03} - a_{13} = \omega_{12}$	$a_{04} - a_{14} = \omega_{13}$	$a_{05} - a_{15} = \omega_{14}$
$\frac{a_{02} - a_{12}}{a_{01} - a_{11}} = a_{21}$	$\frac{a_{03} - a_{13}}{a_{01} - a_{11}} = a_{22}$	$\frac{a_{04} - a_{14}}{a_{01} - a_{11}} = a_{23}$	$\frac{a_{05} - a_{15}}{a_{01} - a_{11}} = a_{24}$	
$\omega_{20} = a_{11} - a_{21}$	$a_{12} - a_{22} = \omega_{21}$	$a_{13} - a_{23} = \omega_{22}$	$a_{14} - a_{24} = \omega_{23}$	
$\frac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{21}} = a_{31}$	$\frac{a_{13} - a_{23}}{a_{11} - a_{21}} = a_{32}$	$\frac{a_{14} - a_{24}}{a_{11} - a_{21}} = a_{33}$		
$\omega_{30} = a_{21} - a_{31}$	$a_{22} - a_{32} = \omega_{31}$	$a_{23} - a_{33} = \omega_{32}$		
$\frac{a_{22} - a_{32}}{a_{21} - a_{31}} = a_{41}$	$\frac{a_{23} - a_{33}}{a_{21} - a_{31}} = a_{42}$			
$\omega_{40} = a_{31} - a_{41}$	$a_{32} - a_{42} = \omega_{41}$			
$\frac{a_{32} - a_{42}}{a_{31} - a_{41}} = a_{51}$				
$\omega_{50} = a_{41} - a_{51}$				

Из этой схемы рекуррентного алгоритма Хлопонина видно, что для вычисления значений элемента в нечетных строках необходима одна операция вычитания. Для вычисления элемента четной строки таблицы рекуррентного алгоритма Хлопонина надо выполнить также одну операцию – операцию деления.

2.5. Алгоритм Висковатова

Первый алгоритм для обращения в соответствующую цепную дробь степенного ряда, а точнее – отношения степенных рядов, был опубликован В.Висковатовым в 1803 г. [89].

Метод Висковатова состоит в следующем.

Пусть

$$f(x) = \frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + \dots}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 + \dots}. \quad (2.5.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\frac{a_{00}}{a_{10}} + \frac{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots}{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots} - \frac{a_{00}}{a_{10}}} = \frac{a_{10}}{a_{00} + x \frac{(a_{10}a_{01} - a_{00}a_{11}) + (a_{10}a_{02} - a_{00}a_{12})x + \dots}{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots}} = \\
&= \frac{a_{10}}{a_{00} + x \frac{a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots}{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots}} = \frac{a_{10}}{a_{00} + x \frac{a_{20}}{a_{10} + x \frac{(a_{20}a_{11} - a_{10}a_{21}) + (a_{20}a_{21} - a_{10}a_{22})x + \dots}{a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots}}} = \\
&= \frac{a_{10}}{a_{00} + \frac{a_{20}x}{a_{10}} + \frac{a_{30}x}{a_{20}} + \frac{a_{40}x}{a_{30}} + \dots} \quad (2.5.2)
\end{aligned}$$

Или записывая в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_{10}}{a_{00} + \frac{a_{20}x}{a_{00}} + \frac{a_{30}x}{a_{20}} + \dots + \frac{a_{n0}x}{a_{n-10}} + \dots} = \\
&= \frac{a_{10}/a_{00}}{1} + \frac{a_{20}x/a_{00}a_{10}}{1} + \frac{a_{30}x/a_{10}a_{20}}{1} + \dots + \frac{a_{n0}x/a_{n-20}a_{n-10}}{1} + \dots
\end{aligned}$$

Вычисления по алгоритму Вискватова удобно вести, придерживаясь следующей схемы:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots
\end{array}$$

$$\text{где} \quad a_{mn} = a_{m-1,0}a_{m-2,n+1} - a_{m-2,0}a_{m-1,n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.5.3)$$

Вычисления по этой схеме выполняются так. В первую строку записываются коэффициенты степенного ряда, стоящего в знаменателе исходного отношения рядов (2.5.1). Во вторую строку записываются коэффициенты ряда, стоящего в числителе того же отношения рядов. Далее элементы строк вычисляются по формуле (2.5.3). Например, элементы третьей строки находятся следующим образом:

$$a_{2n} = a_{10}a_{0n+1} - a_{00}a_{1n+1},$$

то есть

$$a_{20} = a_{10}a_{01} - a_{00}a_{11}, \quad a_{21} = a_{10}a_{02} - a_{00}a_{12}, \quad a_{22} = a_{10}a_{03} - a_{00}a_{13}, \dots$$

Алгоритм Вискватова применим однако не к любому отношению степенных рядов. В самом деле, если по формуле (2.5.2) один из коэффициентов a_{i0} принимает нулевое значение, то построение правильной C -дроби становится невозможно. С.С. Хлопониным [71] был предложен алгоритм, который позволяет, используя подход Вискватова, получить разложение в общую C -цепную дробь любого отношения степенных рядов.

2.6. Метод Никипорца

Этот метод представления степенных рядов в соответствующие цепные дроби разработан таганрогским математиком Акимом Захаровичем Никипорцем (1896 – 1972) [89].

Если функция задана в виде степенного ряда, то при разложении ее в цепную дробь могут встретиться следующие три частных случая: а) ряд функций содержит все степени переменного, б) ряд данной функции содержит только четные степени переменного, в) случай нечетной функции, когда ряд данной функции содержит только нечетные степени переменного.

Пусть функция может быть записана в виде следующего степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \dots \quad (2.6.1)$$

Переходя непосредственно к разложению этой функции в цепную дробь, запишем этот ряд следующим образом:

$$f(x) = a_0 + a_1xz_1 \quad (2.6.2)$$

и определим отсюда z_1 , то есть

$$z_1 = \frac{f(x) - a_0}{a_1x} = 1 + \frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_3}{a_1}x^2 + \frac{a_4}{a_1}x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_1}x^{n-2} + \dots,$$

или

$$z_1 = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + \dots, \quad (2.6.3)$$

где

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_1}, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \frac{a_n}{a_1}, \quad \dots \quad (2.6.4)$$

Определим теперь, чему равно следующее выражение $z_1' = \frac{1}{z_1}$:

$$z_1' = \frac{1}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots} = 1 - c_1x^2 + c_2x^2 - c_3x^3 + c_4x^4 - \dots \quad (2.6.5)$$

Выполняя непосредственное деление в (2.6.5), получим следующие значения для коэффициентов $c_1, c_2, c_3, \dots$:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1, \\ c_2 &= b_1^2 - b_2, \\ c_3 &= b_1^3 - 2b_1b_2 + b_3, \\ c_4 &= b_1^4 - 3b_1^2b_2 + 2b_1b_3 - b_4 + b_2^2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Далее, перепишем выражение (2.6.5) следующим образом

$$z_1' = 1 - c_1xz_2. \quad (2.6.7)$$

Отсюда находим z_2 :

$$z_2 = \frac{1 - z_1'}{c_1x} = 1 - \frac{c_2}{c_1}x + \frac{c_3}{c_1}x^2 - \frac{c_4}{c_1}x^3 + \dots,$$

или

$$z_2 = 1 - d_1x + d_2x^2 - d_3x^3 + d_4x^4 - \dots, \quad (2.6.8)$$

где

$$d_1 = \frac{c_2}{c_1}, \quad d_2 = \frac{c_3}{c_1}, \quad d_3 = \frac{c_4}{c_1}, \quad d_4 = \frac{c_5}{c_1}, \quad \dots \quad (2.6.9)$$

Находим z_2' :

$$z_2' = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1 - d_1x + d_2x^2 - d_3x^3 + \dots} = 1 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \dots = 1 + e_1xz_3. \quad (2.6.10)$$

Подобным же образом найдем

$$z_3' = 1 - g_1xz_4, \quad (2.6.11)$$

и так далее.

Таким образом, мы получили следующие соотношения:

$$f(x) = a_0 + a_1 x z_1,$$

$$z_1' = 1 - c_1 x z_2,$$

$$z_2' = 1 + e_1 x z_3,$$

$$z_3' = 1 - g_1 x z_4,$$

$$\dots$$

Заменим здесь коэффициенты $a_0, a_1, c_1, e_1, \dots$ через $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ и помня, что $z_n = \frac{1}{z_n'}$, перепишем эти равенства следующим образом:

$$f(x) = \omega_0 + \omega_1 x z_1 = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{z_1'}, \quad (2.6.12)$$

$$z_1' = 1 - \omega_2 x z_2 = 1 - \frac{\omega_2 x}{z_2'}, \quad (2.6.13)$$

$$z_2' = 1 + \omega_3 x z_3 = 1 + \frac{\omega_3 x}{z_3'}, \quad (2.6.14)$$

$$z_3' = 1 - \omega_4 x z_4 = 1 - \frac{\omega_4 x}{z_4'}, \quad (2.6.15)$$

$$\dots$$

Исключая в (2.6.12), (2.6.13), (2.6.14), $\dots$ $z_1', z_2', z_3', \dots$ получим окончательно

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1 - \frac{\omega_2 x}{1 + \frac{\omega_3 x}{1 - \frac{\omega_4 x}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1 - \frac{\omega_{2n} x}{1 + \dots}}}}} \quad (2.6.16)$$

Такова форма цепной дроби, в которую может быть разложена функция, заданная рядом (2.6.1). Остается выразить коэффициенты дроби через коэффициенты данного ряда. Это сделаем ниже. Перейдем ко второму частному случаю. В этом частном случае данная функция может быть представлена в виде следующего степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots + a_{n-1} x^{2n-2} + \dots \quad (2.6.17)$$

Повторяя тот же прием, которым пользовались в первом случае, получим:

$$f(x) = \omega_0 + \omega_1 x^2 z_1 = \omega_0 + \frac{\omega_1 x^2}{z_1'},$$

$$z_1' = 1 - \omega_2 x^2 z_2 = 1 - \frac{\omega_2 x^2}{z_2'}, \quad (2.6.18)$$

$$z_2' = 1 + \omega_3 x^2 z_3 = 1 + \frac{\omega_3 x^2}{z_3'}, \quad (2.6.19)$$

$$z_3' = 1 - \omega_4 x^2 z_4' = 1 - \frac{\omega_4 x^2}{z_4'}, \quad (2.6.20)$$

Исключая из (2.6.17), (2.6.18), (2.6.19), ... $z_1', z_2', z_3' \dots$ получим окончательно

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 x^2}{1 - \frac{\omega_2 x^2}{1 + \frac{\omega_3 x^2}{1 - \frac{\omega_4 x^2}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n-1} x^2}{1 - \frac{\omega_{2n} x^2}{1 + \dots}}}}}} \quad (2.6.21)$$

В третьем частном случае будем иметь

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + a_4 x^7 + \dots + a_n x^{2n-1} + \dots \quad (2.6.22)$$

Повторяя те же приемы, которыми пользовались выше, получим окончательно

$$f(x) = \frac{\omega_1 x}{1 - \frac{\omega_2 x^2}{1 + \frac{\omega_3 x^2}{1 - \frac{\omega_4 x^2}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n-1} x^2}{1 - \frac{\omega_{2n} x^2}{1 + \dots}}}}} \quad (2.6.23)$$

Если ряд (2.6.22) имеет свободный член $a_0 = \omega_0$, то он ставится, как слагаемое впереди цепной дроби (2.6.23).

Таким образом, если функция задана в виде рядов (2.6.1), (2.6.17) или (2.6.22), то ее можно разложить соответственно в цепные дроби (2.6.16), (2.6.21) или (2.6.23).

Переходим теперь к определению формул, выражающих коэффициенты цепной дроби $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ через коэффициенты ряда $a_0, a_1, a_2, \dots$. Легко заметить, что для всех трех случаев разложения функций в цепную дробь формулы, выражающие коэффициенты $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ через коэффициенты ряда $a_0, a_1, a_2, \dots$, будут одни и те же. Свободный член равен ω_0 .

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1, \\ \omega_2 &= c_1 = b_1, \quad b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \text{ поэтому } \omega_2 = \frac{a_2}{a_1}, \\ \omega_3 &= e_1 = d_1, \quad d_1 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_1^2 - b_2}{b_1}, \text{ следовательно,} \\ \omega_3 &= \frac{b_1^2 - b_2}{b_1} = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 a_2}. \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Таким же образом можно вычислить и следующие коэффициенты. Не производя самих вычислений, которые довольно громоздки, приведем формулы нескольких коэффициентов ω_i :

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= a_0, \\
 \omega_1 &= a_1, \\
 \omega_2 &= \frac{a_2}{a_1}, \\
 \omega_3 &= \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 a_2}, \\
 \omega_4 &= \frac{a_1(a_3^2 - a_2 a_4)}{a_2(a_2^2 - a_1 a_3)}, \\
 \omega_5 &= \frac{a_2[a_5(a_2^2 - a_1 a_3) + a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]}{(a_2^2 - a_1 a_3)(a_3^2 - a_2 a_4)}, \\
 \omega_6 &= \frac{(a_2^2 - a_1 a_3)[a_6(a_3^2 - a_2 a_4) + a_5(a_2 a_5 - a_3 a_4) + a_4(a_4^2 - a_3 a_5)]}{(a_3^2 - a_2 a_4)[a_5(a_2^2 - a_1 a_3) + a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]}, \\
 \omega_7 &= \frac{P_7}{Q_7}, \text{ где } P_7 \text{ и } Q_7 \text{ соответственно равны:} \\
 P_7 &= (a_3^2 - a_2 a_4)[(a_2^2 - a_1 a_3)(a_6^2 - a_5 a_7) + (a_1 a_4 - a_2 a_3)(2a_5 a_6 - a_4 a_7) + \\
 &+ (a_3^2 - a_2 a_4)(2a_4 a_6 - a_3 a_7) + a_4^2(a_4^2 - a_3 a_5) + a_5^2(a_3^2 - a_1 a_5) + 2a_4 a_5(a_2 a_5 - a_3 a_4)], \\
 Q_7 &= [a_6(a_3^2 - a_2 a_4) + a_5(a_2 a_5 - a_3 a_4) + a_4(a_4^2 - a_3 a_5)] [a_5(a_2^2 - a_1 a_3) + \\
 &+ a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]. \tag{2.6.25}
 \end{aligned}$$

Во многих практически важных случаях разложения функций в цепную дробь достаточно первых нескольких коэффициентов, чтобы раскрыть закон образования неполных частных данной цепной дроби.

Следует обратить внимание, что формулы Никипорца (2.6.25) совпадают с формулами (2.3), устанавливающими коэффициенты соответствующей цепной дроби по коэффициентам ряда, то есть совпадают с формулами Хейлерманна – Стильеса.

2.7. Рекуррентный алгоритм Рутисхаузера

В теории цепных дробей заметное место занял *алгоритм частных и разностей*, или *QD-алгоритм*, опубликованный Г. Рутисхаузером в 1954 г. [55]. Как отмечает Рутисхаузер во введении к своей работе, поводом для разработки QD-алгоритма было намерение решить проблему получения старших собственных значений непосредственно по константам Шварца. Вскоре, однако, выяснилось, что алгоритм частных и разностей может быть с успехом использован при решении задачи нахождения полюсов функции $f(x)$, а также для нахождения коэффициентов соответствующих цепных дробей по коэффициентам степенного ряда.

Запишем алгоритм Рутисхаузера в несколько модифицированных обозначениях и приведем граф этого алгоритма. Определим для ряда

$$\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}x^2 + \alpha_{12}x^3 + \dots + \alpha_{1_{n-1}}x^n + \dots \quad (2.7.1)$$

коэффициенты α_{n0} , соответствующие цепной дроби

$$\alpha_{00} + \frac{\alpha_{10}X}{1} - \frac{\alpha_{20}X}{1} + \frac{\alpha_{30}X}{1} - \frac{\alpha_{40}X}{1} + \frac{\alpha_{50}X}{1} - \dots - \frac{\alpha_{2n,0}X}{1} + \frac{\alpha_{2n+1,0}X}{1} - \dots \quad (2.7.2)$$

Коэффициенты цепной дроби (2.7.2) находятся по рекуррентным формулам

[illegible]

Элемент таблицы Рутисхаузера определяется по формулам (2.7.3) всего за две операции: при нахождении элемента нечетной строки нужна одна операция сложения и одна операция вычитания, при нахождении элемента четной строки используется одна операция умножения и одна операция деления.

Схема Рутисхаузера, определяемая формулами (2.7.3), показана на рис. 2.1.

Найдем по формулам (2.7.3) несколько первых коэффициентов α_n , соответствующей цепной дроби (2.7.2). Ранее соответствующая цепная дробь и степенной ряд записывались, как правило, в виде

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 X}{1} - \frac{\omega_2 X}{1} + \frac{\omega_3 X}{1} - \frac{\omega_4 X}{1} + \frac{\omega_5 X}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n} X}{1} - \frac{\omega_{2n+1} X}{1} - \dots \quad (2.7.4)$$

И

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (2.7.5)$$

то есть имеют место равенства

$$\alpha_{n0} = \omega_n, \quad \alpha_{1n} = c_{n+1}. \quad (2.7.6)$$

Таким образом, используя рекуррентные формулы (2.7.3), получим:

$$\begin{aligned}\alpha_{00} &= \omega_0 = c_0, \\ \alpha_{10} &= \omega_1 = c_1, \\ \alpha_{20} &= \omega_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{10}} = \frac{c_2}{c_1}, \\ \alpha_{30} &= \omega_3 = -\alpha_{21} + \alpha_{20} = -\frac{c_3}{c_2} + \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1 c_2}, \\ \alpha_{40} &= \omega_4 = \frac{\alpha_{21} \alpha_{31}}{\alpha_{30}}.\end{aligned}$$

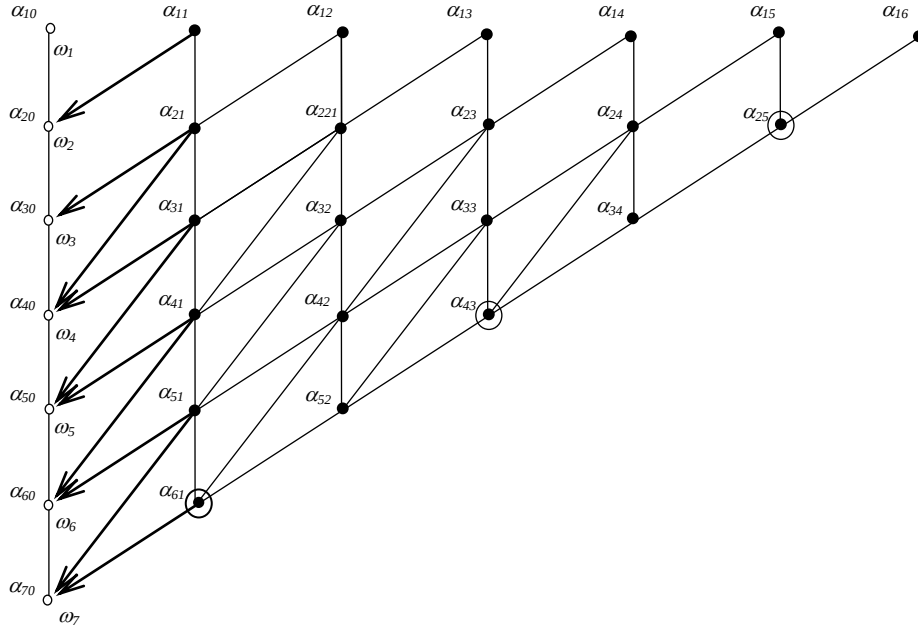


Рис. 2.1. Схема алгоритма Рутисхаузера

Так как

$$\alpha_{21} = \frac{c_3}{c_2}, \quad \alpha_{31} = \frac{c_3^2 - c_2 c_4}{c_2 c_3}, \quad \alpha_{30} = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1 c_2},$$

то, подставляя эти значения, получим

$$\alpha_{40} = \omega_4 = \frac{c_1(c_3^2 - c_2 c_4)}{c_2(c_2^2 - c_1 c_3)}.$$

Установим значение коэффициента α_{50} :

$$\alpha_{50} = \omega_5 = \alpha_{31} - \alpha_{41} + \alpha_{40}.$$

Можно записать

$$\alpha_{31} = -\alpha_{22} + \alpha_{21} = \frac{c_3^3 - c_2 c_4}{c_2 c_3},$$

$$\alpha_{41} = \frac{\alpha_{22} \alpha_{32}}{\alpha_{31}}, \quad \alpha_{22} = \frac{c_4}{c_3}, \quad \alpha_{32} = \frac{c_4^2 - c_3 c_5}{c_3 c_4}, \quad \alpha_{41} = \frac{c_2(c_4^2 - c_3 c_5)}{c_3(c_3^2 - c_2 c_4)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_{50} = \omega_5 &= \frac{c_3^2 - c_2 c_4}{c_2 c_3} - \frac{c_2(c_4^2 - c_3 c_5)}{c_3(c_3^2 - c_2 c_4)} + \frac{c_1(c_3^2 - c_2 c_4)}{c_2(c_2^2 - c_1 c_3)} = \\ &= \frac{c_2[c_5(c_2^2 - c_1 c_3) + c_4(c_1 c_4 - c_2 c_3) + c_3(c_3^2 - c_2 c_4)]}{(c_2^2 - c_1 c_3)(c_3^2 - c_2 c_4)}. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Таким образом, рекуррентный алгоритм Рутисхаузера дает те же коэффициенты для соответствующей цепной дроби, что и рассмотренные ранее алгоритмы, в частности формулы Хейлсманна – Стилтьеса и формулы Никпорца.

2.8. Построение соответствующего ряда для цепной дроби

Преобразованию рядов в соответствующие цепные дроби уделялось много внимания, – построено множество алгоритмов, решающих эту задачу. Часть из этих алгоритмов была рассмотрена в этой главе. Однако математиками совершенно игнорировалась обратная задача, – по данной цепной дроби найти не равноценный, а соответствующий степенной ряд. Поясним примером.

Пусть имеется цепная дробь

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}}. \quad (2.8.1)$$

Если для этой цепной дроби найдем равноценный ряд, то придем к известному ряду Лейбница:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots. \quad (2.8.2)$$

Если же для цепной дроби (2.8.1) построим соответствующий ряд, то получим расходящийся ряд

$$1 - 1 + 5 - 61 + 1385 - 50521 + 2702765 - \dots. \quad (2.8.3)$$

Несложно заметить, что коэффициенты этого расходящегося ряда есть *числа Эйлера*, которые имеют общепринятое обозначение E_n .

Если теперь полученные ряды (2.8.2) и (2.8.3) будем преобразовывать в соответствующие цепные дроби, скажем? по формулам Хейлсманна – Стильтеса, то получим, естественно, различные цепные дроби.

Для медленно сходящегося ряда (2.8.2) получим быстросходящуюся цепную дробь

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{4 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{6 + \frac{3^2}{7 + \dots}}}}}}}, \quad (2.8.4)$$

которую можно получить из соответствующей цепной дроби Лагранжа для логарифмической функции

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{2x}{2 + \frac{2x}{5 + \dots + \frac{nx}{2 + \frac{nx}{2n+1 + \dots}}}}}}}. \quad (2.8.5)$$

при $x = 1$.

Для расходящегося ряда (2.8.3) по формулам Хейлсманна – Стильтеса получим исходную медленно сходящуюся цепную дробь

$$1 - 1 + 5 - 61 + 1385 - 50521 + 2702765 - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}}}.$$

Очевидно, что если имеются формулы, связывающие коэффициенты ряда

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots \quad (2.8.6)$$

и соответствующей цепной дроби

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_3}{1 - \dots - \frac{\omega_{2n}}{1 + \frac{\omega_{2n+1}}{1 - \dots}}}}},$$

то можно решить и обратную задачу: выразить коэффициенты c_i ряда (2.8.6) через коэффициенты ω_i соответствующей цепной дроби. Несколько первых коэффициентов установил А.З. Никипорев [89]:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \omega_0, \\
c_1 &= \omega_1, \\
c_2 &= \omega_1 \omega_2, \\
c_3 &= \omega_1 \omega_2 (\omega_2 - \omega_3), \\
c_4 &= \omega_1 \omega_2 [(\omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_3 \omega_4], \\
c_5 &= \omega_1 \omega_2 [(\omega_2 - \omega_3)^3 - 2 \omega_3 \omega_4 (\omega_2 - \omega_3) - \omega_3 \omega_4 (\omega_4 - \omega_5)], \\
c_6 &= \omega_1 \omega_2 [(\omega_2 - \omega_3)^4 - 3 \omega_3 \omega_4 (\omega_2 - \omega_3)^2 - 2 \omega_3 \omega_4 (\omega_2 - \omega_3) (\omega_4 - \omega_5) + \\
&\quad + \omega_3 \omega_4^2 (\omega_3 - \omega_4) + \omega_3 \omega_4 \omega_5 (2 \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)].
\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

Рассмотрим задачу преобразования цепной дроби в соответствующий ряд в общем виде.

Пусть имеется цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1 x}{b_1 + \frac{a_2 x}{b_2 + \dots + \frac{a_n x}{b_n + \dots}}}.$$

Эквивалентными преобразованиями приведем цепную дробь к каноническому виду

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1 - \frac{\omega_2 x}{1 + \frac{\omega_3 x}{1 - \dots - \frac{\omega_{2n} x}{1 + \frac{\omega_{2n+1} x}{1 - \dots}}}}. \tag{2.8.8}$$

Здесь

$$\omega_0 = b_0, \quad \omega_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, \quad \omega_n = \frac{(-1)^{n+1} a_n}{b_{n-1} b_n}.$$

Запишем цепную дробь (2.8.8) в виде двухчлена:

$$\omega_0 + \omega_1 x z_1, \tag{2.8.9}$$

$$z_1 = \frac{1}{1 - \frac{\omega_2 x}{1 + \frac{\omega_3 x}{1 - \dots - \frac{\omega_{2n} x}{1 + \frac{\omega_{2n+1} x}{1 - \dots}}}}. \tag{2.8.10}$$

Цепную дробь (2.8.10) представим в форме сопряженной цепной дроби

$$z_1 = 1 + \frac{\omega_2' x}{1 - \frac{\omega_3' x}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n}' x}{1 - \frac{\omega_{2n+1}' x}{1 + \dots}}}. \tag{2.8.11}$$

Подставляя (2.8.11) в (2.8.9), получим:

$$\omega_0 + \omega_1 x \left(1 + \frac{\omega_2' x}{1 - \frac{\omega_3' x}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n}' x}{1 - 1 + \dots}} \right) = \omega_0 + \omega_1 x (1 + \omega_2' x z_2). \tag{2.8.12}$$

$$z_2 = \frac{1}{1 - \frac{\omega_3' x}{1 + \frac{\omega_4' x}{1 - \dots + \frac{\omega_{2n}' x}{1 - 1 + \dots}}} = 1 + \frac{\omega_3'' x}{1 - \frac{\omega_4'' x}{1 + \dots - \frac{\omega_{2n}'' x}{1 + 1 - \dots}}}. \tag{2.8.13}$$

Подставляя z_2 в (2.8.12), можно записать

$$\begin{aligned}
\omega_0 + \omega_1 x \left(1 + \omega_2' x \left(1 + \omega_3'' x z_3 \right) \right) &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_4'' x}{1 + \frac{\omega_5'' x}{1 - \dots - \frac{\omega_{2n}'' x}{1 + 1 - \dots}}} = \\
&= 1 + \frac{\omega_4''' x}{1 - \frac{\omega_5''' x}{1 + \dots - \frac{\omega_{2n}''' x}{1 + 1 + \dots}}}.
\end{aligned} \tag{2.8.14}$$

Заменяя z_3 , запишем:

$$\omega_0 + \omega_1 x \left(1 + \omega_2' x \left(1 + \omega_3'' x \left(1 + \omega_4''' x z_4 \right) \right) \right). \quad (2.8.15)$$

Продолжая аналогично, получим ряд

$$\omega_0 + \omega_1 x \left(1 + \omega_2' x \left(1 + \omega_3'' x \left(1 + \dots + \left(1 + \omega_n^{(n-1)} x (1 + \dots) \right) \dots \right) \right) \right) = \quad (2.8.16)$$

$$= \omega_0 + \omega_1 x + \omega_1 \omega_2' x^2 + \omega_1 \omega_2' \omega_3'' x^3 + \dots + \omega_1 \omega_2' \dots \omega_n^{n-1} x^n + \dots \quad (2.8.17)$$

Следовательно, можно записать, что цепной дроби (2.8.8) соответствует ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots, \quad (2.8.18)$$

где

$$c_0 = \omega_0, \quad c_1 = \omega_1, \quad c_2 = \omega_1 \omega_2', \quad c_3 = \omega_1 \omega_2' \omega_3'', \quad \dots \quad c_n = \omega_1 \omega_2' \omega_3'' \dots \omega_n^{(n-1)}, \dots \quad (2.8.19)$$

Коэффициенты c_n соответствующего ряда (2.8.18) через коэффициенты могут быть найдены непосредственно из формул Хейлсманна – Стильеса [38].

Полученные в [79] формулы для нахождения коэффициентов соответствующего ряда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

по коэффициентам цепной дроби

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \frac{\omega_{2n+1} x}{1} - \dots$$

практически малоприменимы, так как связаны с вычислениями определителя высокого порядка. Следовало бы найти эффективные рекуррентные алгоритмы, решающие задачу определения коэффициентов соответствующего ряда по коэффициентам исходной цепной дроби.

ГЛАВА 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ КОНЕЧНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

3.1. Алгоритм Евклида

Пусть a/b рациональное число, причём $a > b$, Применяя к a и b алгоритм Евклида, получаем конечную систему равенств:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1q_1 + r_2 \\ &\dots\dots\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n, \end{aligned}$$

где неполным частным последовательных делений $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ соответствуют остатки $r_1, r_2, \dots, r_n$ с условием $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$.

Можно записать равносильные системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b} \\ \frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1} \\ \frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{r_3}{r_2} \\ &\dots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{1}{b/r_1} \\ \frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{1}{r_1/r_2} \\ \frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{1}{r_2/r_3} \\ &\dots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{1}{r_{n-1}/r_n} \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Заменяя в (3.1.1) значение b/r_1 в первой строке соответствующим значением из второй строки, значение r_1/r_2 – выражением из третьей строки и т.д., получим следующее представление дроби a/b :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}, \quad (3.1.2)$$

которое называется разложением дроби a/b в цепную дробь.

Разложение рационального числа a/b имеет конечное число элементов, т.е. рациональное число представляется по алгоритму Евклида конечной цепной дробью.

Алгоритм Евклида, несмотря на предельную простоту, оказался неисчерпаем в своих свойствах, как и электрон, если вспомнить слова В.И. Ленина об этой «элементарной» частице. Существовали и ныне существуют математические школы, которые десятилетиями изучают те или иные аспекты алгоритма Евклида, например, связь этого алгоритма с метрической арифметикой континимума или с проблематикой многомерных цепных дробей и вопросами геометрической теории чисел. Здесь вспоминаются имена Г.Ф. Вороного, О. Перрона, А.Я. Хинчина, В.И. Арнольда и других математиков [2, 32, 69, 138].

Количество публикаций, связанных с алгоритмом Евклида, исчисляется многими сотнями, и что примечательно, этот поток не иссякает, как то следует из недавно вышедшего «Библиографического указателя» [104], включающем сведения о более, чем 6000 работ по непрерывным дробям.

В этой главе будут рассмотрен иной, нежели алгоритм Евклида, способ представления рациональных и трансцендентных чисел конечными цепными дробями.

3.2. Разложение рациональных чисел в конечные цепные дроби алгоритмом Рутисхаузера

Запишем рациональное число a/b , где $b > a$, в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Не теряя общности, будем полагать, что имеет место чисто периодическая десятичная дробь:

$$\frac{a}{b} = 0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, \dots \quad (3.2.1)$$

которую представим в виде ряда

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_1}{10^{k+1}} + \frac{a_2}{10^{k+2}} + \dots + \frac{a_k}{10^{2k}} + \frac{a_1}{10^{2k+1}} + \dots \quad (3.2.2)$$

Следует отметить, что предлагаемый способ построения конечных цепных дробей может быть использован при представлении рациональных чисел в другой, нежели десятичной, системе исчисления.

Построим для ряда (3.2.2) соответствующую цепную дробь по рекуррентному алгоритму Рутисхаузера.

Запишем ряд (3.2.2) в виде:

$$\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}x^2 + \alpha_{12}x^3 + \dots + \alpha_{1n}x^n + \dots$$

Определим коэффициенты α_{n0} соответствующей степенному ряду цепной дроби

$$\alpha_{00} + \frac{\alpha_{10}x}{1 - \frac{\alpha_{20}x}{1 + \frac{\alpha_{30}x}{1 - \frac{\alpha_{40}x}{1 + \frac{\alpha_{50}x}{\dots - \frac{\alpha_{2n,0}x}{1 + \frac{\alpha_{2n+1,0}x}{\dots}}}}} \quad (3.2.3)$$

Коэффициенты цепной дроби (3.2.3) находятся по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,v} &= \frac{\alpha_{1,v+1}}{\alpha_{1,v}}, \\ \alpha_{3,v} &= -\alpha_{2,v+1} + \alpha_{2,v}, \\ \alpha_{4,v} &= \frac{\alpha_{2,v+1} \cdot \alpha_{3,v+1}}{\alpha_{3,v}}, \end{aligned}$$

(3.2.4)

Запишем ряд (3.2.2) в виде:

(3.2.5)

циенты ω соответствующей цепной дроби

(3.2.6)

конечными цепными дробями, получаемыми по алгоритму Евклида.

ношением чисел Фибоначчи $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Числа Фибоначчи удовлетворяют рекуррентному соотношению [17]:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

Таким образом, числа Фибоначчи составляют последовательность

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Известно, что отношение соседних чисел Фибоначчи раскладывается по алгоритму Евклида в цепную дробь с единичными элементами:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1},$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+1},$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1+1+1},$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}},$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1},$$

.....

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1}}_{n \text{ звеньев}}. \quad (3.2.7)$$

В табл. 3.1 – 3.10 приведены значения коэффициентов ω_i конечных цепных дробей, представляющих рациональные числа, задаваемые соотношением соседних чисел Фибоначчи $\frac{F_n}{F_{n-1}}$. $n = 3, 4, \dots, 12$.

Таблица 3.1

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения $\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0,5	1,5
2	0	

$$\frac{F_3}{F_2} = 1 + \frac{1/2}{1} = 1,5.$$

Таблица 3.2

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения $\frac{F_4}{F_3} = \frac{5}{3} = 1,666\dots$

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0,6	1,6
2	0,1	1,666666666667
3	0	

Имея соответствующую цепную дробь, несложно построить производящую функцию, которая порождает исходный ряд. Для этого конечную цепную дробь представим в виде:

$$\frac{P_2}{Q_2} = 1 + \frac{0,6x}{1} - \frac{0,1x}{1} - \frac{10+5x}{10-x} = \frac{1+(1/2)x}{1-(1/10)x}. \quad (3.2.8)$$

Рациональная функция (3.2.8) – это производящая функция для ряда. В самом деле, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1+(1/2)x}{1-(1/10)x} &= \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \left(1 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{10^2}x^2 + \frac{1}{10^3}x^3 + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{6}{10}x + \frac{6}{10^2}x^2 + \frac{6}{10^3}x^3 + \dots = 1,666666\dots \end{aligned}$$

Таблица 3.3

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения $\frac{F_5}{F_4} = \frac{8}{5} = 1,6$.

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0,6	1,6
2	0	

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{8}{5} = 1 + \frac{0,6}{1} = 1,6$$

Таблица 3.4

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения $\frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1,625$.

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0,6	1,6
2	0,033333333333333	1,620689655172
3	-0,21666666666667	1,6266666666667
4	-0,288461538461	1,625046728971
5	-0,038461538461	1,625
6	0	

Цепная дробь имеет пять звеньев:

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1 + \frac{0,6}{1 - \frac{0,0333...}{1 - \frac{0,2166...}{1 + \frac{0,2884...}{1 - \frac{0,0384...}{1}}}} = 1,625.$$

Таблица 3.5

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1,6153846153846... = 1,(615384)$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0,6	1,6
2	0,0166666666667	1,610169491525
3	-0,4833333333333	1,62
4	-0,455172413793	1,615356622998
5	0,013009404388	1,615388280133
6	-0,096878422782	1,615385501503
7	-0,301125814734	1,615384449150
8	-0,136065573770	1,615384615384
9	0	

Дробь $\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13}$ имеет период 6 десятичных разрядов. Конечная цепная дробь имеет 8 звеньев:

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1 + \frac{0.6}{1 - \frac{0.0166...}{1 - \frac{0.4833...}{1 + \frac{0.4551...}{1 + \frac{0.0130...}{1 + \frac{0.0968...}{1 - \frac{0.3011...}{1 + \frac{0.1360...}{1}}}}} = 1,61538461... \quad (3.2.9)$$

Чтобы построить производящую функцию для ряда

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1 + 6x + 1x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 + 4x^6 + 6x^7 + \dots \quad (3.2.10)$$

где $x = 10^{-1}$, достаточно записать соответствующую цепную дробь (3.2.9) в виде:

$$1 + \frac{0.6x}{1 - \frac{0.0166...x}{1 - \frac{0.4833...x}{1 + \frac{0.4551...x}{1 + \frac{0.0130...x}{1 + \frac{0.0968...x}{1 - \frac{0.3011...x}{1 + \frac{0.1360...x}{1}}}}} \quad (3.2.11)$$

После свертки цепной дроби (3.2.11) получим производящую функцию, то есть рациональную функцию, которая генерирует ряд (3.2.10) – бесконечную периодическую десятичную дробь:

$$\frac{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4}{1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4} = 1 + 6x + 1x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 + \dots, \quad (3.2.12)$$

При $x = 1/10$ имеем исходную периодическую десятичную дробь:

$$1 + 6 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-6} + \dots \quad (3.2.13)$$

Соответствующая цепная дробь (3.2.9) конечная и имеет 8 звеньев. Рассматривая формулу, определяющую коэффициент ω_5 , имеющий нулевое значение, можно сделать вывод, что определитель Ганкеля пятого порядка, составленный из коэффициентов ряда (3.2.13), имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.14)$$

В табл. 3.6 приведены коэффициенты a_i соответствующей цепной дроби, которой представлено отношение чисел Фибоначчи $\frac{F_9}{F_8} = \frac{55}{34}$. Отношение $\frac{55}{34}$ имеет период, состоящий из 16-ти десятичных разрядов, сама же конечная цепная дробь включает 31 звено.

Таблица 3.6

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения $\frac{F_9}{F_8}$

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	0.6	1.6
2	0.016666666664	1.10169491525423728

Окончание табл. 3.6

3	-0.6833333333	1.6333333333333333
4	-0.629268292682	1.61773294398725776
5	-0.011640388706	1.617642566191446028
6	-0.060397816495	1.617647742016837396
7	0.135842296831	1.617647154433789211
8	0.165098710048	1.617647053693578021
9	0.040463157693	1.617647058252614186
...	...	...
28	-0.000240476636	1.617647058823529411
29	-24.1310340281	1.617647058823529411
30	-24.164170548	1.617647058823529411
31	0,549470e-4	1.617647058823529411
32	0	

Цепная дробь для соседних чисел Фибоначчи $\frac{55}{34}$, по алгоритму Евклида имеет

8 звеньев:

$$\frac{F_9}{F_8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}$$

Соответствующая цепная дробь, построенная по периодической десятичной дроби, рассматриваемой как ряд, представляющий рациональное число $\frac{55}{34}$, имеет 31

звено. Рассмотрим отношение десятого и девятого чисел Фибоначчи $\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{89}{55}$.

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{89}{55} = 1 + \frac{0,6}{1} - \frac{0,0166...}{1} - \frac{0,7833...}{1} + \frac{0,8042...}{1} - \frac{0,0042...}{1} = 1.618181818... .$$

В табл. 3.7 приведены коэффициенты конечной цепной дроби, представляющий отношение чисел Фибоначчи.

Таблица 3.7

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для отношения

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{89}{55} = 1,6181818181818... = 1,6(18).$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	1	1
1	1.6	1.6
2	0,016666666666	1.610169791525
3	-0,783333333333	1.65
4	-0,80425531914	1.618209147519
5	-0,00425531914	1.61818181818
6	0	

Так как соответствующая цепная дробь конечна и имеет 5 звеньев, то можно сделать вывод, что хотя бы один из множителей в числителе формулы, устанавливающей коэффициент ω_6 , равен нулю. А именно либо $\varphi_2 = 0$, либо $\psi_4 = 0$.

Определитель Ганкеля второго порядка для φ_2 имеет не нулевое решение:

$$\varphi_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -63 \neq 0,$$

в то время как определитель Ганкеля третьего порядка для ψ_4 равен нулю:

$$\psi_4 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.15)$$

Если длина цепной дроби, полученная по алгоритму Евклида для отношения соседних чисел Фибоначчи строго пропорциональна порядковым номерам чисел Фибоначчи, то длина соответствующей цепной дроби, построенной по «десятичным разрядам» ряда, зависит от длины периода десятичных дробей, представляющих отношение соседних чисел Фибоначчи. В табл. 3.8 приведены сведения о длинах конечных цепных дробей, соответствующих рядам с периодическими десятичными разрядами,

представляющими отношения соседних чисел Фибоначчи $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Таблица 3.8

Число звеньев цепных дробей, представляющих $\frac{F_n}{F_{n-1}}$

Рациональное число F_n / F_{n-1}	Число звеньев дро- би Фибоначчи	Период десятичной дроби для F_n / F_{n-1}	Число звеньев соответствующей цепной дроби
2/1	1	2,0	1
3/2	2	1,5	1
5/3	3	1,(6)	2
8/5	4	1,6	1
13/8	5	1,625	5
21/13	6	1,(615384)	8
34/21	7	1,(619047)	10
55/34	8	1,6(1764705882352941)	31
89/55	9	1,6(18)	5
144/89	10	1,6179775280898...	23
233/144	11	1,6180(5)	7
377/233	12	1,6180257510729613...	189
610/377	13	1,6180371352785145(8)	31
987/610	14	1,6180327868852459...	43
1597/987	15	1,6180344478216...	9
2584/1597	16	1,6180338134001252...	71
4181/2584	17	1,6180340557275554...	29
6765/4181	18	1,6180339631667065...	55
10946/6765	19	1,6180339985218033...	19
17711/10946	20	1,6180333985017357...	77
28657/17711	21	1,6180339901755970...	63
46368/28657	22	1,6180339882051282...	15
75025/46368	23	1,6180339889957902...	37
121393/75025	24	1,6180339886704431...	127

3.3. Представление простейших дробей конечными цепными дробями

В параграфе 3.2 устанавливались конечные цепные дроби для отношения соседних чисел Фибоначчи. Аналогичным приёмом, то есть построением соответствующих цепных дробей по бесконечному периодическому десятичному ряду, можно построить конечные цепные дроби для простейших дробей вида $1/q$, где q – целое число. Очевидно, что дробь $1/q$ разложить в цепные дроби, используя алгоритм Евклида, нельзя.

Рассмотрим разложение числа $1/7$ в цепную дробь.

$$\frac{1}{7} = 0,1428571428571... = 0,(142857).$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{10^7} + ... \quad (3.3.1)$$

В табл. 3.9 приведены коэффициенты ω_n соответствующей ряду (3.3.1) конечной цепной дроби, полученной с использованием алгоритма Рутисхаузера.

Таблица 3.9

Коэффициенты ω_n соответствующей ряду (3.3.1) цепной дроби

Номер звена, n	Значения коэффициентов, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
1	0.1	0.1
2	0.4	0.166666666666...
3	0.35	0.142105263157...
4	-0.05	0.142857142857...
5	-0.014285714...	0.142867701404...
6	-0.914285714...	0.142862621768...
7	-1.00546875...	0.142857080206...
8	-0.00546875...	0.142857142857...
9	0	

Так как девятый коэффициент цепной дроби близок к нулю, то имеем конечную цепную дробь, представляющую число $1/7$:

$$\frac{1}{7} = \frac{0,1}{1} - \frac{0,4}{1} + \frac{0,35}{1} - \frac{0,05}{1} + \frac{0,01428...}{1} - \frac{0,91428...}{1} + \frac{1,00546...}{1} - \frac{0,00546...}{1}. \quad (3.3.2)$$

Отметим, что конечная цепная дробь (3.3.2) для числа $1/7$ может быть преобразована к цепной дроби с целочисленными элементами.

Полученную конечную цепную дробь (3.3.2) следует рассматривать как частный случай соответствующей цепной дроби для степенного ряда:

$$x + 4x^2 + 2x^3 + 8x^4 + 5x^5 + 7x^6 + x^7 + ... =$$

$$\frac{x}{1} - \frac{4x}{1} + \frac{3,5x}{1} - \frac{0,5x}{1} + \frac{0,1428...x}{1} - \frac{0,91428...x}{1} + \frac{1,00546...x}{1} - \frac{0,00546...x}{1}. \quad (3.3.3)$$

При $x = 10^{-1}$ из цепной дроби (3.3.3) получим цепную дробь (3.3.1). Рассматриваемый степенной ряд, очевидно, является расходящимся при $x \geq 1$. Тем не менее, расходящийся ряд при $x \geq 1$ может быть просуммирован, то есть может быть установлено его значение, через конечную цепную дробь (3.3.3) при $x \geq 1$. «Сворачивая» цепную дробь (3.3.3), получим дробно-рациональную функцию. В частности, конечная цепная дробь (3.3.3) имеющая восемь звеньев, после эквивалентных преобразований примет вид:

$$\frac{P_8(x)}{Q_8(x)} = \frac{x(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)}{d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4}.$$

В табл. 3.10 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной по бесконечной периодической десятичной дроби, представляющей дробь $1/13$.

Таблица 3.10

Коэффициенты соответствующей цепной дроби

$1/13 = 0,(076923)$

Номер звена	Значение коэффициентов, ω_i	Значения подходящих дробей
1	0.07	0.07
2	0.085714285714285714286	0.0765625
3	-0.064285714285714285714	0.077058823529411764706
4	-0.29814814814814814815	0.076938304190036291653
5	-0.14814814814814814815	0.076923076923076923077
6	-0.00019565217391304347	0.076923080278004752624
7	1.1998043478260869565	0.07692307844836304006
8	1.0362559112898842203	0.076923076818514360336
9	0.02925842912454641076	0.076923076903954001535
10	0.19300251783466219052	0.076923076923076923077
11	0	

$$\begin{aligned} \frac{1}{13} = & \frac{0,07}{1} - \frac{0,0857...}{1} - \frac{0,0642...}{1} + \frac{0,2981...}{1} - \frac{0,1481...}{1} + \frac{0,0001...}{1} + \\ & \frac{1,1998...}{1} - \frac{1,0362...}{1} + \frac{0,0292...}{1} - \frac{0,1930...}{1} = 0.0769230769230... \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

В табл. 3.11 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной по бесконечной периодической десятичной дроби, представляющей $1/14$.

Таблица 3.11

Коэффициенты соответствующей цепной дроби

$1/28 = 0,03(571428) = 0,03571428574628...$

Номер итерации	Значение коэффициентов ω_i	Значения подходящих дробей
1	0.03	0.03
2	0.1666666666666666667	0.036
3	0.02666666666666666667	0.035813953488372093023
4	0.66	0.035483870967741935484
5	0.82954545454545454545	0.035713968465467466134
6	0.0035180572851805728518	0.035714213930864908866
7	-0.26496545035761910535	0.035714302544769085768
8	-0.16737287946875932499	0.035714286104067260517
9	-0.02843482637141419225	0.035714285714285714286
10	0	

$$\begin{aligned} \frac{1}{28} = & \frac{0,03}{1} - \frac{0,1666...}{1} + \frac{0,0266...}{1} - \frac{0,66...}{1} + \frac{0,8295...}{1} - \\ & - \frac{0,0035...}{1} - \frac{0,2649...}{1} + \frac{0,1673...}{1} - \frac{0,0284...}{1} = 0.03571428... \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

В табл. 3.12 приведены сведения о числе звеньев соответствующих конечных цепных дробей, построенных по бесконечным периодическим десятичным дробям, представляющих обыкновенные дроби $1/n$.

Таблица 3.12

Число звеньев цепных дробей, представляющих обыкновенные дроби $1/n$

$\frac{1}{n}$	Представление десятичной дробью	Период десятичной дроби	Число звеньев дроби
1/2	0,5		1
1/3	0,(3)	0,(3)	2
1/4	0,25		3
1/5	0,2		1
1/6	0,166	0,1(6)	3
1/7	0,142857142857	0,(142857)	8
1/8	0,125		5
1/9	0,111...	0,(1)	2
1/10	0,1		1
1/11	0,90909...	0,(09)	2
1/12	0,833...	0,08(3)	3
1/13	0,769230769...	0,(076923)	10
1/14	0,071428571...	0,0(714285)	8
1/15	0,0666...	0,0(6)	2
1/16	0,0625		5
1/17	0,058823529411764705...	0,(10588235294117627)	30
1/18	0,0555	0,0(5)	2
1/19	0,052613157894736842105...	0,(052631578947368421)	13
1/20	0,05		1
1/21	0,47619047...	0,(047619)	10
1/22	0,0454545...	0,0(45)	4
1/23	0,043478260869565217391304...	0,(043782608695652173913)	40
1/24	0,041666...	0,041(6)	5
1/25	0,04		1
1/26	0,038461538...	0,0(38615)	8
1/27	0,037037...	0,(037)	4
1/28	0,03571428571...	0,03(571428)	9
1/29	0,03448275862068965517241279210...	0,(0344827586206896551724127921034)	47
1/30	0,0333...	0,0(3)	2
1/31	0,032258064516129032...	0,(032258064516129)	26

3.4. Метод производящих функций

Можно записать производящую функцию n -го порядка:

$$\frac{1}{1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots \quad (3.4.1)$$

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + \dots + a_nc_{m-n}), \quad c_0 = 1. \quad (3.4.2)$$

По степенному ряду (3.4.1), порождённому производящей функцией n -го порядка, строится конечная соответствующая цепная дробь.

Соответствующая цепная дробь для степенного ряда – это цепная дробь вида:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1} + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1} + \dots + \frac{\omega_{2n-1}}{1} - \frac{\omega_{2n}}{1} + \dots, \quad (3.4.3)$$

коэффициенты которой определяются формулами Хейлсманна-Стилтьеса:

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1}\psi_{n+1}}{\varphi_n\psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1}\psi_n}{\varphi_n\psi_{n+1}}, \quad (3.4.4)$$

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Если коэффициенты a_i производящей функции

$$\frac{1}{1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}$$

целые числа, то из рекуррентной формулы (3.4.2) следует, что коэффициенты c_i также будут целыми числами. В формулу Хейлсманна – Стилтьеса (3.4.4) входят определители Ганкеля (3.4.5), элементы которых – коэффициенты степенного ряда (3.4.1), то есть целые числа. Из формулы (3.4.4), устанавливающих коэффициенты ω_i соответствующей цепной дроби (3.4.3), следует, что коэффициенты ω_i – рациональные числа. Цепная дробь (3.4.3) с рациональными коэффициентами после эквивалентных преобразований может быть записана в виде:

$$b_0 + \frac{a_1x}{b_1} + \frac{a_2x}{b_2} + \dots + \frac{a_nx}{b_n} + \dots$$

где a_i и b_i – целые числа.

Таким образом, задавая в производящую функцию n -го порядка (3.4.1) при $x = 1$ различные целые a_i , получим разложение рационального числа в конечную цепную дробь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n} &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1}{N} = \\ &= \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1} + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1} + \dots + \frac{\omega_{2n-1}}{1} - \frac{\omega_{2n}}{1}. \end{aligned}$$

Если

$$N = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

то имеем цепную дробь:

$$\frac{1}{N} = \omega_0 + \frac{\omega_1x}{1} - \frac{\omega_2x}{1} + \frac{\omega_3x}{1} - \frac{\omega_4x}{1} + \dots + \frac{\omega_{2n-1}x}{1} - \frac{\omega_{2n}x}{1}.$$

Количество звеньев в соответствующей цепной дроби, построенной по ряду порождаемому производящей функцией n -го порядка, равно $2n$. Очевидно, что одно и то же рациональное число может быть представлено множеством способов, в зависимости от того, как сформирован знаменатель рационального числа производящей функции.

Метод разложения рациональных чисел методом производящих функций проиллюстрируем примерами.

Производящая функция второго порядка порождает ряд:

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (3.4.6)$$

В (3.4.6) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Соответствующая ряду (3.4.6) цепная дробь, построенная по формулам Хейлманна – Стилтесса, имеет 4 звена:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots = 1 - \frac{2x}{1 + \frac{3x}{2 - \frac{x}{3 + \frac{2x}{1}}}} \quad (3.4.7)$$

После «свертки» конечной цепной дроби (3.4.7) получим исходную производящую функцию:

$$1 - \frac{2x}{1 + \frac{3x}{2 - \frac{x}{3 + \frac{2x}{1}}}} = \frac{1}{1+2x+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (3.4.8)$$

При $x = 1$ получим цепную дробь для $1/4$:

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{3}{2 - \frac{1}{3 + \frac{2}{1}}}} \quad (3.4.9)$$

Если $x = 2$, то получим цепную дробь для $1/9$:

$$\frac{1}{9} = 1 - \frac{4}{1 + \frac{6}{2 - \frac{2}{3 + \frac{4}{1}}}} \quad (3.4.10)$$

Построение соответствующих цепных дробей с использованием производящих функций показывает, что в конечные цепные дроби могут быть разложены не только рациональные числа, но и трансцендентные числа.

Например,

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1}{1 - 2\cos 1 + x^2} &= \sin 1 + \sin 2x + \sin 3x^2 + \sin 4x^3 + \dots + \sin x^{n-1} + \dots = \\ &= 0,841470\dots + \frac{0.9092\dots x}{1} - \frac{0.1551\dots x}{1} + \frac{5.5180\dots x}{1} - \frac{6.4434\dots x}{1}. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

При $x = 1$ из (3.4.11) получим:

$$\frac{\sin 1}{2(1 - \cos 1)} = 0,841470\dots + \frac{0.9092\dots}{1} - \frac{0.1551\dots}{1} + \frac{5.5180\dots}{1} - \frac{6.4434\dots}{1} = 0.9152438908\dots \quad (3.4.12)$$

Более подробно этот вопрос рассмотрен в главе 8.

ГЛАВА 4

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

4.1. О цепных дробях, представляющих $\ln(-1)$

Как известно, $\ln(-1) = i\pi$. Запишем цепную дробь, которой может быть представлен $\ln(-1)$. При $x = -2$ цепная дробь Лагранжа

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \dots + \frac{nx}{2} - \frac{nx}{2n+1} + \dots \quad (4.1.1)$$

примет вид:

$$\ln(-1) = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots \quad (4.1.2)$$

Цепную дробь (4.1.2) представим в эквивалентной записи:

$$\frac{1}{2} \ln(-1) = -\frac{1}{1} - \frac{\frac{2}{2}}{1} - \frac{\frac{2}{2} \cdot 3}{1} - \frac{\frac{4}{2} \cdot 3}{1} - \frac{\frac{4}{2} \cdot 5}{1} - \frac{\frac{6}{2} \cdot 5}{1} - \frac{6}{1} - \frac{6}{1} - \dots - \frac{2n}{1} - \frac{2n}{1} - \dots$$

Цепная дробь (4.1.2) – расходящаяся. В табл. 4.1 приведены значения первых 60-ти подходящих дробей разложения (4.1.2):

Таблица 4.1

Значения подходящих цепной дроби

$$\ln(-1) = i\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots$$

n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
1	-2,000000	16	0	31	3,25125...	46	$-\infty$
2	$-\infty$	17	-2,97215...	32	0	47	3,2077...
3	4	18	$-\infty$	33	-3,05058...	48	0
4	0	19	3,30239...	34	$-\infty$	49	-3,20257...
5	-2,666666...	20	0	35	3,23003...	50	$-\infty$
6	$-\infty$	21	-3,00217...	36	0	51	3,20257...
7	3,55555...	22	$-\infty$	37	-3,06003...	52	0
8	0	23	3,3751...	38	$-\infty$	53	-3,08396...
9	-2,844444	24	0	39	3,22108...	54	$-\infty$
10	$-\infty$	25	-3,02317...	40	0	55	3,19818...
11	3,41333	26	$-\infty$	41	-3,0677...	56	0
12	0	27	3,25372...	42	$-\infty$	57	-3,0879...
13	-2,92571	28	0	43	3,21378...	58	$-\infty$
14	$-\infty$	29	-3,0386...	44	0	59	3,19438...
15	3,34367	30	$-\infty$	45	-3,07405...	60	0

На рис. 4.1 показаны подходящие дроби разложения (4.1.2).

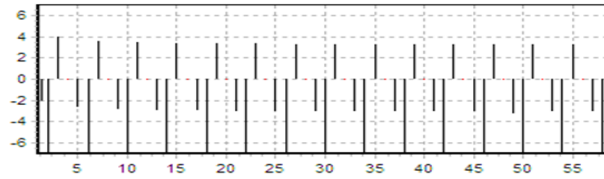


Рис. 4.1. Подходящие дроби разложения(4.1.2).

Достаточно беглого взгляда на табл. 4.1, чтобы заметить, что значения подходящих дробей разложения (4.1.2) группируются в четыре последовательности. Устанавливаем, что все подходящие дроби с номерами $4k$ ($k = 1, 2, \dots$) равняются нулю:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_8}{Q_8} = \frac{P_{12}}{Q_{12}} = \dots = \frac{P_{60}}{Q_{60}} = 0,$$

а подходящие дроби с номерами $4k - 2$ ($k = 1, 2, \dots$) имеют значение $-\infty$:

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_6}{Q_6} = \frac{P_{10}}{Q_{10}} = \dots = \frac{P_{58}}{Q_{58}} = -\infty.$$

Значения подходящих дробей с номерами $4k - 1$, ($k = 1, 2, \dots$) образуют убывающую последовательность положительных чисел:

$$\frac{P_3}{Q_3} = 4.00000, \quad \frac{P_7}{Q_7} = 3.55555, \dots, \quad \frac{P_{11}}{Q_{11}} = 3.41333, \dots, \quad \frac{P_{59}}{Q_{59}} = 3.19438, \dots$$

Напротив, значения подходящих дробей с номерами $4k - 3$, ($k = 1, 2, \dots$) образуют возрастающую по модулю последовательность отрицательных чисел:

$$\frac{P_1}{Q_1} = -2.00000, \quad \frac{P_5}{Q_5} = -2.66666, \dots, \quad \frac{P_9}{Q_9} = -2.84444, \dots, \quad \frac{P_{57}}{Q_{57}} = -3.08790, \dots$$

Так как $e^{i\pi} = -1$, то

$$-\ln(-1) = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{i\pi} = e^{\frac{3i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\pi = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots \quad (4.1.3)$$

В табл. 4.2 приведены значения первых 60-ти подходящих цепной дробей (4.1.3).

Таблица 4.2

Значения подходящих цепной дроби

$$-\ln(-1) = -i\pi = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots$$

n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n	n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
1	2	16	0	31	-3,25125...	46	∞
2	∞	17	2,97215...	32	0	47	-3,2077...
3	-4	18	∞	33	3,05058...	48	0
4	0	19	-3,30239...	34	∞	49	3,20257...
5	2,666666...	20	0	35	-3,23003...	50	∞
6	∞	21	3,00217...	36	0	51	-3,20257...
7	-3,55556...	22	∞	37	3,06003...	52	0
8	0	23	-3,3751...	38	∞	53	3,08396...
9	2,84444...	24	0	39	-3,22108...	54	∞
10	∞	25	3,02317...	40	0	55	-3,19818...
11	-3,41333...	26	∞	41	3,0677...	56	0
12	0	27	-3,25372...	42	∞	57	3,0879...
13	2,92571...	28	0	43	-3,21378...	58	∞
14	∞	29	3,0386...	44	0	59	-3,19438...
15	-3,34367...	30	∞	45	3,07405...	60	0

На рис. 4.2 показаны значения подходящих сопряжённой цепной дроби, представляющей $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\pi$.

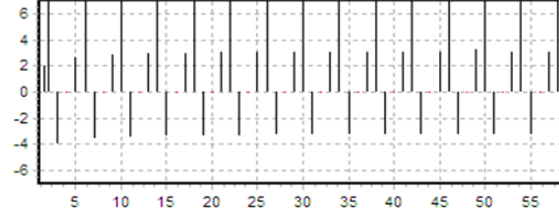


Рис. 4.2. Подходящие дроби разложения (4.1.3).

В [78] отмечалось, что если разложение имеет пары подходящих дробей, равные 0 и ∞ или $0 - \infty$, то такие пары должны изыматься из последовательности подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$. Для нахождения модуля комплексного числа, представленного расходящейся цепной дробью (4.1.2), используется формула r/φ -алгоритма:

$$r_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|}. \quad (4.1.4)$$

Модуль аргумента комплексного числа, которое имеет своим значением цепная дробь (4.1.2), найдем при помощи второй формулы r/φ -алгоритма:

$$|\varphi_n| = \pi \cdot \frac{k_n}{n}, \quad (4.1.5)$$

где k_n – число отрицательных подходящих дробей из общего числа n подходящих дробей.

Используя формулы (4.1.4) и (4.1.5), определим модуль и аргумент комплексного числа, которое является значением расходящейся цепной дроби (4.1.2). Результаты вычисления $\ln(-1)$ приведены в табл. 4.3.

В колонке 1 табл. 4.3 обозначены номера подходящих дробей разложения (4.1.2). В колонке 2 приведены значения подходящих дробей разложения (4.1.2), из анализа которых видно, что подходящие дроби с номерами $4k-3$ имеют своими пределами число $-\pi$, а подходящие дроби с номерами $4k-1$ стремятся к значению π .

Таблица 4.3

Нахождение значений цепной дроби, представляющей $\ln(-1)$

$$\ln(-1) = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots$$

$$r_0 = 3.1415926536536..., \quad \varphi_0 = 1.5707963268$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-2.0000000000	2.0000000000	1.1415926536	3.1415926536	1.5707963268
3	4.0000000000	2.8284271247	0.3131655288	2.0943951024	0.5235987756
5	-2.6666666667	2.7734450974	0.3681475562	1.8849555922	0.3141592654
7	3.5555555556	2.9511517859	0.1904408677	1.7951958021	0.2243994753
9	-2.8444444444	2.9294947821	0.2120978714	1.7453292520	0.1745329252
15	3.3436734694	3.0352870199	0.1063056337	1.6755160819	0.1047197551
17	-2.9721541950	3.0282065530	0.1133861006	1.6631961107	0.0923997839
31	3.2412518708	3.0852589092	0.0563337444	1.6214671760	0.0506708493
33	-3.0505899961	3.0832086983	0.0583839553	1.6183962155	0.0475998887

Окончание табл. 4.3

...	...	...	...	...	...
8191	3.1419761722	3.1413590551	0.0002335985	1.5709880978	0.0001917710
8193	-3.1412092754	3.1413590186	0.0002336350	1.5709880510	0.0001917242
16383	3.1417844070	3.1414758405	0.0001168131	1.5708922064	0.0000958797
16385	-3.1414009352	3.1414758313	0.0001168222	1.5708921947	0.0000958679
32767	3.1416885289	3.1415342436	0.0000584100	1.5708442652	0.0000479384
32769	-3.1414967871	3.1415342413	0.0000584123	1.5708442622	0.0000479354

В колонке 3 даны значения модуля r_n комплексного числа $\ln(-1)$, определяемого по формуле (4.1.4). Значение r_n с ростом номера n стремится к константе. Аргумент φ комплексного числа $\ln(-1)$ равен $\pi/2$. Именно к этому значению, что подтверждают данные колонок 5 и 6 табл. 4.3, приближается величина φ_n .

Таким образом, из “расходящегося” разложения (4.1.2) установлено, что в самом деле имеет место равенство:

$$\ln(-1) = \pi e^{i\pi/2}, \text{ то есть } \ln(-1) = \pi i.$$

“Расходящаяся” цепная дробь

$$\ln(-1) = \pi i = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots$$

примечательна тем, что две последовательности ее подходящих дробей имеют пределы в традиционном смысле:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{4k-1}}{Q_{4k-1}} = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{4k-3}}{Q_{4k-3}} = -\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, можно записать

$$\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots \quad (4.1.6)$$

при условии, что подходящие дроби разложения (4.1.6) содержат $4k-1$, $k = 1, 2, \dots$ звеньев.

Цепную дробь (4.1.6) запишем в виде:

$$\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2}{2} - \frac{2n}{2n-1} - \frac{2}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots \quad (4.1.7)$$

Правильная цепная дробь, представляющая число π , имеет вид:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \quad (4.1.8)$$

Какие-либо закономерности в структуре разложения (4.1.8) не установлены.

Интересно сравнить цепную дробь (4.1.7), которой может быть представлена константа π , с цепной дробью Эйлера [2]:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3} + \frac{1}{1/4} + \dots + \frac{1}{1/n} + \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 3}{1} + \frac{3 \cdot 4}{1} + \dots + \frac{(n-1) \cdot n}{1} + \dots \quad (4.1.9)$$

В 1999 в работе [130] была приведена цепная дробь для π :

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{7^2}{6} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{6} + \dots \quad (4.1.10)$$

В табл. 4.4 даны значения подходящих дробей (4.1.10).

Таблица 4.4

Значения подходящих цепной дроби

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{7^2}{6} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{1} + \dots$$

n	Значения подходящих дробей	Погрешность $ \pi - P_n/Q_n $
2	3,166666666666667	0,02507401307687
4	3,14523809523810	0,00364544164830
8	3,14207181707182	0,00047916348202
16	3,14165339419743	0,00006074060763
32	3,14160027369869	0,00000762010889
64	3,14159360697329	0,00000095338349
128	3,14159277278999	0,00000011920020
256	3,14159266849067	0,00000001490088
512	3,14159265545243	0,00000000186264
1024	3,14159265382262	0,00000000023283
2048	3,14159265361890	0,00000000002910
4096	3,14159265359343	0,00000000000364

Константа $-\pi$ определяется той же цепной дробью (4.1.6), что и π :

$$-\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \frac{6}{2} - \frac{6}{7} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots \quad (4.1.11)$$

с той лишь разницей, что подходящие дроби – это подходящие с номерами $4k-3$, $k=1, 2, \dots$ звеньев.

В табл. 4.5 и табл. 4.6 приведены результаты вычислений значений констант π и $-\pi$ при помощи цепной дроби (4.1.6). Следует обратить внимание на низкую скорость сходимости. Использование цепной дроби с 8388609 звеньями обеспечивает нахождение констант лишь с шестью верными знаками. Как можно заметить из таблиц, уменьшение погрешности вдвое при нахождении констант π и $-\pi$ достигается за счет удвоения количества звеньев цепной дроби.

Таблица 4.5

$$\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \left(\frac{P_{4k-1}}{Q_{4k-1}} \right)$$

Определение константы π
из “расходящейся” цепной дроби (4.1.6)

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность $\varepsilon_r = r_0 - r_n $
3	4.000000000000	0.8584073464102
7	3.555555555555	0.4139629019657
15	3.343673469387	0.2020808157979
31	3.241251870808	0.0996592172191
63	3.191057433389	0.0494647797998
127	3.166231463931	0.0246388103417
255	3.153888374267	0.0122957206772
511	3.147734557122	0.0061419035323
123	3.144662111728	0.0030694581391
2047	3.143127008701	0.0015343551119
4095	3.142359737587	0.0007670839978
8191	3.141976172190	0.0003835186007
16383	3.141784407039	0.0001917534497
32667	3.141688528851	0.0000958752621
65535	3.141640590855	0.0000479372653
131071	3.141616622131	0.0000239685412

Таблица 4.6

$$-\pi = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \left(\frac{P_{4k-3}}{Q_{4k-3}} \right)$$

Определение константы $-\pi$
из “расходящейся” цепной дроби (4.1.11)

Номер дроби	Значение подходящих дробей	Погрешность $\varepsilon_r = r_0 - r_n $
5	-2.666666666666	0.4749259869231
9	-2.844444444444	0.2971482091453
17	-2.972154195011	0.1694384585784
33	-3.050589996055	0.0910026575342
65	-3.094358723286	0.0472339303028
129	-3.117520210640	0.0240724429494
257	-3.129439627179	0.0121530264101
513	-3.135486562736	0.0061060908533
125	-3.138532166092	0.0030604874977
2049	-3.140060543327	0.0015321102623
4097	-3.140826131078	0.0007665225114
8193	-3.141209275394	0.0003833781949
16385	-3.141400935245	0.0001917183440
32669	-3.141496787104	0.0000958664850
65537	-3.141544718518	0.0000479350709
131073	-3.141568685597	0.0000239679926

Окончание табл. 4.5

262143	3.141604637837	0.0000119842481
524287	3.141598645712	0.0000059921230
1048575	3.141595649656	0.0000029960666
2097151	3.141594151628	0.0000014980388
4 194 303	3.141593402615	0.0000007490253
8 388 607	3.141593028108	0.0000003745187

Окончание табл. 4.6

262145	-3.141580669478	0.0000119841110
524289	-3.141586661513	0.0000059920767
1048577	-3.141589657544	0.0000029960456
2097153	-3.141591155557	0.0000014980326
4 194 305	-3.141591904566	0.0000007490229
8 388 609	-3.141592279072	0.0000003745175

Непосредственное определение комплексной константы πi из представляющей эту константу цепной дроби (4.1.2) невозможно, ибо среди подходящих дробей разложения (4.1.2) периодически встречаются подходящие дроби, имеющие значение 0 и $-\infty$. Константу πi можно определить без исключения подходящих с экстремальными значениями, если вместо цепной дроби (4.1.2) рассматривать "близкую" цепную дробь:

$$\ln[1-(2+\varepsilon)] = -\frac{2+\varepsilon}{1} - \frac{2+\varepsilon}{2} - \frac{2+\varepsilon}{3} - \frac{2(2+\varepsilon)}{2} - \frac{2(2+\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n(2+\varepsilon)}{2} - \frac{n(2+\varepsilon)}{2n+1} - \dots$$

В табл. 4.7 приведены результаты вычислений $\ln(-1.0000000001)$, выполненные с использованием r/φ -алгоритма.

Таблица 4.7

Определение значения цепной дроби

$$\ln(-1.0000000001) = -\frac{2+10^{-10}}{1} - \frac{2+10^{-10}}{2} - \frac{2+10^{-10}}{3} - \frac{2(2+10^{-10})}{2} - \frac{2(2+10^{-10})}{5} - \dots \quad (4.1.12)$$

$$r_0 = 3,1415926... \quad \varphi_0 = 1,5707963...$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	3999999671,03854	39999996692,385	39999996689,24	0	1,570796326794
3	3,9999999930	399999,98342692	399996,8418342	0	1,570796326794
4	-0,0000000030	3,6342411853311	0,492648531741	1,0471975511966	0,523598775598
5	-2,6666666737	3,3635856610043	0,221993007414	1,5707963267949	0,000000000001
6	1777777631,57269	296,08561621379	292,9440235602	1,2566370614359	0,314159265358
7	3,5555555423	141,68776065371	138,5461680001	1,047197551196	0,523598775598
8	-0,0000000061	3,3707815248898	0,229188871300	1,3463968515384	0,224399475256
9	-2,8444444577	3,3000001627931	0,158407509203	1,5707963267949	0,000000000001
...	...	...	...	...	...
511	3,1477337523	3,263003352632	0,121410699042	1,564636341200	0,006159985595
512	-0,0000004019	3,148756440574	0,007163786984	1,567722361380	0,003073965414
513	-3,1354873676	3,148730468342	0,007137814752	1,570796326795	0,000000000000
514	24400671,8822879	3,262226965434	0,120634311844	1,567734345651	0,003061981144
...	...	...	...	...	...
1023	3,1446605027	3,1998242697219	0,058231616132	1,5677223613804	0,003073965414
1024	-0,0000008040	3,1455539831881	0,003961329598	1,5692608465145	0,001535480280
1025	-3,1385337752	3,1455471184447	0,003954464854	1,5707963267949	6,1257422E-17
1026	12235991,9124051	3,1996392632635	0,058046609673	1,5692638425736	0,001532484221
...	...	...	...	...	...
2047	3,1431237911	3,1696667003169	0,028074046727	1,5692608465146	0,001535480280
2048	-0,0000016083	3,1437645735535	0,002171919963	1,5700289617110	0,000767365083
2049	-3,1400637609	3,1437627640365	0,002170110446	1,5707963267949	0,000000000000
2050	6126946,94124773	3,1696221882921	0,028029534702	1,5700297107252	0,000766616069
...	...	...	...	...	...

Окончание табл. 4.7

4095	3,1423540593	3,155154241795	0,013561588205	1,570028961711	0,000767365084
4096	-0,0000032136	3,142774672481	0,001182018891	1,570412737948	0,000383588847
4097	-3,1408318105	3,142774196772	0,001181543182	1,570796326795	6,1257422E-17
4098	3068710,43985908	3,155143487048	0,013550833458	1,570412925202	0,000383401593

Для $\ln(-1.0000000001)$ комплексное число $r_n e^{i\varphi_n}$, которое является его значением, имеет аргумент φ , который несколько меньше, чем $\pi/2$.

На рис. 4.3 показаны подходящие цепной дроби (4.1.12).

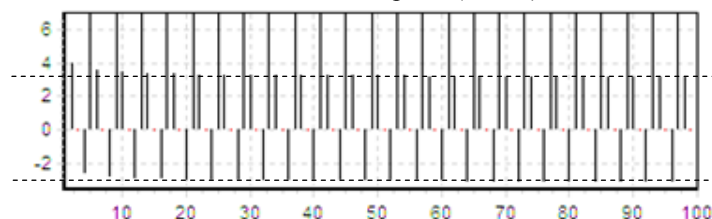


Рис. 4.3. Подходящие цепной дроби (4.1.12)

В табл. 4.8 приведены результаты вычисления $\ln(-0,999999999)$.

Таблица 4.8

Определение значения цепной дроби

$$\ln(-0,999999999) = -\frac{2-10^{-10}}{1} - \frac{2-10^{-10}}{2} - \frac{3-10^{-10}}{3} - \frac{2(2-10^{-10})}{2} - \frac{2(2-10^{-10})}{5} - \dots \quad (4.1.13)$$

Номер звена дроби	Значение подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	-3999999667,03854	3999999667,0385	3999999663,896	3,141592653590	1,570796326795
3	4,00000000700	126491,1012528	126487,9596601	1,570796326795	0,000000000000
4	0,00000000300	3,634241188996	0,492648535406	1,047197551197	0,523598775598
5	-2,66666665967	3,363585661120	0,221993007530	1,570796326795	0,000000000001
6	-1777777629,79491	186,81746787497	183,6758752213	1,884955592154	0,314159265359
7	3,55555556878	96,530779429376	93,38918677578	1,570796326795	0,000000000001
8	0,00000000611	3,370782478709	0,229189825119	1,346396851538	0,224399475256
9	-2,84444443122	3,300000977750	0,158408324161	1,570796326795	0,000000000001
...	...	...	...	...	...
511	3,14773536194	3,248304514013	0,106711860424	1,570796326795	0,000000000001
512	0,00000040191	3,148756438824	0,007163785234	1,567722361380	0,003073965414
513	-3,13548575792	3,148730464859	0,007137811269	1,570796326795	0,000000000000
514	-24400671,65958160	3,247617366340	0,106024712750	1,573858307939	0,003061981144
...	...	...	...	...	...
1023	3,14466372080	3,192623116942	0,051030463352	1,570796326795	6,12574227E-17
1024	0,00000080403	3,145553978757	0,003961325167	1,569260846515	0,001535480280
1025	-3,13853055703	3,145547112286	0,003954458696	1,570796326795	6,12574227E-17
1026	-12235991,88354690	3,192459576569	0,050866922979	1,572328811016	0,001532484221
...	...	...	...	...	...
2047	3,14313022627	3,166101538038	0,024508884448	1,570796326795	6,12574227E-17
2048	0,00000160828	3,143764573393	0,002171919803	1,570028961711	0,000767365084
2049	-3,14005732577	3,143762762146	0,002170108556	1,570796326795	6,12574227E-17
2050	-6126946,939288500	3,166062291187	0,024469637598	1,571562942865	0,000766616070
...	...	...	...	...	...

Окончание табл. 4.8

4095	3,14236617215	3,153380190051	0,011787536462	1,570796326795	6,1257422E-17
4096	0,00000321678	3,142774672617	0,001182019027	1,570412737948	0,000383588847
4097	-3,14081969653	3,142774195179	0,001181541590	1,570796326795	6,1257422E-17
4098	-3065715,843481140	3,153370738282	0,011778084693	1,571179728388	0,000383401593

Для $\ln(-0,99\dots 9)$ комплексное число $r_n e^{i\varphi_n}$, является его значением, имеет аргумент φ , который несколько больше, чем $\pi/2$.

На рис. 4.4 показаны подходящие цепной дроби (4.1.13).

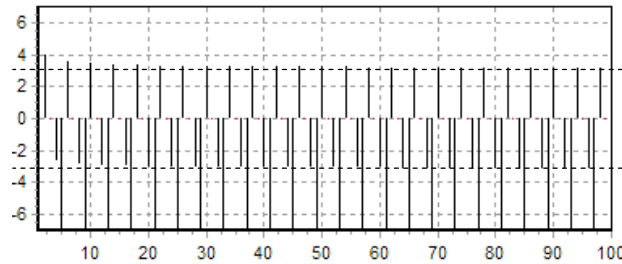


Рис. 4.4 – Подходящие цепной дроби (4.1.13)

Запишем цепную дробь $\ln(-(1+\varepsilon))$.

$$\begin{aligned}
 \ln(1-(2+\varepsilon)) &= \ln(-(1+\varepsilon)) = \\
 &= -\frac{2+\varepsilon}{1} - \frac{2+\varepsilon}{2} - \frac{2+\varepsilon}{3} - \frac{2(2+\varepsilon)}{2} - \frac{2(2+\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n(2+\varepsilon)}{2} - \frac{n(2+\varepsilon)}{2n+1} - \dots \\
 &= -\frac{2+\varepsilon}{1} - \frac{2+\varepsilon}{2} - \frac{2+\varepsilon}{3} - \frac{2^2(2+\varepsilon)}{4} - \frac{2^2(2+\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n^2(2+\varepsilon)}{2n} - \frac{n^2(2+\varepsilon)}{2n+1} - \dots \quad (4.1.14)
 \end{aligned}$$

Сопряженная цепная дробь для (4.2.14) имеет вид

$$r_1 e^{-i\varphi_1} = \frac{r_1^2}{r_1 e^{i\varphi_1}} = \frac{r_1^2}{-\frac{2+\varepsilon}{1} - \frac{2+\varepsilon}{2} - \frac{2+\varepsilon}{3} - \frac{2^2(2+\varepsilon)}{4} - \frac{2^2(2+\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n^2(2+\varepsilon)}{2n} - \frac{n^2(2+\varepsilon)}{2n+1} - \dots} \quad (4.1.15)$$

Следовательно, $\frac{P_n^{(e)}}{P_n} = \frac{r_1^2}{P_n / Q_n}$.

$$\begin{aligned}
 \ln(1-(2-\varepsilon)) &= \ln(-1+\varepsilon) = \\
 &= -\frac{2-\varepsilon}{1} - \frac{2-\varepsilon}{2} - \frac{2-\varepsilon}{3} - \frac{2(2-\varepsilon)}{2} - \frac{2(2-\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n(2-\varepsilon)}{2} - \frac{n(2-\varepsilon)}{2n+1} - \dots \\
 &= -\frac{2-\varepsilon}{1} - \frac{2-\varepsilon}{2} - \frac{2-\varepsilon}{3} - \frac{2^2(2-\varepsilon)}{4} - \frac{2^2(2-\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n^2(2-\varepsilon)}{2n} - \frac{n^2(2-\varepsilon)}{2n+1} - \dots \quad (4.1.16)
 \end{aligned}$$

Сопряженная цепная дробь для (4.1.16) также имеет вид:

$$r_2 e^{-i\varphi_2} = \frac{r_2^2}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_2^2}{-\frac{2+\varepsilon}{1} - \frac{2-\varepsilon}{2} - \frac{2-\varepsilon}{3} - \frac{2^2(2-\varepsilon)}{4} - \frac{2^2(2-\varepsilon)}{5} - \dots - \frac{n^2(2-\varepsilon)}{2n} - \frac{n^2(2-\varepsilon)}{2n+1} - \dots} \quad (4.1.17)$$

$$\frac{P_n^{(c)}}{P_n} = \frac{r_2^2}{P_n / Q_n}.$$

В табл. 4.9 приведены результаты определения значений сопряжённой цепной дроби (4.1.15) при $\varepsilon = -2,000000001$.

Таблица 4.9

Определения значений сопряжённой цепной дроби ($x = -2,000000001$)

3.1415926 ² ...					
$\frac{2+10^{-10}}{1} - \frac{2+10^{-10}}{2} - \frac{2+10^{-10}}{3} - \frac{2^2(2+10^{-10})}{4} - \frac{2^2(2+10^{-10})}{5} - \dots$					
Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	0,000000002	0,000000002	3,141592651	0,000000000	1,570796327
3	2,467401105	0,000078026	3,141514628	0,000000000	1,570796327
4	-3289867866,42637	2,715726196	0,425866457	1,047197551	0,523598776
5	-3,701101641	2,934250851	0,207341803	1,570796327	0,000000000
6	0,000000006	0,052830200	3,088762454	1,256637061	0,314159265
7	2,775826248	0,102243080	3,039349574	1,047197551	0,523598776
8	-1615026046,03066	2,927986101	0,213606553	1,346396852	0,224399475
9	-3,469782781	2,990788282	0,150804372	1,570796327	0,000000000
...	...				
511	3,135463536	3,038386441	0,103206213	1,564636341	0,006159986
512	-24556749,3073314	3,134445164	0,007147490	1,567722361	0,003073965
513	-3,147709828	3,134471017	0,007121637	1,570796327	0,000000000
514	0,000000404	3,039029315	0,102563338	1,567734346	0,003061981
...	...				
1023	3,138527797	3,091377853	0,050214800	1,567722361	0,003073965
1024	-12275114,9817371	3,137636316	0,003956338	1,569260847	0,001535480
1025	-3,144654513	3,137643162	0,003949492	1,570796327	0,000000000
1026	0,000000807	3,091536212	0,050056441	1,569263843	0,001532484
...	...				
2047	3,140062262	3,117273493	0,024319160	1,569260847	0,001535480
2048	-6136740,71715014	3,139422235	0,002170419	1,570028962	0,000767365
2049	-3,143122291	3,139424040	0,002168613	1,570796327	0,000000000
2050	0,000001611	3,117312132	0,024280521	1,570029711	0,000766616
...	...				
4095	3,140832188	3,129849180	0,011743473	1,570028962	0,000767365
4096	-3068165,915545110	3,140411080	0,001181574	1,570412738	0,000383589
4097	-3,142352925	3,140411554	0,001181100	1,570796327	0,000000000
4098	0,000003219	3,129858559	0,011734095	1,570412925	0,000383402

На рис. 4.5 показаны подходящие сопряженной цепной дроби (4.1.15).

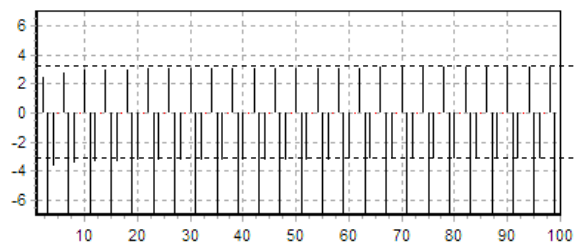


Рис. 4.5. Подходящие цепной дроби (4.1.15).

В табл. 4.10 приведены результаты определения значений сопряжённой цепной дроби (4.1.17) при $x = -1,999999999$.

Таблица 4.10

Определения значений сопряжённой цепной дроби ($x = -1,999999999$)

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	-0,000000002	0,000000002	3,141592651	3,141592654	1,570796327
3	2,467401096	0,000078026	3,141514628	1,570796327	0,000000000
4	3289867856,55676	2,715726422	0,425866232	1,047197551	0,523598776
5	-3,701101660	2,934251037	0,207341616	1,570796327	0,000000000
6	-0,000000006	0,052830204	3,088762450	1,884955592	0,314159265
7	2,775826227	0,102243086	3,039349567	1,570796327	0,000000000
8	1615026036,16106	2,927986249	0,213606405	1,346396852	0,224399475
9	-3,469782813	2,990788417	0,150804236	1,570796327	0,000000000
...	...	...	...	...	...
511	3,135461933	3,038386448	0,103206206	1,570796327	0,000000000
512	24556749,219498200	3,134445171	0,007147483	1,567722361	0,003073965
513	-3,147711443	3,134471027	0,007121627	1,570796327	0,000000000
514	-0,000000404	3,039029325	0,102563329	1,573858308	0,003061981
...	...	...	...	...	...
1023	3,138524586	3,091377856	0,050214797	1,570796327	0,000000000
1024	12275114,98362900	3,137636319	0,003956334	1,569260847	0,001535480
1025	-3,144657738	3,137643168	0,003949485	1,570796327	0,000000000
1026	-0,000000807	3,091536219	0,050056435	1,572328811	0,001532484
...	...	...	...	...	...
2047	3,140055833	3,117273494	0,024319159	1,570796327	0,000000000
2048	6136740,71387311	3,139422235	0,002170418	1,570028962	0,000767365
2049	-3,143128732	3,139424044	0,002168609	1,570796327	0,000000000
2050	-0,000001611	3,117312136	0,024280517	1,571562943	0,000766616
...	...	...	...	...	...
4095	3,140819325	3,129849180	0,011743473	1,570796327	0,000000000
4096	3068165,923660570	3,140411080	0,001181574	1,570412738	0,000383589
4097	-3,142365801	3,140411557	0,001181097	1,570796327	0,000000000
4098	-0,000003219	3,129858562	0,011734092	1,571179728	0,000383402

На рис. 4.6 показаны подходящие цепной дроби (4.1.17).

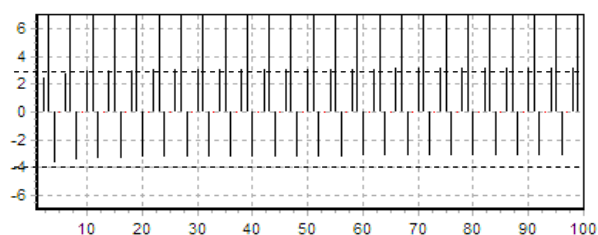


Рис. 4.6. Подходящие сопряжённой цепной дроби (4.1.17).

В работе [42] приведена «странная» формула де Моргана:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} x dx = -2\pi i,$$

которая может быть объяснена, если воспользоваться r/φ -алгоритмом, применявшимся выше для суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, представляющих $\ln(-1)$, то есть мнимое число $i\pi$.

4.2. Расходящиеся ряды, имеющие комплексные значения

Г. Харди в монографии “Расходящиеся ряды” [67] приводит расходящийся ряд

$$\frac{2}{1} - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{16}{4} + \frac{32}{5} - \dots \quad (4.2.1)$$

и пишет, что “суммой этого ряда естественно считать $\ln 3$, поскольку $\ln 3$ есть значение $\ln(1+x)$ при приближении x к 2. И далее следует: “Но мы могли бы рассуждать и так:

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \dots = \ln \frac{1}{1-2} = \ln(-1) = (2k+1)\pi i. \quad (4.2.2)$$

Здесь πi и $-\pi i$ представляются одинаково естественными значениями.” И добавляет: “... хотя каждое из них парадоксально”. Парадокс, видимо, Г. Харди усматривает в том, что ряд (4.2.2), состоящий из действительных элементов, пусть и расходящийся, каким-то образом связан с комплексным числом.

Установим значение расходящегося ряда (4.2.2). Для этого используем введенное ранее определение сходимости степенных рядов через соответствующие цепные дроби.

Преобразуем расходящийся ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \frac{16}{4} + \frac{32}{5} + \frac{64}{6} + \dots$$

в соответствующую цепную дробь. Обозначив

$$c_1 = \frac{2}{1}, \quad c_2 = \frac{4}{2}, \quad c_3 = \frac{8}{3}, \quad c_4 = \frac{16}{4}, \quad c_5 = \frac{32}{5}, \quad c_6 = \frac{64}{6}, \dots,$$

найдем коэффициенты ω_i соответствующей цепной дроби

$$\frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1 + \frac{\omega_5}{1} - \frac{\omega_6}{1} + \dots}} \quad (4.2.3)$$

Вычисления дают такие результаты:

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = -\frac{1}{3}, \quad \omega_4 = \frac{2}{3}, \quad \omega_5 = -\frac{2}{5}, \quad \omega_6 = \frac{3}{5}, \dots$$

Подставляя эти коэффициенты в (4.2.3), получим после преобразований

$$\frac{2}{1 - \frac{2}{2 - \frac{2}{3 - \frac{4}{2 - \frac{4}{5 - \frac{6}{2 - \dots}}}}}}.$$

Ранее было установлено, что

$$\ln(-1) = \pi i = -\frac{2}{1 - \frac{2}{2 - \frac{2}{3 - \frac{4}{2 - \frac{4}{5 - \dots}}}} - \frac{2n}{2 - 2n + 1} - \dots}. \quad (4.2.4)$$

Следовательно, можно записать:

$$-\pi i = \frac{2}{1 - \frac{2}{2 - \frac{2}{3 - \frac{4}{2 - \frac{4}{5 - \dots}}}} - \frac{2n}{2 - 2n + 1} - \dots}, \quad (4.2.5)$$

$$-\pi i = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \frac{16}{4} + \frac{32}{5} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots. \quad (4.2.6)$$

Запишем цепную дробь (4.2.4) в канонической форме:

$$\frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1 + \frac{\omega_5}{1} - \frac{\omega_6}{1} + \dots}},$$

где

$$\omega_1 = -2, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = -\frac{1}{3}, \quad \omega_4 = \frac{2}{3}, \quad \omega_5 = -\frac{2}{5}, \quad \omega_6 = \frac{3}{5}, \dots$$

Вычисления по формулам Никипорца [78] приводит к таким значениям коэффициентов ряда:

$$c_1 = -2, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -\frac{8}{3}, \quad c_4 = -\frac{16}{4}, \quad c_5 = -\frac{32}{5}, \dots$$

Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$\ln(-1) = \pi i = -\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots, \quad (4.2.7)$$

$$\ln(-1) = \pi i = -\frac{2}{1} - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{32}{5} - \dots - \frac{2^n}{n} - \dots, \quad (4.2.8)$$

$$-\ln(-1) = -\pi i = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{2} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{2n}{2} - \frac{2n}{2n+1} - \dots, \quad (4.2.9)$$

$$-\ln(-1) = -\pi i = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \frac{16}{4} + \frac{32}{5} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots \quad (4.2.10)$$

Расходящиеся ряды (4.2.8) и (4.2.10), соответственно, суммируются через “расходящиеся” цепные дроби (4.2.7) и (4.2.9), значения которых устанавливаются при помощи формул Хейлэрмана – Стилттьеса.

Обратимся к ряду

$$\frac{2}{1} - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{16}{4} + \frac{32}{5} - \frac{64}{6} + \dots \quad (4.2.11)$$

и найдем его сумму как значение цепной дроби, соответствующей ряду (4.2.11), т.е. просуммируем ряд согласно введенного ранее определения сходимости ряда. Искомую соответствующую цепную дробь запишем в канонической форме (4.2.3).

Для ряда (4.2.11) имеем:

$$c_1 = \frac{2}{1}, \quad c_2 = -\frac{4}{2}, \quad c_3 = \frac{8}{3}, \quad c_4 = -\frac{16}{4}, \quad c_5 = \frac{32}{5}, \quad c_6 = -\frac{64}{6}, \dots$$

Используя формулы Хейлэрмана-Стилттьеса, получим:

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = -1, \quad \omega_3 = \frac{1}{3}, \quad \omega_4 = -\frac{2}{3}, \quad \omega_5 = \frac{2}{5}, \quad \omega_6 = -\frac{3}{5}, \dots$$

Подставляя полученные коэффициенты в цепную дробь (4.2.3), после эквивалентных преобразований запишем:

$$\frac{2}{1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{3 + \frac{4}{2 + \frac{4}{5 + \frac{6}{2 + \dots}}}}} = \ln 3. \quad (4.2.12)$$

Цепная дробь (4.2.12) сходящаяся. Таким образом, расходящийся ряд (4.2.11) просуммирован:

$$\frac{2}{1} - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{16}{4} + \frac{32}{5} - \frac{64}{6} + \dots = \frac{2}{1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{3 + \frac{4}{2 + \frac{4}{5 + \frac{6}{2 + \frac{6}{7 + \dots}}}}} = \ln 3.$$

Для цепной дроби (4.2.12) справедливы рекуррентные соотношения:

$$P_{2n} = 2P_{2n-1} - 2nP_{2n-2}, \quad (4.2.13)$$

$$P_{2n-1} = (2n-1)P_{2n-2} - (2n-2)P_{2n-3}, \quad (4.2.14)$$

$$Q_{2n} = 2Q_{2n-1} - 2nQ_{2n-2}, \quad (4.2.15)$$

$$Q_{2n-1} = (2n-1)Q_{2n-2} - (2n-2)Q_{2n-3}. \quad (4.2.16)$$

Начальные условия:

$$P_1 = -2, \quad P_2 = -4, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2.17)$$

Запишем цепную дробь (4.2.7) в виде отношения определителей:

$$\pi i = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}, \quad -\pi i = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}.$$

Приведем ряд чисел, которые находятся при помощи рекуррентных формул (4.2.13) и (4.2.14), или непосредственно из определителя:

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{llll} P_1 = -2, & P_5 = 32, & P_9 = -2048, & P_{13} = 294912, \\ P_2 = -4, & P_6 = 64, & P_{10} = -4096, & P_{14} = 589824, \\ P_3 = -8, & P_7 = 256, & P_{11} = -24576, & P_{15} = 4718592, \\ P_4 = 0, & P_8 = 0, & P_{12} = 0, & P_{16} = 0. \end{array}$$

Аналогично получим ряд чисел, используя рекуррентные соотношения (4.2.15) и (4.2.16), или определитель

$$Q_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{llll} Q_1 = 1, & Q_5 = -12, & Q_9 = 720, & Q_{13} = -100800, \\ Q_2 = 0, & Q_6 = 0, & Q_{10} = 0, & Q_{14} = 0, \\ Q_3 = -3, & Q_7 = 72, & Q_{11} = -7200, & Q_{15} = 1411200, \\ Q_4 = -4, & Q_8 = 144, & Q_{12} = 14400, & Q_{16} = 2822400. \end{array}$$

Ранее было установлено, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{4k-1}}{Q_{4k-1}} = \pi, \quad (4.2.18)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{4k-3}}{Q_{4k-3}} = -\pi. \quad (4.2.19)$$

Полагая в (4.2.14) и (4.2.16) $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} P_{4k-1} &= (4k-1)P_{4k-2} - (4k-2)P_{4k-3}, \\ Q_{4k-1} &= (4k-1)Q_{4k-2} - (4k-2)Q_{4k-3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4k-1)P_{4k-2} - (4k-2)P_{4k-3}}{(4k-1)Q_{4k-2} - (4k-2)Q_{4k-3}} = \pi. \quad (4.2.20)$$

Значения P_i и Q_i определяются рекуррентными соотношениями (4.2.13)-(4.2.16) при начальных условиях (4.2.17).

Аналогично, полагая в (4.2.14) и (4.2.16) $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \dots$, запишем

$$\begin{aligned} P_{4k-3} &= (4k-1)P_{4k-4} - (4k-4)P_{4k-5}, \\ Q_{4k-3} &= (4k-1)Q_{4k-4} - (4k-4)Q_{4k-5}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4k-1)P_{4k-4} - (4k-4)P_{4k-5}}{(4k-1)Q_{4k-4} - (4k-4)Q_{4k-5}} = -\pi. \quad (4.2.21)$$

Исходя из распределения значений подходящих дробей разложения $\ln(-1)$, можем записать такие четыре равенства. Фигурными скобками отмечена размерность определителей. Определитель, стоящий в знаменателе может быть получен из определителя, стоящего в числителе, вычеркиванием первой строки и первого столбца.

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n+1} \\ \underbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}_{4n} \end{array} = 0 \\
 \\
 \text{b)} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n-1}}{4n-1} = \pi \\
 \\
 \text{c)} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n-1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n-2}}{4n-2} = -\infty \\
 \\
 \text{d)} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n-2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}}^{4n-3}}{4n-3} = -\pi
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.2.22)$$

4.3. О постоянной Эйлера

В математическом анализе и в теории чисел часто используется постоянная Эйлера (или постоянная Эйлера-Маскерони), которая определяется как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \quad (4.3.1)$$

Иногда для обозначения постоянной используется латинская буква C . Это обозначение постоянной было предложено Эйлером в 1735 г, который установил констан-

ту с пятнадцатью знаками. В 1790 г. итальянский математик Лоренцо Маскерони определил 32 цифры постоянной. Постоянная Эйлера имеет значение:

$$\gamma = 0,577215664901532860606512090082402431042....$$

Также как и для числа π , правильная цепная дробь постоянной Эйлера не имеет видимой закономерности.

$$\gamma = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{13+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\alpha}}}}}}}}}}}}}}}}.$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{40+\frac{1}{1+\frac{1}{11+\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\dots}}}}}}}}}}}}}}}}.$$

Среди многочисленных математических констант постоянная Эйлера по частоте использования идёт следом за числами π и e [118].

Постоянная Эйлера имеет интегральные представления. Например [99]:

$$\gamma = -\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{e^x} dx, \quad \gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx.$$

Постоянная Эйлера выражается через производную гамма-функции:

$$\gamma = -\Gamma'(1).$$

Известны записи постоянной Эйлера в виде композиции рядов [98]:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) + \dots$$

Работы, в которых рассматриваются те или иные аспекты постоянной Эйлера, появляются регулярно уже не одно столетие. Ещё в 1872 году была опубликована обзорная статья английского математика Джеймса Глейшера с изложением истории этой константы [124]. Имеется немалое число недавних публикаций о постоянной Эйлера [99, 113, 115, 116, 134]. В вышедшей в 2003 г. монографии Стивена Финча [123], посвящённой математическим константам, приведена обширная библиография работ, связанных с постоянной Эйлера, включающая описание более ста источников.

Установим постоянную, аналогичную постоянной Эйлера, которая была бы связана не с гармоническим рядом, а с соответствующей гармоническому ряду цепной дробью.

Рассмотрим цепные дроби, которыми может быть представлен гармонический ряд. Запишем известные степенные ряды для логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (-1 < x \leq 1), \quad (4.3.2)$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (x^2 < 1). \quad (4.3.3)$$

Для степенных рядов (4.3.2) и (4.3.3) могут быть найдены, так называемые, соответствующие цепные дроби [12]:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\frac{x}{2+\frac{x}{3+\frac{2^2x}{4+\frac{2^2x}{5+\frac{3^2x}{6+\frac{3^2x}{7+\dots+\frac{n^2x}{2n+\frac{n^2x}{2n+1+\dots}}}}}}}}}, \quad (4.3.4)$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots + \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (4.3.5)$$

Цепная дробь (4.3.4) для логарифмической функции была установлена Ламбертом в 1768 г. и независимо Лагранжем в 1776 г. [117]. Ламберт обратил внимание, что цепная дробь для логарифмической функции, в отличие от ряда Меркатора, сходится и при $x > 1$.

Соответствующие цепные дроби строятся по рядам с использованием различных алгоритмов, например, по формулам Хейлсберга-Стилтьеса или методом Рутисхаузера [28]. Соответствующие цепные дроби в сравнении с рядами имеют, как правило, высокую скорость сходимости и, что принципиально важно, представляют функции в более широких областях.

Для цепных дробей (4.3.4) и (4.3.5) можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \dots - \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots, \quad (4.3.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} + \frac{3^2}{7} - \dots + \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots. \quad (4.3.7)$$

Значения подходящих дробей разложений (4.3.6) и (4.3.7), если цепные дроби вычислять с учетом все большего числа звеньев, стремятся, соответственно, к бесконечно малым и бесконечно большим величинам, которые иногда обозначают как $-\infty$ и $+\infty$.

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)$ имеет два представления, – гармоническим рядом:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4.3.8)$$

и цепной дробью:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} + \frac{3^2}{7} - \dots + \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots. \quad (4.3.9)$$

В цепной дроби (4.3.9) номер подходящей дроби совпадает со значением частного знаменателя.

Соответствующая гармоническому ряду цепная дробь (4.3.9) также, как и гармонический ряд, расходится. Частичные суммы гармонического ряда и значения подходящих цепных дробей (4.3.9) неограниченно возрастают. Однако в отношении скорости роста частичные суммы гармонического ряда и подходящие дроби соответствующей ему цепной дроби ведут себя по-разному.

Если частичную сумму гармонического ряда обозначить через H_n , то

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad H_1 = 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.3.10)$$

Для подходящих дробей разложения (4.3.9), которые можно рассматривать как аналог частичных сумм для цепных дробей, имеют место рекуррентные формулы:

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = 2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.3.11)$$

Записывая подходящие дроби соответствующей гармоническому ряду цепной дроби (4.3.9), приходим к «удвоенному» гармоническому ряду:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$$

Из сравнения рекуррентных формул (4.3.10) и (4.3.11) следует, что значения подходящих дробей цепной дроби (4.3.9) увеличиваются значительно быстрее, чем растут значения частичных сумм гармонического ряда.

В табл. 4.9 даны значения частичных сумм гармонического ряда и значения подходящих соответствующей цепной дроби (4.3.9).

Таблица 4.9

Значения частичных сумм гармонического ряда и подходящих дробей (4.3.9)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	1	3/2	11/6	25/12	137/60	49/20	363/140	761/280
$\frac{p_n}{q_n}$	1	2	5/2	3	10/3	11/3	47/12	25/6

Можно записать формулу, связывающую значения подходящих соответствующей цепной дроби (4.3.9), построенной для гармонического ряда, и частичные суммы гармонического ряда:

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (4.3.12)$$

где $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ – подходящая дробь с номером $2n$ цепной дроби (4.3.9).

Соотношение (4.3.12) запишем в развёрнутом виде:

$$\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{3^2}{8} - \dots - \frac{n^2}{2n} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Например,

$$\frac{P_8}{Q_8} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{3^2}{8} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{6}.$$

Обратимся к формуле (4.3.1), то есть к постоянной Эйлера, которая определяется как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа.

В табл. 4.10 приведены результаты вычисления постоянной Эйлера по формуле (4.3.1).

Таблица 4.10

Определение значения постоянной Эйлера

Значения n	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	Значения $\ln n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$	Погрешность, $ \gamma - \gamma_n $
10	2,92896825396825	2,30258509299405	0,62638316097421	0,04916749607268
100	5,18737751763962	4,60517018598809	0,58220733165153	0,00499166675000
1000	7,48547086055034	6,90775527898214	0,57771558156821	0,00049991666668
10000	9,78760603604438	9,21034037197618	0,57726566406820	0,00004999916667
100000	12,09014612986340	11,51292546497020	0,57722066489320	0,00000499999167
1000000	14,39272672286570	13,81551055796430	0,57721616490145	0,00000049999992
10000000	16,69531136585990	16,11809565095830	0,57721571490153	0,00000005000000
100000000	18,99789641385390	18,42068074395240	0,57721566990154	0,00000000500001
1000000000	21,30048150234790	20,72326583694640	0,57721566540154	0,00000000050000

Из табл. 4.10 видно, что нахождение верных знаков константы Эйлера по формуле (4.3.1) осуществляется весьма медленно.

Если в формуле (4.3.1), определяющей постоянную Эйлера, отрезок гармонического ряда, содержащего n слагаемых, где n – чётное число, то есть

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

заменить отрезком соответствующей цепной дроби, имеющей также n звеньев

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{2 - \frac{1^2}{3 - \frac{2^2}{4 - \frac{2^2}{5 - \dots - \frac{(n/2)^2}{n}}}}}}$$

то, очевидно, что конечного предела у этого выражения не будет, однако при замене в такой конструкции $\ln n$ на $\ln n^2$ и перестановке слагаемых получим постоянную:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1^2}{2 - \frac{1^2}{3 - \frac{2^2}{4 - \frac{2^2}{5 - \dots - \frac{(n/2)^2}{n}}}}} \right) \right] = L_1. \quad (4.3.13)$$

Запишем формулу (4.3.13) в компактном виде:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n^2 - \frac{P_n}{Q_n} \right) \quad \text{или} \quad L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \ln n - \frac{P_n}{Q_n} \right),$$

где $\ln n^2$ – натуральный логарифм квадрата числа n , $\frac{P_n}{Q_n}$ значение n -й подходящей цепной дроби (4.3.9).

В табл. 4.11 даны результаты определения постоянной L_1 по формуле (4.3.13).

Таблица 4.11

Определение постоянной L_1

Значения n	Значения $\ln n^2$	Значения подходящих P_n/Q_n	Значения разности $\ln n^2 - P_n/Q_n$
10	4,60517018598809	4,5666666666666673	0,038503519321424
100	9,21034037197618	8,9984106766588532	0,211929695317333
1000	13,81551055796430	13,585646859981065	0,229863697983224
10000	18,42068074395240	18,189017705968841	0,231663037983472
100000	23,02585092994050	22,794007898556639	0,231843031384089
1000000	27,63102111592850	27,399160084609722	0,231861031329127
10000000	32,23619130191660	32,004328470597066	0,231862831238225
100000000	36,84136148790470	36,609498476630783	0,231863059026393

Таким образом, постоянная L_1 , определяемая формулой (4.3.13), имеет значение 0,2318630.... Так как при вычислении этой константы использовались соответствующие цепные дроби логарифмической функции, установленные Ламбертом, то будем называть постоянную (4.3.13) постоянной Ламберта и обозначить её символом L_1 .

Если постоянная Эйлера γ определяется как предел разности частичной суммы гармонического ряда и натурального логарифма числа n , то постоянная Ламберта L_1 определяется как предел разности логарифма квадрата числа n и значения n -й подходящей соответствующей цепной дроби (4.3.9), построенной для гармонического ряда.

Учитывая формулу (4.3.12), устанавливающую связь между значениями подходящих цепных дробей (4.3.9) и частичными суммами гармонического ряда, постоянную L_1 можно представить в виде:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k} \right), \quad (4.3.14)$$

или в эквивалентной записи:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \ln n - 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2} \right) \right]. \quad (4.3.15)$$

В формулах (4.3.14) и (4.3.15) n – чётное число. Обозначая $L_1/2$ через L_2 , получим:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2} \right) \right). \quad (4.3.16)$$

Константу L_2 можно определить как предел разности между натуральным логарифмом числа n и частичной суммой гармонического ряда, причём, суммирование распространяется до $n/2$, где n – чётное число. Константа L_2 равна $L_1/2$, то есть $L_2 = 0,1159315\dots$

Легко заметить, что постоянная L_2 , определяемая формулой (4.3.16), аналогична по структуре формуле (4.3.1), определяющей постоянную Эйлера, которая имеет многочисленные приложения в различных разделах математики и, прежде всего, в анализе.

Определим цепную дробь, равноценную гармоническому ряду. Для ряда, составленного из элементов, обратных нечётным натуральным числам

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots \quad (4.3.17)$$

соответствующей цепной дробью будет дробь

$$\frac{1}{1 - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{9} - \frac{5^2}{11} - \dots - \frac{n^2}{2n+1} - \dots}. \quad (4.3.18)$$

Если частичную сумму ряда (4.3.17) обозначить h_n , то

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{2k+1}, \quad h_1 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для подходящих цепной дроби (4.3.18), которые будем обозначать как $P_n^{(H)}/Q_n^{(H)}$ имеет место рекуррентное соотношение

$$\frac{P_n^{(H)}}{Q_n^{(H)}} = \frac{P_{n-1}^{(H)}}{Q_{n-1}^{(H)}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_1^{(H)}}{Q_1^{(H)}} = 1. \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.3.19)$$

Для частичных сумм гармонического ряда H_n имеет место формула (4.3.10). Сравнивая соотношения (4.3.10) и (4.3.19), можно записать:

$$\frac{P_n^{(H)}}{Q_n^{(H)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

где $P_n^{(H)}/Q_n^{(H)}$ – n -я подходящая дробь цепной дроби (4.3.18).

Таким образом, цепная дробь (4.3.18) является равноценной, то есть эквивалентной, гармоническому ряду:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5}} = \frac{11}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} = \frac{25}{12}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1}.$$

Можно записать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{9} - \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1} - \dots \quad (4.3.20)$$

Цепная дробь (4.3.20) – это другая запись фундаментального объекта математического анализа – гармонического ряда. Следовательно, постоянная Эйлера может быть представлена в записи, отличной от стандартной:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1} - \ln n \right).$$

Ряд, содержащий обратные четные числа

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots \quad (4.3.21)$$

представляется соответствующей цепной дробью:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1-6} - \frac{1}{1-10} - \frac{2}{1-14} - \dots - \frac{n}{1-4n+2} - \dots \quad (4.3.22)$$

Цепная дробь (4.3.22) получена А.З. Никипорцем [89]. Можно выполнить сложение цепных дробей:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{9} - \dots - \frac{n^2}{2n+1} - \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{1-6} - \frac{2}{1-10} - \dots - \frac{n}{1-4n+2} - \dots = \\ & = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{3^2}{8} - \dots - \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots \end{aligned}$$

Эквивалентными преобразованиями цепная дробь (4.3.22) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{1-6} - \frac{2}{1-10} - \frac{3}{1-14} - \dots - \frac{n}{1-4n+2} = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{3^2}{8} - \dots - \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots \right) \quad (4.3.23) \end{aligned}$$

Следовательно, n -ю подходящую цепной дроби (4.3.23), которую будем обозначать как $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$, можно записать:

$$\frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{3^2}{8} - \dots - \frac{(n/2)^2}{n} \right),$$

где n – чётное число.

Если частичную сумму ряда (4.3.21) обозначить g_n , то

$$g_n = g_{n-1} + \frac{1}{2n}, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

Для подходящих $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$ цепной дроби (4.3.23), которая является соответствующей цепной дробью для ряда (2.3.21), имеют место рекуррентные соотношения:

$$\frac{P_{2n-1}^{(u)}}{Q_{2n-1}^{(u)}} = \frac{P_{2n-2}^{(u)}}{Q_{2n-2}^{(u)}} + \frac{1}{2n}, \quad \frac{P_{2n}^{(u)}}{Q_{2n}^{(u)}} = \frac{P_{2n-1}^{(u)}}{Q_{2n-1}^{(u)}} + \frac{1}{2n}; \quad \frac{P_1^{(u)}}{Q_1^{(u)}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{P_2^{(u)}}{Q_2^{(u)}} = 1; \quad n = 2, 3, \dots$$

В табл. 4.12 приведены частичные суммы ряда (4.3.21) и значения подходящих соответствующих цепных дробей (4.3.23).

Таблица 4.12

Значения частичных сумм ряда (4.3.21) и подходящих цепной дроби (4.3.23)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$	1/2	3/4	11/12	25/24	137/120	49/40	363/280	761/560
$\frac{P_n^{(u)}}{Q_n^{(u)}}$	1/2	1	5/4	3/2	10/6	11/6	47/24	25/12

Запишем формулу, связывающую значения подходящих соответствующей цепных дробей (4.3.23), построенной для ряда, содержащего обратные чётные числа, и частичные суммы этого ряда:

$$\frac{P_{2n}^{(u)}}{Q_{2n}^{(u)}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

В табл. 4.13 показаны частичные суммы гармонического ряда и значения подходящих соответствующей цепной дроби (4.3.23), построенной для ряда (4.3.21), содержащего обратные чётные числа.

Таблица 4.13

Значения частичных сумм гармонического ряда и подходящих дроби (4.3.23)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	1	3/2	11/6	25/12	137/60	49/20	363/140	761/280
$\frac{P_n^{(u)}}{Q_n^{(u)}}$	1/2	1	5/4	3/2	10/6	11/6	47/24	25/12

Формула, устанавливающая связь подходящих цепной дроби (4.3.23), построенной для ряда, содержащего обратные чётные числа, и частичной суммой гармонического ряда, имеет вид:

$$\frac{P_{2n}^{(u)}}{Q_{2n}^{(u)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (4.3.24)$$

Например:

$$\frac{P_8^{(u)}}{Q_8^{(u)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{8} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

Соотношение (4.3.24) можно записать:

$$\frac{P_n^{(u)}}{Q_n^{(u)}} = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}. \quad (4.3.25)$$

Учитывая соотношение (4.3.25), ранее установленную константу L_2 представим в виде:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \dots - \frac{(n/2)^2}{n} \right) \right].$$

Таким образом, имеют место формулы, устанавливающие эквивалентность подходящих дробей частичным суммам гармонического ряда:

$$\frac{P_n}{Q_n} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}, \quad (4.3.26)$$

$$\frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (4.3.27)$$

$$\frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}} = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}. \quad (4.3.28)$$

Подходящие дроби P_n/Q_n – это подходящие цепной дроби, соответствующей гармоническому ряду. Подходящие $P_n^{(h)}/Q_n^{(h)}$ и $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$ – подходящие соответствующих цепных дробей, построенных для рядов из обратных нечётных и чётных чисел.

Из соотношения (4.3.26) следует, что значение n -й подходящей цепной дроби, соответствующей гармоническому ряду, эквивалентно удвоенному значению частичной суммы гармонического ряда, причём, частичная сумма составлена из $n/2$ членов гармонического ряда. Формула (4.3.27) показывает, что n -я подходящая цепной дроби, соответствующая ряду, составленной из элементов, обратных нечётным числам, эквивалентна n -й частичной сумме гармонического ряда. Другими словами, цепная дробь (4.3.18) эквивалентна гармоническому ряду. Из формулы (4.3.28) следует, что n -я подходящая цепной дроби, соответствующей ряду, включающие обратные чётные числа, эквивалентна частичной сумме гармонического ряда с числом членов $n/2$.

Запишем формулы, связывающие подходящие дроби P_n/Q_n соответствующих цепных дробей гармонического ряда с подходящими цепными дробями $P_n^{(h)}/Q_n^{(h)}$ и $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$ соответствующих цепных дробей, построенных для рядов из обратных нечётных и чётных чисел:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} &= 2 \frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}}, & \frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}} &= \frac{1}{2} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \\ \frac{P_n}{Q_n} &= 2 \frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}}, & \frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}} &= \frac{1}{2} \frac{P_n}{Q_n}, \end{aligned}$$

Кроме того, можно записать:

$$\frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}} = \frac{P_{2n}^{(q)}}{Q_{2n}^{(q)}}.$$

Определим константы, связанные не с гармоническим рядом, а с рядами, содержащими обратные нечётные и чётные числа.

Константа, аналогичная константе Эйлера, включающая вместо гармонического ряда ряд из элементов, обратных нечётным числам, имеет вид:

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots \right) - \ln \sqrt{n} \right] \quad (4.3.29)$$

или:

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln \sqrt{n} \right), \quad L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \ln n \right).$$

В табл. 4.14 приведены результаты вычисления постоянной L_3 по формуле (4.3.29).

Таблица 4.14

Определение постоянной L_3

n	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$	$\ln \sqrt{n}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln \sqrt{n}$
10	2,1332553015955	1,15129254649702	0,981962983662532
100	3,28434218930163	2,30258509299405	0,981757096307589
1000	4,43563267333511	3,45387763949107	0,981755033844041
10000	5,58692519920714	4,60517018598809	0,981755013219045
100000	6,73821774549791	5,75646273248511	0,981755013012795
1000000	7,88951029199287	6,90775527898214	0,981755013010733
10000000	9,04080283848987	8,05904782547916	0,981755013010711
100000000	10,19209538498690	9,21034037197618	0,981755013010712
1000000000	11,34338793148390	10,36163291847320	0,981755013010725

Из табл. 4.14 можно видеть, что константа L_3 устанавливаются с большой точностью с увеличением n . Так, при $n = 10^9$ константа L_3 определена с 13-ю десятичными разрядами, в то время как константа Эйлера при $n = 10^9$ была получена с 8-ю точными знаками (табл. 4.10).

Константа, в записи которой вместо гармонического ряда записан ряд из элементов, обратных чётным числам, представляется формулой:

$$L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \ln \sqrt{n} \right],$$

Несложно показать, что константа L_4 равна половине константы Эйлера:

$$L_4 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{\gamma}{2} = 0.28860783... .$$

Запишем ещё одну константу, кратную константе Эйлера:

$$L_5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \dots - \frac{n^2}{2n} - \frac{n^2}{2n+1} - \dots \right) - \ln n^2 \right]. \quad (4.3.30)$$

Выражение (4.3.30) приведём в эквивалентном виде:

$$L_5 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \right),$$

откуда следует, что

$$L_5 = 2\gamma = 1,1544313....$$

В анализе известна формула:

$$Ei^*(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} .$$

В [78] приведено любопытное выражение:

$$\gamma = i\pi + e \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \frac{3}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \frac{n}{1} - \dots \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} . \quad (4.3.31)$$

Цепная дробь в формуле (4.3.31) – расходящаяся в классическом смысле. Значение этой цепной дроби, однако, можно установить с использованием r/φ -алгоритма. Результаты вычисления расходящейся цепной дроби, входящей в формулу (4.3.31), приведены в табл. 4.15.

Таблица 4.15

Нахождение значения расходящейся цепной дроби

$$\text{Ei}(1) = e^{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \frac{3}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \frac{n}{1} - \dots \right)}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	5,43656365	3,23260009	0,43633380	-0,00000000	1,02800173
6	1,08731273	3,84423102	0,17529713	-0,39269908	0,63530265
16	1,26199375	4,12365173	0,44717838	-0,78539816	0,24260357
32	-3,22229391	3,21557146	0,45336243	-0,88357293	0,14442880
64	-5,44198600	3,40441763	0,26451626	-0,98174770	0,04625403
128	3,40902451	3,44911711	0,21981677	-1,03063508	0,00283335
256	2,26696092	3,60976107	0,05917282	-1,04310693	0,01510519
512	2,46414684	3,65055907	0,01837481	-1,04310693	0,01510519
...	...	...	...	...	...
2097152	8,12082269	3,66953895	0,00060305	-1,02787255	0,00017918
4194304	7,05859556	3,66906517	0,00013127	-1,02781431	0,00018742
8388608	2,28589509	3,66933307	0,00039917	-1,02805737	0,00005563

Точное значение цепной дроби:

$$\text{Ei}(1) = e^{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \frac{3}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \frac{n}{1} - \dots \right)} = \text{Ei}(1) = 3,6689338967e^{-i1,0280017377}$$

Сумма ряда равна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} = 1,317902151454 \dots$$

Значение постоянной Эйлера, найденное из соотношения (4.3.31):

$$\gamma = i3,1415826535 + 3,6689338967(\cos 1,0280017377 - i \cdot \sin 1,0280017377) - 1,31790215145 = 0,5772156655 + i0,0000000002.$$

Значение постоянной Эйлера: $\gamma = 0,5772156649 \dots$

Исторически сложилось так, что ряды получили в математике несравнимо большее распространение, нежели цепные дроби. Многие математические константы определяются именно рядами. Постоянная Эйлера представляется как предел при $n \rightarrow \infty$ разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа n . Выше были получены константы, аналогичные по структуре постоянной Эйлера, связанные, однако, не с гармоническим рядом, а с, так называемыми, соответствующими цепными дробями. Представляет интерес получение других математических констант через построение соответствующих цепных дробей для рядов, определяющих константы.

ГЛАВА 5

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА

5.1. Определение значений расходящихся рядов построением производящих функций

В анализе известна формула, связывающая дзета-функцию Римана с числами Бернулли [110]:

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

где B_{2k} – числа Бернулли.

Обычно числа Бернулли определяются через производящую функцию:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \frac{B_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{B_n}{n!} x^n + \dots,$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} \left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots \right],$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

Числа Бернулли могут быть записаны детерминантной формулой Лапласа [33]:

$$B_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & 1/4! & \dots & 1/(n+1)! \\ 1 & 1/2! & 1/3! & \dots & 1/n! \\ 0 & 1 & 1/2! & \dots & 1/(n-1)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2! \end{vmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Значения расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана, определяют также через числа Бернулли. Имеет место соотношение:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{(-1)^n (2^n - 1)}{n} B_n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.1.2)$$

В частности,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \quad (5.1.3)$$

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (5.1.4)$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (5.1.5)$$

Найдём значения расходящихся рядов не посредством формулы Эйлера, (5.1.2), а преобразованием этих рядов в *соответствующие цепные дроби*, которые были определены выше, что позволит установить, значения этих расходящихся рядов через, так называемые, *производящие функции* этих рядов. С этой целью будем рассматривать формальные степенные ряды:

$$1 - 2^n x + 3^n x^2 - 4^n x^3 + 5^n x^4 - \dots \quad (5.1.6)$$

Соответствующая цепная дробь для степенного ряда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_2 x^2 + \dots \quad (5.1.7)$$

есть цепная дробь вида

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_3}{1 - \frac{\omega_4}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n-1}}{1 - \frac{\omega_{2n}}{1 + \dots}}}}}} \quad (5.1.8)$$

коэффициенты которой определяются формулами Хейлсманна-Стилтьеса:

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \psi_{n+1}}{\varphi_n \psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \psi_n}{\varphi_n \psi_{n+1}}, \quad (5.1.9)$$

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (5.1.10)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1.$$

Соответствующая ряду (5.1.7) цепная дробь может быть также записана в виде:

$$\frac{\omega'_1}{1 - \frac{\omega'_2}{1 + \frac{\omega'_3}{1 - \frac{\omega'_4}{1 + \dots + \frac{\omega'_{2n-1}}{1 - \frac{\omega'_{2n}}{1 + \dots}}}}} \quad (5.1.11)$$

где коэффициенты ω'_i определяются формулами:

$$\omega'_1 = c_0, \quad \omega'_{2n} = \frac{\varphi'_{n-1} \psi'_{n+1}}{\varphi'_n \psi'_n}, \quad \omega'_{2n+1} = -\frac{\varphi'_{n+1} \psi'_n}{\varphi'_n \psi'_{n+1}}, \quad (5.1.12)$$

$$\varphi'_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix}, \quad \psi'_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix} \quad (5.1.13)$$

$$\varphi'_0 = 1, \quad \psi'_1 = 1.$$

Значения нечётных подходящих цепных дробей (5.1.8) и (5.1.11) совпадают,

Найдём производящую функцию для ряда

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (5.1.14)$$

Запишем коэффициенты соответствующей ряду (5.1.14) цепной дроби вида (5.1.10):

$$\omega_0 = c_0 = 1, \quad \omega_1 = c_1 = -1, \quad \omega_2 = \frac{c_2}{c_1} = -1, \quad \omega_2 = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1 c_2} = \frac{1^2 - (-1)(-1)}{(-1)1} = 0. \quad (5.1.15)$$

Во второй колонке табл. 5.1 приведены коэффициенты (5.1.15) соответствующей цепной дроби, построенной для ряда (5.1.14).

Таким образом, соответствующая ряду (5.1.14) цепная дробь – конечная и имеет всего два звена:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = 1 + \frac{-1x}{1} - \frac{1x}{1} = 1 - \frac{x}{1 + 1}.$$

Таблица 5.1

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-1	0.5
3	0	

Как и следовало ожидать, производящая функция для ряда (5.1.14) имеет вид:

$$1 - \frac{x}{1+1} = \frac{x}{1+x}. \quad (5.1.16)$$

Ряд

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

можно представить соответствующей цепной дробью вида (5.1.11). По формулам (5.1.12) и (5.1.13) получим:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -1, \quad \omega_3 = \frac{1-1 \cdot 1}{1 \cdot (-1)} = 0. \quad (5.1.17)$$

Подставляя коэффициенты (5.1.17) в цепную дробь (5.1.11), имеем уже известную производящую функцию:

$$\frac{1}{1 - \frac{-1x}{1}} = \frac{1}{1+x}.$$

Производящая функция (5.1.16) порождает геометрическую прогрессию :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (5.1.18)$$

При $x < 1$ левая часть выражения (5.1.18) – это формула суммы геометрической прогрессии.

Если $x = 1$, то из (5.1.18) имеем значение «колеблющегося» ряда Лейбница:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1/2. \quad (5.1.19)$$

Этот же результат для «колеблющегося» ряда Лейбница получим по формулам Эйлера (5.1.2) при $n = 1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -B_1 = 1/2. \quad (5.1.20)$$

При $x > 1$ значение производящей функции $\frac{1}{1+x}$ принимается за сумму расходящегося ряда (5.1.18), что естественно, если обратиться к формуле суммы первых членов геометрической прогрессии.

Если в (5.1.18) x заменить на $-x$, то получим:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (5.1.21)$$

Сумма ряда (5.1.21) при $x = 1$ – бесконечная величина

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty.$$

Отвлечёмся от конкретного ряда

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots,$$

имеющего производящую функцию

$$y = \frac{1}{1+x},$$

и запишем производящую функцию первого порядка общего вида:

$$\frac{1}{1+a_1x} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots \quad (5.1.22)$$

Коэффициенты c_i ряда (5.1.22) определяются рекуррентным соотношением первого порядка:

$$c_m = -a_1c_{m-1}, \quad c_0 = 1. \quad (5.1.23)$$

Определим по формуле (5.1.23) несколько первых коэффициентов c_i ряда (5.1.22):

$$c_1 = -a_1, \quad c_2 = a_1^2, \quad c_3 = -a_1^3, \dots \quad (5.1.24)$$

Установим значения определителя Ганкеля второго порядка, элементы которого c_i определяются соотношениями (5.1.24):

$$\varphi_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1^2 \\ a_1^2 & -a_1^3 \end{vmatrix} = a_1^4 - a_1^4 = 0. \quad (5.1.25)$$

Обратимся к формулам Хейлсманна – Стильтеса (5.1.9) и (5.1.10), которые устанавливают значения коэффициентов ω_i соответствующей цепной дроби (5.1.8).

Запишем формулу, определяющую коэффициент ω_3 соответствующей цепной дроби (5.1.8):

$$\omega_3 = -\frac{\varphi_2\psi_1}{\varphi_1\psi_2}. \quad (5.1.26)$$

Коэффициент ω_3 будет равен 0, если $\varphi_2 = 0$ или $\psi_1 = 0$. Так как $\psi_1 = 1$, то условием равенства нулю коэффициента ω_3 будет нулевое значение определителя φ_2 .

Таким образом, для любого ряда, имеющего производящую функцию первого порядка

$$\frac{1}{1+a_1x} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots,$$

где

$$c_m = -a_1c_{m-1}, \quad c_0 = 1,$$

соответствующая цепная дробь будет конечна и содержать два звена:

$$K = 1 + \frac{\omega_1x}{1} - \frac{\omega_2x}{1}. \quad (5.1.27)$$

5.2. О производящих функциях второго порядка

Рассмотрим соответствующие цепные дроби для рядов, производящая функция которых второго порядка:

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (5.2.1)$$

где

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (5.2.2)$$

Определим значения c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 по рекуррентной формуле (5.2.2).

$$\begin{aligned}
c_1 &= -a_1 c_0 = -a_1 \cdot 1 = -a_1, \\
c_2 &= -(a_1 c_1 + a_2 c_0) = -(a_1(-a_1) + a_2 \cdot 1) = a_1^2 - a_2, \\
c_3 &= -(a_1 c_2 + a_2 c_1) = -(a_1(a_1^2 - a_2) + a_2(-a_1)) = -a_1^3 + 2a_1 a_2, \\
c_4 &= -(a_1 c_3 + a_2 c_2) = -(a_1(-a_1^3 + 2a_1 a_2) + a_2(a_1^2 - a_2)) = a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2, \\
c_5 &= -(a_1 c_4 + a_2 c_3) = -(a_1(a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2) + a_2(-a_1^3 + 2a_1 a_2)) = -a_1^5 + 4a_1^3 a_2 - 3a_1^2 a_2^2. \quad (5.2.3)
\end{aligned}$$

Найдём значение определителя Ганкеля третьего порядка

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}, \quad (5.2.4)$$

элементы которого c_i – это элементы ряда (5.2.1), установленные по рекуррентным формулам второго порядка. Следовательно, вместо элементов c_i в определитель Ганкеля (5.2.4) подставляются их значения, полученные через коэффициенты a_1 и a_2 производящей функции

$$y = \frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2}$$

с использованием рекуррентных формул второго порядка (5.2.2)

Запишем определитель Ганкеля третьего порядка в развёрнутом виде:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = c_1 c_3 c_5 + 2c_2 c_3 c_4 - c_3^3 - c_2^2 c_5 - c_1 c_4^2. \quad (5.2.5)$$

Подставим найденные выражения для $c_1 \div c_5$ через коэффициенты a_1 и a_2 производящей функции второго порядка (5.2.1), то есть выражения (5.2.3), в формулу (5.2.5). Так как запись получается громоздкой, произведём её по частям, опуская промежуточные преобразования:

$$\begin{aligned}
c_1 c_3 c_5 &= -a_1(-a_1^3 + 2a_1 a_2) \cdot (-a_1^5 + 4a_1^3 a_2 - 3a_1^2 a_2^2) = -a_1^9 + 6a_1^7 a_2 - 11a_1^5 a_2^2 + 6a_1^3 a_2^3, \\
2c_2 c_3 c_4 &= 2(a_1^2 - a_2)(-a_1^3 + 2a_1 a_2)(a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2) = -2a_1^9 + 12a_1^7 a_2 - 24a_1^5 a_2^2 + 18a_1^3 a_2^3 - 4a_1 a_2^4, \\
-c_3^3 &= -(-a_1^3 + 2a_1 a_2)^3 = a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 12a_1^5 a_2^2 - 8a_1^3 a_2^3, \\
-c_2^2 c_5 &= -(a_1^2 - a_2)^2(-a_1^5 + 4a_1^3 a_2 - 3a_1^2 a_2^2) = a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 12a_1^5 a_2^2 - 10a_1^3 a_2^3 + 3a_1 a_2^4, \\
-c_1 c_4^2 &= -a_1(a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2)^2 = a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 11a_1^5 a_2^2 - 6a_1^3 a_2^3 + a_1 a_2^4. \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Подставив найденные значения (5.2.6) в формулу (5.2.5), установим, что определитель Ганкеля третьего порядка, элементы которого (5.2.3) устанавливались рекуррентным соотношением второго порядка (5.2.2), имеет нулевое значение.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} c_1(a) & c_2(a) & c_3(a) \\ c_2(a) & c_3(a) & c_4(a) \\ c_3(a) & c_4(a) & c_5(a) \end{vmatrix} = \\
&= -a_1^9 + 6a_1^7 a_2 - 11a_1^5 a_2^2 + 6a_1^3 a_2^3 - 2a_1^9 + 12a_1^7 a_2 - 24a_1^5 a_2^2 + 18a_1^3 a_2^3 - \\
&- 4a_1 a_2^4 + a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 12a_1^5 a_2^2 - 8a_1^3 a_2^3 + a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 12a_1^5 a_2^2 - \\
&- 10a_1^3 a_2^3 + 3a_1 a_2^4 + a_1^9 - 6a_1^7 a_2 + 11a_1^5 a_2^2 - 6a_1^3 a_2^3 + a_1 a_2^4 = 0. \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого ряда, имеющего производящую функцию второго порядка

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2}=1+c_1x+c_2x^2+\dots+c_mx^m+\dots,$$

где

$$c_m=-(a_1c_{m-1}+a_2c_{m-2}), \quad c_0=1,$$

определитель Ганкеля третьего порядка (5.2.4) имеет нулевое значение. Это, в свою очередь, влечёт нулевое значение пятого коэффициента ω_5 соответствующей цепной дроби:

В общем случае можно записать: Для любого ряда, имеющего производящую функцию $(n-1)$ -го порядка:

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}}=1+c_1x+c_2x^2+\dots+c_mx^m+\dots, \quad (5.2.8)$$

$$c_m=-(a_1c_{m-1}+a_2c_{m-2}+\dots+a_{n-1}c_{m-n+1}), \quad c_0=1,$$

определитель Ганкеля n -го порядка имеет нулевое значение, что обуславливает конечность соответствующей цепной дроби, построенной для ряда (5.2.8). Число звеньев такой конечной цепной дроби равно $2n$.

5.3. Примеры построения производящих функций

Установим производящую функцию для знакопеременного степенного ряда

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots \quad (5.3.1)$$

Во второй колонке табл. 5.2 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.3.1) цепной дроби, полученные по формулам Хейлсманна – Стильерса (5.1.9) и (5.1.10).

Таблица 5.2

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x=1$
0	1	1
1	-2	-1
2	-1.5	0.2
3	-0.166666666666667...	0.285714285714285...
4	-0.666666666666667...	0.25
5	0	

Коэффициент $\omega_5 = -0,191e-1503$, то есть имеет значение, которое будем считать нулевым.

После подстановки значений коэффициентов ω_i в цепную дробь (5.1.8) получим.

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots=1-\frac{2x}{1-\frac{(3/2)x}{1+\frac{(-1/6)x}{1-\frac{(-2/3)x}{1-\frac{2x}{1+\frac{3x}{1+\frac{x}{2-\frac{2x}{1}}}}}}}} \quad (5.3.2)$$

«Сворачивая» конечную цепную дробь (5.3.2), получим производящую функцию ряда (5.3.1):

$$1-\frac{2x}{1+\frac{3x}{2-\frac{x}{3+\frac{2x}{1}}}}=\frac{1}{1+2x+x^2}. \quad (5.3.3)$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n+1} n^{n-1} + \dots \quad (5.3.4)$$

При $x = 1$ из (5.3.4) получим известное значения расходящегося ряда:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \frac{1}{4}. \quad (5.3.5)$$

Из формулы (5.1.4) также следует, что

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \frac{2^2 - 1}{2} B_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Производящая функция (5.3.4) действительно порождает ряд (5.3.1). Определим коэффициенты c_i ряда:

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (5.3.7)$$

где

$$c_m = -(2c_{m-1} + c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (5.3.8)$$

Используя рекуррентные соотношения (5.3.8), получим коэффициенты ряда (5.3.7):

$$\begin{aligned} c_1 &= -2c_0 = -2, \\ c_2 &= -(2c_1 + c_0) = -(2(-2) + 1) = 3, \\ c_3 &= -(2c_2 + c_1) = -(2 \cdot 3 + (-2)) = -4, \\ c_4 &= -(2c_3 + c_2) = -(2 \cdot (-4) + 3) = 5, \\ c_5 &= -(2c_4 + c_3) = -(2 \cdot 5 + (-4)) = -6. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

... ..

Если по коэффициентам ряда

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (5.3.10)$$

составить определитель Ганкеля третьего порядка, то он будет нулевым:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 48 - 60 - 60 + 64 + 54 + 50 = -168 + 168 = 0. \quad (5.3.11)$$

Будет иметь нулевое значение и функциональный определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -2x & 3x^2 & -4x^3 \\ 3x^2 & -4x^3 & 5x^4 \\ 4x^3 & 5x^4 & -6x^5 \end{vmatrix} =$$

$$= -48x^9 - 60x^9 - 60x^9 - 64x^9 + 64x^9 + 54x^9 + 50x^9 = -168x^9 + 168x^9 = 0.$$

Если в (5.3.2) x заменить на $-x$, то получим:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = 1 + \frac{2x}{1} - \frac{3x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{2x}{1} = \frac{1}{1-2x+x^2}. \quad (5.3.12)$$

Знаменатель производящей функции (5.3.12) при $x = 1$ обращается в ноль. Таким образом, расходящийся ряд, составленный из натуральных чисел, имеет бесконечно большое значение:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \infty.$$

Если в (5.3.12) принять x отличным от единицы, то расходящиеся ряды примут конечные значения. Например, если в (5.3.12) $x = 2$, то сумма расходящегося ряда будет равна единице:

$$1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \dots + n2^{n-1} + \dots = 1.$$

Можно также записать определители Ганкеля, имеющие нулевые значения:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 4x^3 & 5x^4 & 6x^5 \end{vmatrix} = 0.$$

Определим производящую функцию для ряда

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \dots + (-1)^{n+1}n^2x^{n-1} + \dots \quad (5.3.13)$$

Во второй колонке табл. 5.3 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.3.13) цепной дроби, полученные рекуррентным алгоритмом Рутисхаузера.

Таблица 5.3

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-4	-3
2	-2.25	-0.230769230769230...
3	-0.472222222222222...	0.24
4	-0.810457516339869...	0.010869565217391...
5	-0.136622390891840...	-0.00641025641025...
6	-0.548387096774193...	0
7	0	

Соответствующая ряду (5.3.13) цепная дробь – конечная и содержит 6 звеньев:

$$\begin{aligned} & 1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \dots = \\ & = 1 - \frac{4x}{1 + \frac{2,25x}{1 - \frac{0,472222\dots x}{1 + \frac{0,810457\dots x}{1 - \frac{0,136622\dots x}{1 + \frac{0,548387\dots x}{1}}}}} = \\ & = \frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Таким образом, можно записать производящую функцию ряда (5.3.13):

$$\frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \dots \quad (5.3.15)$$

Покажем, что формула (5.3.15) имеет место. Предварительно определим коэффициенты ряда, порождаемые производящей функцией третьего порядка канонического вида:

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots + c_mx^m + \dots \quad (5.3.16)$$

Коэффициенты c_m определяются рекуррентной формулой третьего порядка:

$$c_m = -(a_1 c_{m-1} + a_2 c_{m-2} + a_3 c_{m-3}), \quad c_0 = 1.$$

Определим значение коэффициентов c_m при «канонической» производящей функции третьего порядка:

$$\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \dots + c_m x^m + \dots, \\ c_m = -(3c_{m-1} + 3c_{m-2} + c_{m-3}), \quad c_0 = 1. \quad (5.3.17)$$

Используя рекуррентную формулу (5.3.17), определим:

$$c_1 = -3c_0 = -3, \\ c_2 = -(3c_1 + 3c_0) = -(3(-3) + 3) = 6, \\ c_3 = -(3c_2 + 3c_1 + c_0) = -(3 \cdot 6 + 3(-3) + 1) = -10, \\ c_4 = -(3c_3 + 3c_2 + c_1) = -(3 \cdot (-10) + 3 \cdot 6 - 3) = -15, \\ c_5 = -(3c_4 + 3c_3 + c_2) = -(3 \cdot (-15) + 3 \cdot (-10) + 6) = -21. \quad (5.3.18)$$

...

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 + 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + \dots \quad (5.3.19)$$

Определим ряд, порождаемый производящей функцией (5.3.15):

$$\frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} = (1-x)(1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\dots) = \\ = 1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\dots - x+3x^2-6x^3+10x^4-15x^5+\dots$$

Приведя подобные члены, получим ряд (5.3.15):

$$\frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 2^2 x + 3^2 x^2 - 4^2 x^3 + 5^2 x^4 - 6^2 x^5 + \dots$$

При $x = 1$ из (5.3.15) установим нулевое значение расходящегося ряда:

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots = 0. \quad (5.3.20)$$

Расходящийся ряд (5.3.20) имеет нулевое значение, что согласуется с классической формулой (5.1.5):

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + 5^{2k} - \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь уместно привести высказывание Нильса Абея в связи с определением значений расходящихся рядов [32]: «Можно ли вообразить себе что – либо более возмутительное, чем утверждение, будто бы $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \dots$, где n – целое положительное число?»

Если в (5.3.14) x заменить на $-x$, то получим:

$$1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + 5^2 x^4 + \dots = \\ = 1 + \frac{4x}{1-x} + \frac{2,25x}{1-x} + \frac{0,4722\dots x}{1-x} - \frac{0,8104\dots x}{1-x} + \frac{0,1366\dots x}{1-x} - \frac{0,5483\dots x}{1-x} = \frac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3} \quad (5.3.21)$$

При $x = 1$ (5.3.21) имеем:

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots = \infty.$$

Возвратимся к конечной цепной дроби (5.3.14), которая является соответствующей цепной дробью для расходящегося ряда

$$1 - 2^2 x + 3^2 x^2 - 4^2 x^3 + 5^2 x^4 - \dots$$

Цепная дробь (5.3.14) имеет 6 звеньев, так как $\omega_7 = 0$. Запишем выражение для ω_7 :

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \psi_3}{\varphi_3 \psi_4} = 0. \quad (5.3.22)$$

Определитель $\psi_3 \neq 0$, так как ψ_3 входит в выражение, устанавливающее уже найденный коэффициент ω_6 . Следовательно, равен нулю определитель Ганкеля четвертого порядка φ_4 :

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 9 & -16 & 25 \\ 9 & -16 & 25 & -36 \\ -16 & 25 & -36 & 49 \\ 25 & -36 & 49 & -64 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.23)$$

Установим нулевое значение определителя (5.3.23) непосредственно. «Раскроем» определитель (5.3.23) по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= -4 \begin{vmatrix} -16 & 25 & -36 \\ 25 & -36 & 49 \\ -36 & 49 & -64 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} -16 & -36 & 49 \\ 25 & 49 & -64 \end{vmatrix} - \\ &- 16 \begin{vmatrix} 9 & -16 & -36 \\ -16 & 25 & 49 \\ 25 & -36 & -64 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} 9 & -16 & 25 \\ -16 & 25 & -36 \\ 25 & -36 & 49 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \cdot 8 - 9(-24) - 16 \cdot 24 - 25(-8) = 32 + 216 - 384 + 200 = 0. \end{aligned}$$

Цепная дробь, соответствующая ряду (5.3.21), конечна и имеет 6 звеньев, так как определитель Ганкеля четвертого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.24)$$

Определим производящую функцию для ряда

$$1 - 2^3 x + 3^3 x^2 - 4^3 x^3 + 5^3 x^4 - \dots + (-1)^{n+1} n^3 x^{n-1} + \dots \quad (5.3.25)$$

Во второй колонке табл. 5.4 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.3.25) цепной дроби. В третьей колонке табл. 5.4 даны значения подходящих дробей при $x = 1$.

Таблица 5.4

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^3 x + 3^3 x^2 - 4^3 x^3 + 5^3 x^4 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-8	-7
2	-3.375	-0.828571428571428...

Окончание табл. 5.4

3	-1.004629629629...	1.010989010989010...
4	-0.984468339307048...	-0.021008403361344...
5	-0.347903896917363...	-0.207036247334754...
6	-0.618065187239944...	-0.128571428571428...
7	-0.111956521739130...	-0.123140495867768...
8	-0.486956521739130...	-0.125
9	0	

Соответствующая ряду (5.3.25) цепная дробь содержит 8 звеньев.

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - \dots = \\
 & = 1 - \frac{8x}{1 + \frac{3,375x}{1 - \frac{1,0046\dots x}{1 + \frac{0,9844x}{1 - \frac{0,3479\dots x}{1 + \frac{0,6180\dots x}{1 - \frac{0,1119\dots x}{1 + \frac{0,4869\dots x}{1}}}}}}} = \\
 & = \frac{1 - 4x + x^2}{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4}. \quad (5.3.26)
 \end{aligned}$$

Запишем производящую функцию ряда (5.3.25):

$$\frac{1 - 4x + x^2}{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4} = 1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - \dots$$

При $x = 1$ из (5.3.26) получим значения расходящегося ряда:

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots = -\frac{1}{8} = -0,125. \quad (5.3.27)$$

Это же значения для ряда (5.3.27) может быть установлено по формуле Эйлера (5.1.4)

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots = -\frac{2^4 - 1}{4} B_4 = \frac{15}{4} \left(-\frac{1}{30} \right) = -\frac{1}{8} = -0,125. \quad (5.3.28)$$

Как следует из табл. 5.4, девятый коэффициент соответствующей ряду (5.3.25) цепной дроби равен нулю, то есть

$$\omega_9 = -\frac{\varphi_5 \psi_4}{\varphi_4 \psi_5} = 0,$$

что обусловлено равенством нулю определителя Ганкеля пятого порядка:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2^3 & 3^3 & -4^3 & 5^3 & -6^3 \\ 3^3 & -4^3 & 5^3 & -6^3 & 7^3 \\ -4^3 & 5^3 & -6^3 & 7^3 & -8^3 \\ 5^3 & -6^3 & 7^3 & -8^3 & 9^3 \\ -6^3 & 7^3 & -8^3 & 9^3 & -10^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.29)$$

Если в (5.3.26) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + 4x + x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4} = 1 + 2^3x + 3^3x^2 + 4^3x^3 + 5^3x^4 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{8x}{1 - \frac{3,375x}{1 + \frac{1,0046\dots x}{1 - \frac{0,9844\dots x}{1 + \frac{0,3479\dots x}{1 - \frac{0,6180\dots x}{1 + \frac{0,1119\dots x}{1 - \frac{0,4870\dots x}{1}}}}}}} \quad (5.3.30)
 \end{aligned}$$

При $x = 1$ из (5.3.30) установим значение ряда:

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots = \infty.$$

Следует заметить, что

$$\frac{1+4x+x^2}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

Соответствующая ряду (5.3.30) цепная дробь конечная и содержит восемь звеньев, то есть $\omega_9 = 0$, вследствие того, что определитель Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \\ 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 & 10^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.31)$$

Продолжим определение производящих функций рядов, включающих степени чисел натурального ряда.

Определим производящую функцию ряда

$$1 - 2^4 x + 3^4 x^2 - 4^4 x^3 + 5^4 x^4 - 6^4 x^5 + \dots \quad (5.3.32)$$

Коэффициенты соответствующей ряду (5.3.32) цепной дроби приведены во второй колонке табл. 5.5.

Таблица 5.5

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^4 x + 3^4 x^2 - 4^4 x^3 + 5^4 x^4 - 6^4 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-16	-15
2	-5.0625	-1.639175257731958...
3	-1.902006172839506...	4.468842729970326...
4	-1.194881426389201...	0.589107854297097...
5	-0.665213627904199...	-0.654126288979997...
6	-0.695982761081949...	-0.058745458732026...
7	-0.269836330273091...	0.0386704828307970...
8	-0.528896059045147...	0.0015578121393953...
9	-0.094302341762730...	-0.0007429829389102...
10	-0.449098226263228...	0
11	0	

Соответствующая ряду (5.3.32) цепная дробь содержит десять звеньев.

$$\begin{aligned} & 1 - 2^4 x + 3^4 x^2 - 4^4 x^3 + 5^4 x^4 - 6^4 x^5 + \dots = \\ & = 1 - \frac{16x}{1} + \frac{5,0625x}{1} - \frac{1,902...x}{1} + \frac{1,1948x}{1} - \frac{0,6652...x}{1} + \frac{0,6959...x}{1} - \frac{0,2698...x}{1} + \\ & + \frac{0,5288...x}{1} - \frac{0,0943...x}{1} + \frac{0,449...x}{1} = \frac{1-11x+11x^2-x^3}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5}. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Запишем производящую функцию ряда (5.3.32)

$$\frac{1-11x+11x^2-x^3}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5} = 1 - 2^4 x + 3^4 x^2 - 4^4 x^3 + 5^4 x^4 - \dots \quad (5.3.34)$$

При $x = 1$ получим значение расходящегося ряда:

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 - \dots = 0. \quad (5.3.35)$$

Это же нулевое значение ряда (5.3.35) может быть установлено по формуле Эйлера (5.1.5).

Выполним проверку производящей функции (5.3.34). Определим предварительно коэффициенты ряда, порождаемые производящей функцией пятого порядка канонического вида:

$$\frac{1}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (5.3.36)$$

где

$$c_m = -(5c_{m-1} + 10c_{m-2} + 10c_{m-3} + 5c_{m-4} + c_{m-5}), \quad c_0 = 1. \quad (5.3.37)$$

Используя рекуррентное соотношение (5.3.37), найдём значения c_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= -5 \cdot 1 = -5, \\ c_2 &= -(5(-5) + 10 \cdot 1) = 15, \\ c_3 &= -(5 \cdot 15 + 10 \cdot (-5) + 10 \cdot 1) = -35, \\ c_4 &= -(5(-35) + 10 \cdot 15 + 10 \cdot (-5) + 5 \cdot 1) = 70, \\ c_5 &= -(5 \cdot 70 + 10(-35) + 10 \cdot 15 + 5 \cdot (-5) + 1) = -126. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

... ..

Запишем правую часть формулы (5.3.34) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1 - 11x + 11x^2 - x^3}{1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5} = \\ &= (1 - 11x + 11x^2 - x^3)(1 - 5x + 15x^2 - 35x^3 + 70x^4 - 126x^5 + \dots) = \\ &= 1 - 16x + 81x^2 - 256x^3 + 625x^4 - 1296x^5 + \dots = \\ &= 1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + 5^4x^4 - 6^4x^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

Таким образом, производящая функция (5.3.34) установлена верно.

Как следует из табл. (5.5), одиннадцатый коэффициент цепной дроби, соответствующей ряду (5.3.33), равен нулю, то есть

$$\omega_{11} = -\frac{\varphi_6 \psi_5}{\varphi_5 \psi_6} = 0.$$

Определитель $\psi_5 \neq 0$, из чего следует равенство нулю определителя Ганкеля шестого порядка:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \\ c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2^4 & 3^4 & -4^4 & 5^4 & -6^4 & 7^4 \\ 3^4 & -4^4 & 5^4 & -6^4 & 7^4 & -8^4 \\ -4^4 & 5^4 & -6^4 & 7^4 & -8^4 & 9^4 \\ 5^4 & -6^4 & 7^4 & -8^4 & 9^4 & -10^4 \\ -6^4 & 7^4 & -8^4 & 9^4 & -10^4 & 11^4 \\ 7^4 & -8^4 & 9^4 & -10^4 & 11^4 & -12^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.40)$$

Если в (5.3.33) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} &1 + 2^4x + 3^4x^2 + 4^4x^3 + 5^4x^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{16x}{1} - \frac{5,0625x}{1} + \frac{1,902...x}{1} - \frac{1,1948x}{1} + \frac{0,6652...x}{1} - \frac{0,6959...x}{1} + \frac{0,2698...x}{1} - \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

$$-\frac{0,5288...x}{1} + \frac{0,0943...x}{1} - \frac{0,449...x}{1} = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5}.$$

При $x = 1$ из (5.3.41) можно записать:

$$1+2^4+3^4+4^4+5^4+\dots=\infty.$$

Определитель Ганкеля шестого порядка, который входит в формулу, устанавливающую «нулевой» коэффициент ω_6 , равен нулю:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 & 7^4 \\ 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 & 7^4 & 8^4 \\ 4^4 & 5^4 & 6^4 & 7^4 & 8^4 & 9^4 \\ 5^4 & 6^4 & 7^4 & 8^4 & 9^4 & 10^4 \\ 6^4 & 7^4 & 8^4 & 9^4 & 10^4 & 11^4 \\ 7^4 & 8^4 & 9^4 & 10^4 & 11^4 & 12^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.42)$$

Определим производящую функцию для ряда

$$1-2^5x+3^5x^2-4^5x^3+5^5x^4-6^5x^5+\dots. \quad (5.3.43)$$

Коэффициенты соответствующей ряду (5.3.43) цепной дроби помещены во второй колонке табл. 5.6.

Таблица 5.6

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1-2^5x+3^5x^2-4^5x^3+5^5x^4-6^5x^5+\dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-32	-31
2	-7.59375	-2.723636363636363...
3	-3.379758230452674...	15.605367008681925...
4	-1.449110852118517...	2.6856416132186408...
5	-1.131887307749223...	-3.794900950263825...
6	-0.783048949329761...	-0.292785965012629...
7	-0.488187303329301...	0.720278773173935...
8	-0.574030342979013...	0.2894079125380091...
9	-0.219668299598191...	0.2271559698219214...
10	-0.477557143137552...	0.2491558870314235...
11	-0.081339737700144...	0.2503771876885938...
12	-0.423343591264691...	0.25
13	0	

Соответствующая ряду (5.3.43) цепная дробь конечная и содержит 12 звеньев.

$$\begin{aligned} & 1-2^5x+3^5x^2-4^5x^3+5^5x^4-6^5x^5+\dots = \\ & = 1 - \frac{32x}{1} + \frac{7.59375...x}{1} - \frac{3.3797...x}{1} + \frac{1.4491...x}{1} - \frac{1.1318...x}{1} + \frac{0.7830...x}{1} - \frac{0.4881...x}{1} + \frac{0.5740...x}{1} - \\ & - \frac{0.2196...x}{1} + \frac{0.4775...x}{1} - \frac{0.0813...x}{1} + \frac{0.4233...x}{1} = \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6}. \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Таким образом, рациональная функция (5.3.44) – это производящая функция ряда (5.3.43):

$$\frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6} = 1-2^5x+3^5x^2-4^5x^3+5^5x^4-\dots \quad (5.3.45)$$

При $x = 1$ из (5.3.45) получим значение расходящегося ряда:

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots = \frac{1 - 26 + 66 - 26 + 1}{2^6} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Используя формулу суммирования Эйлера (5.1.4) имеем тоже значение для расходящегося ряда (5.3.46):

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots = \frac{2^6 - 1}{6} B_6 = \frac{63}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Так как соответствующая цепная дробь конечна, то есть ω_{13} имеет нулевое значение, то из формулы

$$\omega_{13} = -\frac{\varphi_7 \psi_6}{\varphi_6 \psi_6} \quad (5.3.46)$$

следует, что определитель Ганкеля седьмого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_7 = \begin{vmatrix} -2^5 & 3^5 & -4 & 5^5 & -6^5 & 7^5 & -8^5 \\ 3^5 & -4^5 & 5^5 & -6^5 & 7^5 & -8^5 & 9^5 \\ -4^5 & 5^5 & -6^5 & 7^5 & -8^5 & 9^5 & -10^5 \\ 5^5 & -6^5 & 7^5 & -8^5 & 9^5 & -10^5 & 11^5 \\ -6^5 & 7^5 & -8^5 & 9^5 & -10^5 & 11^5 & -12^5 \\ 7^5 & -8^5 & 9^5 & -10^5 & 11^5 & -12^5 & 13^5 \\ -8^5 & 9^5 & -10^5 & 11^5 & -12^5 & 13^5 & -14^5 \end{vmatrix} = 0.$$

В формуле (5.3.46) определитель $\psi_6 \neq 0$.

Если в (5.3.44) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & 1 + 2^5 x + 3^5 x^2 + 4^5 x^3 + 5^5 x^4 + 6^5 x^5 + \dots = \\ & = 1 + \frac{32x}{1} - \frac{7.5937x}{1} + \frac{3.3797\dots x}{1} - \frac{1.4491\dots x}{1} + \frac{1.1318\dots x}{1} - \frac{0.7830\dots x}{1} + \frac{0.4881\dots x}{1} - \frac{0.5740\dots x}{1} + \\ & - \frac{0.2196\dots x}{1} + \frac{0.4775\dots x}{1} - \frac{0.0813\dots x}{1} + \frac{0.4233\dots x}{1} = \frac{1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4}{1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6}. \end{aligned} \quad (5.3.47)$$

Несложно заметить, что производящая функция (5.3.47) может быть записана в виде:

$$\frac{1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4}{(1-x)^6}.$$

Следовательно,

$$1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \dots = \infty.$$

Рассмотренные примеры показывают, что знаменатель производящей функции для рядов

$$1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + 5^n x^4 + 6^n x^5 + \dots \quad (5.3.48)$$

может быть записан как бином $(1-x)^{n+1}$. Таким образом, при любом n имеет место соотношение:

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \dots = \infty. \quad (5.3.49)$$

Очевидно, ряды (5.3.48) при x , отличном от единицы, имеют конечные значения. Например, при $x = 2$ ряд (5.3.48) определяется числом 541:

$$1 + 2^5 2 + 3^5 2^2 + 4^5 2^3 + 5^5 2^4 + \dots = 541. \quad (5.3.50)$$

Определитель Ганкеля седьмого порядка, устанавливающий «нулевой» коэффициент ω_{13} цепной дроби, соответствующей знакопостоянному ряду (5.3.47), имеет нулевое значение:

$$\varphi_7 = \begin{vmatrix} 2^5 & 3^5 & 4 & 5^5 & 6^5 & 7^5 & 8^5 \\ 3^5 & 4^5 & 5^5 & 6^5 & 7^5 & 8^5 & 9^5 \\ 4^5 & 5^5 & 6^5 & 7^5 & 8^5 & 9^5 & 10^5 \\ 5^5 & 6^5 & 7^5 & 8^5 & 9^5 & 10^5 & 11^5 \\ 6^5 & 7^5 & 8^5 & 9^5 & 10^5 & 11^5 & 12^5 \\ 7^5 & 8^5 & 9^5 & 10^5 & 11^5 & 12^5 & 13^5 \\ 8^5 & 9^5 & 10^5 & 11^5 & 12^5 & 13^5 & 14^5 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.51)$$

Можно записать общие формулы «нулевых» определителей, связанных со знаковыми переменными рядами, включающими в себя степени чисел натурального ряда:

$$1 - 2^n x + 3^n x^2 - 4^n x^3 + 5^n x^4 - 6^n x^5 + \dots$$

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -2^{2k-2} & 3^{2k-2} & -4^{2k-2} & \dots & -(2k)^{2k-2} & (2k+1)^{2k-2} \\ 3^{2k-2} & -4^{2k-2} & 5^{2k-2} & \dots & (2k+1)^{2k-2} & -(2k+2)^{2k-2} \\ -4^{2k-2} & 5^{2k-2} & -6^{2k-2} & \dots & -(2k+2)^{2k-2} & (2k+3)^{2k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(2k)^{2k-2} & (2k+1)^{2k-2} & -(2k+2)^{2k-2} & \dots & -(4k-2)^{2k-2} & (4k-1)^{2k-2} \\ (2k+1)^{2k-2} & -(2k+2)^{2k-2} & (2k+3)^{2k-2} & \dots & (4k-1)^{2k-2} & -(4k)^{2k-2} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3.52)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -2^{2k-1} & 3^{2k-1} & -4^{2k-1} & \dots & (2k+1)^{2k-1} & -(2k+2)^{2k-1} \\ 3^{2k-1} & -4^{2k-1} & 5^{2k-1} & \dots & -(2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} \\ -4^{2k-1} & 5^{2k-1} & -6^{2k-1} & \dots & (2k+3)^{2k-1} & -(2k+4)^{2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2k+1)^{2k-1} & -(2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} & \dots & -(4k)^{2k-1} & (4k+1)^{2k-1} \\ -(2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} & -(2k+4)^{2k-1} & \dots & (4k+1)^{2k-1} & -(4k+2)^{2k-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.53)$$

Запишем формулы «нулевых» определителей, связанных со знакопостоянным рядом, включающим степени чисел натурального ряда.

$$1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + 5^n x^4 + 6^n x^5 + \dots$$

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} 2^{2k-2} & 3^{2k-2} & 4^{2k-2} & \dots & (2k)^{2k-2} & (2k+1)^{2k-2} \\ 3^{2k-2} & 4^{2k-2} & 5^{2k-2} & \dots & (2k+1)^{2k-2} & (2k+2)^{2k-2} \\ 4^{2k-2} & 5^{2k-2} & 6^{2k-2} & \dots & (2k+2)^{2k-2} & (2k+3)^{2k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2k)^{2k-2} & (2k+1)^{2k-2} & (2k+2)^{2k-2} & \dots & (4k-2)^{2k-2} & (4k-1)^{2k-2} \\ (2k+1)^{2k-2} & (2k+2)^{2k-2} & (2k+3)^{2k-2} & \dots & (4k-1)^{2k-2} & (4k)^{2k-2} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3.54)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} 2^{2k-1} & 3^{2k-1} & 4^{2k-1} & \dots & (2k+1)^{2k-1} & (2k+2)^{2k-1} \\ 3^{2k-1} & 4^{2k-1} & 5^{2k-1} & \dots & (2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} \\ 4^{2k-1} & 5^{2k-1} & 6^{2k-1} & \dots & (2k+3)^{2k-1} & (2k+4)^{2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2k+1)^{2k-1} & (2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} & \dots & (4k)^{2k-1} & (4k+1)^{2k-1} \\ (2k+2)^{2k-1} & (2k+3)^{2k-1} & (2k+4)^{2k-1} & \dots & (4k+1)^{2k-1} & (4k+2)^{2k-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3.55)$$

5.4. Суммирование рядов, связанных с функцией $\beta(n)$

В анализе, помимо дзета-функции Римана

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

рассматривается функция $\beta(n)$:

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.1)$$

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots = \frac{(-1)^k E_{2k} \pi^{2n+1}}{4^{k+1} (2k)!},$$

где E_{2k} – числа Эйлера.

Числа Эйлера определяются через производящую функцию:

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$E_0 = 1, \quad E_{2k-1} = 0, \quad E_{2k} = (-1)^k \frac{4^{k+1} (2k)!}{\pi^{2k+1}} \left[1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots \right].$$

$$E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad E_{10} = -50521, \quad E_{12} = 2702765, \quad E_{14} = -199360981, \quad \dots$$

Числа Эйлера E_{2k} определяются также детерминантной формулой [33], аналогичной формуле Лапласа (5.1.1):

$$E_{2k} = (-1)^k (2k)! \begin{vmatrix} 1/2! & 1/4! & 1/6! & \dots & 1/(2k)! \\ 1 & 1/2! & 1/4! & \dots & 1/(2k-2)! \\ 0 & 1 & 1/2! & \dots & 1/(2k-4)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2! \end{vmatrix}. \quad (5.4.2)$$

Известна формула суммирования рядов [110]:

$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + \dots = \frac{1}{2} E_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.3)$$

Запишем формулы суммирования рядов (5.4.3) для нечётных и чётных степеней:

$$1 - 3^{2k-1} + 5^{2k-1} - 7^{2k-1} + \dots = \frac{1}{2} E_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.4.4)$$

$$1 - 3^{2k} + 5^{2k} - 7^{2k} + \dots = \frac{1}{2} E_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (5.4.5)$$

Так как $E_{2k-1} = 0$, то

$$1 - 3^{2k-1} + 5^{2k-1} - 7^{2k-1} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4.6)$$

Установим значения расходящихся рядов, связанных с функцией $\beta(n)$, преобразовывая эти ряды в соответствующие цепные дроби.

Запишем производящую функцию для ряда

$$1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - 11x^5 + \dots \quad (5.4.7)$$

В табл. 5.7 приведены коэффициенты соответствующей этому ряду цепной дроби

Таблица 5.7

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - 11x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-3	-2
2	-1.66666666666667...	-0.125
3	-0.26666666666667...	0.083333333333333...
4	-0.6	0
5	0	

Следовательно,

$$1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - 11x^5 + \dots = 1 - \frac{3x}{1 + \frac{1.666\dots x}{1 - \frac{0.266\dots x}{1 + \frac{0.6x}{1 + 2x + x^2}}}} = \frac{1-x}{1+2x+x^2}. \quad (5.4.8)$$

Таким образом, рациональная функция (5.4.8) – это производящая функция для ряда (5.4.7):

$$\frac{1-x}{1+2x+x^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - 11x^5 + \dots \quad (5.4.9)$$

При $x = 1$ из (5.4.9) получим значение расходящегося ряда

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots = 0. \quad (5.4.10)$$

Если использовать при суммировании ряда (5.4.7) формулу (5.4.6), то получим также нулевое значение:

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 \dots = \frac{1}{2} E_1 = 0. \quad (5.4.11)$$

Таким образом, значение ряда (5.4.10) установлено как построением соответствующей цепной дроби, так и формулой суммирования (5.4.4), включающей числа Эйлера.

Если в (5.4.8) x заменить на $-x$, то получим:

$$\frac{1+x}{1-2x+x^2} = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + 11x^5 + \dots = 1 + \frac{3x}{1 - \frac{1.666\dots x}{1 + \frac{0.266\dots x}{1 - \frac{0.6x}{1 - 2x + x^2}}}}. \quad (5.4.12)$$

При $x = 1$ из (5.4.12) можно записать:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \dots = \infty.$$

Найдём производящую функцию ряда

$$1 - 3^2 x + 5^2 x^2 - 7^2 x^3 + 9^2 x^4 - 11^2 x^5 + \dots \quad (5.4.13)$$

В табл. 5.8 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.4.13) цепной дроби.

Таблица 5.8

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 3^2 x + 5^2 x^2 - 7^2 x^3 + 9^2 x^4 - 11^2 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-9	-8
2	-2.77777777777778...	-1.38235294117647...
3	-0.81777777777778...	0.44594594594594...
4	-0.735652173913043...	-0.439393939393939...
5	-0.185013876040703...	-0.532786885245901...
6	-0.489361702127659...	-0.5
7	0	

Таким образом,

$$1 - 3^2x + 5^2x^2 - 7^2x^3 + 9^2x^4 - 11^2x^5 + \dots = \\ = 1 - \frac{9x}{1+} - \frac{2.777\dots x}{1} - \frac{0.817\dots x}{1} + \frac{0.7356\dots x}{1} - \frac{0.185\dots x}{1} + \frac{0.4893\dots x}{1} = \frac{1-6x+x^2}{1+3x+3x^2+x^3}. \quad (5.4.14)$$

Запишем производящую функцию:

$$\frac{1-6x+x^2}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 3^2x + 5^2x^2 - 7^2x^3 + 9^2x^4 - 11^2x^5 + \dots. \quad (5.4.15)$$

При $x=1$ из (5.4.15) получим значение расходящегося ряда:

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + \dots = -\frac{1}{2}. \quad (5.4.16)$$

По формуле (5.4.5) имеем то же значение ряда (5.4.16)

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + \dots = \frac{1}{2} E_2 = -\frac{1}{2}. \quad (5.4.17)$$

Если в (5.4.14) x заменить на $-x$, то получим.

$$\frac{1+6x+x^2}{1-3x+3x^2-x^3} = 1 + 3^2x + 5^2x^2 + 7^2x^3 + 9^2x^4 + 11^2x^5 + \dots = \\ = 1 + \frac{9x}{1-} - \frac{2.777\dots x}{1} + \frac{0.817\dots x}{1} - \frac{0.7356\dots x}{1} + \frac{0.185\dots x}{1} - \frac{0.4893\dots x}{1} \quad (5.4.18)$$

При $x=1$ из (5.4.18) можно записать:

$$1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + \dots = \infty. \quad (5.4.19)$$

Определим производящую функцию для знакопеременного ряда, коэффициенты которого – кубы нечётных натуральных чисел:

$$1 - 3^3x + 5^3x^2 - 7^3x^3 + 9^3x^4 - 11^3x^5 + \dots \quad (5.4.20)$$

В табл. 5.9 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.4.20) цепной дроби.

Таблица 5.9

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 3^3x + 5^3x^2 - 7^3x^3 + 9^3x^4 - 11^3x^5 + \dots.$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, a_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x=1$
0	1	1
1	-27	-26
2	-4.629629629629...	-3.796052631578947...
3	-1.885629629629629...	7.386752136752136...
4	-0.900248900062853...	0.955206847360912...
5	-0.489671913183046...	-0.7343763505920995...
6	-0.549255765733433...	-0.0424528301886798...
7	-0.140666846981581...	0.0202247191011235...
8	-0.436834094368340...	0
9	0	

Таким образом,

$$1 - 3^3x + 5^3x^2 - 7^3x^3 + 9^3x^4 - 11^3x^5 + \dots \\ = 1 - \frac{27x}{1+} - \frac{4.6296x}{1} - \frac{1.8856\dots x}{1} + \frac{0.9002\dots x}{1} - \frac{0.4896\dots x}{1} + \frac{0.5492\dots x}{1} - \frac{0.1406\dots x}{1} + \frac{0.4368\dots x}{1} = \\ = \frac{1+23x+23x^2+x^3}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}. \quad (5.4.21)$$

Следовательно, функция (5.4.21) – производящая функция для ряда (5.4.20):

$$\frac{1-23x+23x^2-x^3}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4} = 1-3^3x+5^3x^2-7^3x^3+9^3x^4-11^3x^5+\dots \quad (5.4.22)$$

Из производящей функции (5.4.22) следует, что при $x = 1$ ряд (5.4.20) имеют нулевое значение:

$$1-3^3+5^3-7^3+9^3-11^3+\dots=0. \quad (5.4.23)$$

Нулевое значение имеет при $x = 1$ соответствующая цепная дробь (5.4.21), что видно из третьей колонки табл. 5.9.

Если использовать при суммировании ряда (5.4.23) формулу (5.4.6), то получим также нулевое значение этого ряда:

$$1-3^3+5^3-7^3+9^3-11^3+\dots=\frac{1}{2}E_3=0. \quad (5.4.24)$$

Если в (5.4.21) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} \frac{1-23x+23x^2-x^3}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4} &= 1+3^3x+5^3x^2+7^3x^3+9^3x^4+11^3x^5+\dots= \\ &= 1+\frac{27x}{1}-\frac{4.6296\dots x}{1}+\frac{1.8856\dots x}{1}-\frac{0.9002\dots x}{1}+\frac{0.4896\dots x}{1}-\frac{0.5492\dots x}{1}+\frac{0.1406\dots x}{1}. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

При $x = 1$ из (5.4.25) имеем:

$$1+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+\dots=\infty. \quad (5.4.26)$$

Определим производящую функцию ряда

$$1-2^4x+3^4x^2-4^4x^3+5^4x^4-6^4x^5+\dots. \quad (5.4.27)$$

Во второй колонке табл. 5.10 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.4.27) цепной дроби. Цепная дробь имеет 10 звеньев. Число звеньев N конечных цепных дробей для рядов

$$1-3^n x+5^n x^2-7^n x^3+9^n x^4-\dots \quad (5.4.28)$$

определяет формула:

$$N=2(n+1), \quad (5.4.29)$$

где n – показатель степени нечётных чисел натурального ряда.

Таблица 5.10

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1-3^4x+5^4x^2-7^4x^3+9^4x^4-\dots.$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-81	-80
2	-7.71604938271604...	-8.293201133144475...
3	-3.87444938271604...	49.089557171183079...
4	-1.09958606737906...	10.965856913437832...
5	-0.97385568886141...	-7.545203423325663...
6	-0.61551942437909...	1.2964088976993309...
7	-0.34705673374632...	3.2542235463239492...
8	-0.47164981957469...	2.5386076232181956...
9	-0.11343195500739...	2.4831101554100283...
10	-0.40598906628226...	2.5
11	0	

Соответствующая цепная дробь имеет вид

$$1 - 3^4 x + 5^4 x^2 - 7^4 x^3 + 9^4 x^4 - 11^4 x^5 + \dots =$$

$$= 1 - \frac{81x}{1 + \frac{7.7160\dots x}{1 - \frac{3.8744\dots x}{1 + \frac{1.0995\dots x}{1 - \frac{0.9738\dots x}{1 + \frac{0.6155\dots x}{1 - \frac{0.3470\dots x}{1 + \frac{0.4716\dots x}{1 - \frac{0.1134\dots x}{1 + \frac{0.4059\dots x}{1 + \frac{1-76x+230x^2-76x^3+x^4}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5}}}}}}}}}}. \quad (5.4.30)$$

Таким образом, производящая функция ряда (5.4.28) имеет вид:

$$\frac{1-76x+230x^2-76x^3+x^4}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5} = 1 - 3^4 x + 5^4 x^2 - 7^4 x^3 + 9^4 x^4 - 11^4 x^5 + \dots \quad (5.4.31)$$

Подставляя в производящую функцию (5.4.31) $x = 1$, получаем значение расходящегося знакопеременного ряда:

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 + \dots = \frac{5}{2} = 2,5. \quad (5.4.32)$$

Это же значение ряда (5.4.32) даёт формула (5.4.5):

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 - \dots = \frac{1}{2} E_4 = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5. \quad (5.4.33)$$

В третьей колонке табл. 5.10 для конечной цепной дроби (5.4.30) при $x = 1$ также определено её значение, равное $5/2$, что свидетельствует о том, что производящая функция (5.4.31) найдена верно.

Если в (5.4.30) x заменить на $-x$, то получим:

$$\frac{1+76x+230x^2+76x^3+x^4}{1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5} = 1 + 3^4 x + 5^4 x^2 + 7^4 x^3 + 9^4 x^4 + 11^4 x^5 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{81x}{1 - \frac{7.716\dots x}{1 + \frac{3.8744\dots x}{1 - \frac{1.0995\dots x}{1 + \frac{0.9738\dots x}{1 - \frac{0.6155\dots x}{1 + \frac{0.347\dots x}{1 - \frac{0.4716\dots x}{1 + \frac{0.1134\dots x}{1 - \frac{0.4059\dots x}{1 + \dots}}}}}}}}}}. \quad (5.4.34)$$

При $x = 1$ из (5.4.34) запишем:

$$1 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4 + \dots = \infty. \quad (5.4.35)$$

Установим производящую функцию для ряда:

$$1 - 3^5 x + 5^5 x^2 - 7^5 x^3 + 9^5 x^4 - 11^5 x^5 + \dots \quad (5.4.36)$$

Во второй колонке табл. 5.11 приведены коэффициенты соответствующей ряду (5.4.36) цепной дроби. Цепная дробь – конечная и содержит 12 звеньев, что определяется формулой (5.4.29):

$$N = 2 \cdot 6 = 12.$$

Таблица 5.11

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 3^5 x + 5^5 x^2 - 7^5 x^3 + 9^5 x^4 - 11^5 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, a_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-243	-242
2	-12.86008230452674...	-16.53236342042755...
3	-7.481842304526748...	247.94707003812964...
4	-1.340550240083470...	51.05669994621217...

Окончание табл. 5.11

5	-1.724747045920873...	-104.12563937846293...
6	-0.688749871021777...	-18.481923061054908...
7	-0.642953390968142...	16.179620492596533...
8	-0.508698761904227...	1.7338609644084740...
9	-0.268430357460596...	-0.9475248189291177...
10	-0.429306698025288...	-0.0430755976739177...
11	-0.095055848842619...	0.0177284882031684...
12	-0.385641072157467...	0
13	0	

Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 3^5 x + 5^5 x^2 - 7^5 x^3 + 9^5 x^4 - 11^5 x^5 + \dots = \\
 & = 1 - \frac{243x}{1} + \frac{-12.860...x}{1} - \frac{7.4818...x}{1} + \frac{1.3405...x}{1} - \frac{1.7247...x}{1} + \frac{0.6887...x}{1} - \\
 & - \frac{0.6429...x}{1} + \frac{0.5086...x}{1} - \frac{0.2684...x}{1} + \frac{0.4293...x}{1} - \frac{0.095...x}{1} + \frac{0.3856...x}{1} = \\
 & = \frac{1 - 237x + 1682x^2 - 1682x^3 + 237x^4 - x^5}{1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6}. \quad (5.4.37)
 \end{aligned}$$

Рациональная функция (5.4.37) – это производящая функция ряда (5.4.36):

$$\frac{1 - 237x + 1682x^2 - 1682x^3 + 237x^4 - x^5}{1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6} = 1 - 3^5 x + 5^5 x^2 - 7^5 x^3 + 9^5 x^4 - 11^5 x^5 + \dots \quad (5.4.38)$$

При $x = 1$ из (5.4.38) установим нулевое значение ряда :

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \dots = 0. \quad (5.4.39)$$

Это же нулевое значение для ряда (5.4.39) определяет классическая формула (5.4.6):

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \dots = \frac{1}{2} E_5 = 0. \quad (5.4.40)$$

Если в (5.4.37) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3^5 x + 5^5 x^2 + 7^5 x^3 + 9^5 x^4 + 11^5 x^5 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{243x}{1} - \frac{12.960...x}{1} + \frac{7.4818...x}{1} - \frac{1.3405...x}{1} + \frac{1.7247...x}{1} - \frac{0.6887...x}{1} + \\
 & + \frac{0.6429...x}{1} - \frac{0.5086...x}{1} + \frac{0.2684...x}{1} - \frac{0.4293...x}{1} + \frac{0.095...x}{1} - \frac{0.3856...x}{1} = \\
 & = \frac{1 + 237x + 1682x^2 + 1682x^3 + 237x^4 + x^5}{1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6}. \quad (5.4.41)
 \end{aligned}$$

5.5. Суммирование цепными дробями некоторых расходящихся рядов

Построением соответствующих цепных дробей можно определить значения расходящихся знакопеременных рядов, коэффициенты которых – натуральные числа в дробной степени.

$$1^{1/k} - 2^{1/k} + 3^{1/k} - 4^{1/k} + 5^{1/k} - \dots + (-1)^n n^{1/k} + \dots \quad (5.5.1)$$

Соответствующие рядам (5.5.1) цепные дроби сходятся, причём, скорость сходимости достаточно высокая. Необходимо построить цепную дробь с 10 – 12 звеньями, чтобы установить значения рядов (5.5.1) с погрешностью порядка 10^{-10} .

В табл. 5.12 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^{1/2} - 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 - 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 - \dots \quad (5.5.2)$$

Таблица 5.12

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^{1/2} - 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 - 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих P_n/Q_n при $x = 1$
1	-1,414213562	-1,414213562	-0,414213562
2	1,732050808	-1,224744871	0,36432551
3	-2	-0,070044333	0,389634015
4	2,236067977	-0,604458388	0,379908529
5	-2,449489743	0,047653496	0,380185754
6	2,645751311	-0,457541949	0,380100446
7	-2,828427125	0,105754746	0,380106266
8	3	-0,394766672	0,380104701
9	-3,16227766	0,138983255	0,380104845

Запишем цепную дробь, соответствующую ряду (5.5.2)

$$\begin{aligned}
 &1 - 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 + 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 - \dots = \\
 &= 1 - \frac{1,4142\dots x}{1} + \frac{1,2247\dots x}{1} - \frac{0,0700\dots x}{1} + \frac{0,6044\dots x}{1} + \\
 &\quad + \frac{0,0476\dots x}{1} + \frac{0,4575\dots x}{1} + \frac{0,1057\dots x}{1} - \frac{0,3947\dots x}{1} + \frac{0,3989\dots x}{1} - \dots
 \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

При $x = 1$ ряд (5.5.2) имеет следующие значение:

$$1 - 2^{1/2} + 3^{1/2} - 4^{1/2} + 5^{1/2} - \dots = 0,380104813\dots \quad (5.5.4)$$

Цепная дробь, соответствующая ряду

$$1 - 2^{1/2} + 3^{1/2} - 4^{1/2} + 5^{1/2} - \dots, \quad (5.5.5)$$

бесконечная цепная дробь. Поэтому нельзя получить производящую функцию в виде рациональной функции, как отношение двух полиномов.

Если в (5.5.3) x заменить на $-x$, то получим

$$\begin{aligned}
 &1 + 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 + 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 + \dots = \\
 &= 1 + \frac{1,4142\dots x}{1} - \frac{1,2247\dots x}{1} + \frac{0,0700\dots x}{1} - \frac{0,6044\dots x}{1} - \\
 &\quad - \frac{0,0476\dots x}{1} - \frac{0,4575\dots x}{1} - \frac{0,1057\dots x}{1} + \frac{0,3947\dots x}{1} - \frac{0,3989\dots x}{1} + \dots
 \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

В табл. 5.13 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^{1/2} + 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 + 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 + \dots, \quad (5.5.7)$$

а также значения подходящих дробей.

Таблица 5.13

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^{1/2} + 2^{1/2}x + 3^{1/2}x^2 + 4^{1/2}x^3 + 5^{1/2}x^4 + \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты ряда c_n	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих, P_n/Q_n при $x = 1$
1	1,414213562	1,414213562	2,414213562
2	1,732050808	1,224744871	-5,29252874
3	2	0,070044333	-8,78193886
4	2,236067977	0,604458388	-33,92740177
5	2,449489743	-0,047653496	-50,07543698
6	2,645751311	0,457541949	-98,87505417
...	...	...	...
499	22,36067977	-0,058002914	-27849109,18
500	22,38302929	2,458890537	-27764855,7

В табл. 5.14 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду:

$$1 - 2^{1/3}x + 3^{1/3}x^2 - 4^{1/3}x^3 + 5^{1/3}x^4 - \dots \quad (5.5.8)$$

Таблица 5.14

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^{1/3}x + 3^{1/3}x^2 - 4^{1/3}x^3 + 5^{1/3}x^4 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты ряда c_n	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих, P_n/Q_n при $x = 1$
1	-1,25992105	-1,25992105	-0,25992105
2	1,44224957	-1,144714243	0,412545958
3	-1,587401052	-0,044071826	0,426654428
4	1,709975947	-0,585013812	0,421378726
5	-1,817120593	0,061056021	0,421572964
6	1,912931183	-0,448369355	0,42151438
7	-2	0,113961451	0,421518699
8	2,080083823	-0,389213138	0,421517555

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 &1 - 2^{1/3}x + 3^{1/3}x^2 - 4^{1/3}x^3 + 5^{1/3}x^4 - \dots = \\
 &= 1 - \frac{1,2599\dots x}{1} + \frac{1,1447\dots x}{1} - \frac{0,0440\dots x}{1} + \frac{0,5850\dots x}{1} + \\
 &\quad \frac{0,0610\dots x}{1} - \frac{0,4483\dots x}{1} + \frac{0,1139\dots x}{1} - \frac{0,3892\dots x}{1} + \dots
 \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Можно записать значение расходящегося ряда:

$$1 - 2^{1/3} + 3^{1/3} - 4^{1/3} + 5^{1/3} - \dots = 0,42151764\dots \quad (5.5.10)$$

Были установлены значения расходящихся знакопеременных рядов:

$$1 - 2^{1/4} + 3^{1/4} - 4^{1/4} + 5^{1/4} - \dots = 0,441714583\dots \quad (5.5.11)$$

$$1 - 2^{1/5} + 3^{1/5} - 4^{1/5} + 5^{1/5} - \dots = 0,453655882\dots \quad (5.5.12)$$

В качестве «предельного» ряда можно записать «колеблющейся» ряд Лейбница:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1/2. \quad (5.5.13)$$

Аналогично, построением соответствующих цепных дробей можно определить значения расходящихся знакопеременных рядов, коэффициенты которых нечетные натуральные числа в дробной степени

$$1 - 3^{1/k} + 5^{1/k} - 7^{1/k} + 9^{1/k} - 11^{1/k} + \dots \quad (5.5.14)$$

В табл. 5.15 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду:

$$1 - 3^{1/2} + 5^{1/2} - 7^{1/2} + 9^{1/2} - 11^{1/2} + \dots \quad (5.5.15)$$

Таблица 5.15

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 3^{1/2}x + 5^{1/2}x^2 - 7^{1/2}x^3 + 9^{1/2}x^4 - 11^{1/2}x^5 \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты ряда c_n	Коэффициенты цепной дроби $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих P_{n+1}/Q_{n+1} при $x = 1$
1	-1,732050808	-1,732050808	-0,732050808
2	2,236067977	-1,290994449	0,243974245
3	-2,645751311	-0,107778492	0,292157526
4	3	-0,54147365	0,274699371
5	-3,31662479	0,060993972	0,27535297
6	3,605551275	-0,410280902	0,275167928
7	-3,872983346	0,125531532	0,275183205
8	4,123105626	-0,358806863	0,275179422

Используя полученные коэффициенты, запишем соответствующую ряду (5.5.15) цепную дробь:

$$\begin{aligned}
 &1 - 3^{1/2}x + 5^{1/2}x^2 - 7^{1/2}x^3 + 9^{1/2}x^4 - 11^{1/2}x^5 \dots = \\
 &= 1 - \frac{1,7320\dots x}{1} + \frac{1,2909\dots x}{1} - \frac{0,1077\dots x}{1} + \frac{0,5414\dots x}{1} + \\
 &\quad + \frac{0,0609\dots x}{1} + \frac{0,4102\dots x}{1} - \frac{0,1255\dots x}{1} + \frac{0,3588\dots x}{1} + \dots
 \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Можно записать значение ряда:

$$1 - 3^{1/2} + 5^{1/2} - 7^{1/2} + 9^{1/2} - 11^{1/2} \dots = 0,275179741\dots \quad (5.5.17)$$

Аналогично, через построение соответствующих цепных дробей, находим значения расходящихся рядов:

$$1 - 3^{1/3} + 5^{1/3} - 7^{1/3} + 9^{1/3} - 11^{1/3} + \dots = 0,356485576\dots \quad (5.5.18)$$

$$1 - 3^{1/4} + 5^{1/4} - 7^{1/4} + 9^{1/4} - 11^{1/4} + \dots = 0,394791397\dots \quad (5.5.19)$$

$$1 - 3^{1/5} + 5^{1/5} - 7^{1/5} + 9^{1/5} - 11^{1/5} + \dots = 0,417003032\dots \quad (5.5.20)$$

5.6. О некоторых аспектах метода соответствующих цепных дробей

Определим коэффициенты рядов, для которых соответствующие цепные дроби конечны. Вначале рассмотрим коэффициенты c_i ряда, который генерируется производящей функцией n -го порядка частного вида:

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots \quad (5.6.1)$$

Коэффициенты c_i ряда (5. 6.1) определяются при помощи рекуррентной формулы n -го порядка:

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + \dots + a_nc_{m-n}), \quad c_0 = a_0. \quad (5.6.2)$$

Тогда производящие функции n -го порядка общего вида порождает ряд:

Если в качестве производящей функции рассматривается функция из отношения полиномов бесконечно высокой степени, то порождающий такой функцией ряд приведёт к бесконечной соответствующей цепной дроби.

Наиболее часто в вычислительной практике имеет место ситуация, когда исходным объектом выступают ряды. Но ряды, как известно, могут быть сходящимися и расходящимися. По степенному ряду, сходящемуся или расходящемуся, строим соответствующую цепную дробь. «Свёрткой» цепной дроби, то есть определением n -й подходящей дроби, можно восстановить производящую функцию, то есть рациональную функцию, которую порождает «исходный» ряд:

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots \quad (5.6.6)$$

Надо отметить, что равенство левой и правой частей выражения (5.6.6) записывается следующим образом:

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + r_m(x), \quad (5.6.7)$$

где $r_m(x)$ – так называемый остаточный член, обеспечивающий равенство левой и правой частей выражения (5.6.7)

Если $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = 0$, то ряд, порождаемый производящей функцией, стоящей в левой части равенства (5.6.7), будет сходящимся. Но, как уже отмечалось, коэффициенты c_m ряда определяются формулами (5.6.3), то есть определяются коэффициентами a_i и b_i производящей функции.

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + r_m(x).$$

Установить производящую функцию n -го порядка мы можем, используя ряд, в том числе, и расходящийся. Если цепная дробь обрывается на звене $2n$, то производящая функция имеет вид $P_n(x)/Q_n(x)$, где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – полиномы n -й степени (Рис. 5.3).

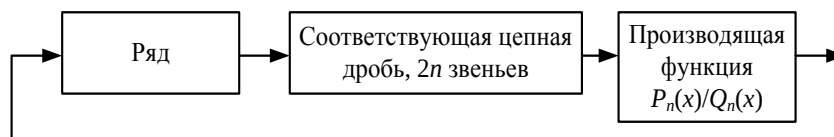


Рис. 5.3. Схема преобразования с начальным объектом – «Ряд».

Если же соответствующая цепная дробь не обрывается, то каждая подходящая дробь всё более приближается к производящей функции, представляющей отношение полиномов бесконечно высокой степени. И опять-таки, следует подчеркнуть, что ряд может быть расходящимся, то есть с увеличением числа участвующих членов ряда, частичные суммы его всё более удаляются от значения производящей функции, которую представляет этот расходящийся ряд.

Рассмотрим третью схему преобразований, когда исходным объектом является цепная дробь. (рис. 5.4).



Рис. 5.4. Схема преобразования с начальным объектом – «Цепная дробь».

Если имеется соответствующая цепная дробь, то «свёртка» этой цепной дроби позволяет устанавливать производящую функцию степенного ряда.

ГЛАВА 6

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

6.1. Определение производящих функций для рядов, включающих числа Фибоначчи

Значения расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана, определяются через числа Бернулли. Эйлером [110] было установлено соотношение:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{(-1)^n (2^n - 1)}{n} B_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.1)$$

Определим производящие функции для рядов, включающих степени чисел Фибоначчи:

$$1^n - 1^n + 2^n - 3^n + 5^n - 8^n + 13^n - 21^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.2)$$

Числа Фибоначчи – это числа, определяемые простейшим рекуррентным соотношением второго порядка.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1; \quad F_2 = 1. \quad (6.1.3)$$

Использование рекуррентного соотношения (6.1.3) приводит к последовательности чисел:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \dots$$

Чтобы установить производящие функции для рядов, необходимо по степенному ряду построить, так называемые, соответствующие непрерывные дроби.

Степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

может быть преобразован в соответствующую цепную дробь

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1 - \frac{\omega_2 x}{1 + \frac{\omega_3 x}{1 - \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1 - \frac{\omega_{2n} x}{1 + \dots}}}} \quad (6.1.4)$$

по формулам Хейлсманна – Стильтеса (формулы (5.1.9) и (5.1.10) пятой главы).

Установим производящую функцию для ряда

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + 13x^6 - \dots \quad (6.1.5)$$

Во второй колонке табл. 6.1 приведены коэффициенты этой цепной дроби.

Таблица 6.1

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-2	0,6
3	-0,5	0,8
4	0,5	1
5	0	

Таким образом, для ряда (6.1.5) найдены коэффициенты соответствующей цепной дроби:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -1, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2}, \quad \omega_4 = \frac{1}{2}, \quad \omega_5 = 0.$$

Подставляя эти коэффициенты в цепную дробь (6.1.4), получим:

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + 13x^6 - \dots = 1 + \frac{-1x}{1} - \frac{2x}{1} + \frac{-1/2x}{1} - \frac{1/2x}{1} = 1 - \frac{x}{1} - \frac{2x}{1} - \frac{x}{2} - \frac{x}{1} = \frac{1}{1+x-x^2}. \quad (6.1.6)$$

Выражение (6.1.6) – это известная производящая функция чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + 13x^6 - 21x^7 + \dots \quad (6.1.7)$$

Полагая в (6.1.6) $x = 1$, найдём значение расходящегося, знакопеременного ряда, составленного из чисел Фибоначчи:

$$1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 + 13 - 21 + 34 - \dots = 1. \quad (6.1.8)$$

Производящая функция (6.1.6) действительно порождает ряд (6.1.5). Определим коэффициенты c_i ряда. Как известно [91],

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (6.1.9)$$

где

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + \dots + a_nc_{m-n}), \quad c_0 = 1. \quad (6.1.10)$$

В данном случае производящая функция имеет вид:

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (6.1.11)$$

где

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (6.1.12)$$

Учитывая, что $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, можем записать:

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (6.1.13)$$

$$c_m = -(c_{m-1} - c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (6.1.14)$$

Используя рекуррентное соотношение (6.1.14), получим коэффициенты ряда (6.1.8):

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_0 = -1, \\ c_2 &= -(c_1 - c_0) = -(-1 - 1) = 2, \\ c_3 &= -(c_2 - c_1) = -(2 - (-1)) = -3, \\ c_4 &= -(c_3 - c_2) = -(-3 - 2) = 5, \\ c_5 &= -(c_4 - c_3) = -(5 - (-3)) = -8, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Таким образом, рациональная функция (6.1.6) – это производящая функция ряда (6.1.5), то есть соотношение (6.1.7) имеет место.

Запишем по формуле Хейлсманна – Стилтеса выражение, определяющее коэффициент ω_5 , который, как установлено ранее, имеет нулевое значение:

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \cdot \psi_2}{\varphi_2 \cdot \psi_3}. \quad (6.1.16)$$

Коэффициент ω_5 имеет нулевое значение, так как определитель $\varphi_3 = 0$:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 30 - 30 + 27 + 25 + 32 = -84 + 84 = 0.$$

В главе 5 было установлено, что определитель Ганкеля третьего порядка равен нулю, то есть:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1.17)$$

если элементы c_i устанавливаются производящей функцией второго порядка, то есть выражением в левой части формулы (6.1.18):

$$\frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots, \quad (6.1.18)$$

где

$$c_m = -(a_1 c_{m-1} + a_2 c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (6.1.19)$$

Если в (6.1.6) x заменить на $-x$, то получим

$$\begin{aligned} 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots = \\ = 1 + \frac{x}{1} - \frac{2x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{1} = \frac{1}{1 - x - x^2}. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Таким образом, запишем производящую функцию для степенного ряда, коэффициентами которого являются числа Фибоначчи:

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots \quad (6.1.21)$$

Легко заметить, что старший по модулю корень алгебраического уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0$$

равен значению предела отношения соседних чисел Фибоначчи:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180339887 \dots$$

При $x = 1$ из (6.1.21) получим значение расходящегося знакопостоянного ряда, составленного из чисел Фибоначчи:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + \dots = -1. \quad (6.1.22)$$

Так как соответствующая ряду цепная дробь (6.1.20) конечная и содержит четыре звена, то можно записать:

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \cdot \psi_2}{\varphi_2 \cdot \psi_3} = 0.$$

Коэффициент φ_3 имеет нулевое значение, так как равен нулю определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 30 + 30 - 27 - 32 - 25 = 0. \quad (6.1.23)$$

Установим производящую функцию для ряда

$$1 - x + 2^2 x^2 - 3^2 x^3 + 5^2 x^4 - 8^2 x^5 + 13^2 x^6 - \dots \quad (6.1.24)$$

Во второй колонке табл. 6.2 приведены коэффициенты ω_i цепной дроби, соответствующей ряду (6.1.24), найденные алгоритмом Рутисхаузера.

Таблица 6.2

Коэффициенты цепной дроби соответствующей ряду

$$1 - x + 2^2 x^2 - 3^2 x^3 + 5^2 x^4 - 8^2 x^5 + 13^2 x^6 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-4	0,8
3	-1,75	1.230769230769230...
4	0,67857(142857)	-9
5	0,060150375939849...	29
6	-0.368421052631578	∞
7	0	

Для ряда (6.1.24) определены коэффициенты соответствующей цепной дроби:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -1, \quad \omega_2 = -4, \quad \omega_3 = -1,75, \quad \omega_4 = 0,6785..., \quad \omega_5 = 0,0601..., \quad \omega_6 = -0,3684..., \quad \omega_7 = 0.$$

Так как $\omega_7 = 0$, то соответствующая цепная дробь конечная и содержит 6 звеньев.

Подставляя полученные коэффициенты в цепную дробь (6.1.4), получим:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 1^2 x + 2^2 x^2 - 3^2 x^3 + 5^2 x^4 - 8^2 x^5 + 13^2 x^6 - 21x^7 + \dots = \\ & 1 + \frac{-1x}{1} - \frac{4x}{1} + \frac{-1.75x}{1} - \frac{0.6785x}{1} - \frac{0.0601...x}{1} - \frac{-0.3684...x}{1} = \\ & = 1 - \frac{x}{1} + \frac{4x}{1} - \frac{1.75x}{1} - \frac{0.6785x}{1} + \frac{0.0601...x}{1} + \frac{0.3684...x}{1} = \frac{1+x}{1+2x-2x^2-x^3}. \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

Таким образом, можно записать производящую функцию ряда (6.1.24):

$$\frac{1+x}{1+2x-2x^2-x^3} = 1 - x + 2^2 x^2 - 3^2 x^3 + 5^2 x^4 - 8^2 x^5 + 13^2 x^6 + \dots \quad (6.1.26)$$

Покажем, что формула (6.1.26) справедлива, предварительно определив коэффициенты ряда, порожденного производящей функцией 3-го порядка канонического вида:

$$\frac{1}{1+2x-2x^2-x^3} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots,$$

где

$$c_m = -(2c_{m-1} - 2c_{m-2} - c_{m-3}), \quad c_0 = 1.$$

Запишем значения коэффициентов c_i :

$$c_1 = -2c_0 = -2,$$

$$c_2 = -(2c_1 - 2c_0) = -(2(-2) - 2 \cdot 1) = 6,$$

$$c_3 = -(2c_2 - 2c_1 - c_0) = -(2 \cdot 6 - 2(-2) - 1) = -15,$$

$$c_4 = -(2c_3 - 2c_2 - c_1) = -(2 \cdot (-15) - 2 \cdot 6 - (-2)) = 40,$$

$$c_5 = -(2c_4 - 2c_3 - c_2) = -(2 \cdot 40 - 2 \cdot (-15) - 6) = 104,$$

.....

Можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1+2x-2x^2-x^3} &= (1+x)(1-2x+6x^2-15x^3+40x^4-104x^5+\dots) = \\ &= 1-2x+6x^2-15x^3+40x^4-104x^5+\dots+x-2x^2+6x^3-15x^4+4x^5-\dots \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим формулу (6.1.26):

$$\frac{1+x}{1+2x-2x^2-x^3} = 1^2 - x^2 + 2^2 x^2 - 3^2 x^3 + 5^2 x^4 - 8^2 x^5 + \dots$$

При $x = 1$ из (6.1.26) запишем:

$$1 - 1 + 2^2 - 3^2 + 5^2 - 8^2 + 13^2 - 21^2 + \dots = \infty. \quad (6.1.27)$$

Соответствующая ряду (6.1.24) цепная дробь (6.1.25) конечная и имеет 6 звеньев, так как $\omega_7 = 0$. Запишем выражение для ω_7 :

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \cdot \psi_3}{\varphi_3 \cdot \psi_4} = 0. \quad (6.1.28)$$

В формуле (6.1.28) $\varphi_4 = 0$, так как $\psi_3 \neq 0$, ибо ψ_3 входит в формулу, которая уже использовалась при определении коэффициента ω_6 . Следовательно, равен нулю определитель Ганкеля четвертого порядка:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2^2 & -3^2 & 5^2 \\ 2^2 & -3^2 & 5^2 & -8^2 \\ -3^2 & 5^2 & -8^2 & 13^2 \\ 5^2 & -8^2 & 13^2 & -21^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.29)$$

Вычисляя определитель (6.1.29), запишем:

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= -1 \begin{vmatrix} -9 & 25 & -64 \\ 25 & -64 & 169 \\ -64 & 169 & -441 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 25 & -64 \\ -9 & -64 & 169 \\ 25 & 169 & -441 \end{vmatrix} - \\ &\quad -9 \begin{vmatrix} 4 & -9 & -64 \\ -9 & 25 & 169 \\ 25 & -64 & -441 \end{vmatrix} - 25 \begin{vmatrix} 4 & -9 & 25 \\ -9 & 25 & -64 \\ 25 & -64 & 169 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot 2 - 4(-4) - 9(-4) - 25 \cdot 2 = -2 + 16 + 36 - 50 = 0. \end{aligned}$$

Если в (6.1.25) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} &1^2 + 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + 5^2 x^4 + 8^2 x^5 + 13^2 x^6 + \dots = \\ &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{4x}{1} + \frac{1.75x}{1} + \frac{0.6785\dots x}{1} - \frac{0.0601\dots x}{1} - \frac{0.3684\dots x}{1} = \frac{1-x}{1-2x-2x^2+x^3}. \quad (6.1.30) \end{aligned}$$

Запишем производящую функцию степенного ряда, коэффициенты которого являются квадратами чисел Фибоначчи:

$$\frac{1-x}{1-2x-2x^2+x^3} = 1^2 + 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + 5^2 x^4 + 8^2 x^5 + \dots \quad (6.1.31)$$

Из записи производящей функции следует, что при $x = 1$ ряд (6.1.31) имеет нулевое значение:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + \dots = 0. \quad (6.1.32)$$

Так как соответствующая ряду (6.1.31) цепная дробь конечна и имеет 6 звеньев, то можно записать:

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \cdot \psi_3}{\varphi_3 \cdot \psi_4} = 0,$$

где φ_i и ψ_i – определители, входящие в формулы Хейлсманна – Стилтеса (формулы (5.1.12) и (5.1.13) пятой главы). Определитель φ_4 , то есть определитель Ганкеля четвертого порядка, равен нулю:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 5^2 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 8^2 \\ 3^2 & 5^2 & 8^2 & 13^2 \\ 5^2 & 8^2 & 13^2 & 21^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.33)$$

Установим производящую функцию для знакопеременного степенного ряда, коэффициенты которого – кубы чисел Фибоначчи:

$$1^3 - 1^3 x + 2^3 x^2 - 3^3 x^3 + 5^3 x^4 - 8^3 x^5 + \dots \quad (6.1.34)$$

Во второй колонке табл. 6.3 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (6.1.34).

Таблица 6.3

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - x + 2^3 x^2 - 3^3 x^3 + 5^3 x^4 - 8^3 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-8	0,(8)
3	-4,625	1,82(857142)
4	0,9155(405)	-0,(174825)
5	0,201057(145706592201057)	-0,765142150803461...
6	-0,601388156738710244...	-0,506726457399103...
7	-0,0(348777)	-0,501557632398754...
8	0,2(270)	-0,5
9	0	

Подставляя полученные коэффициенты в цепную дробь канонической формы (6.1.4), получим.

$$\begin{aligned} & 1^3 - 1^3 x + 2^3 x^2 - 3^3 x^3 + 5^3 x^4 - 8^3 x^5 + 13x^6 - \dots = \\ & = 1 - \frac{x}{1} + \frac{8x}{1} - \frac{4,625x}{1} + \frac{0,9155...x}{1} - \frac{0,2010...x}{1} + \frac{0,6013...x}{1} - \frac{0,0348...x}{1} + \frac{0,2270...x}{1} = \\ & = \frac{1 + 2x - x^2}{1 + 3x - 6x^2 - 3x^3 + x^4}. \end{aligned} \quad (6.1.35)$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1 + 2x - x^2}{1 + 3x - 6x^2 - 3x^3 + x^4} = 1^3 - 1^3 x + 2^3 x^2 - 3^3 x^3 + 5^3 x^4 - 8^3 x^5 + \dots \quad (6.1.36)$$

Положив в (6.1.36) $x = 1$, получим значение знакопеременного ряда, коэффициенты которого есть кубы чисел Фибоначчи:

$$1^3 - 1^3 + 2^3 - 3^3 + 5^3 - 8^3 + 13^3 - \dots = -1/2. \quad (6.1.37)$$

То же значение для ряда (6.1.37) получено и непосредственным вычислением соответствующей цепной дроби (6.1.35) при $x = 1$, что отражено в третьей колонке табл. 6.3. Это обстоятельство также свидетельствует о том, что производящая функция (6.1.36) для ряда (6.1.34) установлена верно.

Как следует из табл. 6.3, девятый коэффициент соответствующей ряду (6.1.34) цепной дроби равен нулю, то есть:

$$\omega_9 = -\frac{\varphi_5 \cdot \psi_4}{\varphi_4 \cdot \psi_5} = 0,$$

что обусловлено нулевым значением определителя Ганкеля пятого порядка:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -1^3 & 2^3 & -3^3 & 5^3 & -8^3 \\ 2^3 & -3^3 & 5^3 & -8^3 & 13^3 \\ -3^3 & 5^3 & -8^3 & 13^3 & -21^3 \\ 5^3 & -8^3 & 13^3 & -21^3 & 34^3 \\ -8^3 & 13^3 & -21^3 & 34^3 & -55^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.38)$$

Если в (6.1.35) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & 1 + 1^3 x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 + 5^3 x^4 + 8^3 x^5 + 13x^6 + \dots = \\ & = 1 + \frac{x}{1} - \frac{8x}{1} + \frac{4.625x}{1} - \frac{0.9155\dots x}{1} + \frac{0.201\dots x}{1} - \frac{0.6013\dots x}{1} + \frac{0.0348\dots x}{1} - \frac{0.227\dots x}{1} = \\ & = \frac{1 - 2x - x^2}{1 - 3x - 6x^2 + 3x^3 + x^4}. \end{aligned} \quad (6.1.39)$$

Можно записать производящую функцию для ряда (6.1.39):

$$\frac{1 - 2x - x^2}{1 - 3x - 6x^2 + 3x^3 + x^4} = 1^3 + 1^3 x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 + 5^3 x^4 + 8^3 x^5 + 13x^6 + \dots \quad (6.1.40)$$

Приняв в (6.1.40) $x = 1$, получим значение расходящегося ряда, коэффициенты которого есть кубы чисел Фибоначчи:

$$1^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + 8^3 + 13^3 - \dots = 1/2. \quad (6.1.41)$$

Это же значение для расходящегося ряда (6.1.39) получено при вычислении соответствующей цепной дроби.

Соответствующая цепная дробь (6.1.39) конечна и имеет восемь звеньев, что является следствием того, что коэффициент ω_9 равен нулю, то есть

$$\omega_9 = -\frac{\varphi_5 \cdot \psi_4}{\varphi_4 \cdot \psi_5} = 0. \quad (6.1.42)$$

Коэффициент ω_9 равен нулю, так как равен нулю определитель Ганкеля пятого порядка:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 5^3 & 8^3 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 8^3 & 13^3 \\ 3^3 & 5^3 & 8^3 & 13^3 & 21^3 \\ 5^3 & 8^3 & 13^3 & 21^3 & 34^3 \\ 8^3 & 13^3 & 21^3 & 34^3 & 55^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.43)$$

Определим соответствующую цепную дробь для знакопеременного степенного ряда, коэффициенты которого числа Фибоначчи в четвертой степени:

$$1^4 - 1^4 x + 2^4 x^2 - 3^4 x^3 + 5^4 x^4 - 8^4 x^5 + 13^4 x^6 - \dots \quad (6.1.44)$$

Во второй колонке табл. 6.4 приведены коэффициенты этой цепной дроби.

Таблица 6.4

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^4 - 1^4 x + 2^4 x^2 - 3^4 x^3 + 5^4 x^4 - 8^4 x^5 + 13^4 x^6 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, a_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-16	0,941176470588235...
3	-10,9375	2,639175257731958...
4	1,2282(142857)	0,246432703432317...
5	0,501567731483405...	-0,371391886219412...
6	-0,985041285493469...	-0,029457401734963...
7	-0,113900169408471...	-0,011133880050427...
8	0,363073653145661...	0,000217758179541...
9	0,013794882025412...	-0,303064742205553...e-4
10	-0,142284209266132...	0
11	0	

Подставляя эти коэффициенты в каноническую запись соответствующей цепной дроби (6.1.4), получим:

$$1^4 - 1^4 x + 2^4 x^2 - 3^4 x^3 + 5^4 x^4 - 8^4 x^5 + 13^4 x^6 - \dots =$$

$$1 - \frac{x}{1 + \frac{16x}{1 - \frac{10,9375x}{1 - \frac{1,2282...x}{1 + \frac{0,5016...x}{1 + \frac{0,9850...x}{1 - \frac{0,1139...x}{1 - \frac{0,3630...x}{1 + \frac{0,0137...x}{1 + \frac{0,1422...x}{1}}}}}}}}}} \quad (6.1.45)$$

При свёртке цепной дроби (6.1.45) восстанавливаем производящую функцию, порождающую знакопеременный степенной ряд (6.1.44), коэффициенты которого – числа Фибоначчи в четвертой степени. Эта же производящая функция определяет значение «порождаемого» степенного ряда, который может быть как сходящимся, и тогда его значение совпадает со значением производящей функции, так и расходящимся. В этом случае расходящийся ряд суммируется, то есть находится его значение, как значение производящей функции, порождающей этот степенной ряд.

Этим же приёмом, – построением соответствующих цепных дробей, могут быть определены значения и числовых рядов как сходящихся, так и расходящихся.

Раскладывая формальный степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (6.1.46)$$

в соответствующую цепную дробь одним из алгоритмов, например, алгоритмом Рутисхаузера, мы имеем, определяя конкретное значение x , бесконечное семейство разложений числовых рядов в соответствующие цепные дроби. При $x = 1$ получим разложения в цепную дробь числового ряда

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (6.1.47)$$

Возвратимся к соответствующей ряду (6.1.44) цепной дроби (6.1.45). Полагая в (6.1.45) $x = 1$, определим значение знакопеременного расходящегося ряда, коэффициенты которого есть числа Фибоначчи в четвертой степени:

$$\begin{aligned}
& 1 - 1 + 2^4 - 3^4 + 5^4 - 8^4 + 13^4 - 21^4 + 34^4 - \dots = \\
& = 1 - \frac{1}{1+} \frac{16}{1-} \frac{10.9375}{1-} \frac{1.2282\dots}{1-} \frac{0.5016\dots}{1+} \frac{0.9850\dots}{1+} \frac{0.1139\dots}{1-} - \\
& \quad - \frac{0.3630\dots}{1-} \frac{0.0137\dots}{1+} \frac{0.1422\dots}{1+} = 0.
\end{aligned} \tag{6.1.48}$$

Соответствующая ряду (6.1.44) цепная дробь – конечна и содержит 10 звеньев, Формула, по которой устанавливается число N – количество звеньев цепных дробей соответствующих ряду

$$1^n - 1^n + 2^n - 3^n + 5^n - 8^n + 13^n - 21^n - \dots \tag{6.1.49}$$

имеет вид

$$N = 2(n+1), \tag{6.1.50}$$

где n – показатель степени чисел, составляющих ряд (6.1.49).

При $n = 4$ число звеньев конечной цепной дроби будет равно:

$$N = 2 \cdot 5 = 10.$$

Такая же формула определяет и число звеньев конечных цепных дробей, соответствующих рядам, включающих степени чисел натурального ряда:

$$1 - 2^n x - 3^n x^2 - 4^n x^3 + 5^n x^4 - \dots$$

Как следует из табл. 6.4, одиннадцатый коэффициент цепной дроби, соответствующей ряду (6.1.44), равен нулю, то есть:

$$\omega_{11} = -\frac{\varphi_6 \cdot \psi_5}{\varphi_5 \cdot \psi_6} = 0.$$

Это имеет место, так как определитель Ганкеля шестого порядка равен нулю:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} -1^4 & 2^4 & -3^4 & 5^4 & -8^4 & 13^4 \\ 2^4 & -3^4 & 5^4 & -8^4 & 13^4 & -21^4 \\ -3^4 & 5^4 & -8^4 & 13^4 & -21^4 & 34^4 \\ 5^4 & -8^4 & 13^4 & -21^4 & 34^4 & -55^4 \\ -8^4 & 13^4 & -21^4 & 34^4 & -55^4 & 89^4 \\ 13^4 & -21^4 & 34^4 & -55^4 & 89^4 & -144^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Если в (6.1.45) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
& 1 + 1^4 x + 2^4 x^2 + 3^4 x^3 + 5^4 x^4 + 8^4 x^5 + 13^4 x^6 + \dots = \\
& 1 + \frac{x}{1-} \frac{16x}{1+} \frac{10.9375\dots x}{1-} \frac{1.2282\dots x}{1-} \frac{0.5016\dots x}{1+} \frac{0.9850\dots x}{1+} - \\
& \quad - \frac{0.1139\dots x}{1-} \frac{0.3630\dots x}{1-} \frac{0.0137\dots x}{1+} \frac{0.1422\dots x}{1+}.
\end{aligned} \tag{6.1.51}$$

Производящую функцию для ряда (6.1.51) можно получить «сверткой» цепной дроби. То есть, соответствующая степенному ряду цепная дробь эквивалентна производящей этот ряд функции.

Полагая в (6.1.51) $x = 1$, определим, что значением знакопостоянного расходящегося ряда, коэффициенты которого числа Фибоначчи в четвертой степени, является бесконечно большая величина:

$$1^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + 8^4 + 13^4 + 21^4 + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{16}{1 + \frac{10.9375...}{1 + \frac{1.2282...}{1 - \frac{0.5016...}{1 - \frac{0.9850...}{1 + \frac{0.1139...}{1 + \frac{0.363...}{1 - \frac{0.0137...}{1 - \frac{0.1422...}{1}}}}}}}} = \infty. \quad (6.1.52)$$

Так как соответствующая цепная дробь (6.1.51) конечная и имеет 10 звеньев, то можно записать

$$\omega_{11} = -\frac{\varphi_6 \cdot \psi_5}{\varphi_5 \cdot \psi_6} = 0.$$

Это имеет место, так как определителя Ганкеля шестого порядка равен нулю:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} 1^4 & 2^4 & 3^4 & 5^4 & 8^4 & 13^4 \\ 2^4 & 3^4 & 5^4 & 8^4 & 13^4 & 21^4 \\ 3^4 & 5^4 & 8^4 & 13^4 & 21^4 & 34^4 \\ 5^4 & 8^4 & 13^4 & 21^4 & 34^4 & 55^4 \\ 8^4 & 13^4 & 21^4 & 34^4 & 55^4 & 89^4 \\ 13^4 & 21^4 & 34^4 & 55^4 & 89^4 & 144^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.53)$$

Определим соответствующую цепную дробь для знакопеременного степенного ряда, коэффициенты которого – числа Фибоначчи в пятой степени:

$$1^5 - 1^5 x + 2^5 x^2 - 3^5 x^3 + 5^5 x^4 - 8^5 x^5 + 13^5 x^6 - \dots \quad (6.1.54)$$

Во второй колонке табл. 6.5 приведены коэффициенты этой цепной дроби.

Таблица 6.5

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1^5 - 1^5 x + 2^5 x^2 - 3^5 x^3 + 5^5 x^4 - 8^5 x^5 + 13^5 x^6 - \dots$$

Номер звена, n	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1	0
2	-32	0.(96)
3	-24.40625	3.72(36)
4	1.6385643405889884...	0.449308820631211...
5	1.106937365667741...	-0.41672364241005...
6	-1.6187436162792385...	0.165073725640993...
7	-0.27884402550325151...	0.223682161515421...
8	0.581158520261985...	0.327740555807937...
9	0.044881590232145...	0.3162140296735737...
10	-0.229686390337679...	0.318168969494131...
11	-0.007169097085040...	0.318180677326634...
12	0.088262979077537...	0.3(18)
13	0	

Подставляя найденные коэффициенты ω_i в цепную дробь канонической формы (6.1.4), получим:

$$\begin{aligned} & 1^5 - 1^5 x + 2^5 x^2 - 3^5 x^3 + 5^5 x^4 - 8^5 x^5 + 13^5 x^6 - \dots = \\ & = 1 - \frac{x}{1 + \frac{32x}{1 - \frac{24.4062...x}{1 - \frac{1.6385...x}{1 + \frac{1.1069...x}{1 + \frac{1.6187...x}{1 - \frac{0.2788...x}{1 - \frac{0.5811...x}{1 + \frac{0.0448...x}{1 + \frac{0.2296...x}{1 - \frac{0.0071...x}{1 - \frac{0.0882...x}{1}}}}}}}}}}}} \end{aligned} \quad (6.1.55)$$

Полагая в (6.1.55) $x = 1$, определим значение знакопеременного расходящегося ряда, коэффициенты которого есть числа Фибоначчи в пятой степени:

$$\begin{aligned}
 & 1^5 - 1^5 + 2^5 - 3^5 + 5^5 - 8^5 + 13^5 - 21^5 + 34^5 - \dots = \\
 & 1 - \frac{1}{1} - \frac{32}{1} - \frac{24.4062\dots}{1} - \frac{1.6385\dots}{1} + \frac{1.1069\dots}{1} + \frac{1.6189\dots}{1} - \frac{0.2788\dots}{1} \\
 & - \frac{0.5811\dots}{1} + \frac{0.0448\dots}{1} + \frac{0.2296\dots}{1} - \frac{0.0071\dots}{1} - \frac{0.0882\dots}{1} = 0.3181818\dots \quad (6.1.56)
 \end{aligned}$$

Как следует из табл. 6.5, тринадцатый коэффициент цепной дроби, соответствующей ряду (6.1.54), равен нулю, то есть:

$$\omega_{13} = -\frac{\varphi_7 \cdot \psi_6}{\varphi_6 \cdot \psi_7} = 0.$$

Из равенства нулю ω_{13} следует, что определитель Ганкеля седьмого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_7 = \begin{vmatrix} -1^5 & 2^5 & -3^5 & 5^5 & -8^5 & 13^5 & -21^5 \\ 2^5 & -3^5 & 5^5 & -8^5 & 13^5 & -21^5 & 34^5 \\ -3^5 & 5^5 & -8^5 & 13^5 & -21^5 & 34^5 & -55^5 \\ 5^5 & -8^5 & 13^5 & -21^5 & 34^5 & -55^5 & 89^5 \\ -8^5 & 13^5 & -21^5 & 34^5 & -55^5 & 89^5 & -144^5 \\ 13^5 & -21^5 & 34^5 & -55^5 & 89^5 & -144^5 & 233^5 \\ -21^5 & 34^5 & -55^5 & 89^5 & -144^5 & 233^5 & -377^5 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.1.57)$$

Если в (6.1.55) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 & 1^5 + 1^5 x + 2^5 x^2 + 3^5 x^3 + 5^5 x^4 + 8^5 x^5 + 13^5 x^6 - \dots = \\
 & = 1 + \frac{x}{1} - \frac{32x}{1} + \frac{24.4062\dots x}{1} + \frac{1.6385\dots x}{1} - \frac{1.1069\dots x}{1} - \frac{1.6187\dots x}{1} + \\
 & + \frac{0.2788\dots x}{1} + \frac{0.5811\dots x}{1} - \frac{0.0448\dots x}{1} - \frac{0.2296\dots x}{1} + \frac{0.0071\dots x}{1} + \frac{0.0882\dots x}{1}. \quad (6.1.58)
 \end{aligned}$$

Полагая в (6.1.58) $x = 1$, определим значение знакопостоянного расходящегося ряда, коэффициенты которого числа Фибоначчи в пятой степени:

$$\begin{aligned}
 & 1^5 + 1^5 + 2^5 + 3^5 + 5^5 + 8^5 + 13^5 + 21^5 + 34^5 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{1}{1} - \frac{32}{1} + \frac{24.4062\dots}{1} + \frac{1.6385\dots}{1} - \frac{1.1069\dots}{1} - \frac{1.6187\dots}{1} + \frac{0.2788\dots}{1} + \\
 & + \frac{0.5811\dots}{1} - \frac{0.0448\dots}{1} - \frac{0.2296\dots}{1} + \frac{0.0071\dots}{1} + \frac{0.0882\dots}{1} = -0.3181818\dots \quad (6.1.59)
 \end{aligned}$$

Так как $\omega_{13} = 0$, то определитель Ганкеля седьмого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi'_7 = \begin{vmatrix} 1^5 & 2^5 & 3^5 & 5^5 & 8^5 & 13^5 & 21^5 \\ 2^5 & 3^5 & 5^5 & 8^5 & 13^5 & 21^5 & 34^5 \\ 3^5 & 5^5 & 8^5 & 13^5 & 21^5 & 34^5 & 55^5 \\ 5^5 & 8^5 & 13^5 & 21^5 & 34^5 & 55^5 & 89^5 \\ 8^5 & 13^5 & 21^5 & 34^5 & 55^5 & 89^5 & 144^5 \\ 13^5 & 21^5 & 34^5 & 55^5 & 89^5 & 144^5 & 233^5 \\ 21^5 & 34^5 & 55^5 & 89^5 & 144^5 & 233^5 & 377^5 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.60)$$

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых числа Фибоначчи в чётной и нечётной степени, то есть для рядов

$$1^{2k} - 1^{2k}x + 2^{2k}x^2 - 3^{2k}x^3 + 5^{2k}x^4 - 8^{2k}x^5 + 13^{2k}x^6 - \dots \quad (6.1.61)$$

$$1^{2k+1} - 1^{2k+1}x + 2^{2k+1}x^2 - 3^{2k+1}x^3 + 5^{2k+1}x^4 - 8^{2k+1}x^5 + 13^{2k+1}x^6 - \dots \quad (6.1.62)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -F_2^{2k-2} & F_3^{2k-2} & -F_4^{2k-2} & \dots & -F_{2k}^{2k-2} & F_{2k+1}^{2k-2} \\ F_3^{2k-2} & -F_4^{2k-2} & F_5^{2k-2} & \dots & F_{2k+1}^{2k-2} & -F_{2k+2}^{2k-2} \\ -F_4^{2k-2} & F_5^{2k-2} & -F_6^{2k-2} & \dots & -F_{2k+2}^{2k-2} & F_{2k+3}^{2k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_{2k}^{2k-2} & F_{2k+1}^{2k-2} & -F_{2k+2}^{2k-2} & \dots & -F_{4k-2}^{2k-2} & F_{4k-1}^{2k-2} \\ F_{2k+1}^{2k-2} & -F_{2k+2}^{2k-2} & F_{2k+3}^{2k-2} & \dots & F_{4k-1}^{2k-2} & -F_{4k}^{2k-2} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1.63)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -F_2^{2k-1} & F_3^{2k-1} & -F_4^{2k-1} & \dots & F_{2k+1}^{2k-1} & -F_{2k+2}^{2k-1} \\ F_3^{2k-1} & -F_4^{2k-1} & F_5^{2k-1} & \dots & -F_{2k+2}^{2k-1} & F_{2k+3}^{2k-1} \\ -F_4^{2k-1} & F_5^{2k-1} & -F_6^{2k-1} & \dots & F_{2k+3}^{2k-1} & -F_{2k+4}^{2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_{2k+1}^{2k-1} & F_{2k+2}^{2k-1} & -F_{2k+3}^{2k-1} & \dots & -F_{4k}^{2k-1} & F_{4k+1}^{2k-1} \\ F_{2k+2}^{2k-1} & -F_{2k+3}^{2k-1} & F_{2k+4}^{2k-1} & \dots & F_{4k+1}^{2k-1} & -F_{4k+2}^{2k-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1.64)$$

где $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13, \dots$ — числа Фибоначчи.

Аналогично устанавливая конечные цепные дроби для знакопостоянных рядов, коэффициенты которых числа Фибоначчи в чётной и нечётной степени, то есть рядов:

$$1^{2k} + 1^{2k}x + 2^{2k}x^2 + 3^{2k}x^3 + 5^{2k}x^4 + 8^{2k}x^5 + 13^{2k}x^6 + \dots \quad (6.1.65)$$

$$1^{2k+1} + 1^{2k+1}x + 2^{2k+1}x^2 + 3^{2k+1}x^3 + 5^{2k+1}x^4 + 8^{2k+1}x^5 + 13^{2k+1}x^6 + \dots \quad (6.1.66)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} F_2^{2k-2} & F_3^{2k-2} & F_4^{2k-2} & \dots & F_{2k}^{2k-2} & F_{2k+1}^{2k-2} \\ F_3^{2k-2} & F_4^{2k-2} & F_5^{2k-2} & \dots & F_{2k+1}^{2k-2} & F_{2k+2}^{2k-2} \\ F_4^{2k-2} & F_5^{2k-2} & F_6^{2k-2} & \dots & F_{2k+2}^{2k-2} & F_{2k+3}^{2k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{2k}^{2k-2} & F_{2k+1}^{2k-2} & F_{2k+2}^{2k-2} & \dots & F_{4k-2}^{2k-2} & F_{4k-1}^{2k-2} \\ F_{2k+1}^{2k-2} & F_{2k+2}^{2k-2} & F_{2k+3}^{2k-2} & \dots & F_{4k-1}^{2k-2} & F_{4k}^{2k-2} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1.67)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} F_2^{2k-1} & F_3^{2k-1} & F_4^{2k-1} & \dots & F_{2k+1}^{2k-1} & F_{2k+2}^{2k-1} \\ F_3^{2k-1} & F_4^{2k-1} & F_5^{2k-1} & \dots & F_{2k+2}^{2k-1} & F_{2k+3}^{2k-1} \\ F_4^{2k-1} & F_5^{2k-1} & F_6^{2k-1} & \dots & F_{2k+3}^{2k-1} & F_{2k+4}^{2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{2k+1}^{2k-1} & F_{2k+2}^{2k-1} & F_{2k+3}^{2k-1} & \dots & F_{4k}^{2k-1} & F_{4k+1}^{2k-1} \\ F_{2k+2}^{2k-1} & F_{2k+3}^{2k-1} & F_{2k+4}^{2k-1} & \dots & F_{4k+1}^{2k-1} & F_{4k+2}^{2k-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1.68)$$

где $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13, \dots$ – числа Фибоначчи.

Определители (6.1.63) – (6.1.64), а также (6.1.67) и (6.1.68) можно рассматривать как тестовые.

В табл. 6.6 и 6.7 приведены значения сумм знакопеременных рядов с числами Фибоначчи, полученные представлением этих рядов в соответствующие цепные дроби.

Таблица 6.6

Значения знакопеременных рядов с числами Фибоначчи

$$1^n - 1^n + 2^n - 3^n + 5^n - 8^n + 13^n - \dots$$

Степень коэффициентов	Число звеньев дроби	Значения рядов с числами Фибоначчи
1	4	1
2	6	∞
3	8	-0,5
4	10	0
5	12	$0,3(18) = 7/22$
6	14	∞
7	16	$-0.217868338557993... = -139/638$
8	18	0
9	20	$0,154842435241709... = 1877/12122$
10	22	∞
11	24	$-0.112581966091802...$
12	26	0
13	28	$0.0831245431570699...$
14	30	∞
15	32	$-0.0620602536978242...$
16	34	0
17	36	$0.046724622903174...$
18	38	∞
19	40	$-0.035410666313106...$
20	42	0
21	44	$0.0269786006758721...$
22	46	∞
23	48	$-0.020643931090472...$
24	50	0

Таблица 6.7

Значения знакопостоянных рядов с числами Фибоначчи

$$1^n + 1^n + 2^n + 3^n + 5^n + 8^n + 13^n + \dots$$

Степень коэффициентов	Число звеньев дроби	Значения рядов с числами Фибоначчи
1	4	-1
2	6	0
3	8	0,5

Окончание табл. 6.7

4	10	∞
5	12	$-0,3(18) = -7/22$
6	14	0
7	16	$0.21786833855799... = 139/638$
8	18	∞
9	20	$-0,154842435241709... = -1877/12122$
10	22	0
11	24	$0.112581966091802...$
12	26	∞
13	28	$-0.0831245431570699...$
14	30	0
15	32	$0.0620602536978242...$
16	34	∞
17	36	$-0.046724622903174...$
18	38	0
19	40	$0.035410666313106...$
20	42	∞
21	44	$-0.0269786006758721...$
22	46	0
23	48	$0.020643931090472...$
24	50	∞

Ранее уже отмечалось, что производящую функцию для степенного ряда можно восстановить, сворачивая цепную дробь, то есть получая рациональную функцию, как отношение полиномов $P_n(x)/Q_n(x)$. Таким образом, если коэффициенты степенного ряда генерируются непосредственно производящей функцией с использованием рекуррентных соотношений n -го порядка, где n – степень полинома, стоящего в знаменателе производящей функции, то восстановить производящую функцию можно через дополнительную процедуру, – свёртку соответствующей цепной дроби (рис. 6.1).



Рис. 6.1 Восстановление производящей функции по цепной дроби.

Здесь уместно остановиться на «обратной» задаче. Под «прямой» задачей будем понимать задачу построения соответствующей цепной дроби по степенному ряду. Впервые рекуррентный алгоритм решения этой задачи предложил в самом начале XIX века В.В. Висковатов [147]. Во второй половине XIX века был разработан «явный» алгоритм преобразования степенного ряда в соответствующую цепную дробь, – это, так называемые, формулы Хейлсманна – Стильеса, когда коэффициенты соответствующей цепной дроби выражаются через отношения определителей Ганкеля, составленных из коэффициентов исходного степенного ряда [28]. В середине XX столетия были разработаны другие «явные» и рекуррентные алгоритмы построения соответствующих цепных дробей, например, алгоритмы Рутисхаузера [142], С.С. Хлопонина [71], и А.З. Никипорца [89]. Под «обратной» задачей понимается построение степенного ряда по известной соответствующей цепной дроби. В работе [78] были приведены формулы А.З. Никипорца, позволяющие находить несколько первых коэффициен-

тов степенного ряда. В публикации [93] приводилось решение «обратной» задачи в общем виде, однако, решение оказалось громоздким. Можно предположить другую, более простую схему определения коэффициентов ряда по известной соответствующей цепной дроби (рис. 6.2).



Рис. 6.2 Восстановление коэффициентов ряда по цепной дроби.

Алгоритм определения коэффициентов ряда состоит из реализации двух операций.

На первом этапе по цепной дроби, содержащей $2n$ звена, находится «свёртка», то есть рациональная функция $P_n(x)/Q_n(x)$, которая является производящей функцией.

Затем по коэффициентам производящей функции $P_n(x)/Q_n(x)$ при помощи известных рекуррентных соотношений n -го порядка [91], устанавливаются коэффициенты степенного ряда.

Примеры использования этого алгоритма восстановления коэффициентов ряда по коэффициентам соответствующей цепной дроби через построение производящей функции уже неоднократно приводились выше.

Цепная дробь и производящая функция, то есть «свёртка» цепной дроби, эквивалентны между собой. Очевидно, нельзя говорить об эквивалентности между рядами и соответствующими цепными дробями, или между производящими функциями и степенными рядами, хотя бы потому, что ряды, ассоциированные с производящими функциями или цепными дробями, могут быть расходящимися. Но по рядам, в том числе расходящимся, можно восстановить «исходную» функцию, представив её или соответствующей цепной дробью, или, свернув цепную дробь, производящей функцией, то есть отношением полиномов $P_n(x)/Q_n(x)$. Следует заключить, что ряды, в том числе и расходящиеся, несут информацию, достаточную для восстановления «исходной» функции, которая, собственно, порождает ряд.

Отметим один важный аспект. Несмотря на эквивалентность «производящей функции», то есть рациональной функции, генерирующей степенной ряд, и цепной дроби, дающей при свёртке производящую функцию, между производящей функцией и цепной дробью есть одно «структурное» отличие. Оно состоит в том, что цепная дробь содержит n -звеньев, и это позволяет последовательно вычислить значения n подходящих дробей. Применяя к цепным дробям r/φ -алгоритм, можно устанавливать как вещественные значения цепной дроби, так и комплексные. Поэтому в [78] сходимость степенных рядов было предложено определять через цепные дроби, устанавливая значения самих цепных дробей через r/φ -алгоритм.

6.2. Определение производящих функций для рядов с числами Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера

Определим производящие функции знакопеременных рядов, содержащих «нечётные» числа Фибоначчи, то есть числа Фибоначчи с нечётными индексами:

$$F_1, F_3, F_5, \dots, F_{2n-1}, \dots$$

Рассмотрим расходящийся ряд:

$$1 - 2x + 5x^2 - 13x^3 + 34x^4 - 89x^5 + \dots \quad (6.2.1)$$

Во второй колонке табл. 6.8 приведены коэффициенты соответствующего ряда (6.2.1) цепной дроби.

Таблица 6.8

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2x + 5x^2 - 13x^3 + 34x^4 - 89x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-2	-1
2	-2,5	0,(428571)
3	0,1	0,3(8)
4	-0,4	0,4
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - 2x + 5x^2 - 13x^3 + 34x^4 - 89x^5 + \dots = \\ = 1 - \frac{2x}{1} - \frac{5x}{2} - \frac{x}{5} - \frac{2x}{1} = \frac{1+x}{1+3x+x^2}. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Таким образом, рациональная функция (6.2.2) – это производящая функция для ряда (6.2.1):

$$\frac{1+x}{1+3x+x^2} = 1 - 2x + 5x^2 - 13x^3 + 34x^4 - 89x^5 + \dots \quad (6.2.3)$$

При $x = 1$ из (6.2.3) получим значение расходящегося ряда (6.2.4):

$$1 - 2 + 5 - 13 + 34 - 89 + 243 - \dots = 2/5 = 0,4. \quad (6.2.4)$$

Значение расходящегося ряда (6.2.4) совпадает со значением конечной цепной дроби, которое приведено в третьей колонке табл. 6.8, что подтверждает правильность определения производящей функции (6.2.2).

Соответствующая цепная дробь (6.2.2) содержит 4 звена, из чего следует равенство нулю определителя Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -13 \\ 5 & -13 & 34 \\ -13 & 34 & -89 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.5)$$

Равенство определителя нулю (6.2.5) установим непосредственными вычислениями:

$$\varphi_3 = -2 \cdot 13 \cdot 89 - 5 \cdot 34 \cdot 13 - 5 \cdot 34 \cdot 13 + 13^3 + 2 \cdot 34^2 + 5^2 \cdot 89 = -6734 + 6734 = 0.$$

Если в (6.2.2) x заменить на $-x$, то получим:

$$\frac{1-x}{1-3x+x^2} = 1 + 2x + 5x^2 + 13x^3 + 34x^4 + 89x^5 + \dots = 1 + \frac{2x}{1} - \frac{5x}{2} - \frac{x}{5} - \frac{2x}{1}. \quad (6.2.6)$$

Так как пятый коэффициент соответствующей цепной дроби (6.2.6) равен нулю, то можем записать:

$$\varphi'_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 5 & 13 & 34 \\ 13 & 34 & 89 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.7)$$

Равен нулю также функциональный определитель:

$$\begin{vmatrix} 2x & 5x^2 & 13x^3 \\ 5x^2 & 13x^3 & 34x^4 \\ 13x^3 & 34x^4 & 89x^5 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.8)$$

При $x = 1$ из (6.2.6) получим нулевое значение ряда, включающего числа Фибоначчи с нечётными порядковыми номерами:

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 243 + \dots = 0. \quad (6.2.9)$$

Определим производящую функцию степенного знакопеременного ряда, содержащего квадраты чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера:

$$1 - 2^2 x + 5^2 x^2 - 13^2 x^3 + 34^2 x^4 - 89^2 x^5 + \dots \quad (6.2.10)$$

В табл. 6.9 приведены коэффициенты ω соответствующей ряду (6.2.10) цепной дроби.

Таблица 6.9

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^2 x + 5^2 x^2 - 13^2 x^3 + 34^2 x^4 - 89^2 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-4	-3
2	-6,25	0,448275862068965...
3	0,51	0,2216494845360824...
4	-1,063529411764...	0,33460076045627376...
5	0,0260281103591...	0,33314511575381140...
6	-0,150442477876106...	0.(3)
7	0	

Используя коэффициенты ω_n , представленные во второй колонке табл. 6.9, запишем:

$$1 - 2^2 x + 5^2 x^2 - 13^2 x^3 + 34^2 x^4 - 89^2 x^5 + \dots = 1 - \frac{4x}{1} + \frac{6.25x}{1} - \frac{0.51x}{1} + \frac{1.0635...x}{1} - \frac{0.0260...x}{1} + \frac{0.1504...x}{1} = \frac{1 + 4x + x^2}{1 + 8x + 8x^2 + x^3}. \quad (6.2.11)$$

Следовательно, можно записать производящую функцию ряда (6.2.10):

$$\frac{1 + 4x + x^2}{1 + 8x + 8x^2 + x^3} = 1 - 2^2 x + 5^2 x^2 - 13^2 x^3 + 34^2 x^4 - 89^2 x^5 + \dots \quad (6.2.12)$$

При $x = 1$ из (6.2.12) получим значение расходящегося знакопеременного ряда, содержащего квадраты чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера:

$$1 - 2^2 + 5^2 - 13^2 + 34^2 - 89^2 + 243^2 - \dots = 1/3. \quad (6.2.13)$$

Седьмой коэффициент соответствующей ряду (6.2.10) цепной дроби равен нулю, так как равен нулю определитель Ганкеля четвертого порядка:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -2^2 & 5^2 & -13^2 & 34^2 \\ 5^2 & -13^2 & 34^2 & -89^2 \\ -13^2 & 34^2 & -89^2 & 233^2 \\ 34^2 & -89^2 & 233^2 & -610^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.14)$$

Если в (6.2.11) x заменить на $-x$, то получим:

$$1 + 2^2 x + 5^2 x^2 + 13^2 x^3 + 34^2 x^4 + 89^2 x^5 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{4x}{1} - \frac{6.25x}{1} - \frac{0.51x}{1} - \frac{1.0635...x}{1} - \frac{0.0260...x}{1} - \frac{0.1504...x}{1} = \frac{1-4x+x^2}{1-8x+8x^2-x^3}. \quad (6.2.15)$$

Следовательно, можно записать производящую функцию:

$$\frac{1-4x+x^2}{1-8x+8x^2-x^3} = 1 + 2^2x + 5^2x^2 + 13^2x^3 + 34^2x^4 + 89^2x^5 + \dots \quad (6.2.16)$$

Если в (6.2.16) принять $x = 1$, то установим, что расходящийся ряд из квадратов чисел Фибоначчи с нечётными порядковыми номерами имеет бесконечно большое значение:

$$1 - 2^2 + 5^2 - 13^2 + 34^2 - 89^2 + 243^2 - \dots = \infty. \quad (6.2.17)$$

Имеет место также равенство нулю определителя Ганкеля четвертого порядка, включающего квадраты чисел Фибоначчи с нечётными порядковыми номерами:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} 2^2 & 5^2 & 13^2 & 34^2 \\ 5^2 & 13^2 & 34^2 & 89^2 \\ 13^2 & 34^2 & 89^2 & 233^2 \\ 34^2 & 89^2 & 233^2 & 610^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.18)$$

Определим производящую функцию для знакопеременного ряда, составленного из кубов чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера:

$$1 - 2^3x + 5^3x^2 - 13^3x^3 + 34^3x^4 - 89^3x^5 + \dots \quad (6.2.19)$$

Во второй колонке табл. 6.10 приведены коэффициенты соответствующей ряду (6.2.19) цепной дроби.

Таблица 6.10

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^3x + 5^3x^2 - 13^3x^3 + 34^3x^4 - 89^3x^5 + \dots =$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-8	-7
2	-15,625	0,518796992481203...
3	1,951	-0,270887166236003...
4	-2,827382880574...	0,295117585913137...
5	0,1351536255576...	0,2742484330552292...
6	-0,397608430013205...	0,280027250190814...
7	0,006925249675871...	0,279998456381522...
8	-0,056929814179192...	0,28
9	0	

Используя полученные коэффициенты ω_n , запишем соответствующую ряду (6.2.19) цепную дробь. После «свёртки» получим производящую функцию.

$$1 - 2^3x + 5^3x^2 - 13^3x^3 + 34^3x^4 - 89^3x^5 + \dots = 1 - \frac{8x}{1 + \frac{15.625x}{1 + \frac{1.951x}{1 - \frac{2.8273...x}{1 + \frac{0.1351...x}{1 + \frac{0.3976...x}{1 + \frac{0.0069...x}{1 + \frac{0.0569...x}{1}}}}}} = \frac{1+13x+13x^2+x^3}{1+21x+56x^2+21x^3+x^4}. \quad (6.2.20)$$

Можно записать производящую функцию:

$$\frac{1+13x+13x^2+x^3}{1+21x+56x^2+21x^3+x^4} = 1 - 2^3x + 5^3x^2 - 13^3x^3 + 34^3x^4 - 89^3x^5 + \dots \quad (6.2.21)$$

Полагая в (6.2.21) $x = 1$, определим значение расходящегося ряда:

$$1 - 2^3 + 5^3 - 13^3 + 34^3 - 89^3 + \dots = 7/25 = 0.28. \quad (6.2.22)$$

Это значение ряда (6.2.21) совпадает со значением, приведённый в табл. 6.10.

Девятый коэффициент соответствующей цепной дроби равен нулю. Из формулы, определяющей этот коэффициент:

$$\omega_9 = -\frac{\varphi_5 \cdot \psi_4}{\varphi_4 \cdot \psi_5}$$

следует, что равен нулю определитель Ганкеля пятого порядка, составленного из кубов чисел Фибоначчи имеющих нечётные порядковые номера:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -2^3 & 5^3 & -13^3 & 34^3 & -89^3 \\ 5^3 & -13^3 & 34^3 & -89^3 & 233^3 \\ -13^3 & 34^3 & -89^3 & 233^3 & -610^3 \\ 34^3 & -89^3 & 233^3 & -610^3 & 1597^3 \\ -89^3 & 233^3 & -610^3 & 1597^3 & -4181^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.23)$$

Если в (6.2.20) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} &1 + 2^3 x + 5^3 x^2 + 13^3 x^3 + 34^3 x^4 + 89^3 x^5 + \dots = \\ &= 1 + \frac{8x}{1} - \frac{15.625x}{1} - \frac{1.951x}{1} + \frac{2.8273\dots x}{1} - \frac{0.1351\dots x}{1} - \\ &\quad - \frac{0.3976\dots x}{1} - \frac{0.0069\dots x}{1} - \frac{0.0569\dots x}{1} = \frac{1 - 13x + 13x^2 - x^3}{1 - 21x + 56x^2 - 21x^3 + x^4}. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

Таким образом, имеем производящую функцию:

$$\frac{1 - 13x + 13x^2 - x^3}{1 - 21x + 56x^2 - 21x^3 + x^4} = 1 + 2^3 x + 5^3 x^2 + 13^3 x^3 + 34^3 x^4 + 89^3 x^5 + \dots \quad (6.2.25)$$

Полагая в (6.2.25) $x = 1$, имеем нулевое значение ряда:

$$1 + 2^3 + 5^3 + 13^3 + 34^3 + 89^3 + 233^3 \dots = 0. \quad (6.2.26)$$

Девятый коэффициент соответствующей цепной дроби (6.2.24) равен нулю, что обусловлено равенством нулю значения определителя Ганкеля пятого порядка, составленного из кубов чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} 2^3 & 5^3 & 13^3 & 34^3 & 89^3 \\ 5^3 & 13^3 & 34^3 & 89^3 & 233^3 \\ 13^3 & 34^3 & 89^3 & 233^3 & 610^3 \\ 34^3 & 89^3 & 233^3 & 610^3 & 1597^3 \\ 89^3 & 233^3 & 610^3 & 1597^3 & 4181^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.27)$$

Определим соответствующую цепную дробь для знакопеременного ряда, составленного из нечётных чисел Фибоначчи в четвертой степени:

$$1 - 2^4 x + 5^4 x^2 - 13^4 x^3 + 34^4 x^4 - 89^4 x^5 + \dots \quad (6.2.28)$$

В табл. 6.11 приведены значения коэффициентов соответствующей цепной дроби.

Таблица 6.11

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^4 x + 5^4 x^2 - 13^4 x^3 + 34^4 x^4 - 89^4 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-16	-15
2	-39.0625	0.600624024960998...
3	6.6351	-1.616014527513191...
4	-7.515629642356558...	0.3029991574502085...
5	0.526343008150680...	0.176331688056790...
6	-1.050859087996225...	0.2390739711692091...
7	0.0360953491345816...	0.2379514915506719...
8	-0.149838475239526...	0.238095483639282...
9	0.0020019344901491...	0.238095232792759...
10	-0.0216325026322780...	0.(238095).
11	0	

Используя полученные коэффициенты ω_n , запишем соответствующую ряду (6.2.28) цепную дробь:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2^4 x + 5^4 x^2 - 13^4 x^3 + 34^4 x^4 - 89^4 x^5 + \dots = \\
 & = 1 - \frac{16x}{1 + \frac{39.0625x}{1 + \frac{6.6351x}{1 + \frac{7.5156x}{1 + \frac{0.5263x}{1 + \frac{1.0508x}{1 + \frac{0.0360x}{1 + \frac{0.1498x}{1 + \frac{0.0020x}{1 + \frac{0.0216x}{1}}}}}}}}}}
 \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Произведя «свёртку» цепной дроби (6.2.29), можно получить рациональную функцию, которая является производящей функцией для ряда (6.2.28).

Принимая в (6.2.29) $x = 1$, определим значение расходящегося знакопеременного ряда, составленного из «нечётных» чисел Фибоначчи в четвертой степени:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2^4 + 5^4 - 13^4 + 34^4 - 89^4 + 233^4 - 610^4 + \dots = \\
 & = 1 - \frac{16}{1 + \frac{39.0625}{1 + \frac{6.6351}{1 + \frac{7.5156x}{1 + \frac{0.5263x}{1 + \frac{1.0508x}{1 + \frac{0.0360x}{1 + \frac{0.1498x}{1 + \frac{0.0020x}{1 + \frac{0.0216x}{1}}}}}}}}}} = 0,23809523809523 \dots \quad (6.2.30)
 \end{aligned}$$

Соответствующая ряду (6.2.28) цепная дробь конечная и имеет 10 звеньев, что обусловлено нулевым значением определителя Ганкеля шестого порядка:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} -2^4 & 5^4 & -13^4 & 34^4 & -89^4 & 233^4 \\ 5^4 & -13^4 & 34^4 & -89^4 & 233^4 & -610^4 \\ -13^4 & 34^4 & -89^4 & 233^4 & -610^4 & 1597^4 \\ 34^4 & -89^4 & 233^4 & -610^4 & 1597^4 & -2584^4 \\ -89^4 & 233^4 & -610^4 & 1597^4 & -2584^4 & 4181^4 \\ 233^4 & -610^4 & 1597^4 & -2584^4 & 4181^4 & -10946^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.31)$$

Если в (6.2.29) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2^4 x + 5^4 x^2 + 13^4 x^3 + 34^4 x^4 + 89^4 x^5 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{16x}{1 - \frac{39.0625x}{1 - \frac{6.6351x}{1 - \frac{7.5156x}{1 - \frac{0.5263x}{1 - \frac{1.0508x}{1 - \frac{0.0360x}{1 - \frac{0.1498x}{1 - \frac{0.0020x}{1 - \frac{0.0216x}{1}}}}}}}}}}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1.0508...x}{1} - \frac{0.0360...x}{1} - \frac{0.1498...x}{1} - \frac{0.0020...x}{1} - \frac{0.0216...x}{1}. \quad (6.2.32)$$

Производящую функцию для знакоположительного ряда (6.2.32) можно получить, сворачивая цепную дробь.

Полагая в цепной дроби (6.2.32) $x = 1$, установим, что знакоположительный ряд, составленный из чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера в четвертой степени, имеет бесконечно большое значение (табл. 6.12)

Таблица 6.12

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 + 2^4 x + 5^4 x^2 + 13^4 x^3 + 34^4 x^4 + 89^4 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	16	17
2	39.0625	0,579638752
3	6.6351	3,017146334
4	7.515629642356558...	0,128246613
5	0.526343008150680...	0,384822689
6	1.050859087996225...	6,169254271
7	0.0360953491345816...	38,910278022
8	0.149838475239526...	16007,0691964
9	0.0020019344901491...	738194,7557142
10	0.0216325026322780...	0,2032... e280
11	0	

Так как цепная дробь (6.2.32) конечная и содержит 10 звеньев, имеет место равенство нулю определителя Ганкеля шестого порядка:

$$\varphi'_6 = \begin{vmatrix} 2^4 & 5^4 & 13^4 & 34^4 & 89^4 & 233^4 \\ 5^4 & 13^4 & 34^4 & 89^4 & 233^4 & 610^4 \\ 13^4 & 34^4 & 89^4 & 233^4 & 610^4 & 1597^4 \\ 34^4 & 89^4 & 233^4 & 610^4 & 1597^4 & 2584^4 \\ 89^4 & 233^4 & 610^4 & 1597^4 & 2584^4 & 4181^4 \\ 233^4 & 610^4 & 1597^4 & 2584^4 & 4181^4 & 10946^4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.33)$$

Сравнивая третьи колонки табл. 6.11 и 6.12, можно заметить, что если для знакопеременного ряда (6.2.30) значения подходящих дробей сходятся к некоторому значению, то значения подходящих цепной дроби соответствующей знакоположительному ряду (6.2.32) осциллируют, что характерно для цепных дробей, представляющих комплексные значения. Можно предположить, что значения знакопостоянных рядов, составленных из чисел Фибоначчи

$$1^n + 1^n + 2^n + 3^n + 5^n + 8^n + 13^n + 21^n + 34^n + \dots \quad (6.2.34)$$

$$1^n + 2^n + 5^n + 13^n + 34^n + 89^n + 233^n + 610^n + \dots \quad (6.2.35)$$

при $n \rightarrow \infty$ представляют комплексные числа.

Определим соответствующую цепную дробь для знакопеременного ряда, составленного из «нечётных» чисел Фибоначчи в пятой степени (6.2.36). Под «нечётными» числами Фибоначчи подразумеваются числа Фибоначчи, имеющие нечётные порядковые номера.

$$1 - 2^5 x + 5^5 x^2 - 13^5 x^3 + 34^5 x^4 - 89^5 x^5 + \dots = \quad (6.2.36)$$

В табл. 6.13 помещены коэффициенты соответствующей ряду (6.2.36) цепной дроби.

Таблица 6.13

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - 2^5 x + 5^5 x^2 - 13^5 x^3 + 34^5 x^4 - 89^5 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-32	-31
2	-97.65625	0.675641431738992
3	21.15751	-4.917853842496888
4	-19.97522934704509...	0.355058169557678
5	1.822017818268097...	-0.143509306956900
6	-2.777390135427861...	0.2132093551996610
7	0.141096564686212...	0.1994419954112992
8	-0.394383417194665...	0.2032269486907202
9	0.010451603739562...	0.2031984811943191
10	-0.056820833534437...	0.2032000008751760
11	0.000613735634388...	0.2031999999927957
12	-0.008236544469682...	0.2032
13	0	

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 &1 - 2^5 x + 5^5 x^2 - 13^5 x^3 + 34^5 x^4 - 89^5 x^5 + \dots = \\
 &= 1 - \frac{32x}{1} + \frac{97,65625x}{1} - \frac{21,157...x}{1} + \frac{19,975...x}{1} - \frac{1,8220...x}{1} + \frac{2,7773...x}{1} + \\
 &\frac{0,1410...x}{1} - \frac{0,3943...x}{1} + \frac{0,0104...x}{1} - \frac{0,0568...x}{1} + \frac{0,0006...x}{1} - \frac{0,0082...x}{1}. \quad (6.2.37)
 \end{aligned}$$

Произведя «свёртку» цепной дроби (6.2.37), получим рациональную функцию, которая является производящей функцией для ряда (6.2.36)

Полагая в цепной дроби (6.2.37) $x = 1$, найдём значение расходящегося знакопеременного ряда, составленного из «нечётных» чисел Фибоначчи в пятой степени.

$$\begin{aligned}
 &1 - 2^5 + 5^5 - 13^5 + 34^5 - 89^5 + 233^5 - 610^5 + \dots = \\
 &= 1 - \frac{32}{1} + \frac{97,65625}{1} - \frac{21,1575...}{1} + \frac{19,9752...}{1} - \frac{1,8220...}{1} + \frac{2,7773...}{1} + \\
 &\frac{0,1410...}{1} - \frac{0,3943...}{1} + \frac{0,0104...}{1} - \frac{0,0568...}{1} + \frac{0,0006...}{1} - \frac{0,0082...}{1} = 0.2032 = \frac{127}{625}. \quad (6.2.38)
 \end{aligned}$$

Соответствующая ряду (6.2.37) цепная дробь конечна и имеет 12 звеньев, что обусловлено нулевым значением определителя Ганкеля седьмого порядка, который имеет структуру, аналогичную структуре определителя Ганкеля шестого порядка (6.2.31).

Если в (6.2.38) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 &1 + 2^5 x + 5^5 x^2 + 13^5 x^3 + 34^5 x^4 + 89^5 x^5 + \dots = \\
 &= 1 + \frac{32x}{1} - \frac{97,65625x}{1} + \frac{21,1575...x}{1} - \frac{19,9752...x}{1} + \frac{1,8220...x}{1} - \frac{2,7773...x}{1} - \\
 &\frac{0,1410...x}{1} + \frac{0,3943...x}{1} - \frac{0,0104...x}{1} + \frac{0,0568...x}{1} - \frac{0,0006...x}{1} + \frac{0,0082...x}{1}. \quad (6.2.39)
 \end{aligned}$$

Выполняя «свёртку» цепной дроби (6.2.39) получим производящую функцию для ряда. Полагая в цепной дроби (6.2.39) $x = 1$, найдём значение расходящегося знакопостоянного ряда, составленного из «нечётных» чисел Фибоначчи в пятой степени. Оказалось, что этот ряд имеет нулевое значения (табл. 6.13).

Таблица 6.13

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 + 2^5 x + 5^5 x^2 + 13^5 x^3 + 34^5 x^4 + 89^5 x^5 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, a_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-32	33
2	97.65625	0.66892984151
3	21.15751	6.47508474397
4	19.975229347045091...	0.29161254597
5	1.822017818268097...	0.94625468300
6	2.777390135427861...	-0.14971463928
7	0.141096564686212...	-0.05452060403
8	0.394383417194665...	-0.00094421838
9	0.010451603739562...	-0.54575934899
10	0.056820833534437...	-0.35843869767
11	0.000613735634388...	-0.29542205368
12	0.008236544469682...	0
13	0	...

Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2^5 + 5^5 + 13^5 + 34^5 + 89^5 + 233^5 + 610^5 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{32}{1 - \frac{97,65625}{1 - \frac{21,157...}{1 - \frac{19,975...}{1 - \frac{1,822...}{1 - \frac{2,777...}{1 - \frac{0,141...}{1 - \frac{0,394...}{1 - \frac{0,0104...}{1 - \frac{0,0568...}{1 - \frac{0,0006...}{1 - \frac{0,0082...}{1}}}}}}}}}}}} = 0. \quad (6.2.41)
 \end{aligned}$$

Определитель Ганкеля седьмого порядка, составленный из коэффициентов знакоположительного ряда (6.2.39), имеет нулевое значения, чем и объясняется, что соответствующие цепные дроби (6.2.39) имеет всего 12 звеньев.

В табл. 6.14 и 6.15 приведены результаты суммирования знакопеременных и знакопостоянных рядов, составленных из чисел Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера.

Таблица 6.14

Суммирование расходящихся рядов Фибоначчи

$$1 - 2^n + 5^n - 13^n + 34^n - 89^n + \dots$$

Степень, коэффициентов n	Число звеньев дроби	Значения расходящихся рядов
1	4	$0.4 = 2/5$
2	6	$0.(3) = 1/3$
3	8	$0.28 = 7/25$
4	10	$0.238095238095238... = 5/21$
5	12	$0.2032 = 127/625$
6	14	$0.(174603) = 11/63$
7	16	$0.150326(153846)$
8	18	$0.130023640661938... = 5/423$
9	20	$0.112589900452488...$
10	22	$0.097832802036227...$
11	24	$0.085064388428491...$
12	26	$0.074168503017130...$

Таблица 6.15

Суммирование расходящихся рядов Фибоначчи

$$1 + 2^n + 5^n + 13^n + 34^n + 89^n + \dots$$

Степень, коэффициентов n	Число звеньев дроби	Значения расходящихся рядов
1	4	0
2	6	∞
3	8	0
4	10	∞
5	12	0
6	14	∞
7	16	0
8	18	∞
9	20	0
10	22	∞
11	24	0
12	26	∞

ГЛАВА 7

РАЗЛОЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

7.1. Построение соответствующих цепных дробей для тригонометрических рядов

Представление функции степенным рядом требует существования у этой функции производных всех порядков, в то время как для разложения функции в тригонометрический ряд достаточно существования и непрерывности одной только производной, причем, и это требование не является еще необходимым [65]. Таким образом, для тригонометрических рядов класс охватываемых ими функций значительно шире, чем для степенных, что представляет собой несомненное преимущество тригонометрических рядов.

Во многих практически важных случаях, тригонометрические ряды сходятся медленно. Функция $f(x)$ может иметь внутри промежутка $(-\pi, +\pi)$ производные сколь угодно высокого порядка, но достаточно одной точки прерывности в конце промежутка, чтобы ряд Фурье был практически негодным для вычисления. Отсюда вытекает задача улучшения сходимости рядов Фурье.

Получим разложение в цепные дроби тригонометрических рядов.

1 случай.

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + \dots \quad (7.1.1)$$

Ряд вида (7.1.1) можно переписать следующим образом:

$$a_0 + \frac{1}{2} \left(a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{i2\varphi} + a_3 e^{i3\varphi} + \dots + a_n e^{in\varphi} + \dots \right. \\ \left. \dots + a_1 e^{-i\varphi} + a_2 e^{-i2\varphi} + a_3 e^{-i3\varphi} + \dots + a_n e^{-in\varphi} + \dots \right), \quad (7.1.2)$$

то есть тригонометрический ряд (7.1.1) заменим через два степенных ряда от мнимых аргументов.

Следовательно, тригонометрический ряд (7.1.1) может быть представлен суммой двух цепных дробей:

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + \dots = \\ = \omega_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1 e^{i\varphi}}{1} - \frac{\omega_2 e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_3 e^{i\varphi}}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n} e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_{2n+1} e^{i\varphi}}{1} - \dots \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{e^{i\varphi} - 1} - \frac{\omega_2}{1 + e^{i\varphi}} - \dots - \frac{\omega_{2n}}{1 + e^{i\varphi}} + \frac{\omega_{2n+1}}{e^{i\varphi} - \dots} \right). \quad (7.1.3)$$

Коэффициенты звеньев ω_{2n} и ω_{2n+1} цепной дроби (7.1.3) выражаются через коэффициенты a_n исходного тригонометрического ряда при помощи известных формул Хейлermann-Стилтьеса.

Запишем подходящие дроби разложения (7.1.3).

$$\frac{P_1}{Q_1} = \omega_0 + \omega_1 \cos \varphi, \\ \frac{P_2}{Q_2} = \omega_0 + \frac{-\omega_1 \omega_2 + \omega_1 \cos \varphi}{1 + \omega_2^2 - 2\omega_2 \cos \varphi},$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_3}{Q_3} &= \omega_0 + \frac{\omega_1(\omega_3 - \omega_2) + \omega_1[1 + \omega_3(\omega_3 - \omega_2)]\cos\varphi + \omega_1\omega_3\cos 2\varphi}{1 + (\omega_3 - \omega_2)^2 + 2(\omega_3 - \omega_2)\cos\varphi}, \\
\frac{P_4}{Q_4} &= c_0^{(4)} + \frac{c_{10}^{(4)} + c_{11}^{(4)}\cos\varphi + c_{12}^{(4)}\cos 2\varphi}{c_{00}^{(4)} + c_{01}^{(4)}\cos\varphi + c_{02}^{(4)}\cos 2\varphi}, \\
c_0^{(4)} &= \omega_0, \\
c_{10}^{(4)} &= -\omega_1[(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4) + \omega_2\omega_4(\omega_4 - \omega_3)], \\
c_{11}^{(4)} &= \omega_1[1 + \omega_2\omega_4 + (\omega_4 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)], \\
c_{12}^{(4)} &= -\omega_1(\omega_4 - \omega_3), \\
c_{00}^{(4)} &= 1 + \omega_2^2\omega_4^2 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)^2, \\
c_{01}^{(4)} &= -2(1 + \omega_2\omega_4)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4), \\
c_{02}^{(4)} &= 2\omega_2\omega_4, \\
\frac{P_5}{Q_5} &= c_0^{(5)} + \frac{c_{10}^{(5)} + c_{11}^{(5)}\cos\varphi + c_{12}^{(5)}\cos 2\varphi + c_{13}^{(5)}\cos 3\varphi}{c_{00}^{(5)} + c_{01}^{(5)}\cos\varphi + c_{02}^{(5)}\cos 2\varphi}, \\
c_0^{(5)} &= \omega_0, \\
c_{10}^{(5)} &= \omega_1[(\omega_3 - \omega_4 + \omega_5)(\omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_4) - (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)], \\
c_{11}^{(5)} &= \omega_1[1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) + (\omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_4)(1 + \omega_3\omega_5)], \\
c_{12}^{(5)} &= \omega_1[(\omega_3 - \omega_4 + \omega_5) - \omega_3\omega_5(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)], \\
c_{13}^{(5)} &= \omega_1\omega_3\omega_5, \\
c_{00}^{(5)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)^2 + (\omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_4)^2, \\
c_{01}^{(5)} &= -2(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)(1 + \omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_4), \\
c_{02}^{(5)} &= 2(\omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_4), \\
\frac{P_6}{Q_6} &= c_0^{(6)} + \frac{c_{10}^{(6)} + c_{11}^{(6)}\cos\varphi + c_{12}^{(6)}\cos 2\varphi + c_{13}^{(6)}\cos 3\varphi}{c_{00}^{(6)} + c_{01}^{(6)}\cos\varphi + c_{02}^{(6)}\cos 2\varphi + c_{03}^{(6)}\cos 3\varphi}, \\
c_0^{(6)} &= \omega_0, \\
c_{10}^{(6)} &= -\omega_1[(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) \times \\
&\quad \times (\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6) + \omega_2\omega_4\omega_6(\omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)], \\
c_{11}^{(6)} &= \omega_1[1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6 + \omega_2\omega_4\omega_6) + \\
&\quad + (\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)(1 + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)], \\
c_{12}^{(6)} &= -\omega_1[(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)(\omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6) - \\
&\quad - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) + \omega_2\omega_4\omega_6], \\
c_{13}^{(6)} &= \omega_1(\omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6), \\
c_{00}^{(6)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)^2 + (\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \\
&\quad + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)^2 + (\omega_2\omega_4\omega_6)^2,
\end{aligned}$$

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{n}{2n+1} - \frac{n}{2} + \dots$$

В табл. 7.1 приведены значения подходящих дробей (7.1.7) при различных значениях аргумента.

Таблица 7.1

Определение значений подходящих дробей

φ	$-\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$	Значения подходящих дробей					
		1	2	3	4	5	6
1	0,042018	0,540302	-0,056787	-0,001398	0,040173	0,044735	0,043215
2	-0,520543	-0,416147	-0,549859	-0,510232	-0,521445	-0,520638	-0,520493
3	-0,690639	-0,989932	-0,665177	-0,696905	-0,689395	-0,690793	-0,690619
5	-0,179688	0,283662	-0,223874	-0,198495	-0,175866	-0,179177	0,180044
10	-0,651739	-0,839071	-0,640988	-0,650350	-0,651640	-0,651030	-0,651234

В табл. 7.1a приведены значения функции $y = -\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$, вычисленные при помощи ряда (7.1.5).

Таблица 7.1 a

Определение значений частичных сумм ряда

φ	$-\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$	Значения частичных сумм ряда					
		1	2	3	4	5	6
1	0,042018	0,540302	0,332229	0,002232	-0,161179	-0,104447	0,055561
2	-0,520543	-0,416147	-0,742969	-0,422913	-0,459288	-0,627102	-0,486463
3	-0,690639	-0,989992	-0,509907	-0,813617	-0,602658	-0,754590	-0,664543
5	-0,179688	0,283662	-0,135874	-0,389095	-0,287065	-0,088824	-0,063112

2 случай.

$$b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots + b_n \sin n\varphi + \dots \quad (7.1.8)$$

Тригонометрический ряд (7.1.8) может быть представлен следующей суммой двух цепных дробей:

$$\begin{aligned} & b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots + b_n \sin n\varphi + \dots = \\ & = \frac{1}{2i} \left(\frac{\omega_1 e^{i\varphi}}{1} - \frac{\omega_2 e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_3 e^{i\varphi}}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n} e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_{2n+1} e^{i\varphi}}{1} - \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{\omega_1}{e^{i\varphi} - 1} + \frac{\omega_2}{e^{i\varphi} - 1} - \dots - \frac{\omega_{2n}}{e^{i\varphi} - 1} + \frac{\omega_{2n+1}}{e^{i\varphi} - 1} - \dots \right). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Коэффициенты звеньев ω_{2n} и ω_{2n+1} цепной дроби (7.1.9) выражаются через коэффициенты b_n исходного тригонометрического ряда при помощи формул Хейлсманна-Стилтьеса, причем, определители имеют своими элементами коэффициенты b_n .

Запишем подходящие дроби разложения (7.1.9)

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \omega_1 \sin \varphi, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{\omega_1 \sin \varphi}{1 + \omega_2^2 - 2\omega_2 \cos \varphi}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{\omega_1 [1 + \omega_3(\omega_3 - \omega_2)] \sin \varphi + \omega_1 \omega_3 \sin 2\varphi}{1 + (\omega_3 - \omega_2)^2 + 2(\omega_3 - \omega_2) \cos \varphi}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\varphi}}{1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} - \frac{e^{i\varphi}}{3} - \frac{2e^{i\varphi}}{2} - \frac{2e^{i\varphi}}{5} - \dots - \frac{ne^{i\varphi}}{2n+1} - \frac{ne^{i\varphi}}{2} - \dots - \frac{1}{e^{i\varphi}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3e^{i\varphi}} - \frac{2}{2} - \frac{2}{5e^{i\varphi}} - \dots - \frac{n}{(2n+1)e^{i\varphi}} - \frac{n}{2} - \dots \right). \quad (7.1.12)$$

Подходящие дроби разложения (7.1.12):

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \sin \varphi, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{4 \sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{20 \sin \varphi - 3 \sin 2\varphi}{26 - 24 \cos \varphi}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{48 \sin \varphi - 18 \sin 2\varphi}{73 - 84 \cos \varphi + 12 \cos 2\varphi}, \\ \frac{P_5}{Q_5} &= \frac{465 \sin \varphi - 222 \sin 2\varphi + 10 \sin 3\varphi}{759 - 936 \cos \varphi + 180 \cos 2\varphi}, \\ \frac{P_6}{Q_6} &= \frac{2352 \sin \varphi - 1470 \sin 2\varphi + 220 \sin 3\varphi}{4335 - 5832 \cos \varphi + 1620 \cos 2\varphi - 120 \cos 3\varphi}. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

В табл. 7.2 приведены значения подходящих дробей (7.1.13) при различных значениях аргумента.

Таблица 7.2

Определение значений подходящих дробей

φ	$y = \frac{\pi - \varphi}{2}$	Значения подходящих дробей					
		1	2	3	4	5	6
1	1,070796	0,841471	1,185675	1,082007	1,061995	1,069856	1,071460
2	0,570796	0,909297	0,545748	0,568428	0,572042	0,570436	0,570827
3	0,070796	0,141120	0,063000	0,073566	0,070390	0,070903	0,070779
5	-0,929204	-0,958924	-0,992328	-0,914251	-0,926668	-0,930400	-0,929252

7.2. Ускорение сходимости рядов Фурье построением соответствующих цепных дробей

В приложениях наиболее удобны тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами. В этом случае лишь несколько первых членов ряда весьма точно определяют его сумму, так как при достаточной скорости приближения к нулю коэффициентов сумма всех последующих членов ряда оказывается малой. В практике использования тригонометрических рядов часто возникает задача улучшения их сходимости. Естественным образом возникает следующая задача. Дан тригонометрический ряд, сумму которого обозначим через $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Требуется выделить из этого ряда другой ряд, сумма которого $\varphi(x)$ известна в конечном виде, с тем, чтобы оставшийся ряд, то есть ряд, связанный с $f(x)$ и $\varphi(x)$ соотношением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

имел достаточно быстро убывающие коэффициенты.

Если эта задача решена, то операции над $f(x)$ заменятся операциями над известной функцией $\varphi(x)$ и над рядом с быстро убывающими коэффициентами.

Более эффективным способом ускорения сходимости рядов является способ, связанный с построением для медленно сходящихся рядов, так называемых, соответствующих цепных дробей [105]. В таблицах, приведённых ниже, показаны сравнительные характеристики эффективности вычисления рядов Фурье непосредственно и через соответствующие цепные дроби.

Пример 3.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos x}{2^2} + \frac{\cos x}{3^2} - \frac{\cos x}{4^2} + \dots \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (7.2.1)$$

Определим скорость сходимости ряда Фурье (7.2.1) и соответствующей цепной дроби, построенной по коэффициентам этого ряда алгоритмом Рутисхаузера, описываемый формулами (2.7.3) второй главы.

В табл. 7.3 показаны результаты вычисления ряда Фурье (7.2.1) при $x = 0,1$.

В четвёртой колонке приведены погрешности при вычислении ряда Фурье (7.2.2) с различным числом членов ряда. Отметим невысокую скорость сходимости ряда Фурье (7.2.2): отрезок ряда с миллионом членов обеспечивает точность порядка 10^{-11} .

Таблица 7.3

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.1) при $x = 0,1$

$$0,1^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos 0,1 - \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} - \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \right) \quad (7.2.2)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left 0,1^2 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-3.980016661	-0.6901485274	0.7001485274
2	0.9800665778	0.2899180504	0.2799180504
4	0.2302652485	0.09558930376	0.08558930376
8	0.04354416933	0.02798812348	0.01798812348
16	-0.000456242536	0.009397598428	0.0006024015725
32	-0.003899588968	0.008116926257	0.001883073743
64	0.0009699071472	0.0104745123	0.0004745122976
128	0.0002375079506	0.01011640987	0.000116409871
256	0.5449257823e-4	0.01002645172	0.2645171806e-4
512	0.9066872285e-5	0.01000421748	0.4217484591e-5
1024	-0.1120899852e-5	0.009999348865	0.6511346343e-6
2048	-0.7889932958e-6	0.0099996191	0.3808996448e-6
4096	0.8795616443e-7	0.01000003842	0.3842266541e-7
1000000	0.3963204892e-11	0.01	0.1995145757e-11

Следует обратить внимание на чрезвычайно высокую скорость сходимости цепной дроби. Цепная дробь, содержащая 256 звеньев, обеспечивает погрешность порядка 10^{-132} . Для сравнения: ряд Фурье (7.2.2), имеющий 256 слагаемых, даёт погрешность порядка 10^{-4} , а ряд, включающий миллион слагаемых, даёт всего 10 точных разрядов результата (Табл. 7.3).

В табл. 7.4 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (7.2.1) цепной дроби при $x = 1$. Коэффициенты цепной дроби приведены в третьей колонке таблицы.

Таблица 7.4

Определение значения ряда Фурье

$$1 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos 1 - \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} - \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \right)$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left 1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-2.161209223	-2.161209223	1.12865891	0.1286589102
2	-0.4161468365	-0.1925527765	0.6132731061	0.3867268939
4	-0.1634109052	-0.5802477275	1.018714615	0.01871461525
8	-0.009093752113	1.487131434	1.000114009	0.0001140092512
16	-0.01496342938	-0.4089745426	0.9999999726	0.2735050464e-7
32	0.003258685002	-0.2322459026	1	0.4454063588e-16
64	0.0003826730766	-0.6741606326	1	0.8943391567e-33
128	-0.000169164019	1.483098543	1	0.407730213e-66
256	-0.242863525e-5	-0.2817313324	1	0.2515576839e-132

Пример 4.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi \quad (7.2.3)$$

В табл. 7.5 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.3) при $x = 0,1$.

Коэффициенты рядов Фурье (7.2.1) и (7.2.3) достаточно быстро убывают, тем не менее, скорость сходимости рядов невысока, что можно наблюдать из данных погрешностей, приведённых в колонках 4 табл. 7.3 и 7.5.

Таблица 7.5

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.3) при $x = 0,1$

$$0,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos 0,1 + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,5}{5^2} + \frac{\cos 0,7}{7^2} + \dots \right) \quad (7.2.4)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left 0,1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-1.26687865	0.3039176764	0.2039176764
2	-0.1351524663	0.1687652101	0.06876521011
4	-0.0198740269	0.1041962703	0.004196270343
8	-0.0004002906775	0.08723653335	0.01276346665
16	0.001323765228	0.0980104813	0.001989518698
32	-0.0003207507067	0.1002288251	0.0002288251073
64	-0.7823724044e-4	0.09996810828	0.3189172275e-4
128	-0.1827502819e-4	0.09996320551	0.3679448827e-4
256	-0.3274440716e-5	0.09998103915	0.1896085183e-4
512	0.2396068097e-6	0.09999415562	0.584437973e-5
1024	0.2671742846e-6	0.1000008417	0.8416694447e-6
2048	-0.3491653145e-7	0.09999964742	0.3525829623e-6
4096	0.12443531e-7	0.09999993467	0.6533243451e-7

В табл. 7.6 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (7.2.3) при $x = 0,1$.

Сравнивая данные таблиц 7.5 и 7.6, можно отметить высокую эффективность цепной дроби при вычислении ряда Фурье (7.2.4). Цепная дробь, содержащая 505 звеньев, обеспечивает погрешность порядка 10^{-50} , в то время как использование ряда Фурье (7.2.4) непосредственно при учёте 4096 членов даёт погрешность порядка 10^{-7} .

Таблица 7.6

Определение значения ряда Фурье

$$0,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos 0,1 + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,5}{5^2} + \frac{\cos 0,7}{7^2} + \dots \right)$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left 0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-1.26687865	-1.26687865	0.3039176764	0.2039176764
2	-0.1351524663	-0.1066814617	0.1526250965	0.05262509654
4	-0.0198740269	-0.1682293697	0.08732416813	0.01267583187
8	-0.0004002906775	0.5686637154	0.05940418876	0.04059581124
16	0.001323765228	-12.91826718	0.09818390992	0.001816090082
32	-0.0003207507067	-0.2179993635	0.09997862369	0.2137630646e-4
64	-0.7823724044e-4	0.3509407588	0.09999983971	0.1602850756e-6
128	-0.1827502819e-4	-2.117968726	0.1	0.1487427607e-13
256	-0.3274440716e-5	-0.1409783124	0.1	0.1455298157e-26
505	-0.1166429549e-5	0.7066252757	0.1	0.8910236066e-50

Пример 5.

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) \quad (7.2.5)$$

В табл. 7.7 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.5) при $x = 0,1$.

Так как скорость убывания коэффициентов ряда Фурье (7.2.6) сопоставима со скоростью убывания коэффициентов ряда Фурье (7.2.4), то и скорости сходимости рядов (7.2.4) и (7.2.6) примерно одинаковы.

Таблица 7.7

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.5) при $x = 0,1$

$$0,099833 \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 0,2}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 0,4}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 0,6}{5 \cdot 7} + \dots \right) \quad (7.2.6)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left \sin 0,1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-0.4159531745	0.2206665979	0.1208331813
2	-0.07818208538	0.1424845125	0.04265109588
4	-0.01408054815	0.09837968031	0.001453736341
8	0.0001457960254	0.08724050503	0.01259291162
16	0.001242491091	0.09844134434	0.001392072307
32	-0.0003088064258	0.09991128193	0.7786527965e-4
64	-0.7560574333e-4	0.0997644695	0.6894714963e-4
128	-0.1734579105e-4	0.09978820174	0.452149115e-4
256	-0.2886086095e-5	0.09981311325	0.2030339381e-4
512	0.3567938445e-6	0.09982777952	0.5637122541e-5
1024	0.2511444261e-6	0.09983437956	0.9629137938e-6
2048	-0.2799731836e-7	0.09983305183	0.3648132982e-6
4096	0.1380843436e-7	0.09983335854	0.5810351094e-7

В табл. 7.8 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (7.2.6).

Из табл. 7.7 и табл. 7.8 следует, что использование при вычислении ряда Фурье (7.2.6) соответствующей этому ряду цепной дроби обеспечивает, как и в рассмотренных выше примерах, высокую скорость сходимости. Из данных колонок 5 табл. 7.6 и табл. 7.8 можно заметить, что соответствующие цепные дроби обеспечивают квадра-

тичную скорость сходимости, то есть при увеличении числа звеньев цепной дроби вдвое, также в два раза увеличивается точность вычислений.

Таблица 7.8

$$\text{Определение значения ряда Фурье} \\ 0,099833 \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 0,2}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 0,4}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 0,6}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left \sin 0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-0.4159531745	-0.4159531745	0.2206665979	0.1208331813
2	-0.07818208538	-0.1879588621	0.1243881192	0.02455470258
4	-0.01408054815	-0.1663690299	0.08513134974	0.0147020669
8	0.0001457960254	0.08600422096	-0.466330678	0.5661640946
16	0.001242491091	-2.096074222	0.09783363098	0.00199978567
32	-0.0003088064258	-0.1879617157	0.09980917131	0.242453394e-4
64	-0.7560574333e-4	0.02555575217	0.09983372	0.30335769e-6
128	-0.1734579105e-4	-4.186160986	0.09983341665	0.1830372783e-13
256	-0.2886086095e-5	-0.07529481065	0.09983341665	0.1438876188e-26
503	-0.1255101572e-5	-0.6582305078	0.09983341665	0.27563717e-50

Рассмотрим ещё несколько примеров, демонстрирующих эффективность цепных дробей при вычислении рядов Фурье.

Пример 6.

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right), \quad 0 < x < \pi \quad (7.2.7)$$

В табл. 7.9 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.7) при $x = 0,1$.

Таблица 7.9

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.7) при $x = 0,1$

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin 0,1 + \frac{\sin 0,3}{3} + \frac{\sin 0,5}{5} + \frac{\sin 0,7}{7} + \dots \right) \quad (7.2.8)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left 1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	0.127111854	0.127111854	0.872888146
2	0.1254226711	0.2525345251	0.7474654749
4	0.1171776335	0.4917968695	0.5082031305
8	0.08467000417	0.8848137045	0.1151862955
16	0.001707811087	1.178963519	0.1789635194
32	0.0003398114762	0.9033436152	0.09665638479
64	0.001335718927	0.9512196215	0.0487803785
128	0.001792812922	0.97739431	0.02260569002
256	0.001846253678	0.992410373	0.007589626965
512	0.001220237635	1.00177158	0.001771580447
1024	-0.0002962793593	1.002584398	0.002584397515
2048	0.0002760985599	0.9994221442	0.000577855838
4096	0.0001173629133	1.000565886	0.0005658860663

Коэффициенты ряда Фурье (7.2.7) убывают медленно, что “гарантирует” слабую его сходимость: 4096 членов ряда (7.2.8) обеспечивают результат всего с тремя верными десятичными разрядами (Табл. 7.9).

В табл. 7.10 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (7.2.8).

Таблица 7.10

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin 0,1 + \frac{\sin 0,3}{3} + \frac{\sin 0,5}{5} + \frac{\sin 0,7}{7} + \dots \right)$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left 0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.127111854	0.127111854	0.127111854	0.872888146
2	0.1254226711	-0.9867110519	9.565230667	8.565230667
4	0.1171776335	-0.9920583462	0.2012773584	0.7987226416
8	0.08467000417	-0.9902515575	0.3825783554	0.6174216446
16	0.001707811087	-0.9900779039	0.6655488971	0.3344511029
32	0.0003398114762	-0.9900435979	0.9221795976	0.07782040244
64	0.001335718927	-0.9900357774	0.9967201038	0.003279896239
128	0.001792812922	-0.9900339008	0.9999945974	0.5402621268e-5
256	0.001846253678	3.661841176	1	0.1450950984e-10
512	0.001220237635	3.776695996	1	0.8159669305e-22
1024	-0.0002962793593	0.1895841833	1	0.2625423426e-44

Следует отметить, что несмотря на то, что коэффициенты исходного ряда Фурье медленно убывают, скорость сходимости соответствующей цепной дроби весьма высока: цепная дробь с 1024 звеньями обеспечивает погрешность при вычислении ряда (7.2.8) порядка 10^{-44} .

Пример 7.

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad (7.2.9)$$

В табл. 7.11 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.9) при $x = 1$, построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 7.11

Определение значения ряда Фурье (7.2.9) при $x = 1$

$$1 = 2 \left(\sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \frac{\sin 4}{4} + \dots \right) \quad (7.2.10)$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность
1	1.68294197	1.68294197	1.68294197	0.6829419696
2	-0.9092974268	0.5403023059	1.09260498	0.09260497969
4	0.3784012477	0.9771401098	0.9937450943	0.006254905728
8	-0.2473395617	0.7885180891	0.9999723769	0.2762308591e-4
16	0.03598791458	0.7711050475	0.9999999995	0.5105888349e-9
32	-0.03446416758	0.7703416654	1	0.1688257252e-18
64	-0.02875081369	0.7701965124	1	0.1812117964e-37
65	0.02544088245	-0.2298914363	1	0.181229119e-37
128	-0.01126621423	0.7701622212	1	0.2067551732e-75
129	-0.002999587473	-0.2298595734	1	0.2067601885e-75
256	0.007806312766	0.7701538868	1	0.2678080738e-151
257	-0.004461923539	-0.2298515384	1	0.26780971e-151

Соответствующая ряду Фурье (7.2.10) цепная дробь обеспечивает высокую скорость сходимости.

Пример 8.

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \quad (7.2.11)$$

В табл. 7.12 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.11) при $x = 0,1$.

Таблица 7.12

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.11) при $x = 0,1$

$$1,490354434 \dots = \cos 0,1 + \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \quad (7.2.12)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность $\varepsilon = 1,4903 \dots - \sum_{n=1}^n a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.4953502689
2	0.2450166445	1.24002081	0.2503336244
4	0.05756631213	1.403735621	0.08661881351
8	0.01088604233	1.488259979	0.002094455171
16	-0.000114060634	1.51025264	0.01989820613
32	-0.000974897242	1.493008794	0.002654360226
64	0.0002424767868	1.490113625	0.0002408095636
128	0.5937698765e-4	1.490433632	0.791978687e-4
256	0.1362314456e-4	1.490418844	0.6440957653e-4
512	0.2266718071e-5	1.490385272	0.3083800755e-4
1024	-0.280224963e-6	1.490363452	0.9017546554e-5
2048	-0.197248324e-6	1.490353017	0.1417316183e-5
4096	0.2198904111e-7	1.490354998	0.5634416884e-6
1000000	-0.990801223e-12	1.490354434	0.8570704657e-12

Из колонки 4 табл. 7.12 следует, что скорость сходимости ряда Фурье (7.2.12) незначительна: миллион членов ряда обеспечивает погрешность порядка 10^{-12} .

В табл. 7.13 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (7.2.12).

Таблица 7.13

Определение значения ряда Фурье (7.2.12)

$$1,490354434 \dots = \cos 0,1 + \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left 1,4903 \dots - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.4953502689
2	0.2450166445	-0.246246853	1.32006635	0.1702880845
4	0.05756631213	-0.2527534121	1.481607894	0.008746540523
8	0.01088604233	0.09576073928	1.515262299	0.02490786461
16	-0.000114060634	-0.284485322	1.487040059	0.003314375066
32	-0.000974897242	-0.2116731484	1.490717466	0.0003630320944
64	0.0002424767868	-0.181814571	1.490325034	0.2940042274e-4
128	0.5937698765e-4	-0.09620522848	1.490354435	0.6130518774e-9
256	0.1362314456e-4	-2.724241456	1.490354434	0.2306600907e-18
512	0.2266718071e-5	0.5450086852	1.490354434	0.8058497858e-34

Можно сравнить эффективность вычисления ряда Фурье (7.2.12) методом определения частичных сумм и методом цепных дробей. При 512 слагаемых ряда (7.2.12) погрешность составляет порядка 10^{-4} , а цепная дробь с 512 звеньями обеспечивает погрешность порядка 10^{-34} , то есть разница в эффективности аппроксимации составляет 30 порядков.

Пример 9.

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad (7.2.13)$$

В табл. 7.14 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.13) при $x = 0,1$.

Таблица 7.14

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.13) при $x = 0,1$

$$0,05 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 0,1n}{n} \quad (7.2.14)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность $\varepsilon = 1,4903 \dots - \sum_{n=1}^n a_n $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.04983341665
2	-0.0993346654	0.0004987512493	0.04950124875
4	-0.09735458558	0.001650901226	0.04834909877
8	-0.08966951136	0.005790516862	0.04420948314
16	-0.06247335019	0.01978557833	0.03021442167
32	0.001824191982	0.05167800285	0.001678002848
64	-0.001821081326	0.04870835088	0.001291649118
128	-0.001808670509	0.048909047	0.001090952998
256	-0.001759533571	0.04903469561	0.0009653043888
512	-0.001570922837	0.04918626941	0.0008137305851
1024	-0.0009334526266	0.04954068189	0.0004593181093
2048	0.0002742830788	0.05014721551	0.0001472155111
4096	-0.0002269197216	0.04988430047	0.000115699532
1000000	0.1353399421e-6	0.05000004288	0.4287926899e-7

Ряд Фурье (7.2.14) – медленно сходящийся ряд: частичная сумма с миллионом слагаемых обеспечивает шесть точных десятичных разрядов.

В табл. 7.15 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (7.2.14) цепной дроби.

Таблица 7.15

Определение значения ряда Фурье

$$0,05 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 0,1n}{n}$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left 0,05 \dots - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.09983341665	0.04983341665
2	-0.0993346654	0.9950041653	0.05004170838	0.4170837554e-4
4	-0.09735458558	0.998343083	0.04999997219	0.2781086585e-7
8	-0.08966951136	0.9975730286	0.05	0.113599796e-13
16	-0.06247335019	0.9975148487	0.05	0.1782044426e-26
32	0.001824191982	0.9975048532	0.05	0.4222653145e-52
64	-0.001821081326	0.9975027309	0.05	0.2321645728e-103
128	-0.001808670509	0.9975022396	0.05	0.6940698305e-206
256	-0.001759533571	-1.228936371	0.05	0.75827669e-301

Соответствующая цепная дробь позволяет вычислить ряд Фурье (7.2.14) с чрезвычайно высокой точностью. Эффективность вычисления ряда Фурье цепными дробями в сравнении с непосредственным подсчётом частичных сумм этого ряда впечатляющая: цепные дроби при числе звеньев 256 дают погрешность почти на 300 порядков меньшую, чем использование частичных сумм.

Пример 10.

$$\frac{\pi^2 - 3x^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (7.2.15)$$

В табл. 7.16 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.15) при $x = 0,1$.

Таблица 7.16

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.15) при $x = 0,1$

$$0,8199670334 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 0,1n}{n^2} \quad (7.2.16)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность $\varepsilon = 0,8199 \dots - \sum_{n=1}^N a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.1750371319
2	-0.2450166445	0.7499875208	0.06997951261
4	-0.05756631213	0.7985697075	0.02139732594
8	-0.01088604233	0.8154700026	0.004497030871
16	0.000114060634	0.8201176338	0.0001506003931
32	0.000974897242	0.8204378019	0.0004707684359
64	-0.0002424767868	0.8198484053	0.0001186280744
128	-0.5937698765e-4	0.819937931	0.2910246775e-4
256	-0.1362314456e-4	0.8199604205	0.6612929516e-5
512	-0.2266718071e-5	0.8199659791	0.1054371148e-5
1024	0.280224963e-6	0.8199671962	0.1627836586e-6
2048	0.197248324e-6	0.8199671286	0.9522491121e-7
4096	-0.2198904111e-7	0.8199670238	0.9605666353e-8
1000000	-0.990801223e-12	0.8199670334	0.4987864392e-12

Как уже отмечалось, скорость сходимости ряда Фурье во многом определяется степенью убывания коэффициентов ряда. Так как коэффициенты ряда Фурье (7.2.15) определяются формулой $1/n^2$, то ряд Фурье (7.2.15) сходится достаточно быстро.

В табл. 7.17 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (7.2.16) цепной дроби.

Таблица 7.17

Определение значения ряда Фурье (7.2.16) при $x = 0,1$

$$0,8199670334 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 0,1n}{n}$$

соответствующей цепной дробью

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left 0,8199 \dots - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.1750371319
2	-0.2450166445	0.246246853	0.7984005439	0.02156648954
4	-0.05756631213	0.2527534121	0.819428477	0.0005385564321
8	-0.01088604233	-0.09576073928	0.8199682072	0.1173788121e-5
16	0.000114060634	0.284485322	0.8199670334	0.7566439677e-12
32	0.000974897242	0.2116731484	0.8199670334	0.5592005863e-24
64	-0.0002424767868	0.181814571	0.8199670334	0.2541286383e-47
128	-0.5937698765e-4	0.09620522848	0.8199670334	0.1351121865e-94
256	-0.1362314456e-4	2.724241456	0.8199670334	0.5300260132e-189
512	-0.2266718071e-5	-0.5450086852	0.8199670334	0.9332636185e-300

Использование соответствующих цепных дробей при определении значений ряда Фурье (7.2.16), как и следовало ожидать, оказалось чрезвычайно эффективным. Использование цепной дроби с 512 звеньями обеспечило погрешность порядка 10^{-300} .

Пример 11.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad (7.2.17)$$

В табл. 7.18 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.17) при $x = 0,1$.

Таблица 7.18

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.17) при $x = 0,1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)0,1}{2n+1} \quad (7.2.18)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность $\varepsilon = \left \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^N a_n \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.6855647468
2	0.09850673555	0.1983401522	0.5870580112
4	0.09203109818	0.3862563581	0.3991418053
8	0.06649966577	0.6949310585	0.0904671049
16	0.001341311691	0.9259557829	0.1405576195
32	0.0002668873093	0.7094844163	0.07591374709
64	0.001049071192	0.7470861437	0.03831201969
128	0.001408071977	0.767643696	0.01775446743
256	0.001450044248	0.7794372843	0.005960879079
512	0.0009583723972	0.7867895594	0.00139139603
1024	-0.0002326972646	0.7874279445	0.002029781062
2048	0.0002168473018	0.7849443165	0.0004538469139
4096	0.9217661659e-4	0.7858426093	0.0004444458771
1000000	-0.1815130091e-6	0.785395751	0.2412433463e-5

Ряд Фурье (7.2.17) – медленно сходящийся ряд, так как коэффициенты ряда определяются формулой $1/2n + 1$. Из четвертой колонки табл. 7.18 можно видеть, что частичная сумма из миллиона членов ряда обеспечивает всего четыре точных десятичных знака.

В табл. 7.19 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (7.2.17) при $x = 0,1$ цепной дроби.

Таблица 7.19

Определение значения ряда Фурье

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)0,1}{2n+1}$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left \frac{\pi}{4} - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.09983341665	0.6855647468
2	0.09850673555	-0.9867110519	7.512514599	6.727116435
4	0.09203109818	-0.9920583462	0.1580828676	0.6273152958
8	0.06649966577	-0.9902515575	0.3004763377	0.4849218257
16	0.001341311691	-0.9900779039	0.5227208814	0.262677282
32	0.0002668873093	-0.9900435979	0.7242781622	0.06112000115
64	0.001049071192	-0.9900357774	0.7828221389	0.002576024482
128	0.001408071977	-0.9900339008	0.7853939202	0.4243208822e-5
256	0.001450044248	-0.596810691	0.7853981634	0.837693701e-11
512	0.0009583723972	0.2895201609	0.7853981634	0.5204159989e-22

Из четвертой колонки табл. 7.19 можно заключить, что скорость сходимости соответствующей ряду (7.2.18) цепной дроби также не слишком велика, особенно в сравнении со скоростью сходимости цепной дроби, построенной для ряда Фурье (7.2.15) и других аналогичных рядов с коэффициентами, быстро стремящимися к нулю.

Пример 12.

$$\frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad (7.2.19)$$

В табл. 7.20 приведены результаты вычисления ряда Фурье (7.2.19) при $x = 0,1$.

Таблица 7.20

Определение частичных сумм ряда Фурье (7.2.19) при $x = 0,1$

$$1,155160734 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)0,1}{(2n+1)^2} \quad (7.2.20)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность $\varepsilon = 1,1551 \dots - \sum_{n=1}^N a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.1601565685
2	0.1061484988	1.101152664	0.05400806973
4	0.01560902423	1.151864991	0.003295743021
8	0.000314387563	1.165185137	0.01002440326
16	-0.001039682779	1.156723298	0.001562564331
32	0.000251917016	1.154981015	0.000179718819
64	0.6144738495e-4	1.155185781	0.2504770047e-4
128	0.1435317358e-4	1.155189632	0.2889832351e-4
256	0.2571739724e-5	1.155175626	0.148918182e-4
512	-0.1881867483e-6	1.155165324	0.4590165106e-5
1024	-0.2098381924e-6	1.155160073	0.661045636e-6
2048	0.2742337967e-7	1.155161011	0.276918011e-6
4096	-0.977312639e-8	1.155160785	0.5131197407e-7
1000000	0.2329455026e-12	1.155160734	0.3358085181e-12

Скорость сходимости ряда Фурье (7.2.19) характерна для рядов Фурье, имеющих аналогичные коэффициенты, – частичные суммы с миллионом членов дают погрешность порядка $10^{-11} - 10^{-12}$.

В табл. 7.21 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (7.2.19) при $x = 0,1$ цепной дроби.

Таблица 7.21

Определение значения ряда Фурье (7.2.20)

$$1,155160734 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)0,1}{(2n+1)^2}$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значение элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left 1,1551 \dots - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.1601565685
2	0.1061484988	-0.1066814617	1.11382908	0.04133165417
4	0.01560902423	-0.1682293697	1.165116309	0.009955575072
8	0.000314387563	0.5686637154	1.187044609	0.03188387559
16	-0.001039682779	-12.91826718	1.156587088	0.001426353815
32	0.000251917016	-0.2179993635	1.155177523	0.1678891183e-4
64	0.6144738495e-4	0.3509407588	1.15516086	0.125887604e-6
128	0.1435317358e-4	-2.117968726	1.155160734	0.116822291e-13
256	0.2571739724e-5	-0.1409783124	1.155160734	0.11429885e-26
512	-0.1881867483e-6	2.863832055	1.155160734	0.310339232e-49

Здесь можно отметить, что скорость суммирования цепной дробью знакопостоянного ряда Фурье (7.2.20) значительно уступает скорости суммирования аналогичного знакопеременного ряда Фурье (7.2.15).

ГЛАВА 8

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

8.1. Суммирование рядов Фурье

Пусть дан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (8.1.1)$$

относительно которого известно только, что он является рядом Фурье некоторой функции $f(x)$. Если известно, что ряд (8.1.1) сходится к $f(x)$, то $f(x)$ получается как предел частичных сумм этого ряда. Иначе дело обстоит в случае, когда сходимость ряда установить не удалось или же, когда ряд оказался расходящимся. Здесь либо не знаем, существует или нет предел частичных сумм, либо знаем, что этот предел не существует. Нужно, следовательно, изыскать операцию, которая позволяла бы найти функцию по её ряду Фурье, независимо от того, сходится этот ряд или нет. Такие операции называют суммированием ряда [68]. Известно несколько способов суммирования рядов Фурье.

Способ средних арифметических

Рассмотрим ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (8.1.2)$$

и положим:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \\ \delta_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$, то условимся говорить, что ряд (8.1.2) суммируем способом средних арифметических к значению δ .

Известно, что ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π суммируется способом средних арифметических к этой функции в каждой точке её непрерывности. Известно также, что ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ периода 2π равномерно суммируется к ней способом средних арифметических, хотя ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ может быть расходящимся.

Метод средних арифметических восстанавливает абсолютно интегрируемую функцию по её непрерывности, то есть всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Поэтому любая абсолютно интегрируемая функция вполне определена, с точностью до её значений в конечном числе точек своим тригонометрическим рядом Фурье независимо от того, сходится этот ряд или нет.

Аналогичные заключения можно сформулировать и относительно степенных рядов, по которым строятся соответствующие цепные дроби.

Способ степенных множителей

Рассмотрим ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (8.1.3)$$

и наряду с ним ряд

$$u_0 + u_1 r + u_2 r^2 + \dots + u_n r^n + \dots \quad (8.1.4)$$

Допустим, что ряд (8.1.4) сходится для $0 < r < 1$. Это будет всегда иметь место, когда коэффициенты ряда (8.1.3) ограничены. Для суммы $\delta(r)$ ряда (8.1.4) существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 1} \delta(r) = \delta.$$

В этом случае скажем, что ряд (8.1.3) суммируется способом степенных множителей к значению δ . Этим способом суммируются некоторые расходящиеся ряды.

Известны формулы

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (8.1.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (8.1.6)$$

Функцию переменных r и φ

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}$$

называют ядром Пуассона.

Пусть $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим для $0 \leq r \leq 1$ ряд

$$f(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (8.1.7)$$

Если существует $\lim_{r \rightarrow 1} f(x, r)$, то это означает, что ряд (8.1.7) суммируем способом степенных множителей.

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция с периодом 2π на прямой. Эта функция определяется своим рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

однозначно. Однако, поскольку ряд Фурье непрерывной функции, вообще говоря, не обязан сходиться, мы не можем такую функцию получить непосредственным суммированием её ряда Фурье. Способ восстановления непрерывной функции по её ряду Фурье даёт теорема Фейера [65], установленная в 1905 году.

Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j \cos jx + b_j \sin jx - \quad (8.1.8)$$

– частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Положим

$$\delta_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}, \quad (8.1.9)$$

δ_n – средние арифметические сумм S_k называются суммами Фейера функции $f(x)$.

Если $f(x)$ – непрерывная функция с периодом 2π , то последовательность $\{\delta_n\}$ её сумм Фейера сходится к $f(x)$ равномерно на всей числовой оси.

8.2. Метод соответствующих цепных дробей

Ранее построением соответствующих цепных дробей были просуммированы, то есть, определены значения расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана. Собственно, посредством соответствующих цепных дробей были получены иным путём классические результаты:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{(-1)^n (2^n - 1)}{n} B_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.1)$$

где B_n – числа Бернулли.

Так как числа Бернулли с нечётными индексами, кроме B_1 , равны нулю, то имеем формулы для “чётных” и “нечётных” степеней:

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.2.2)$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0. \quad (8.2.3)$$

В этой главе при помощи соответствующих цепных дробей найдём значения расходящихся тригонометрических рядов, имеющих коэффициентами числа натурального ряда в целой степени:

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (8.2.4)$$

Также будем различать случай нечётных и чётных степеней.

Рассмотрим вначале случай “нулевой” степени, то есть тригонометрический ряд

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \dots \quad (8.2.5)$$

В табл. 8.1 приведены частичные суммы тригонометрического ряда (8.2.4) при $x = 0,1$.

Таблица 8.1

Определение частичных сумм тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.6)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	0.9800665778	2.975070743
4	0.921060994	4.851468226
8	0.6967067093	8.0159353
16	-0.0291995223	10.4728051
32	-0.9982947758	-0.5824022899
64	0.9931849188	2.161113103
128	0.9728325657	3.299584964
256	0.8928064018	5.447054846
512	0.5942065421	8.833524473
1024	-0.2938371708	9.903669521
2048	-0.8273194342	-5.526295293
4096	0.3689148923	9.971342424
1000000	-0.9907992414	1.356870427

Из данных третьей колонки табл. 8.1 можно видеть, что тригонометрический ряд (8.2.6) – расходящийся, так как частичные суммы не стремятся ни к какому пределу. Можно также заметить, что частичные суммы не нарастают неограниченно, более того – частичные суммы ряда (8.2.6) меняют свой знак.

Сумма расходящегося тригонометрического ряда может быть установлена построением соответствующей цепной дроби. В табл. 8.2 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда (8.2.7) через соответствующие цепные дроби.

Таблица 8.2

Суммирование тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.7)$$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	0.9800665778	-0.9849874122	67.27799122
3	0.9553364891	0.01022048231	40.83556426
4	0.921060994	-1.015241401	0.5
5	0.8775825619	0	

Из третьей колонки табл. 8.2 видно, что коэффициент ω_5 имеет нулевые значения, что свидетельствует о конечности соответствующей цепной дроби. Следовательно, можно записать:

$$1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots = 1 + \frac{0,9950 \dots}{1} - \frac{0,9849 \dots}{1} + \frac{0,0102 \dots}{1} - \frac{1,0152 \dots}{1} = \frac{1}{2}. \quad (8.2.8)$$

Тригонометрический ряд (8.2.5) имеет сумму $\frac{1}{2}$ при любом x , что легко объясняется известной формулой (8.2.10).

Из (8.1.8) можно записать:

$$1 + \cos 0,1 r + \cos 0,2 r^2 + \cos 0,3 r^3 + \cos 0,4 r^4 + \dots = 1 + \frac{0,9950 \dots r}{1} - \frac{0,9849 \dots r}{1} + \frac{0,0102 \dots r}{1} - \frac{1,0152 \dots r}{1}. \quad (8.2.9)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (8.2.10)$$

Установим суммы тригонометрического ряда (8.2.10) преобразованием его в соответствующие цепные дроби при различных значениях r . В табл. 8.3 приведены результаты суммирования ряда (8.2.11) построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 8.3

Суммирование тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2} + 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2 \cos 0,2 + 0,5^3 \cos 0,3 + 0,5^4 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.11)$$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность
1	0.4975020826	0.4975020826	0.9975020826	0.4731101743
2	0.2450166445	-0.4924937061	1.480287513	0.00967525598
3	0.1194170611	0.005110241156	1.475474656	0.004862399184
4	0.05756631213	-0.5076207004	1.470612257	0.5599581711e-300
5	0.02742445506	0		

Из табл. 8.3 видно, что соответствующая ряду (8.2.11) цепная дробь конечна, и она точно определяет сумму тригонометрического ряда. Фактически, на конечную

цепную дробь, суммирующую ряд (8.2.11), можно смотреть как на разложение в конечную цепную дробь формулы Пуассона (8.2.10) при $r = 0,5$ и $x = 0,1$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0,5^2}{1 - 2 \cdot 0,5 \cdot \cos 0,1 + 0,5^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0,4975 \dots}{1} - \frac{0,4924 \dots}{1} + \frac{0,0051 \dots}{1} - \frac{0,5076 \dots}{1} = 1,470612257 \dots$$

Тригонометрический ряд (8.2.11) при $r = 0,5$ является сходящимся и его значение может быть найдено непосредственно определением частичных сумм (Табл. 8.4).

Таблица 8.4

Определение частичных сумм тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2} + 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2 \cos 0,2 + 0,5^3 \cos 0,3 + 0,5^4 \cos 0,4 + \dots$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда	Погрешность
1	0.4975020826	0.9975020826	0.4731101743
2	0.2450166445	1.242518727	0.2280935298
4	0.05756631213	1.4195021	0.05111015653
8	0.002721510583	1.468519265	0.002092992319
16	-0.4455493515e-6	1.470615675	0.3418166196e-5
32	-0.2324336152e-9	1.470612257	0.222942353e-9
64	0.5384066233e-19	1.470612257	0.5102159832e-19
128	0.2858897963e-38	1.470612257	0.2641700232e-38
256	0.7710426573e-77	1.470612257	0.6722331771e-77
512	0.4431794855e-154	1.470612257	0.3127252174e-154
1024	-0.1634523518e-308	1.470612257	0.3359749027e-299

При $r > 1$ тригонометрический ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$ является расходящимся, однако его значение может быть установлено через соответствующую цепную дробь. Установим значение ряда (8.2.10) при $r = 3$ и $x = 0,1$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3^2}{1 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 0,1 + 3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2,9850 \dots}{1} - \frac{2,9549 \dots}{1} + \frac{0,0306 \dots}{1} - \frac{3,0457 \dots}{1} = -0,9925619865 \dots$$

Аналогично просуммируем ряды “по синусам”.

Имеет место формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}, \quad 0 < r < 1. \quad (8.2.12)$$

Установим суммы тригонометрического ряда (8.2.12) преобразованием его в соответствующие цепные дроби при различных значениях r . В табл. 8.5 приведены результаты суммирования ряда (8.2.13) построением соответствующей цепной дроби.

Из табл. 8.5 видно, что соответствующая ряду (8.2.13) цепная дробь конечная и она точно определяет сумму тригонометрического ряда. Фактически, на конечную цепную дробь, суммирующую ряд (8.2.13), можно смотреть как на разложение в конечную цепную дробь формулы (8.2.12) при $r = 0,5$ и $x = 0,1$.

Тригонометрический ряд (8.2.12) при $r = 0,5$ является сходящимся и его значение может быть найдено непосредственным определением частичных сумм.

Таблица 8.5

Суммирование тригонометрического ряда
 $0,5 \sin 0,1 + 0,5^2 \sin 0,2 + 0,5^2 \sin 0,3 + 0,5^2 \sin 0,4 + \dots$ (8.2.13)
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.04991670832	0.04991670832	0.04991670832
2	0.0496673327	-0.9950041653	9.991665277
3	0.03694002583	0.2512552296	0.2437396407
4	0.02433864639	-0.2512552296	0.1957549949
5	0.01498204808	0	

$$\frac{0,5 \sin 0,1}{1 - 2 \cdot 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2} =$$

$$= \frac{0,0499 \dots}{1} - \frac{0,9950 \dots}{1} + \frac{0,2512 \dots}{1} - \frac{0,2512 \dots}{1} = 0,1957549949 \dots$$

При $r > 1$ тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$ является расходящимся, однако его значение может быть установлено через соответствующую цепную дробь.

В табл. 8.6 приведены частичные суммы расходящегося тригонометрического ряда (8.2.4) для $n = 1$:

$$1 + \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + 4 \cos 4x + \dots \quad (8.2.14)$$

при $x = 0,1$.

Таблица 8.6

Определение частичных сумм тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2 \cos 0,2 + 3 \cos 0,3 + 4 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.15)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	1.960133156	3.955137321
4	3.684243976	10.50539076
8	5.573653675	30.77286625
16	-0.4671923568	57.55911985
32	-31.94543283	-233.6329587
64	63.5638348	106.6291622
128	124.5225684	356.6278668
256	228.5584389	1256.717744
512	304.2337495	4227.151351
1024	-300.8892628	9500.865998
2048	-1694.350201	-12523.73706
4096	1511.075399	38732.45744

Сумма расходящегося тригонометрического ряда (8.2.14) может быть установлена построением для этого ряда соответствующей цепной дроби.

В табл. 8.7 приведены результаты суммирования ряда (8.2.15) построением соответствующей цепной дроби.

В третьей колонке табл. 8.7 помещены значения коэффициентов ω_i соответствующей цепной дроби, построенной по исходному расходящемуся ряду (8.1.15). Коэффициенты цепной дроби находились по алгоритму Рутисхаузера.

Таблица 8.7

Суммирование тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 + 4\cos 0,4 + \dots$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	1.960133156	-1.969974824	-0.02580411402
3	2.866009467	0.5078244295	-2.246327613
4	3.684243976	-0.5086308189	32.8565651
5	4.387912809	-0.002396719945	31.6534107
6	4.952013689	-1.345611792	36.87389795
7	5.353895311	0.08045357737	38.79141127
8	5.573653675	-0.7416805125	-99.08337502
9	5.594489714	0	

Из данных колонки 3 следует, что коэффициент ω_9 имеет нулевое значение. Таким образом, заключаем, что соответствующая тригонометрическому ряду (8.2.15) цепная дробь – конечная, имеет 8 звеньев и её значение равно $-99,0833\dots$. Следовательно, можно записать значение расходящегося ряда (8.2.15):

$$1 + \cos 0,1 + 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 + 4\cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995\dots}{1} - \frac{1,969\dots}{1} + \frac{0,507\dots}{1} - \frac{0,508\dots}{1} + \dots + \frac{0,080\dots}{1} - \frac{0,741\dots}{1} = -99,083375\dots$$

В табл. 8.8 приведены частичные суммы знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \cos x - 2\cos 2x + 3\cos 3x - 4\cos 4x + \dots + (-1)^{n+1} \cos nx + \dots$$

при $x = 0,1$.

(8.2.16)

Таблица 8.8

Определение частичных сумм тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots$$

(8.2.17)

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	-1.960133156	0.0348710096
4	-3.684243976	-0.783363499
8	-5.573653675	-1.567222743
16	0.4671923568	1.891703348
32	31.94543283	17.42680286
64	-63.5638348	-30.59357508
128	-124.5225684	-60.51302592
256	-228.5584389	-110.3671294
512	-304.2337495	-140.7113845
1024	300.8892628	176.2592132
2048	1694.350201	819.8484178
4096	-1511.075399	-659.1231099

В табл. 8.9 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда (8.2.17) построением соответствующей цепной дроби.

Из табл. 8.9 следует, что соответствующая ряду (8.2.17) цепная дробь конечная и имеет 8 звеньев. Кроме того, цепная дробь является сходящейся, в том смысле, что соседние подходящие дроби дают близкие значения.

Таблица 8.9

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	-1.960133156	1.969974824	1.335021077
3	2.866009467	-0.5078244295	1.198897981
4	-3.684243976	0.5086308189	1.250657915
5	4.387912809	0.002396719945	1.250581146
6	-4.952013689	1.345611792	1.250625158
7	5.353895311	-0.08045357737	1.250626723
8	-5.573653675	0.7416805125	1.250626043
9	5.594489714	0	

Запишем значение расходящегося ряда (8.2.17):

$$1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} + \frac{1,969 \dots}{1} - \frac{0,507 \dots}{1} + \frac{0,508 \dots}{1} + \dots - \frac{0,080 \dots}{1} + \frac{0,741 \dots}{1} = 1,250626 \dots$$

Определим сумму расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos x + 2^3 \cos 2x + 3^3 \cos 3x + 4^3 \cos 4x + \dots \quad (8.2.18)$$

при $x = 0,1$.

В табл. 8.10 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.19)$$

построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 8.10

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	7.840532623	-7.879899297	0.8553751847
3	25.79408521	4.590060909	-1.429050852
4	58.94790362	-0.7199647674	2.819359077
5	109.6978202	0.7589450195	10.79609342
6	178.2724928	-0.4528498772	-23.49674651
7	262.3408702	0.1943560471	-84.78079095
8	356.7138352	-0.3973380547	547.0496634
9	453.1536669	-0.021071757	443.4281251
10	540.3023059	-1.292795419	1829.90374
11	603.7364376	0.0199511359	2284.694277
12	626.1541997	-0.7579833706	-66906.71231
13	587.6949265	-0.0001592590172	-65280.40293
14	466.3898401	-1.147197585	-80432.99535
15	238.7380556	0.01732983008	-82984.82284
16	-119.6012433	-0.871416877	60001.00835
17	-633.0130005	0	

Из колонки 3 табл. 8.10 следует, что соответствующая ряду (8.2.19) цепная дробь – конечная и имеет 16 звеньев.

Число звеньев N конечных цепных дробей, суммирующих расходящиеся ряды вида

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (8.2.20)$$

определяется формулой

$$N = 4(n + 1), \quad (8.2.21)$$

где n – показатель степени чисел натурального ряда.

Запишем значение расходящегося ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots = \\ = 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{7,879 \dots}{1} + \frac{4,590 \dots}{1} - \frac{0,719 \dots}{1} + \dots + \frac{0,017 \dots}{1} - \frac{0,871 \dots}{1} = 60001,00835 \dots$$

Определим сумму расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos x + 2^5 \cos 2x + 3^5 \cos 3x + 4^5 \cos 4x + \dots \quad (8.2.22)$$

при $x = 0,1$.

В табл. 8.11 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.23)$$

построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 8.11

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	31.36213049	-31.51959719	0.9673978605
3	232.1467669	24.11746082	-2.903693498
4	943.1664579	-1.024909095	1.963602426
5	2742.445506	2.95888744	17.50030235
6	6417.809742	-0.5375849807	-10.43017827
7	12854.70264	0.9049695601	-82.93410135
8	22829.68545	-0.4217693232	129.9104837
9	36705.44702	0.3491307565	573.5629616
10	54030.23059	-0.3715230432	-2910.381046
11	73052.10895	0.1393666847	-76953.17425
12	90166.20476	-0.5139268708	4184.424291
13	99320.44258	-0.2861917698	2018.777132
14	91412.40866	-1.038583886	203544.409
15	53716.06252	0.003411531578	295809.6084
16	-30617.9183	-0.6889427346	-20939545.95
17	-182940.7571	-0.0003493173169	-19365682.23
18	-429313.8077	-1.144678805	-47240459.91
19	-800496.9732	0.008296383641	-51727086.21
20	-1331669.877	-0.8738645763	261782466.2
21	-2061842.481	-0.0002974938781	255487538.8
22	-3032918.19	-1.091696423	351998228.3
23	-4288381.006	0.007446301673	363527942
24	-5871588.897	-0.9151039494	-119999999
25	-7823668.121	0	

Соответствующая цепная дробь, суммирующая расходящийся тригонометрический ряд (8.2.23) – конечная.

Число звеньев этой конечной цепной дроби определяется формулой (8.2.21):

$$N = 4(5 + 1) = 24.$$

Значение ряда (8.2.23) определяется конечной цепной дробью, значения подходящих дробей которой приведены в четвёртой колонке табл. 8.11. Таким образом, можно записать сумму расходящегося ряда (8.2.23)

$$1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots = \frac{P_{24}}{Q_{24}} = -1199999999.$$

Рассматривая значения подходящих цепных дробей соответствующих расходящимся рядам с нечётными степенями коэффициентов, то есть рядов вида

$$1 + \cos x + 2^{2k-1} \cos 2x + 3^{2k-1} \cos 3x + 4^{2k-1} \cos 4x + \dots, \quad (8.2.24)$$

можно отметить, что конечные цепные дроби ни есть сходящиеся, т.е. их подходящие дроби не приближают значение последней подходящей дроби, которая и определяет значение цепной дроби. Это свидетельствует о том, что значением расходящегося тригонометрического ряда (8.2.24) при $k \rightarrow \infty$ является комплексное число, которое может быть определено по значениям подходящих дробей при помощи r/φ -алгоритма.

Рассмотрим суммирование тригонометрических рядов, имеющих коэффициентами натуральные числа чётных степеней, то есть расходящиеся ряды вида

$$1 + 1^{2k} \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots, \quad k = 1, 2 \dots \quad (8.2.25)$$

Не будем приводить частичные суммы расходящихся рядов (8.2.25). Приведём результаты суммирования рядов (8.2.25) построением соответствующих цепных дробей.

В табл. 8.12 приведены результаты суммирования расходящегося ряда (8.2.25) при $k = 1$ и $x = 0,1$.

Таблица 8.12

$$1 + \cos 0,1 + 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 + 4^2 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.26)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	3.920266311	-3.939949649	0.6615574128
3	8.598028402	1.746724056	-1.29043183
4	14.7369759	-0.601732856	4.706376726
5	21.93956405	0.2753371014	12.67318496
6	29.71208214	-0.4158245742	255.6362233
7	37.47726718	0.01118214137	192.3526082
8	44.5892294	-1.136540019	-141.1510455
9	50.35040743	-0.01705406828	-181.0819298
10	54.03023059	-0.8898189061	-11105.86052
11	54.88513069	0.0006706194693	-9406.946388
12	52.17951664	-1.003018839	1
13	45.20730204	0	

Из табл. 8.12 следует, что соответствующая ряду (8.2.26) цепная дробь конечная и имеет единичное значение. Число звеньев соответствующей цепной дроби равно 12. Цепные дроби, соответствующие рядам с чётными степенями коэффициентов натуральных чисел, имеют единичное значение при любых x , или нулевые, если ряд (8.2.25) рассматривать без начальной единицы.

Из табл. 8.12 можно записать:

$$1 + \cos 0,1 + 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 + 4^2 \cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{3,939 \dots}{1} + \frac{1,746 \dots}{1} - \frac{0,601 \dots}{1} + \dots + \frac{0,0006 \dots}{1} - \frac{1,003 \dots}{1} = 1.$$

В табл. 8.13 приведены результаты суммирования тригонометрического ряда, имеющие коэффициенты чётной степени:

$$1 + \cos x - 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x - 4^2 \cos 4x + \dots \quad (8.2.27)$$

при $x = 0,1$ построением цепной дроби.

Таблица 8.13

Суммирование знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 - 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 - 4^2 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.28)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	-3.920266311	3.939949649	1.2014199
3	8.598028402	-1.746724056	0.7673219367
4	-14.7369759	0.601732856	0.9766019191
5	21.93956405	-0.2753371014	1.011407616
6	-29.71208214	0.4158245742	1.000040398
7	37.47726718	-0.01118214137	0.9999541515
8	-44.5892294	1.136540019	1.000000193
9	50.35040743	0.01705406828	0.9999998297
10	-54.03023059	0.8898189061	1
11	54.88513069	-0.0006706194693	1
12	-52.17951664	1.003018839	1
13	45.20730204	0	

Из табл. 8.13 следует, что соответствующая цепная дробь для “чётногo” ряда имеет единичное значение. Особенность цепной дроби, соответствующей знакопеременному ряду состоит в том, что построенная цепная дробь является “сходящейся”, то есть подходящие цепной дроби приближаются к “1”, а не возникают “внезапно”, как то имеет место в случае знакопостоянных тригонометрических рядов чётной степени.

$$1 + \cos 0,1 - 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 - 4^2 \cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} + \frac{3,939 \dots}{1} - \frac{1,746 \dots}{1} + \frac{0,601 \dots}{1} - \dots - \frac{-0,0006 \dots}{1} + \frac{1,003 \dots}{1} = 1.$$

Можно также записать:

$$\cos x - 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x - 4^2 \cos 4x + \dots = 0.$$

Нулевое значение имеет сумма ряда с коэффициентами в 4-й степени:

$$\cos x - 2^4 \cos 2x + 3^4 \cos 3x - 4^4 \cos 4x + \dots$$

Это следует из колонки 4 табл. 8.14, в которой приведены значения подходящих дробей соответствующей ряду (8.2.29) цепной дроби.

Число звеньев конечной цепной дроби равно 20:

$$N = 4(4 + 1) = 20.$$

Соответствующая цепная дробь для знакоположительного ряда (8.2.30) также имеет единичное значение (табл. 8.15):

$$1 + \cos 0,1 + 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 + 4^4 \cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} + \frac{15,759 \dots}{1} + \frac{10,825 \dots}{1} + \frac{0,860 \dots}{1} + \dots + \frac{0,001 \dots}{1} + \frac{1,008 \dots}{1} = 1.$$

Таблица 8.14

$$\cos 0,1 - 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 - 4^4 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.29)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653
2	-15.68106525	15.75979859	0.05936850372
3	77.38225562	-10.82504101	-1.647237751
4	-235.7916145	0.8605162248	-0.4381692429
5	548.4891012	-1.584409836	0.5997383318
6	-1069.634957	0.4932060256	0.1033689375
7	1836.386092	-0.4795792155	-0.0622861625
8	-2853.710681	0.4033671388	-0.004340291559
9	4078.383002	-0.1446847694	0.001676996878
10	-5403.023059	0.3340972918	0.5576907979e-4
11	6641.100814	-0.1131121585	-0.9027190058e-4
12	-7513.850397	1.490052597	0.1190983523e-6
13	7640.034044	0.006036888456	-0.8835990133e-7
14	-6529.457762	0.743454421	-0.1086518115e-10
15	3581.070834	-0.0004379845497	0.1135688739e-10
16	1913.619894	1.047073297	-0.1104614864e-13
17	-10761.22101	0.003881385124	0.1046464499e-13
18	23850.76709	0.9486648783	0.2763737748e-17
19	-42131.41964	-0.001032557228	-0.2787852573e-17
20	66583.49385	1.008190443	0
21	-98182.97527	0	

Таблица 8.15

$$1 + \cos 0,1 + 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 + 4^4 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.30)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	15.68106525	-15.75979859	0.9325868738
3	77.38225562	10.82504101	-1.990264283
4	235.7916145	-0.8605162248	2.2445116
5	548.4891012	1.584409836	12.67125813
6	1069.634957	-0.4932060256	-12.49160458
7	1836.386092	0.4795792155	-65.42312635
8	2853.710681	-0.4033671388	197.6600265
9	4078.383002	0.1446847694	552.7748096
10	5403.023059	-0.3340972918	1849.88193
11	6641.100814	0.1131121585	1402.628906
12	7513.850397	-1.490052597	-16998.02373
13	7640.034044	-0.006036888456	-23276.47159
14	6529.457762	-0.743454421	-2202276.92
15	3581.070834	0.0004379845497	-1914039.436
16	-1913.619894	-1.047073297	950160.1296
17	-10761.22101	-0.003881385124	1077137.035
18	-23850.76709	-0.9486648783	14635214.43
19	-42131.41964	0.001032557228	13277499.34
20	-66583.49385	-1.008190443	1
21	-98182.97527	0	

Запишем сумму рядов:

$$1 + 1^{2k} \cos x - 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x - 4^{2k} \cos 4x + \dots = 1 \quad (8.2.31)$$

или

$$1^{2k} \cos x - 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x - 4^{2k} \cos 4x + \dots = 0 \quad (8.2.32)$$

Следует отметить, что нулевые значения имеют расходящиеся ряды, связанные с дзета-функцией Римана, составленные из чётных степеней элементов натурального ряда:

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = \frac{(-1)^{2k+1}(2^{2k+1}-1)}{2k+1} B_{2k+1}.$$

Так как $B_{2k+1} = 0$, то

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0. \quad (8.2.33)$$

Можно предположить, что суммы тригонометрических рядов, коэффициенты которых являются члены натурального ряда в нечётных степенях, также определяются через выражения, в которые входят числа Бернулли, как и при суммировании тригонометрических рядов с коэффициентами в нечётной степени.

Выше было рассмотрено суммирование расходящихся тригонометрических рядов с коэффициентами, составляющими элементы натурального ряда в нечётных и чётных степенях, то есть ряды:

$$1 + \cos x + 2^{2k-1} \cos 2x + 3^{2k-1} \cos 3x + 4^{2k-1} \cos 4x + \dots \quad (8.2.34)$$

$$1 + \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots \quad (8.2.35)$$

Было установлено, что расходящиеся ряды (8.2.34) и (8.2.35) суммируются, то есть определяется их значения, соответствующими цепными дробями, которые конечны. Было установлено, что число звеньев N конечных цепных дробей, суммирующих расходящиеся ряды

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (8.2.36)$$

определяется формулой:

$$N = 4(n + 1),$$

где n – показатель степени натуральных чисел, которые входят как коэффициенты тригонометрического ряда.

При этом “чётные” ряды, то есть ряды

$$1 + \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.2.37)$$

имеют единичные значения.

Ряды (8.2.37) без начальной единицы имеют нулевое значение:

$$\cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots = 0, \quad (8.2.38)$$

что позволяет провести параллели между тригонометрическими рядами с дзета-функцией Римана:

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

также имеющих нулевые значения.

Возникает вопрос: будет ли справедлива формула для числа членов звеньев цепной дроби

$$N = 4(n + 1), \quad (8.2.39)$$

которая была установлена для рядов с коэффициентами натуральных чисел справедливой и для рядов, если коэффициенты ни есть элементы натурального ряда? Оказалось, что формула (8.2.39) имеет место и в этих случаях.

В табл. 8.16 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда:

$$1 + 1,5^2 \cos x + 2,5^2 \cos 2x + 3,5^2 \cos 3x + 4,5^2 \cos 4x + \dots \quad (8.2.40)$$

преобразованием ряда (8.2.40) при $x = 0,1$ в соответствующую цепную дробь.

Таблица 8.16

$$1 + 1,5^2 \cos 0,1 + 2,5^2 \cos 0,2 + 3,5^2 \cos 0,3 + 4,5^2 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.41)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	2.238759372	2.238759372	3.238759372
2	6.125416112	-2.736076145	-0.2895513705
3	11.70287199	0.8255329624	-3.488451626
4	18.65148513	-0.7331526577	7.750782463
5	26.5468725	0.192463105	18.2824568
6	34.87042973	-0.495715436	272.521262
7	43.02237303	0.01426453625	205.4131723
8	50.33705975	-1.129066427	-124.6656549
9	56.10029964	-0.01812629211	-164.3329576
10	59.56832922	-0.8897286977	-11972.9327
11	59.98808706	0.0006579559377	-10033.40759
12	56.61839914	-1.001077896	-99.20837502
13	48.75166152	0	

Из третьей колонки табл. 8.16 следует, что число звеньев цепной дроби, соответствующей ряду (8.2.41) определяется формулой (8.2.39):

$$N = 4(2 + 1) = 12.$$

Тем не менее, единичного значения цепная дробь, соответствующая ряду (8.2.41) не имеет, как то имело место для “чётных” рядов с коэффициентами чисел натурального ряда.

В табл. 8.17 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + 1,5^3 \cos x + 2,5^3 \cos 2x + 3,5^3 \cos 3x + 4,5^3 \cos 4x + \dots \quad (8.2.42)$$

при $x = 0,1$ преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь.

Таблица 8.17

$$1 + 1,5^3 \cos 0,1 + 2,5^3 \cos 0,2 + 3,5^3 \cos 0,3 + 4,5^3 \cos 0,4 + \dots \quad (8.2.43)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	3.358139058	3.358139058	4.358139058
2	15.31354028	-4.560126908	0.05673613765
3	40.96005197	1.885366453	-4.785580707
4	83.93168308	-0.8876062644	5.516980065
5	146.0077987	0.4995642887	18.80700307
6	226.6577932	-0.5495668807	-45.89645366
7	322.6677978	0.1524523207	-138.9189956
8	427.8650079	-0.471148856	580.4851273
9	532.9528465	-0.02583541312	473.8787166
10	625.4674568	-1.279710795	1764.025516
11	689.8630012	0.02312818735	2209.739487
12	707.7299892	-0.7479758279	-68063.5022
13	658.1474305	-0.0001379575733	-66576.81527
14	518.166081	-1.162352785	-78855.18599
15	263.4164969	0.02152084707	-81128.39391
16	-131.1679041	-0.8576037311	59925.88332
17	-690.5259616	0	

Из табл. 8.17 следует, что конечная цепная дробь для ряда (8.2.43) имеет 16 звеньев. Это число звеньев устанавливает и формула (8.2.39):

$$N = 4(3 + 1) = 16.$$

В заключение параграфа найдём значения расходящихся тригонометрических рядов, содержащих синусы кратных углов.

В табл. 8.18 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + 4 \sin 4x + \dots \quad (8.2.44)$$

при $x = 0,1$ построением для ряда (8.2.45) соответствующей цепной дроби.

Таблица 8.18

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \sin 0,1 + 2 \sin 0,2 + 3 \sin 0,3 + 4 \sin 0,4 + \dots \quad (8.2.45)$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	0.3973386616	-3.980016661	0.9664990408
3	0.88656062	1.748769854	0.7771209764
4	1.557673369	-0.6051087855	1.374149829
5	2.397127693	0.2714970126	2.213730396
6	3.38785484	-0.4149709198	572.4604217
7	4.509523811	0.000420878154	445.5427975
8	5.738848727	-1.00060804	1
9	7.049942187	0	

Соответствующая цепная дробь, как следует из табл. 8.18, – конечная, имеет 8 звеньев и единичное значение. Из колонки 4 табл. 8.18 следует, что подходящие цепной дроби не “сходятся” к единичному значению. Иной характер – сходящийся – имеют подходящие соответствующих цепных дробей для знакопеременных тригонометрических рядов. В табл. 8.8 уже рассматривался пример суммирования расходящегося знакопеременного ряда

$$1 + \cos 0,1 - 2 \cos 0,2 + 3 \cos 0,3 - 4 \cos 0,4 + \dots$$

“сходящейся” цепной дробью.

В табл. 8.19 показано суммирование при $x = 0,1$ знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2 \sin 2x + 3 \sin 3x - 4 \sin 4x + \dots \quad (8.2.46)$$

Таблица 8.19

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \sin 0,1 - 2 \sin 0,2 + 3 \sin 0,3 - 4 \sin 0,4 + \dots \quad (8.2.47)$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	-0.3973386616	3.980016661	1.020046804
3	0.88656062	-1.748769854	0.9768658177
4	-1.557673369	0.6051087855	0.9977033039
5	2.397127693	-0.2714970126	1.001109068
6	-3.38785484	0.4149709198	1.000000157
7	4.509523811	-0.000420878154	0.9999998425
8	-5.738848727	1.00060804	1
9	7.049942187	0	

Из данных колонки 4 табл. 8.19 следует, что соответствующие цепные дроби для знакопеременных тригонометрических рядов являются “сходящимися”. Тригонометрические ряды “по синусам” для нечётных степеней коэффициентов, представляющих элементы натурального ряда, – имеют единичные значения:

$$1 + 1^{2k-1} \sin x + 2^{2k-1} \sin 2x + 3^{2k-1} \sin 3x + 4^{2k-1} \sin 4x + \dots = 1,$$

или

$$1^{2k-1} \sin x + 2^{2k-1} \sin 2x + 3^{2k-1} \sin 3x + 4^{2k-1} \sin 4x + \dots = 0.$$

Уже отмечалось, что число звеньев N в конечной соответствующей цепной дроби определяется лишь степенью коэффициентов и не зависит от аргумента x .

В девятой главе, где методами цепных дробей подробно изучена функция Вейерштрасса

$$\omega(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

установлено, что число звеньев, соответствующей ряду Вейерштрасса цепной дроби, при фиксированных коэффициентах “ a ” и “ b ” определяется количеством десятичных разрядов неизвестной x .

В табл. 8.20 показаны результаты суммирования знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2 \sin 2x + 3 \sin 3x - 4 \sin 4x + \dots \quad (8.2.48)$$

при $x = 0,11$ преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь.

Таблица 8.20

Суммирование тригонометрического ряда
 $1 + \sin 0,11 - 2 \sin 0,22 + 3 \sin 0,33 - 4 \sin 0,44 + \dots \quad (8.2.49)$
построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.1097783008	0.1097783008	1.109778301
2	-0.4364592462	3.975824392	1.022062334
3	0.9721290852	-1.748516588	0.9745388776
4	-1.70375786	0.6046898638	0.9974681361
5	2.613436145	-0.2720267725	1.001224963
6	-3.678701112	0.415579564	1.000000254
7	4.87294667	-0.000615109296	0.9999997459
8	-6.165911031	1.000889042	1
9	7.524233807	0	

Из табл. 8.19 и табл. 8.20 следует, что число звеньев соответствующих цепных дробей для различных аргументов $x = 0,1$ и $x = 0,11$ одно и то же, и определяется формулой:

$$N = 4(n + 1).$$

Так как $n = 1$, то число звеньев соответствующих цепных дробей равно 8.

В табл. 8.21 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + \sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x + 4^2 \sin 4x + \dots \quad (8.2.50)$$

при $x = 0,1$ построением для ряда (8.2.51) соответствующей цепной дроби.

Таблица 8.21

$$1 + \sin 0,1 + 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 + 4^2 \sin 0,4 + \dots \quad (8.2.51)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	0.7946773232	-7.960033322	0.985656187
3	2.65968186	4.613163112	0.7612218822
4	6.230693477	-0.7285689888	1.179018632
5	11.98563847	0.7553489263	1.957574127
6	20.32712904	-0.4543725232	-1.406803899
7	31.56666667	0.1872702811	-6.942479337
8	45.91078982	-0.3795355573	1377.265453
9	63.44947968	-0.000110170997	1340.299384
10	84.14709848	-1.207157001	1588.597733
11	107.8360906	0.03226735983	1644.761981
12	134.2136284	-0.8282971075	-1998.999166
13	162.8413333	0	

Соответствующая цепная дробь для тригонометрического ряда (8.2.51) конечная, число звеньев которой определяется формулой:

$$N = 4(2 + 1) = 12.$$

Результаты суммирования знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x - 4^2 \sin 4x + \dots \quad (8.2.52)$$

при $x = 0,1$ соответствующей цепной дробью показаны в табл. 8.22.

Таблица 8.22

$$1 + \sin 0,1 - 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 - 4^2 \sin 0,4 + \dots \quad (8.2.53)$$

построением соответствующей цепной дроби

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	-0.7946773232	7.960033322	1.011142081
3	2.65968186	-4.613163112	0.9170174399
4	-6.230693477	0.7285689888	0.9735188727
5	11.98563847	-0.7553489263	0.9979564379
6	-20.32712904	0.4543725232	0.9883214958
7	31.56666667	-0.1872702811	0.9870887076
8	-45.91078982	0.3795355573	0.9874582574
9	63.44947968	0.000110170997	0.9874582289
10	-84.14709848	1.207157001	0.9874582445
11	107.8360906	-0.03226735983	0.9874582447
12	-134.2136284	0.8282971075	0.9874582446
13	162.8413333	0	

Из данных табл. 8.22 следует, что число звеньев соответствующей цепной дроби равно двенадцати. Значения подходящих дробей, как видно из колонки 4 табл. 8.22, “сходятся” к значению знакопеременного ряда (8.2.54)

$$\begin{aligned}
 & 1 + \sin 0,1 - 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 - 4^2 \sin 0,4 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{0,099 \dots}{1} + \frac{7,960 \dots}{1} - \frac{4,613 \dots}{1} + \frac{0,728 \dots}{1} - \dots - \frac{0,032 \dots}{1} + \frac{0,828 \dots}{1} = 0,9874582446 \dots
 \end{aligned} \tag{8.2.54}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что значения знакопеременных тригонометрических рядов с коэффициентами, представляющие степени n элементов натурального ряда, определяются значениями сходящихся цепных дробей. Значения знакопостоянных тригонометрических рядов с коэффициентами, также являющимися степенями элементов натурального ряда, определяются “расходящимися” цепными дробями, “комплексные” значения которых могут быть достаточно точно установлены r/φ -алгоритмом при условии значительного числа подходящих дробей.

8.3. Производящие функции простейших тригонометрических рядов

Остановимся на определении производящих функций простейших тригонометрических рядов. По аналогии с расходящимися рядами, связанными с дзета-функцией Римана, будут рассмотрены соответствующие цепные дроби для тригонометрических рядов вида:

$$\sin^k \varphi + \sin^k 2\varphi + \sin^k 3\varphi + \dots + \sin^k n\varphi + \dots \tag{8.3.1}$$

$$\sin^k \varphi - \sin^k 2\varphi + \sin^k 3\varphi - \sin^k 4\varphi + \dots \tag{8.3.2}$$

$$\sin^k \varphi + \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi + \dots + \sin^k (2n-1)\varphi + \dots \tag{8.3.3}$$

$$\sin^k \varphi - \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi - \sin^k 7\varphi + \dots \tag{8.3.4}$$

$$\cos^k \varphi + \cos^k 2\varphi + \cos^k 5\varphi + \dots + \cos^k n\varphi + \dots \tag{8.3.5}$$

$$\cos^k \varphi - \cos^k 2\varphi + \cos^k 3\varphi - \cos^k 4\varphi + \dots \tag{8.3.6}$$

$$\cos^k \varphi + \cos^k 3\varphi + \cos^k 5\varphi + \dots + \cos^k (2n-1)\varphi + \dots \tag{8.3.7}$$

$$\cos^k \varphi - \cos^k 3\varphi + \cos^k 5\varphi - \cos^k 7\varphi + \dots \quad n=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots \tag{8.3.8}$$

Соответствующие цепные дроби для тригонометрических рядов (8.3.1) – (8.3.8) можно построить по «общей» схеме, если воспользоваться формулами Хейлсманна-Стилтьеса. Для ряда

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots \tag{8.3.9}$$

строится цепная дробь

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_3}{1 - \frac{\omega_4}{1 + \dots + \frac{\omega_{2n-1}}{1 - \frac{\omega_{2n}}{1 + \dots}}}}}} \tag{8.3.10}$$

где коэффициенты ω_i соответствующей ряду (8.3.9) цепной дроби (8.3.10) определяются через отношения определителей Ганкеля, содержащие элементы c_i исходного ряда:

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1}\psi_{n+1}}{\varphi_n\psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1}\psi_n}{\varphi_n\psi_{n+1}}, \tag{8.3.11}$$

φ_n и ψ_n – определители Ганкеля:

$$\phi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (8.3.12)$$

$$\varphi_0 = 1, \psi_1 = 1.$$

Соответствующие цепные дроби (8.3.10), построенные для рядов (8.3.1) – (8.3.8) являются конечными, причём, число звеньев N соответствующих цепных дробей рядам определяются формулой:

$$N = 2(k + 1), \quad (8.3.13)$$

где k – степень членов тригонометрических рядов (8.3.1) – (8.3.8).

Рассмотрим соответствующие цепные дроби для рядов (8.3.1) – (8.3.8), обращая внимание на определители Ганкеля, имеющих нулевое значение, что обуславливает конечность соответствующих цепных дробей.

Запишем тригонометрический ряд:

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi + \dots \quad (8.3.14)$$

Соответствующая цепная дробь для ряда (8.3.14) имеет четыре звена:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1} + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1} \quad (8.3.15)$$

Здесь

$$\omega_0 = c_0 = \sin \varphi$$

$$\omega_1 = c_1 = \sin 2\varphi,$$

$$\omega_2 = \frac{\varphi_0 \psi_2}{\varphi_1 \psi_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi},$$

$$\omega_3 = -\frac{\varphi_2 \psi_1}{\varphi_1 \psi_2} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} \cdot \frac{1}{c_2} = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1 c_2} = \frac{\sin^2 3\varphi - \sin 2\varphi \cdot \sin 4\varphi}{\sin 2\varphi \cdot \sin 3\varphi}.$$

$$\omega_4 = \frac{\varphi_1 \psi_3}{\varphi_2 \psi_2} = \frac{c_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_2} = \frac{c_1 (c_3^2 - c_2 c_4)}{c_2 (c_2^2 - c_1 c_3)} = \frac{\sin 2\varphi (\sin^2 4\varphi - \sin 3\varphi \cdot \sin 4\varphi)}{\sin 3\varphi (\sin^2 3\varphi - \sin \varphi \cdot \sin 4\varphi)}.$$

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} c_2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2\varphi & \sin 3\varphi & \sin 4\varphi \\ \sin 3\varphi & \sin 4\varphi & \sin 5\varphi \\ \sin 4\varphi & \sin 5\varphi & \sin 6\varphi \end{vmatrix} \cdot \sin 3\varphi}{\begin{vmatrix} \sin 2\varphi & \sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \sin 4\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin 3\varphi & \sin 4\varphi \\ \sin 4\varphi & \sin 5\varphi \end{vmatrix}}. \quad (8.3.16)$$

Коэффициент ω_5 соответствующей ряду (8.3.15), цепной дроби равен нулю, так как равен нулю определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} \sin 2\varphi & \sin 3\varphi & \sin 4\varphi \\ \sin 3\varphi & \sin 4\varphi & \sin 5\varphi \\ \sin 4\varphi & \sin 5\varphi & \sin 6\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.3.17)$$

Вычислим определитель (8.3.17) при $\varphi = 1$:

$$\begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 & \sin 4 \\ \sin 3 & \sin 4 & \sin 5 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin 2 \sin 4 \sin 6 + 2 \sin 3 \sin 4 \sin 5 - \sin^3 4 - \sin^2 3 \sin 6 - \sin 2 \sin^2 5 =$$

$$= 0.909297(-0.756902)(-0.27941) + 2 \cdot 0.141120(-0.756802 - 0.958924) -$$

$$(-0.756802)^3 - (-0.141120)^2(-0.279415)^3 - 0.909297(-0.958924)^2 =$$

$$= 0.837227... - 0.837227... = 0.$$

Определим производящую функцию для ряда

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi + \dots \quad (8.3.18)$$

Чтобы определить производящую функцию для ряда, (8.3.18) достаточно «свернуть» полученную соответствующую цепную дробь, имеющую всего четыре звена, подставляя значения коэффициентов c_i , найденные по формулам Хейлсманна – Стильтеса, то есть выражения (8.3.16). Несмотря на то, что соответствующая цепная дробь имеет всего четыре звена, операция «свёртки» цепной дроби, коэффициенты которой определяются формулами (8.3.16), содержащими отношения определителей Ганкеля, представляется весьма громоздкой. Найдём производящую функцию, исходя из построения соответствующей цепной дроби для частного случая ряда при $\varphi = 1$. Введём степенные множители, то есть построим соответствующую цепную дробь для ряда

$$\sin 1 + \sin 2x + \sin 3x^2 + \sin 4x^3 + \dots + \sin nx^{n+1} + \dots \quad (8.3.19)$$

Фактически, вместо тригонометрического ряда рассматриваем степенной ряд, коэффициенты которого являются значениями $\sin n$, $n = 1, 2, \dots$.

Во второй колонке табл. 8.23 приведены коэффициенты соответствующей ряду (8.3.19) цепной дроби.

Таблица 8.23

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin 1 + \sin 2x + \sin 3x^2 + \sin 4x^3 + \dots + \sin nx^n - \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.841470984807897	0.841470984807897
1	0.909297426825682	1.75076841163358
2	0.155196752895817	1.91781323366001
3	5.5180259201594	1.77294722617506
4	6.44343377899987	0.915243860856226
5	0	

Следовательно, соответствующая ряду цепная дробь имеет вид:

$$\sin 1 + \sin 2x + \sin 3x^2 + \sin 4x^3 + \dots + \sin nx^n + \dots$$

$$= 0.841470... + \frac{0.9092...x}{1} - \frac{0.1551...x}{1} + \frac{5.5180...x}{1} - \frac{6.4434...x}{1} = \frac{0.841470984...}{1 - 1.080604612...x + x^2} \quad (8.3.20)$$

Не сложно заметить, что производящую функцию ряда (8.3.20) можно записать в виде:

$$\frac{\sin 1}{1 - 2 \cos 1x + x^2} = \sin 1 + \sin 2x + \sin 3x^2 + \sin 4x^3 + \dots + \sin nx^{n-1} + \dots \quad (8.3.21)$$

При $x = 1$ получим значение тригонометрического ряда

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \dots + \sin n + \dots = \frac{\sin 1}{2(1 - \cos 1)} = 0,9152438608... \quad (8.3.22)$$

Из (8.3.21) можно записать известную производящую функцию:

$$\frac{x \sin \varphi}{1 - 2 \cos \varphi x + x^2} = \sin \varphi x + \sin 2\varphi x^2 + \sin 3\varphi x^3 + \sin 4\varphi x^4 + \dots + \sin n\varphi x^n + \dots \quad (8.3.23)$$

Имеет место также формула::

$$\frac{\sin \varphi}{1 - 2 \cos \varphi x + x^2} = \sin \varphi + \sin 2\varphi x - \sin 3\varphi x^2 + \dots + \sin n\varphi x^{n-1} + \dots \quad (8.3.24)$$

При $x = 1$ получим:

$$\frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \sin 4\varphi + \dots + \sin n\varphi + \dots \quad (8.3.25)$$

Производящие функции (8.3.23) – (8.3.25) – это известные формулы, которые запишем в эквивалентном виде:

$$\frac{x \sin \varphi}{1 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} x + x^2} = \sin \varphi x + \sin 2\varphi x^2 + \sin 3\varphi x^3 + \dots + \sin n\varphi x^n + \dots \quad (8.3.26)$$

$$\frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} x + x^2} = \sin \varphi + \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 + \dots + \sin n\varphi x^{n-1} + \dots \quad (8.3.27)$$

$$\frac{\sin \varphi}{2 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}} = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi + \dots \quad (8.3.28)$$

Дело в том, что при суммировании тригонометрических рядов, будут использоваться, так называемые, обобщённые эллиптические числа, имеющий вид

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}, \dots, \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \dots \quad (8.3.29)$$

Покажем, что производящая функция (8.3.24) действительно имеет место. Выражение (8.3.24) запишем в виде:

$$\frac{\sin \varphi}{1 - 2 \cos \varphi x + x^2} = \sin \varphi (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots). \quad (8.3.30)$$

Найдём коэффициент c_i :

$$\frac{1}{1-2\cos\varphi x+x^2}=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots+c_mx^m+\dots,$$

где

$$c_m=-(a_1c_{m-1}+a_2c_{m-2}), \quad c_0=1. \quad (8.3.31)$$

В данном случае

$$a_1=-2\cos\varphi, \quad a_2=1.$$

По рекуррентной формуле второго порядка (8.3.31) получим:

$$c_0=1,$$

$$c_1=-a_1c_0=2\cos\varphi,$$

$$c_2=-(-2\cos\varphi \cdot 2\cos\varphi + 1)=4\cos^2\varphi - 1 = 3 - 4\sin^2\varphi,$$

$$c_3=-(-2\cos\varphi(3-4\sin^2\varphi) + 2\cos\varphi)=4\cos\varphi - 8\sin^2\varphi\cos\varphi$$

... ..

Подставляя найденные коэффициенты c_i в (8.3.30), запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{1-2\cos\varphi x+x^2} &= \sin\varphi(1+2\cos\varphi x+(3-4\sin^2\varphi)x^2+(4\cos\varphi-8\sin^2\varphi\cos\varphi)x^3+\dots= \\ &= \sin\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi+(3\sin\varphi-4\sin^3\varphi)x^2+(4\sin\varphi\cos\varphi-8\sin^3\varphi\cos\varphi)x^3+\dots \end{aligned} \quad (8.3.32)$$

Так как

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$

$$\sin 4\varphi = \cos\varphi(4\sin\varphi - 8\sin^3\varphi)\dots,$$

... ..

то (8.3.32) можем записать следующим образом:

$$\frac{\sin\varphi}{1-2\cos\varphi x+x^2} = \sin\varphi + \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 + \sin 4\varphi x^3 + \dots$$

Если в (8.3.20) x заменить на $-x$, то получим соответствующую цепную дробь для знакопеременного ряда.

$$\begin{aligned} &\sin 1 - \sin 2x + \sin 3x^2 - \sin 4x^3 + \dots = \\ &= 0,841470\dots - \frac{0,9092\dots x}{1} + \frac{0,1551\dots x}{1} - \frac{5,5180\dots x}{1} + \frac{6,4434\dots x}{1} = \frac{0,841470984\dots}{1+1,080604612\dots x+x^2} \end{aligned} \quad (8.3.33)$$

Производящую функцию (8.3.33) можно записать в виде:

$$\frac{\sin 1}{1+2\cos 1x+x^2} = \sin 1 - \sin 2x + \sin 3x^2 - \sin 4x^3 + \dots \quad (8.3.34)$$

При $x=1$ получим значение тригонометрического ряда

$$\sin 1 - \sin 2 + \sin 3 - \sin 4 + \dots = \frac{\sin 1}{2(1+\cos 1)} = 0,273151\dots \quad (8.3.35)$$

В табл. 8.24 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.3.34).

Таблица 8.24

Коэффициенты цепной, дроби соответствующей ряду

$$\sin 1 - \sin 2x + \sin 3x^2 - \sin 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.841470984807897	0.841470984807897
1	-0.909297426825682	-0,0678264420177852
2	-0.155196752895817	0,0543345731564661
3	-5.5180259201594	-0,100172427306429
4	-6.44343377899987	0,273151244921895
5	0	

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду, имеет четыре звена:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 - \sin 4\varphi x^3 + \dots = \\ = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1}. \end{aligned} \quad (8.3.36)$$

Коэффициенты ω_k конечной цепной дроби (8.3.36) определяются по формулам Хейлсманна – Стильтеса (8.3.11) и (8.3.12). Коэффициент $\omega_5 = 0$, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, определяющую ω_5 , то есть в формулу

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} c_2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin 2\varphi & \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi \\ \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi & \sin 5\varphi \\ -\sin 4\varphi & \sin 5\varphi & -\sin 6\varphi \end{vmatrix} \cdot \sin 3\varphi}{\begin{vmatrix} -\sin 2\varphi & \sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi \\ -\sin 4\varphi & \sin 5\varphi \end{vmatrix}},$$

имеет нулевое значение.

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -\sin 2\varphi & \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi \\ \sin 3\varphi & -\sin 4\varphi & \sin 5\varphi \\ -\sin 4\varphi & \sin 5\varphi & -\sin 6\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.37)$$

В формуле производящей функции (8.3.26), в которой используются обобщённые эллиптические числа, заменим x на $-x$:

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} x + x^2} = \sin \varphi - \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 - \sin 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.38)$$

При $x = 1$ имеет место формула

$$\frac{\sin \varphi}{2 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}} = \sin^2 \varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \sin 4\varphi + \dots \quad (8.3.39)$$

Соответствующая цепная дробь, построенная для тригонометрического ряда, составленного из квадратов синусов кратных углов – конечная и имеет шесть звеньев.

Коэффициенты тригонометрического ряда находятся с использованием рекуррентных соотношений третьего порядка.

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi + \dots + \sin^2 n\varphi + \dots = \\ = \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1} + \frac{\omega_3}{1} - \frac{\omega_4}{1} + \frac{\omega_5}{1} - \frac{\omega_6}{1}. \end{aligned} \quad (8.3.40)$$

Коэффициенты ω_i определяются по формулам Хейлсманна – Стильеса (8.3.11) и (8.3.12).

Для компактной записи тригонометрический ряд (8.3.40) запишем в виде

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots,$$

где

$$c_0 = \sin^2 \varphi, \quad c_1 = \sin^2 2\varphi, \quad c_2 = \sin^2 3\varphi, \dots$$

Запишем коэффициенты ω_i через отношение определителей Ганкеля, элементами которых являются члены тригонометрического ряда (8.3.40):

$$\begin{aligned} \omega_0 &= c_0 = \sin^2 \varphi, \\ \omega_1 &= c_1 = \sin^2 2\varphi, \\ \omega_2 &= \frac{\varphi_0 \cdot \psi_2}{\varphi_1 \cdot \psi_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin^2 3\varphi}{\sin^2 2\varphi} \\ \omega_3 &= -\frac{\varphi_2 \psi_1}{\varphi_1 \psi_2} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1} \cdot \frac{1}{c_2} = -\frac{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \end{vmatrix}}{\sin^2 2\varphi \cdot \sin^2 3\varphi}. \\ \omega_4 &= \frac{\varphi_1 \psi_3}{\varphi_2 \psi_2} = \frac{c_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_2} = \frac{\sin^2 2\varphi \begin{vmatrix} \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \end{vmatrix} \cdot \sin^2 3\varphi}. \\ \omega_5 &= -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} c_2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi \end{vmatrix} \sin^2 3\varphi}{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \end{vmatrix}}. \\ \omega_6 &= \frac{\varphi_2 \psi_4}{\varphi_3 \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi \\ \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi & \sin^2 7\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \end{vmatrix}}. \quad (8.3.41)$$

Соответствующая ряду (8.3.40) цепная дробь, конечная и имеет шесть звеньев. Таким образом,

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \cdot \psi_3}{\varphi_3 \cdot \psi_5} = 0.$$

Определитель Ганкеля φ_4 равен нулю, так как $\psi_3 \neq 0$, ибо этот определитель использовался при определении коэффициента ω_6 .

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \\ \sin^2 3\varphi & \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi \\ \sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi & \sin^2 7\varphi \\ \sin^2 5\varphi & \sin^2 6\varphi & \sin^2 7\varphi & \sin^2 8\varphi \end{vmatrix}. \quad (8.3.42)$$

Как уже отмечалось выше, чтобы определить производящую функцию ряда достаточно «свернуть» конечную цепную дробь, то есть найти рациональную функцию $P_n(x)/Q_n(x)$. Соответствующая ряду (8.3.40) цепная дробь имеет шесть звеньев и после «свёртки» получим производящую функцию третьего порядка. Выполнить «свёртку» цепной дроби (8.3.40), элементы которой ω_k определяются формулами Хейлсманна – Стильеса (8.3.41), – достаточно громоздкая процедура. Найдём производящую функцию для частного случая тригонометрического ряда (8.3.40) при $\varphi = 1$. Вводя степенные множители, запишем ряд:

$$\sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 nx^{n-1} + \dots \quad (8.3.43)$$

Во второй колонке табл. 8.25 приведены значения коэффициентов ω_k соответствующей ряду (8.3.43) цепной дроби.

Таблица 8.25

Коэффициенты цепной дроби, соответствующие ряду

$$\sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 nx^{n-1} + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.708073418273571	0.70807341827357
1	0.826821810431806	1.53489522870538
2	0.0240860321094052	1.55530159374374
3	-28.7358506451436	1.53417783309651
4	-27.177222329138	1.08137327383663
5	-0.112662405578443	1.83057982595692
6	-1.52767042788782	∞
7	0	

Соответствующая ряду (8.3.43) цепная дробь – конечная и содержит шесть звеньев:

$$\begin{aligned} & \sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 nx^n + \dots = \\ & = 0,708073\dots + \frac{0,826821\dots x}{1} - \frac{0,024086\dots x}{1} - \frac{28,735851\dots x}{1} + \frac{27,177222\dots x}{1} - \\ & - \frac{0,112662\dots x}{1} + \frac{1,527670\dots x}{1} = \frac{0,708073 + 0,708073x\dots}{1 - 0,167706x + 0,167706x^2 - x^3}. \end{aligned} \quad (8.3.44)$$

Рациональная функция (8.3.44) – это производящая функция тригонометрического ряда (8.3.43):

$$\frac{0,708073 + 0,708073x\dots}{1 - 0,167706x + 0,167706x^2 - x^3} = \sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 nx^n + \dots \quad (8.3.45)$$

Если $x = 1$, то из (8.3.45) можем записать:

$$\sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 n + \dots = \infty. \quad (8.3.46)$$

Эту же бесконечно большую величину даёт вычисление цепной дроби (8.3.43) при $x = 1$, что можно видеть в третьей колонке табл. 8.25.

При помощи производящей функции (8.3.45) найдём несколько первых коэффициентов тригонометрического ряда. Определим предварительно коэффициенты ряда, порождающие производящей функцией третьего порядка, которая имеет вид:

$$\frac{1}{1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots, \quad (8.3.47)$$

где

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + a_3c_{m-3}), \quad c_0 = 1. \quad (8.3.48)$$

В данном случае имеем:

$$\frac{1}{1 - 0,167769x + 0,167769x^2 - x^3} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + \dots. \quad (8.3.49)$$

В рекуррентной формуле третьего порядка (8.3.48) надо принять значения коэффициентов

$$a_1 = -0,167706, \quad a_2 = 0,167706, \quad a_3 = -1.$$

Используя формулы (8.3.47) – (8.3.49) определим несколько первых коэффициентов ряда (8.3.49)

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -a_1c_0 - (-0,167706 \cdot 1) = 0,167706, \\ c_2 &= -(a_1c_1 + a_2c_0) = -(-0,167706 \cdot 0,167706 + 0,167706 \cdot 1) = -0,139622 \\ c_3 &= -(a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0) = -(-0,167706 \cdot (-0,139622) + 0,167706 \cdot 0,167706 - 1) = \\ &= 0,023424 + 0,028146 - 1 = 0,94843. \end{aligned}$$

Производящую функцию (8.3.45) можно записать следующим образом:

$$\frac{b_0 + b_1x}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3} = (b_0 + b_1x)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^{m-1} + \dots),$$

где

$$b_0 = 0,708073\dots \quad b_1 = 0,708073\dots$$

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 0,167706 \quad c_2 = -0,139622, \quad c_3 = 0,948430. \quad (8.3.50)$$

Запишем правую часть выражения (8.3.45) в виде

$$\frac{b_0 + b_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} = c'_0 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \dots + c'_m x^{m-1} + \dots$$

Определим c'_i :

$$c'_0 = b_0 = 0,708073\dots = \sin^2 1.$$

$$c'_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0,708073 \cdot 0,167706 + 0,708073 = 0,826821\dots = \sin^2 2.$$

$$\begin{aligned} c'_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 = 0,708073 \cdot (-0,139122) + 0,708073 \cdot 0,167706 = \\ &= -0,098508 + 0,118793 = 0,019915 = \sin^2 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'_3 &= b_0 c_3 + b_1 c_2 = 0,708073 \cdot 0,948420 + 0,708073 \cdot (-0,139122) = \\ &= 0,671551 - 0,098863 = 0,572749\dots = \sin^2 4. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать, что производящая функция (8.3.45) действительно порождает тригонометрический ряд

$$\sin^2 1 + \sin^2 2 + \sin^2 3 + \sin^2 4 + \dots + \sin^2 n + \dots$$

Несложно записать, что производящую функцию (8.3.45) можно записать в виде:

$$\frac{\sin^2 1 + \sin^2 1x\dots}{1 - \frac{\sin 3}{\sin 1} \cdot x + \frac{\sin 3}{\sin 1} x^2 - x^3} = \sin^2 1 + \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 + \dots + \sin^2 nx^n + \dots \quad (8.3.51)$$

Выполним проверку формулы (8.3.51). Предварительно, запишем значения синусов кратных углов:

$$\begin{aligned} \sin 1 &= 0,841470\dots, & \sin 3 &= 0,141120\dots, \\ \sin^2 1 &= 0,708071\dots, & \sin 3/\sin 1 &= 0,167706\dots \end{aligned} \quad (8.3.52)$$

Сравнивая коэффициенты производящей функции (8.3.45) с коэффициентами заключаем, что левая часть формулы (8.3.51) верна.

Теперь запишем производящую функцию для произвольного угла φ :

$$\frac{\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi x}{1 - \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} x^2 - x^3} = \sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi x + \sin^2 3\varphi x^2 + \dots + \sin^2 n\varphi x^n + \dots \quad (8.3.53)$$

При $\varphi = 1$ формула (8.3.53) обращается в уже установленную формулу (8.3.51).

Определим при помощи производящей функции первые два коэффициента тригонометрического ряда (8.3.53) для $\varphi = 5$.

Запишем значения синусов углов:

$$\begin{aligned} \sin 5 &= -0,958924\dots & \sin 10 &= -0,54402\dots \\ \sin^2 5 &= 0,919535\dots & \sin^2 10 &= 0,295958\dots \\ \sin 15 &= 0,650287\dots & \sin 15/\sin 5 &= -0,678142\dots \end{aligned} \quad (8.3.54)$$

$$\frac{\sin^2 5 + \sin^2 5x}{1 - \frac{\sin 15}{\sin 5} x + \frac{\sin 15}{\sin 5} x^2 - x^3} = \sin^2 5 + \sin^2 10x + \sin^2 15x^2 + \dots \quad (8.3.55)$$

Предварительно запишем «каноническую» производящую функцию:

$$\frac{1}{1 - \frac{\sin 15}{\sin 5}x + \frac{\sin 15}{\sin 5}x^2 - x^3} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + a_3c_{m-3}), \quad c_0 = 1.$$

$$a_1 = -\frac{\sin 15}{\sin 5}, \quad a_2 = -\frac{\sin 15}{\sin 5}, \quad a_3 = -1.$$

$$\frac{\sin^2 5 + \sin^2 5x}{1 - \frac{\sin 15}{\sin 5}x + \frac{\sin 15}{\sin 5}x^2 - x^3} = (\sin^2 5 + \sin^2 5x) \cdot \left(1 + \frac{\sin 15}{\sin 5}x + c_2x^2 + \dots\right)$$

Первый коэффициент ряда (8.3.55) определяется непосредственно. Второй коэффициент ряда (8.3.55) равный $\sin^2 10$, должен определяться выражением:

$$c_2 = \sin^2 5 \cdot \frac{\sin 15}{\sin 5} + \sin^2 5. \quad (8.3.56)$$

Вычислим значение коэффициента c_2 :

$$c_2 = 0,919535 \cdot (-0,678142 + 1) = 0,295960 \dots$$

Это же значение имеет и коэффициент $\sin^2 10$ ряда (8.3.55):

$$\sin^2 10 = 0,295958 \dots$$

Таким образом, производящая функция второго порядка (8.3.53) в самом деле, порождает тригонометрический ряд, состоящий из квадратов синусов кратных углов.

Определения производящей функции по имеющейся конечной цепной дроби несложно осуществить в автоматическом режиме, то есть, запрограммировав «свёртку» цепной дроби для получения рациональной функции. В дальнейшем производящие функции тригонометрических рядов будем представлять в основном в промежуточной форме, ограничиваясь получением соответствующей цепной дроби.

Если в (8.3.44) x заменить на $-x$, то получим

$$\begin{aligned} & \sin^2 1 - \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 - \sin^2 4x^3 + \dots = \\ & = 0,708073 \dots - \frac{0,826821 \dots x}{1} + \frac{0,024086 \dots x}{1} + \frac{28,735851 \dots x}{1} - \frac{27,177222 \dots x}{1} + \\ & + \frac{0,112662 \dots x}{1} - \frac{1,527670 \dots x}{1} = \frac{0,708073 - 0,708073x \dots}{1 + 0,167706x + 0,167706x^2 + x^3} = \\ & = \frac{\sin^2 1 - \sin^2 1x}{1 + \frac{\sin 3}{\sin 1} \cdot x + \frac{\sin 3}{\sin 1} x^2 + x^3}. \end{aligned} \quad (8.3.57)$$

При $x = 1$ из (8.3.47) можно записать значение знакопеременного расходящегося ряда:

$$\sin^2 1 - \sin^2 2 + \sin^2 3 - \sin^2 4 + \dots = 0. \quad (8.3.58)$$

В табл. 8.26 приведены значения коэффициентов соответствующей ряду (8.3.57) цепной дроби, а также даны значения подходящих дробей при $x = 1$. Как видно из данных приведённых в третьей колонке табл. 8.26, цепная дробь имеет нулевое значение. Нулевое значение имеет и ряд (8.3.58), который суммирует соответствующая цепная дробь.

Таблица 8.26

Коэффициенты цепной дроби соответствующие ряду

$$\sin^2 1 - \sin^2 2x + \sin^2 3x^2 - \sin^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.708073418273571	0.708073418273571
1	-0.826821810431806	-0.118748392158235
2	-0.0240860321094052	-0.0993019237460093
3	28.7358506451436	-0.118079208722437
4	27.177222329138	-0.389123082095481
5	0.112662406678443	-0.217039812206997
6	1.52767042788782	0
7	0	

Седьмой коэффициент соответствующей ряду (8.3.58) цепной дроби равен нулю, что является следствием равенства нулю определителя Ганкеля четвертого порядка, входящего в формулу определения коэффициентов ω_7 .

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -\sin^2 2\varphi & \sin^2 3\varphi & -\sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi \\ \sin^2 3\varphi & -\sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & -\sin^2 6\varphi \\ -\sin^2 4\varphi & \sin^2 5\varphi & -\sin^2 6\varphi & \sin^2 7\varphi \\ \sin^2 5\varphi & -\sin^2 6\varphi & \sin^2 7\varphi & -\sin^2 8\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.59)$$

Учитывая (8.3.57), запишем производящую функцию общего вида:

$$\frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi x}{1 + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} x^2 + x^3} = \sin^2 \varphi - \sin^2 2\varphi x + \sin^2 3\varphi x^2 - \sin^2 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.60)$$

Полагая $x = 1$, определим значение тригонометрического ряда:

$$\sin^2 \varphi - \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi - \sin^2 4\varphi + \dots = 0. \quad (8.3.61)$$

Проведём сравнение производящих формул для расходящихся рядов, включающих степени натуральных чисел, приведённых в пятой главе, и производящих функций, связанных с тригонометрическими рядами:

$$\frac{1}{1 + 2x + x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (8.3.62)$$

$$\frac{\sin \varphi}{1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} x + x^2} = \sin \varphi - \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 - \sin 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.63)$$

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad (8.3.64)$$

$$\frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \varphi} x + x^2} = \sin \varphi + \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 + \sin 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.65)$$

$$\frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \dots \quad (8.3.66)$$

$$\frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi x}{1 + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x^2 + x^3} = \sin^2 \varphi - \sin^2 2\varphi x + \sin^2 3\varphi x^2 - \sin^2 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.67)$$

$$\frac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3} = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + 5^2x^4 + \dots \quad (8.3.68)$$

$$\frac{\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi x}{1 - \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x^2 - x^3} = \sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi x + \sin^2 3\varphi x^2 + \sin^2 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.3.69)$$

Можно обратить внимание, что в производящих функциях тригонометрических рядов вместо чисел натурального ряда 1, 2, 3 используются обобщённые эллиптические числа:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}.$$

Определим производящую функцию для ряда

$$\sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x^3 + \dots \quad (8.3.70)$$

Во второй колонке табл. 8.27 приведены коэффициенты соответствующей ряду (8.3.70) цепной дроби. В третьей колонке табл. 8.27 даны значения подходящих дробей при $x = 1$.

Таблица 8.27

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.595823236590956	0.595823236590956
1	-0.751826944668993	-0.156003708078037
2	-0.00373807397352406	-0.153203789645795
3	-154.2383653354	-0.156022048480495
4	-156.265094414242	-0.0337285711998861
5	-0.0223718822041291	-0.0932565025533577
6	2.13162542183973	0.599350734745633
7	0.0272675462451923	0.882233242527499
8	0.80311777648112	-1.557814059705
9	0	

Соответствующая ряду (8.3.70) цепная дробь содержит 8 звеньев.

$$\begin{aligned} & \sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x^3 + \dots = \\ & = 0,5958\dots - \frac{0,7518\dots x}{1} + \frac{0,0037\dots x}{1} - \frac{154,23\dots x}{1} + \frac{156,2\dots x}{1} - \\ & - \frac{0,0223\dots x}{1} - \frac{2,1316\dots x}{1} + \frac{0,0272\dots x}{1} - \frac{0,8031\dots x}{1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{0.595823... - 1.287699...x + 0.595823...x^2}{1 - 0.899381...x - 0.139579...x^2 - 0.899381x^3 + x^4}. \quad (8.3.71)$$

Таким образом, рациональное функция (8.3.71) – это производящая функция ряда (8.3.70):

$$\begin{aligned} & \frac{0.595823... - 1.287699...x + 0.595823...x^2}{1 - 0.899381...x - 0.139579...x^2 - 0.899381x^3 + x^4} = \\ & = \sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x^3 + \dots \end{aligned} \quad (8.3.72)$$

Найдём, используя производящую функцию (8.3.72), несколько первых коэффициентов ряда (8.3.70). Предварительно определим коэффициенты «промежуточно-го» ряда, образованного производящей функцией вида:

$$\frac{1}{1 - 0.899381...x - 0.139579...x^2 - 0.899381x^3 + x^4} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Известно, что производящая функция канонической формы порождает ряд

$$\frac{1}{1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots,$$

где

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + a_3c_{m-3} + a_4c_{m-4}), \quad c_0 = 1. \quad (8.3.73)$$

В данном случае:

$$a_1 = -0.899381, \quad a_2 = -0.139579, \quad a_3 = -0.899381, \quad a_4 = 1.$$

Выполняя вычисления по формуле (8.3.73), получим:

$$c_1 = -(a_1c_0) = 0.899381,$$

$$c_2 = -(a_1c_1 + a_2c_0) = -(-0.899381 \cdot 0.899381 - 0.139579) = 0.948477. \quad (8.3.74)$$

Можно записать из (8.3.72) и (8.3.74):

$$(0.595823 - 1.287699x + 0.595823x^2)(1 + 0.899381x + 0.948477 + \dots) \quad (8.3.75)$$

Приведём значения синусов кратных углов:

$$\sin^3 1 = 0.595823...,$$

$$\sin^3 2 = 0.751826...,$$

$$\sin^3 3 = 0.002810... \quad (8.3.76)$$

Выполняя вычисления выражения (8.3.75), получим:

$$0.595823 \cdot 1 = 0.595823 = \sin^3 1,$$

$$0.595823 \cdot 0.899381 - 1.287699 = -0.751826 = -\sin^3 2.$$

$$0.595823 \cdot 0.948477 - 1.287699 \cdot 0.899381 + 0.595823 = 0.002810 = \sin^3 3. \quad (8.3.77)$$

Сравнивая записи (8.3.76) и (8.3.77), можно заключить, что производящая функции (8.3.72) действительно порождает ряд

$$\sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x^3 + \dots$$

Запишем значения тригонометрических функций при $\varphi = 1$:

$$\sin^3 1 = 0.595823..., \quad \frac{\sin 4}{\sin 1} = -0.899381...$$

Следовательно, производящая функция (8.3.72) можно записать в виде:

$$\frac{\sin^3 1 - 1.287699...x + \sin^3 1 \cdot x^2}{1 + \frac{\sin 4}{\sin 1}x - 0.139579...x^2 + \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + x^4} = \sin^3 1 - \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 - \sin^3 4x + \dots \quad (8.3.78)$$

Выше уже приводились производящие функции, полученные для расходящихся рядов:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots = \frac{1}{1 + 2x + x^2}$$

$$\sin \varphi - \sin 2\varphi x + \sin 3\varphi x^2 - \sin 4\varphi x^3 + \dots = \frac{\sin \varphi}{1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}x + x^2}.$$

$$1 - 2^2 x + 3^2 x^2 - 4^2 x^3 + 5^2 x^4 - \dots = \frac{1 - x}{1 + 3x + 3x^2 + x^3}$$

$$\sin^2 \varphi - \sin^2 2\varphi x + \sin^2 3\varphi x^2 - \sin^2 4\varphi x^3 + \dots = \frac{\sin^2 1 - \sin^2 1x}{1 + \frac{\sin 3}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 + x^3}.$$

$$1 - 2^3 x + 3^3 x^2 - 4^3 x^3 + 5^3 x^4 - \dots = \frac{1 - 4x + x^2}{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4}$$

Для рядов с синусами кратных углов в третьей степени получить производящую функцию заменой натуральных чисел на обобщённые эллиптические числа, как то имело место в рассмотренных выше примерах, не удаётся. Коэффициенты, занимающее среднее положение в числителе и знаменателе производящей функции (8.3.78), равны, соответственно:

$$c_1 = -1.287699..., \quad c_1 = -0.139579...,$$

в то время, как значения обобщённых эллиптических чисел, которые должны были бы занимать эти позиции, имеют другие значения:

$$\frac{\sin 4}{\sin 1} = -0.899381..., \quad \frac{\sin 6}{\sin 1} = -0.332056...,$$

Полагая в (8.3.72) $x = 1$, получим значение ряда (8.3.70):

$$\frac{0.595823 - 1.287699 + 0.595823}{1 - 0.899381 - 0.139579 - 0.899381 + 1} = \frac{-0.096053}{0.061659} = -1.557814...$$

Таким образом, установлена сумма расходящегося ряда

$$\sin^3 1 - \sin^3 2 + \sin^3 3 - \sin^3 4 + \dots = -1.557814059705... \quad (8.3.79)$$

Это значение ряда, определённое через производящую функцию (8.3.72) совпало со значением соответствующей цепной дроби (8.3.71) при $x = 1$, которое приведено в третьей колонке табл. 8.27.

$$\begin{aligned} & \sin^3 1 - \sin^3 2 + \sin^3 3 - \sin^3 4 + \dots = \\ & = 0.5958... - \frac{0.7518...}{1} + \frac{0.0037...}{1} - \frac{154.2383...}{1} + \frac{156.2650...}{1} - \\ & - \frac{0.0223...}{1} - \frac{2.1316...}{1} + \frac{0.0272...}{1} - \frac{0.8031...}{1} = -1.557814059705. \end{aligned}$$

Как следует из табл. 8.27, девятый коэффициент соответствующей ряду равен нулю, то есть:

$$\omega_9 = \frac{\varphi_5 \cdot \psi_4}{\varphi_4 \cdot \psi_5} = 0,$$

что обусловлено равенством нулю определителя Ганкеля пятого порядка:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -\sin^3 2\varphi & \sin^3 3\varphi & -\sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & -\sin^3 6\varphi \\ \sin^3 3\varphi & -\sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & -\sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi \\ -\sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & -\sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & -\sin^3 8\varphi \\ \sin^3 5\varphi & -\sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & -\sin^3 8\varphi & \sin^3 9\varphi \\ -\sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & -\sin^3 8\varphi & \sin^3 9\varphi & -\sin^3 10\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.80)$$

Если в (8.3.71) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & \sin^3 1 + \sin^3 2x + \sin^3 3x + \sin^3 4x + \dots = \\ & = 0,5958\dots + \frac{0,7518\dots}{1} - \frac{0,0037\dots}{1} + \frac{154,2383\dots}{1} - \frac{156,2650\dots}{1} + \\ & + \frac{0,0223\dots x}{1} + \frac{2,1316\dots x}{1} - \frac{0,0272\dots x}{1} + \frac{0,8031\dots x}{1} = \\ & = \frac{0,595823\dots + 1,287699\dots x + 0,595823\dots x^2}{1 + 0,899381\dots x - 0,139579\dots x^2 + 0,899381\dots x^3 + x^4} \end{aligned} \quad (8.3.81)$$

Производящую функцию (8.3.81) можно записать также в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^3 1 + 1,287699\dots x + \sin^3 1x^2}{1 - \frac{\sin 4}{\sin} x - 0,139579\dots x^2 - \frac{\sin 4}{\sin 1} x^3 + x^4} = \\ & = \sin^3 1 + \sin^3 2x + \sin^3 3x + \sin^3 4x + \dots \end{aligned} \quad (8.3.82)$$

Полагая в (8.3.82) $x = 1$, определим значение ряда:

$$\begin{aligned} & \sin^3 1 + \sin^3 2 + \sin^3 3 + \sin^3 4 + \dots = \\ & \frac{0,595823\dots + 1,287699\dots + 0,595823\dots}{1 + 0,899381\dots - 0,139579\dots + 0,899381\dots} = \frac{2,479345\dots}{3,659183\dots} = 0,6775685401\dots \end{aligned} \quad (8.3.83)$$

Результат суммирования ряда (8.3.82) через производящую функцию совпадает с результатом вычисления соответствующей ряду (8.3.82) цепной дроби.

Если в (8.3.81) $x = 1$, то получим цепную дробь:

$$\begin{aligned} & \sin^3 1 + \sin^3 2 + \sin^3 3 + \sin^3 4 + \dots = \\ & = 0,5958\dots + \frac{0,7518\dots}{1} - \frac{0,0037\dots}{1} + \frac{154,2383\dots}{1} - \frac{156,2650\dots}{1} + \\ & + \frac{0,0223\dots}{1} - \frac{2,1316\dots}{1} + \frac{0,0272\dots}{1} - \frac{0,8031\dots}{1} = 0,677568540104338\dots \end{aligned} \quad (8.3.84)$$

Во второй колонке табл. 8.28 приведены коэффициенты соответствующей ряду (8.3.83) цепной дроби. В третьей колонке табл. 8.28 даны значения подходящих дробей при $x = 1$.

Таким образом, установлена сумма расходящегося ряда:

$$\sin^3 1 + \sin^3 2 + \sin^3 3 + \sin^3 4 + \dots = 0,677568540104338\dots \quad (8.3.85)$$

Таблица 8.28

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^3 1 + \sin^3 2x + \sin^3 3x^2 + \sin^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.595823236590956	0.595823236590956
1	0.751826944668993	1,34765018125995
2	0.00373807397352406	1,35047111083785
3	154.2383653354	1,34766828536973
4	156.265094414242	2,32528585419432
5	0.0223718822041291	1,20349555538276
6	-2.13162542183973	0,689168333620527
7	-0.0272675462451923	0,667866703660333
8	-0.80311777648112	0,677568540104338
9	0	

Цепная дробь (8.3.81) конечная и содержит 8 звеньев, так как определитель Ганкеля пятого порядка равен нулю:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} \sin^3 2\varphi & \sin^3 3\varphi & \sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & \sin^3 6\varphi \\ \sin^3 3\varphi & \sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & \sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi \\ \sin^3 4\varphi & \sin^3 5\varphi & \sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & \sin^3 8\varphi \\ \sin^3 5\varphi & \sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & \sin^3 8\varphi & \sin^3 9\varphi \\ \sin^3 6\varphi & \sin^3 7\varphi & \sin^3 8\varphi & \sin^3 9\varphi & \sin^3 10\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.86)$$

Продолжим определения соответствующих цепных дробей для рядов, включающих степени синусов кратных углов.

Установим соответствующую цепную дробь для ряда

$$\sin^4 1 - \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 - \sin^4 4x^3 + \dots \quad (8.3.87)$$

Коэффициенты соответствующей цепной дроби для ряда (8.3.87) приведены в табл. 8.29

Таблица 8.29

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^4 1 - \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 - \sin^4 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.50136796566562	0.50136796566562
1	-0.683634306205729	-0.18226634054011
2	-0.00058013694277529	-0.18186996897352
3	827.133377542662	-0.182265861630251
4	824.556986419475	-0.287675989359344
5	0.00861317188222339	-0.214189452364772
6	2.48519957132947	0.00941437150264578
7	-0.0111081313492721	0.0199280747292845
8	-0.370449769479764	0.0169898056829899
9	-3.86999927496872	0.0215709894104761
10	-2.27069186133379	0
11	0	

$$\sin^4 1 - \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 - \sin^4 4x^3 + \dots =$$

$$= 0,5013... - \frac{0.6836...x}{1} + \frac{0.00058...x}{1} + \frac{827.13...x}{1} - \frac{824.55...x}{1} + \frac{0.0086...x}{1} - \frac{2.4851...x}{1} - \frac{0.011...x}{1} + \frac{0.3704...x}{1} + \frac{3.8699...x}{1} - \frac{2.2746...x}{1}. \quad (8.3.88)$$

Как следует из табл. 8.29, при $x = 1$ значение ряда (8.3.87) имеет нулевое значение:

$$\sin^4 1 - \sin^4 2 + \sin^4 3 - \sin^4 4 + \dots = 0. \quad (8.3.89)$$

Цепная дробь (8.3.88) конечная и имеет 10 звеньев,

$$\omega_{11} = -\frac{\varphi_6 \cdot \psi_5}{\varphi_5 \cdot \psi_4} = 0,$$

что следует из нулевого значения определителя Ганкеля шестого порядка:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} -\sin^4 2\varphi & \sin^4 3\varphi & -\sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & -\sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi \\ \sin^4 3\varphi & -\sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & -\sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & -\sin^4 8\varphi \\ -\sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & -\sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & -\sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi \\ \sin^4 5\varphi & -\sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & -\sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & -\sin^4 10\varphi \\ -\sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & -\sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & -\sin^4 10\varphi & \sin^4 11\varphi \\ \sin^4 7\varphi & -\sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & -\sin^4 10\varphi & \sin^4 11\varphi & -\sin^4 12\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.90)$$

Установим цепную дробь, соответствующую знакоположительному ряду

$$\sin^4 1 + \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 + \sin^4 4x^3 + \dots \quad (8.3.91)$$

В табл. 8.30 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби и значение этой цепной дроби.

Таблица 8.30

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^4 1 + \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 + \sin^4 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.50136796566562	0.50136796566562
1	-0.683634306205729	1.18500227187135
2	-0.0005801369427752	0.18539910360448
3	827.133377542662	1.18500179180209
4	824.556986419475	1.02570055680075
5	0.0086131718822233	1.24970462413134
6	2.48519957132947	-22.7920404035982
7	-0.0111081313492721	134.005673084192
8	-0.370449769479764	28.6915812325557
9	-3.86999927496872	87.6259358574174
10	-2.27069186133379	∞
11	0	

$$\sin^4 1 + \sin^4 2x + \sin^4 3x^2 + \sin^4 4x^3 + \dots$$

$$= 0,5013... + \frac{0.6836...x}{1} - \frac{0.00058...x}{1} - \frac{827.13...x}{1} + \frac{824.55...x}{1} - \frac{0.0086...x}{1} + \frac{2.4851...x}{1} + \frac{0.011...x}{1} - \frac{0.3704...x}{1} - \frac{3.8699...x}{1} + \frac{2.2746...x}{1}. \quad (8.3.92)$$

Как следует из таблицы 8.30, при $x = 1$ можно записать:

$$\sin^4 1 + \sin^4 2 + \sin^4 3 + \sin^4 4 + \dots = \infty.$$

Цепная дробь (8.3.92) конечная и имеет 10 звеньев, так как

$$\omega_{11} = -\frac{\varphi_6 \cdot \psi_5}{\varphi_5 \cdot \psi_4} = 0. \quad (8.3.93)$$

коэффициент ω_{11} равен нулю вследствие равенства нулю определителя Ганкеля шестого порядка:

$$\varphi_6 = \begin{vmatrix} \sin^4 2\varphi & \sin^4 3\varphi & \sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & \sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi \\ \sin^4 3\varphi & \sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & \sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & \sin^4 8\varphi \\ \sin^4 4\varphi & \sin^4 5\varphi & \sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & \sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi \\ \sin^4 5\varphi & \sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & \sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & \sin^4 10\varphi \\ \sin^4 6\varphi & \sin^4 7\varphi & \sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & \sin^4 10\varphi & \sin^4 11\varphi \\ \sin^4 7\varphi & \sin^4 8\varphi & \sin^4 9\varphi & \sin^4 10\varphi & \sin^4 11\varphi & \sin^4 12\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.94)$$

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых синусы кратных углов в чётной и не чётной степени, то есть для рядов

$$\sin^{2k} \varphi - \sin^{2k} 2\varphi x + \sin^{2k} 3\varphi x^2 - \sin^{2k} 4\varphi x^3 + \dots$$

$$\sin^{2k+1} \varphi - \sin^{2k+1} 2\varphi x + \sin^{2k+1} 3\varphi x^2 - \sin^{2k+1} 4\varphi x^3 + \dots,$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -\sin^{2k-2} 2\varphi & \sin^{2k-2} 3\varphi & -\sin^{2k-2} 4\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} 2k\varphi & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi \\ \sin^{2k-2} 3\varphi & -\sin^{2k-2} 4\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (2k+2)\varphi \\ -\sin^{2k-2} 4\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & -\sin^{2k-2} 6\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sin^{2k-2} 2k\varphi & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} (4k-2)\varphi & \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi \\ \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+3)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & -\sin^{2k-2} (4k)\varphi \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -\sin^{2k-1} 2\varphi & \sin^{2k-1} 3\varphi & -\sin^{2k-1} 4\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (2k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (2k+2)\varphi \\ \sin^{2k-1} 3\varphi & -\sin^{2k-1} 4\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & \dots & -\sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi \\ -\sin^{2k-1} 4\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & -\sin^{2k-1} 6\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & -\sin^{2k-1} (2k+4)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-1} (2k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & \dots & -\sin^{2k-1} 4k\varphi & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi \\ -\sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & -\sin^{2k-1} (2k+4)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (4k+2)\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Аналогично устанавливаются конечные цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых синусы кратных углов в чётной и нечётной степени:

$$\sin^{2k} \varphi + \sin^{2k} 2\varphi x + \sin^{2k} 3\varphi x^2 + \sin^{2k} 4\varphi x^3 + \dots,$$

$$\sin^{2k+1} \varphi + \sin^{2k+1} 2\varphi x + \sin^{2k+1} 3\varphi x^2 + \sin^{2k+1} 4\varphi x^3 + \dots$$

$$\varphi'_{2k} = \left| \begin{array}{cccccc} \sin^{2k-2} 2\varphi & \sin^{2k-2} 3\varphi & \sin^{2k-2} 4\varphi & \dots & \sin^{2k-2} 2k\varphi & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi \\ \sin^{2k-2} 3\varphi & \sin^{2k-2} 4\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+2)\varphi \\ \sin^{2k-2} 4\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & \sin^{2k-2} 6\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-2} 2k\varphi & \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k-2)\varphi & \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi \\ \sin^{2k-2} (2k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-2} (2k+3)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & \sin^{2k-2} 4k\varphi \end{array} \right| = 0$$

$$\varphi'_{2k+1} = \left| \begin{array}{cccccc} \sin^{2k-1} 2\varphi & \sin^{2k-1} 3\varphi & \sin^{2k-1} 4\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (2k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+2)\varphi \\ \sin^{2k-1} 3\varphi & \sin^{2k-1} 4\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi \\ \sin^{2k-1} 4\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & \sin^{2k-1} 6\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+4)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-1} (2k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} 4k\varphi & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi \\ \sin^{2k-1} (2k+2)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (2k+4)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+2)\varphi \end{array} \right| = 0$$

В итоговых табл. 8.31 и 8.32 приведены значения конечных цепных дробей, суммирующих расходящиеся знакопеременные и знакостоянные ряды, включающие степени синусов кратных углов.

Таблица 8.31

Сводная таблица для знакопеременных рядов

Степень коэффициентов рядов	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.273151244921895
2	6	0
3	8	-1.557814059705
4	10	0
5	12	-2.05597178545807
6	14	0
7	16	-2.20791385521019
8	18	0
9	20	-2.22912481103362
10	22	0
11	24	-2.19381420159101
12	26	0

Таблица 8.31

Сводная таблица для знакостоянных рядов

Степень коэффициентов рядов	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0,915243860856226
2	6	∞
3	8	0,677568540104338
4	10	$-\infty$
5	12	0,519114214603347
6	14	∞

Окончание табл. 8.32

7	16	0,394825821456893
8	18	∞
9	20	0,298207746607871
10	22	$-\infty$
11	24	0,223610385771857
12	26	∞

8.4. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени синусов нечётных кратных углов

В этом параграфе будут рассмотрены производящие функции тригонометрических рядов

$$\sin^k \varphi - \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi - \sin^k 7\varphi + \dots, \quad (8.4.1)$$

$$\sin^k \varphi + \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi + \sin^k 7\varphi + \dots \quad (8.4.2)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\sin 1 - \sin 3x + \sin 5x^2 - \sin 7x^3 + \dots \quad (8.4.3)$$

В табл. 8.33 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.4.3).

Таблица 8.33

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin 1 - \sin 3x + \sin 5x^2 - \sin 7x^3 + \dots$$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_i	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.841470984807897	0.841470984807897
1	0.141120008059867	0.982590992867764
2	-6.79509793009886	0.859574671166341
3	-6.10996917063599	0.413539951943869
4	-0.147164913631414	0.594197552889061
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sin 1 - \sin 3x + \sin 5x^2 - \sin 7x^3 + \dots = \\ & = 0,8414\dots - \frac{0,1411\dots x}{1} - \frac{6,7950\dots x}{1} + \frac{6,1099\dots x}{1} - \frac{0,1471\dots}{1} = \\ & = \frac{0,8414\dots - 0,8414\dots x}{1 - 0,8322\dots x + x^2} = \frac{\sin 1 - \sin 1x}{1 + 2 \cos 2x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Соотношение (8.4.4) имеет место, так как

$$\sin 1 = 0.841470\dots,$$

$$2 \cos 2 = -0.416146\dots,$$

$$2 \cos 2 = -0.832293\dots$$

Цепная дробь (8.4.4), соответствующая знакпеременному ряду

$$\sin \varphi - \sin 3\varphi x + \sin 5\varphi x^2 - \sin 7\varphi x^3 + \dots,$$

имеет четыре звена

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} \quad (8.4.5)$$

Коэффициенты ω_i конечной цепной дроби (8.4.5) определяются по формулам Хейлсманна – Стильтеса (8.3.11) и (8.3.12). Коэффициент $\omega_5 = 0$, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, определяющую ω_5 , то есть в формулу

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \cdot \psi_2}{\varphi_2 \cdot \psi_3} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} c_2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin 3\varphi & \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi \\ \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi & \sin 9\varphi \\ -\sin 7\varphi & \sin 9\varphi & -\sin 11\varphi \end{vmatrix} \sin 5\varphi}{\begin{vmatrix} -\sin 3\varphi & \sin 5\varphi \\ \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi \\ -\sin 7\varphi & \sin 9\varphi \end{vmatrix}},$$

имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -\sin 3\varphi & \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi \\ \sin 5\varphi & -\sin 7\varphi & \sin 9\varphi \\ -\sin 7\varphi & \sin 9\varphi & -\sin 11\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4.6)$$

Здесь обозначение определителя Ганкеля φ_i и значения угла φ в тригонометрических рядах никоим образом между собой не связаны, – для обозначения разных объектов используется одна и та же буква греческого алфавита.

В качестве проверки найдём определитель Ганкеля третьего порядка (8.4.6) при $\varphi = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \begin{vmatrix} -\sin 3 & \sin 5 & -\sin 7 \\ \sin 5 & -\sin 7 & \sin 9 \\ -\sin 7 & \sin 9 & -\sin 11 \end{vmatrix} = \\ &= \sin 3 \cdot \sin 7 \cdot \sin 11 - 2 \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9 + \sin^3 7 + \sin^2 5 \cdot \sin 11 + \sin^2 9 \cdot \sin 3 = \\ &= - (0,141120 \cdot 0,656986 \cdot (-0,9999)) - 2(-0,958924 \cdot 0,656986 \cdot 0,412118) + \\ &+ (0,656986)^3 + (-0,958924)^2 \cdot (-0,9999) + (0,412118)^2 \cdot 0,141120 = 0,92713 + 0,519628 + \\ &+ 0,28375 - 0,919526 + 0,023970 = 0,91526 - 0,919526 = 0. \end{aligned}$$

Определитель Ганкеля (8.4.6) при $\varphi = 1$ имеет нулевое значение. Нулевое значение определитель (8.4.6) имеет при любом φ .

Можно записать производящую функцию для знакопеременного тригонометрического ряда:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \varphi x}{1 + 2 \cos 2\varphi x + x^2} = \sin \varphi - \sin 3\varphi x + \sin 5\varphi x^2 - \sin 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.4.7)$$

При $x = 1$ из (8.4.7) получим значение тригонометрического ряда:

$$\sin \varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \sin 7\varphi + \dots = 0. \quad (8.4.8)$$

Установим при помощи производящей функции (8.4.7) несколько первых коэффициентов ряда. Предварительно определим коэффициенты ряда, порождаемого производящей функцией стандартного вида:

$$\frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

где

$$c_m = -(a_1 c_{m-1} + a_2 c_{m-2}), \quad c_0 = 1. \quad (8.3.9)$$

В данном случае

$$a_1 = 2 \cos 2\varphi, \quad a_2 = 1.$$

Используя рекуррентную формулу (8.4.9) и значения a_1 и a_2 , получим:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \quad c_1 = 2 \cos 2\varphi, \\ c_2 &= -(2 \cos 2\varphi(-2 \cos 2\varphi) + 1 \cdot 1) = 4 \cos^2 2\varphi - 1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi - \sin \varphi x}{1 + 2 \cos 2\varphi x + x^2} &= (\sin \varphi - \sin \varphi x)(1 - 2 \cos 2\varphi x + (4 \cos^2 2\varphi - 1)x^2 - \dots), \quad (8.4.10) \\ &= \sin \varphi - \sin 3\varphi x + \sin 5\varphi x^2 - \sin 7\varphi x^3 + \dots. \end{aligned}$$

В качестве примера определим при помощи производящей функции (8.4.10) несколько коэффициентов ряда при $\varphi = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2 - \sin 2x}{1 + 2 \cos 4x + x^2} &= (\sin 2 - \sin 2x)(1 - 2 \cos 4x + (4 \cos^2 4 - 1)x^2 - \dots) \\ &= \sin 2 - (2 \cos \varphi \sin 2 + \sin 2)x + (\sin 2(4 \cos^2 \varphi - 1) - 2 \cos \varphi \sin 2)x^2 - \dots \quad (8.4.11) \end{aligned}$$

Запишем значения величин, входящих в (8.4.11):

$$\sin 2 = 0.909297, \quad \cos 4 = -0.653643, \quad \cos^2 4 = 0.427249.$$

Подставляя эти значения в (8.4.11), получим:

$$\frac{\sin 2 - \sin 2x}{1 + 2 \cos 4x + x^2} = \sin 2 + 0.279415x - 0.544021x^2 + \dots = \sin 2 - \sin 6x + \sin 10x^2 - \dots$$

В самом деле,

$$\sin 6 = -0.279415\dots, \quad \sin 10 = -0.544021\dots$$

Если в (8.4.4) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} \sin 1 + \sin 3x + \sin 5x^2 + \sin 7x^3 + \dots &= \\ = 0.8414\dots + \frac{0.1411\dots x}{1} + \frac{6.7950\dots x}{1} - \frac{6.1099\dots x}{1} + \frac{0.1471\dots x}{1} &= \\ = \frac{0.8414\dots + 0.8414\dots x}{1 + 0.8322\dots x + x^2} = \frac{\sin 1 + \sin 1x}{1 - 2 \cos 2x + x^2}. \quad (8.4.12) \end{aligned}$$

Имеет место также производящая функция для произвольного значения φ :

$$\frac{\sin \varphi + \sin \varphi x}{1 - 2 \cos 2\varphi x + x^2} = \sin \varphi + \sin 3\varphi x + \sin 5\varphi x^2 + \sin 7\varphi x^3 + \dots. \quad (8.4.13)$$

Полагая в (8.4.12) $x = 1$, определим значение ряда:

$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \sin 7 + \dots = \frac{\sin 1}{(1 - \cos 2)} = 0.594197\dots. \quad (8.4.14)$$

Это же значение для ряда (8.4.14) получено из представления соответствующей цепной дробью ряда (8.4.12) при $x = 1$:

$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \sin 7 + \dots =$$

$$= 0,8414... + \frac{0.1411...}{1} + \frac{6.7950...x}{1} - \frac{6.1099...}{1} + \frac{0.1471...}{1} = 0.594197.... \quad (8.4.15)$$

В третьей колонке табл. 8.34 приведены результаты вычисления цепной дроби (8.4.15).

Таблица 8.34

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду
 $\sin 1 + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \dots$

Номер звена, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_i	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.841470984807897	0.841470984807897
1	0.141120008059867	0.982590992867764
2	-6.79509793009886	0.859574671166341
3	-6.10996917063599	0.413539951943869
4	-0.147164913631414	0.594197552889061
5	0	

Цепная дробь соответствующая знакопостоянному ряду

$$\sin \varphi + \sin 3\varphi x + \sin 5\varphi x^2 + \sin 7\varphi x^3 + \dots$$

имеет четыре звена

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1}. \quad (8.4.16)$$

Коэффициент $\omega_5 = 0$, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_3}{\varphi_2 \psi_3}.$$

имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} \sin 3\varphi & \sin 5\varphi & \sin 7\varphi \\ \sin 5\varphi & \sin 7\varphi & \sin 9\varphi \\ \sin 7\varphi & \sin 9\varphi & \sin 11\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Найдём производящую функцию ряда

$$\sin^2 1 - \sin^2 3x + \sin^2 5x^2 - \sin^2 7x^3 + \dots \quad (8.4.17)$$

В табл. 8.35 приведены коэффициенты соответствующей ряду цепной дроби.

Таблица 8.35

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду
 $\sin^2 1 - \sin^2 3x + \sin^2 5x^2 - \sin^2 7x^3 + \dots$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.708073418273571	0.708073418273571
1	-0.019914856674817	0.688158561598754
2	-46.1733558796338	0.707651255035373
3	-45.7039544625907	1.31394791627939
4	-0.00077967002890168	1.29914267107011
5	-28.5552602167989	1.31449915853057
6	-27.7777918879996	0.850749490430595
7	0	

$$\begin{aligned}
& \sin^2 1 - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \sin^2 7x + \dots = \\
& = 0,7080\dots - \frac{0,0199\dots x}{1} + \frac{46,1733\dots x}{1} - \frac{45,7039\dots x}{1} + \frac{0,00077\dots x}{1} - \frac{28,5552\dots x}{1} + \frac{27,7777\dots x}{1} = \\
& = \frac{0,7080\dots - 0,2375\dots x + 0,7080\dots x^2}{1 - 0,3063\dots x - 0,3063x^2 + x^3}. \quad (8.4.18)
\end{aligned}$$

Следовательно, можно записать производящую функцию:

$$\frac{0,7080\dots - 0,2375\dots x + 0,7080\dots x^2}{1 - 0,3063\dots x - 0,3063x^2 + x^3} = \sin^2 1 - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \sin^2 7x + \dots \quad (8.4.19)$$

При $x = 1$ из (8.4.19) имеет значение знакопеременного ряда:

$$\sin^2 1 - \sin^2 3 + \sin^2 5 - \sin^2 7 + \dots = 0,850749\dots \quad (8.4.20)$$

Это же значение для ряда можно получить, вычисляя подходящие цепной дроби (8.4.18) при $x = 1$ (табл. 8.35).

Используя производящую функцию (8.4.19), найдём первые коэффициенты ряда. Как обычно, определим предварительно коэффициенты ряда, порождаемые производящей функцией стандартного вида:

$$\frac{1}{1 - 0,3063x - 0,3063x^2 + x^3} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots, \quad (8.4.21)$$

$$c_m = -(a_1c_{m-1} + a_2c_{m-2} + a_3c_{m-3}), \quad c_0 = 1.$$

Здесь: $a_1 = -0,3063\dots$; $a_2 = -0,3063\dots$; $a_3 = 1$.

Определим первые коэффициенты c_i ряда (8.4.21).

$$c_1 = -(-0,3063) = 0,3063,$$

$$c_2 = -(-0,3063 \cdot 0,3063 - 0,3063 \cdot 1) = 0,4001.$$

$$c_3 = -(-0,3063 \cdot 0,4001 - 0,3063 \cdot 0,3063 + 1 \cdot 1) = -0,7836.$$

Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}
& \frac{0,7080 - 0,2375x + 0,7080x^2}{1 - 0,3063x - 0,3063x^2 + x^3} = \\
& = (0,7080 - 0,2375x + 0,7080x^2)(1 + 0,3063x + 0,4001x^2 - 0,7836x^3 + \dots) \quad (8.4.22)
\end{aligned}$$

Запишем коэффициенты c_i ряда (8.4.21):

$$c'_0 = 0,7080,$$

$$c'_1 = 0,7080 \cdot 0,3063 - 0,2375 = -0,0199,$$

$$c'_2 = 0,7080 \cdot 0,4001 - 0,2375 \cdot 0,3063 + 0,7080 = 0,9194,$$

$$c'_3 = 0,7080 \cdot (-0,7836) - 0,2375 \cdot 0,4001 + 0,7080 \cdot 0,3063 = -0,4316. \quad (8.4.23)$$

Запишем значения квадратов синусов кратных углов:

$$\sin^2 1 = 0,7080\dots, \sin^2 3 = 0,0199\dots, \sin^2 5 = 0,9194\dots, \sin^2 7 = 0,4316\dots \quad (8.4.24)$$

Сравнивая значения коэффициентов тригонометрического ряда, полученные из производящей функции (8.4.23) и значения квадратов синусов кратных углов (8.4.24), можно заключить, что производящая функция действительно порождает знакопеременный ряд (8.4.17):

$$\frac{0.7080... - 0.2375...x + 0.7080...x^3}{1 - 0.3063...x - 0.3063...x^2 + x^3} = \sin^2 1 - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \sin^2 7x + \dots$$

Записать производящую функцию в общем виде, то есть для любого φ , не представляется возможным, так как пока не определены значения коэффициентов $-0,2375$ и $-0,3063$, как значения некоторых тригонометрических функций, как то имело место в случае тригонометрических рядов, составленных из синусов кратных углов первой степени.

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$\sin^2 \varphi - \sin^2 3\varphi + \sin^2 5\varphi - \sin^2 7\varphi + \dots,$$

имеет шесть звеньев:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} + \frac{\omega_5 x}{1} - \frac{\omega_6 x}{1} \quad (8.4.25)$$

Число звеньев N конечных цепных дробей, соответствующей рядам

$$\sin^k \varphi - \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi - \sin^k 7\varphi + \dots, \quad (8.4.26)$$

$$\sin^k \varphi + \sin^k 3\varphi + \sin^k 5\varphi + \sin^k 7\varphi + \dots \quad (8.4.27)$$

определяется формулой

$$N = 2(k + 1), \quad (8.4.28)$$

где k – степень членов тригонометрических рядов (8.4.26) и (8.4.27).

Коэффициент ω_7 соответствующей цепной дроби (8.4.25) равен нулю, так как нулевое значение имеет определитель Ганкеля четвертого порядка, входящий в формулу, по которой находится коэффициент ω_7 :

$$\omega_7 = -\frac{\varphi_4 \psi_3}{\varphi_3 \psi_4}.$$

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -\sin^2 3\varphi & \sin^2 5\varphi & -\sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi \\ \sin^2 5\varphi & -\sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi & -\sin^2 11\varphi \\ -\sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi & -\sin^2 11\varphi & \sin^2 13\varphi \\ \sin^2 9\varphi & -\sin^2 11\varphi & \sin^2 13\varphi & -\sin^2 15\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4.29)$$

Если в (8.4.18) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & \sin^2 1 + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \sin^2 7x + \dots = \\ & = 0,7080... + \frac{0.0199...x}{1} - \frac{46.1733...x}{1} + \frac{45.7039...x}{1} - \frac{0.00077...x}{1} + \frac{28.5552...x}{1} - \frac{27.7777...x}{1} = \\ & = \frac{0.7080... + 0.2375...x + 0.7080...x^2}{1 + 0.3063...x - 0.3063x^2 - x^3} \end{aligned} \quad (8.4.30)$$

Таким образом, производящая функция знакоположительного ряда имеет вид:

$$\frac{0.7080... + 0.2375...x + 0.7080...x^2}{1 + 0.3063...x - 0.3063x^2 - x^3} = \sin^2 1 + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \sin^2 7x + \dots \quad (8.4.31)$$

При $x = 1$ из (8.4.31) можно записать:

$$\sin^2 1 + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \sin^2 7x + \dots = \infty. \quad (8.4.32)$$

К этому же значению приводит вычисление конечной цепной дроби, соответствующей знакопостоянному ряду (8.4.30) при $x = 1$ (табл. 8.35).

Таблица 8.36

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^2 1 + \sin^2 3x + \sin^2 5x^2 + \sin^2 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.708073418273571	0.708073418273571
1	0.019914856674817	0.727988274948388
2	46.1733558796338	0.707632564228371
3	45.7039544625907	2.46100414433486
4	0.00077967002890	2.35186269618855
5	28.5552602167989	2.45707505419744
6	27.7777918879996	∞
7	0	

Цепная дробь соответствующая знакопостоянному ряду (8.4.30)

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 3\varphi x + \sin^2 5\varphi x^2 + \sin^2 7\varphi x^3 + \dots,$$

также имеет шесть звеньев, из чего следует, что $\varphi_3 = 0$:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} \sin^2 3\varphi & \sin^2 5\varphi & \sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi \\ \sin^2 5\varphi & \sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi & \sin^2 11\varphi \\ \sin^2 7\varphi & \sin^2 9\varphi & \sin^2 11\varphi & \sin^2 13\varphi \\ \sin^2 9\varphi & \sin^2 11\varphi & \sin^2 13\varphi & \sin^2 15\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4.33)$$

Определим цепную дробь соответствующей знакопостоянному ряду

$$\sin^3 1 - \sin^3 3x + \sin^3 5x^2 - \sin^3 7x^3 + \dots$$

В табл. 8.37 приведены коэффициенты цепной дроби и значения подходящих дробей.

Таблица 8.37

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^3 1 - \sin^3 3x + \sin^3 5x^2 - \sin^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.595823236590956	0,595823236590956
1	0.0028103847344612	0,593012851856494
2	-313.752474963418	0,595832222562161
3	-313.430874552869	-0,70675970070363
4	-0.000583245782483	-0,43073187862664
5	5.74172680319186	-0,78506508787933
6	6.31802427165335	0,01646731420223
7	0.030994884138245	-0,01370685288815
8	0.864927972214563	0
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \sin^3 1 - \sin^3 3x + \sin^3 5x^2 - \sin^3 7x^3 + \dots = \\
& = 0,5958\dots - \frac{0,0028\dots x}{1} - \frac{313,7524\dots x}{1} + \frac{313,4308\dots x}{1} - \frac{0,00058\dots x}{1} - \\
& \quad - \frac{5,7417\dots x}{1} + \frac{6,3180\dots x}{1} - \frac{0,0309\dots x}{1} + \frac{0,8649\dots x}{1}. \quad (8.4.34)
\end{aligned}$$

При $x = 1$ цепная дробь, как следует из табл. 8.37, имеет нулевое значение. Следовательно, можно записать значение ряда:

$$\sin^3 1 - \sin^3 3 + \sin^3 5 - \sin^3 7 + \dots = 0.$$

Цепная дробь (8.4.34) имеет восемь звеньев, так как нулевое значение имеет определитель Ганкеля пятого порядка, входящий в формулу, устанавливающую значения коэффициента ω_5 .

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -\sin^3 3\varphi & \sin^3 5\varphi & -\sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & -\sin^3 11\varphi \\ \sin^3 5\varphi & -\sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & -\sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi \\ -\sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & -\sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & -\sin^3 15\varphi \\ \sin^3 9\varphi & -\sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & -\sin^3 15\varphi & \sin^3 17\varphi \\ -\sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & -\sin^3 15\varphi & \sin^3 17\varphi & -\sin^3 19\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4.35)$$

Если в (8.4.34) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
& \sin^3 1 + \sin^3 3x + \sin^3 5x^2 + \sin^3 7x^3 + \dots = \\
& = 0,5958\dots + \frac{0,0028\dots x}{1} + \frac{313,7524\dots x}{1} - \frac{313,4308\dots x}{1} + \frac{0,00058\dots x}{1} + \\
& \quad + \frac{5,7417\dots x}{1} - \frac{6,3180\dots x}{1} + \frac{0,0309\dots x}{1} - \frac{0,8649\dots x}{1}. \quad (8.4.36)
\end{aligned}$$

В табл. 8.38 приведены подходящих конечной цепной дроби (8.4.36).

Таблица 8.38

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\sin^3 1 + \sin^3 3x + \sin^3 5x^2 + \sin^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.595823236590956	0.59582323659095
1	0.002810384734461	0.59863362132541
2	-313.752474963418	0.59583216546350
3	-313.430874552869	-0.06856136363255
4	-0.000583245782483	0.01247093504228
5	5.74172680319186	-0.05514862022092
6	6.31802427165335	1.48949314373142
7	0.030994884138245	4.72739480827284
8	0.864927972214563	-0.44012275980034
9	0	

Как видно из табл. 8.38 при $x = 1$ цепная дробь (8.4.36) имеет значение $-0,440122\dots$ Это же значение имеет и расходящийся ряд:

$$\sin^3 1 + \sin^3 3 + \sin^3 5 + \sin^3 7 + \dots = -0.4401227598003\dots$$

Цепная дробь (8.4.36) имеет восемь звеньев, так как определитель Ганкеля пятого порядка равен нулю:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} \sin^3 3\varphi & \sin^3 5\varphi & \sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & \sin^3 11\varphi \\ \sin^3 5\varphi & \sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & \sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi \\ \sin^3 7\varphi & \sin^3 9\varphi & \sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & \sin^3 15\varphi \\ \sin^3 9\varphi & \sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & \sin^3 15\varphi & \sin^3 17\varphi \\ \sin^3 11\varphi & \sin^3 13\varphi & \sin^3 15\varphi & \sin^3 17\varphi & \sin^3 19\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4.37)$$

Можно записать определители, имеющие нулевые значения, которые имеют место при разложении в конечные соответствующие цепные дроби тригонометрических рядов:

$$\sin^{2k} \varphi - \sin^{2k} 3\varphi + \sin^{2k} 5\varphi - \sin^{2k} 7\varphi + \dots, \quad (8.4.38)$$

$$\sin^{2k+1} \varphi + \sin^{2k+1} 3\varphi + \sin^{2k+1} 5\varphi + \sin^{2k+1} 7\varphi + \dots \quad (8.4.39)$$

«Нулевые» определители, установленные из разложения в конечные цепные дроби знакоположительных рядов (8.4.38) и (8.4.39)

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} \sin^{2k-2} 3\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & \sin^{2k-2} 7\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi \\ \sin^{2k-2} 5\varphi & \sin^{2k-2} 7\varphi & \sin^{2k-2} 9\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+3)\varphi \\ \sin^{2k-2} 7\varphi & \sin^{2k-2} 9\varphi & \sin^{2k-2} 11\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+5)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (8k-5)\varphi & \sin^{2k-2} (8k-3)\varphi \\ \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+5)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (8k-3)\varphi & \sin^{2k-2} (8k-1)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4.40)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} \sin^{2k-1} 3\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & \sin^{2k-1} 7\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+3)\varphi \\ \sin^{2k-1} 5\varphi & \sin^{2k-1} 7\varphi & \sin^{2k-1} 9\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi \\ \sin^{2k-1} 7\varphi & \sin^{2k-1} 9\varphi & \sin^{2k-1} 11\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+7)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (8k-1)\varphi & \sin^{2k-1} (8k+1)\varphi \\ \sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+7)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (8k+1)\varphi & \sin^{2k-1} (8k+3)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4.41)$$

Запишем определители, установленные из разложения в конечные цепные дроби знакопеременных рядов

$$\sin^{2k} \varphi - \sin^{2k} 3\varphi + \sin^{2k} 5\varphi - \sin^{2k} 7\varphi + \dots, \quad (8.4.42)$$

$$\sin^{2k+1} \varphi - \sin^{2k+1} 3\varphi + \sin^{2k+1} 5\varphi - \sin^{2k+1} 7\varphi + \dots \quad (8.4.43)$$

которые имеют нулевые значения

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -\sin^{2k-2} 3\varphi & \sin^{2k-2} 5\varphi & -\sin^{2k-2} 7\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi \\ \sin^{2k-2} 5\varphi & -\sin^{2k-2} 7\varphi & \sin^{2k-2} 9\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (4k+3)\varphi \\ -\sin^{2k-2} 7\varphi & \sin^{2k-2} 9\varphi & -\sin^{2k-2} 11\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+5)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sin^{2k-2} (4k-1)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \dots & -\sin^{2k-2} (8k-5)\varphi & \sin^{2k-2} (8k-3)\varphi \\ \sin^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-2} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-2} (4k+5)\varphi & \dots & \sin^{2k-2} (8k-3)\varphi & -\sin^{2k-2} (8k-1)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4.44)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} -\sin^{2k-1} 3\varphi & \sin^{2k-1} 5\varphi & -\sin^{2k-1} 7\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (4k+3)\varphi \\ \sin^{2k-1} 5\varphi & -\sin^{2k-1} 7\varphi & \sin^{2k-1} 9\varphi & \dots & -\sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi \\ -\sin^{2k-1} 7\varphi & \sin^{2k-1} 9\varphi & -\sin^{2k-1} 11\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & -\sin^{2k-1} (4k+7)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & \dots & -\sin^{2k-1} (8k-1)\varphi & \sin^{2k-1} (8k+1)\varphi \\ -\sin^{2k-1} (4k+3)\varphi & \sin^{2k-1} (4k+5)\varphi & -\sin^{2k-1} (4k+7)\varphi & \dots & \sin^{2k-1} (8k+1)\varphi & -\sin^{2k-1} (8k+3)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4.45)$$

В итоговых табл. 8.39 и 8.40 приведены значения конечных цепных дробей, суммирующих расходящейся знакопостоянные и знакопеременные ряды, включающие степени синусов «нечётных» кратных углов (8.4.38) и (8.4.39).

Таблица 8.39

Сводная таблица для знакопостоянных рядов (8.4.38) и (8.4.39)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значение цепных дробей
1	4	0.594197552889061
2	6	∞
3	8	-0.440122759800344
4	10	∞
5	12	-0.768428785427381
6	14	∞
7	16	-0.906544016876641
8	18	∞
9	20	-0.965458532213225
10	22	∞
11	24	-0.985101907909886
12	26	∞

Таблица 8.40

Сводная таблица для знакопеременных рядов (8.4.39)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значение цепных дробей
1	4	0
2	6	0,850749490430595
3	8	0
4	10	0,692631636901445
5	12	0
6	14	0,559752711881909
7	16	0
8	18	0,435649927445089
9	20	0
10	22	0,324843646121813
11	24	0
12	26	0,229646821561796

8.5. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов кратных углов

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\cos 1 - \cos 2x + \cos 3x^2 - \cos 4x^3 + \dots \quad (8.5.1)$$

В табл. 8.41 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.5.1)

Таблица 8.41

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos 1 - \cos 2x + \cos 3x^2 - \cos 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.54030230586814	0.54030230586814
1	0.416146836547142	0.956449142415282
2	-2.37894995145132	0.663460932816254
3	-1.71869886560151	0.360158313252108
4	-0.420353525886466	0.5
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \cos 1 - \cos 2x + \cos 3x^2 - \cos 4x^3 + \dots = \\ & = 0,5403\dots + \frac{0,4161\dots x}{1} + \frac{2,3789\dots x}{1} - \frac{1,7186\dots x}{1} + \frac{0,4203\dots x}{1} = \\ & = \frac{0,5403\dots + x}{1 + 1,0806\dots x + x^2} = \frac{\cos 1 + x}{1 + 2 \cos 1x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Соотношение (8.5.2) имеет место, так как

$$\cos 1 = 0.540302\dots, \quad 2 \cos 1 = 1.080604\dots$$

Производящая функция для ряда (8.5.1):

$$\frac{\cos 1 + x}{1 + 2 \cos 1x + x^2} = \cos 1 - \cos 2x + \cos 3x^2 - \cos 4x^3 + \dots \quad (8.5.3)$$

Из (8.5.3) при $x = 1$ определим значение ряда:

$$\cos 1 - \cos 2 + \cos 3 - \cos 4 + \dots = 1/2. \quad (8.5.4)$$

Можно также записать производящую функцию для произвольного угла φ :

$$\frac{\cos \varphi + x}{1 + 2 \cos \varphi x + x^2} = \cos \varphi - \cos 2\varphi x + \cos 3\varphi x^2 - \cos 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.5.5)$$

При $x = 1$ запишем значение знакопеременного ряда (8.5.5) для произвольного φ :

$$\frac{\cos \varphi + x}{2(\cos \varphi + 1)} = \frac{1}{2},$$

Следовательно,

$$\cos \varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \dots = 1/2. \quad (8.5.6)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$\cos \varphi - \cos 2\varphi x + \cos 3\varphi x^2 - \cos 4\varphi x^3 + \dots, \quad (8.5.7)$$

имеет четыре звена:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} \quad (8.5.8)$$

Коэффициенты ω_i конечной цепной дроби (8.5.8) определяются по формулам Хейлсманна – Стильеса (8.3.11) и (8.3.12). Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу устанавливающую значение ω_5 , то есть в формулу

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3},$$

имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -\cos 2\varphi & \cos 3\varphi & -\cos 4\varphi \\ \cos 3\varphi & -\cos 4\varphi & \cos 5\varphi \\ -\cos 4\varphi & \cos 5\varphi & -\cos 6\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.9)$$

Вычислим определитель (8.5.9) при $\varphi = 1$:

$$\begin{vmatrix} -\cos 2 & \cos 3 & -\cos 4 \\ \cos 3 & -\cos 4 & \cos 5 \\ -\cos 4 & \cos 5 & -\cos 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos 2 \cdot \cos 4 \cdot \cos 6 - 2 \cos 3 \cdot \cos 4 \cdot \cos 5 + \cos^3 4 + \cos^2 3 \cdot \cos 6 + \cos 2 \cdot \cos^2 5 =$$

$$= -0.261178 - 0.367117 - 0.279270 + 0.941047 - 0.033485 = 0.941047 - 0.941047 = 0.$$

Если в (8.5.2) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & \cos 1 + \cos 2x + \cos 3x^2 + \cos 4x^3 + \dots = \\ & = 0,5403\dots - \frac{0,4161\dots x}{1} - \frac{2,3789\dots x}{1} + \frac{1,7186\dots x}{1} - \frac{0,4203\dots x}{1} = \\ & \frac{0,5403\dots - x}{1 - 1,0806\dots x + x^2} = \frac{\cos 1 - x}{1 - 2 \cos 1x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Таким образом;

$$\frac{\cos 1 - x}{1 - 2 \cos 1x + x^2} = \cos 1 + \cos 2x + \cos 3x^2 + \cos 4x^3 + \dots \quad (8.5.11)$$

При $x = 1$ из (8.5.11) запишем значение ряда:

$$\cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \cos 4 + \dots = -1/2. \quad (8.5.12)$$

Это же значение, имеет и конечная цепная дробь, соответствующая ряду:

$$\begin{aligned} & \cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \cos 4 + \dots = \\ & = 0,5403\dots - \frac{0,4161\dots}{1} - \frac{2,3789\dots}{1} + \frac{1,7186\dots}{1} - \frac{0,4203\dots}{1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

В табл. 8.42 приведены подходящих дробей (8.5.13).

Таблица 8.42

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos 1 + \cos 2x + \cos 3x^2 + \cos 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.54030230586814	0.54030230586814
1	-0.416146836547142	0.124155469320997
2	2.37894995145132	0.842087614398848
3	1.71869886560151	-2.78973904326843
4	0.420353525886466	-0.5
5	0	

Имеет место такая производящая функция:

$$\frac{\cos \varphi - x}{1 - 2 \cos \varphi x + x^2} = \cos \varphi + \cos 2\varphi x + \cos 3\varphi x^2 + \cos 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.5.14)$$

При $x = 1$ из (8.5.12) получим значение знакоположительного ряда:

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cos 4\varphi + \dots = -\frac{1}{2}. \quad (8.5.15)$$

В табл.8.43 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.5.15) при $\varphi = 1,11$.

Таблица 8.43

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos 1.11 + \cos 2.22x + \cos 3.33x^2 + \cos 4.44x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0,44466151674170	0,44466151674170
1	-0,60455227105793	-0,15989075431622
2	1,62484506859806	1,41218499006341
3	1,35096532834063	-1,51270216972346
4	0,61544329322599	-0,5
5	0	

Пятый коэффициент цепной дроби (8.5.10) равен нулю, так как равен нулю определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} \cos 2\varphi & \cos 3\varphi & \cos 4\varphi \\ \cos 3\varphi & \cos 4\varphi & \cos 5\varphi \\ \cos 4\varphi & \cos 5\varphi & \cos 6\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.16)$$

Соответствующая цепная дробь, построенная для знакопеременного ряда, составленного из квадратов косинусов кратных углов, – конечная и имеет шесть звеньев:

$$\begin{aligned} & \cos^2 \varphi - \cos^2 2\varphi + \cos^2 3\varphi x^2 - \cos^2 4\varphi x^3 + \dots = \\ & = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} + \frac{\omega_5 x}{1} - \frac{\omega_6 x}{1} \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

В табл. 8.44 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.5.17).

Таблица 8.44

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^2 1 - \cos^2 2x + \cos^2 3x - \cos^2 4x + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.291926581726429	0.291926581726429
1	-0.173178189568194	0.118748392158235
2	-5.65940287151024	0.26592151897387
3	-5.22347137514439	0.801291498013661
4	-0.0206638520467232	0.754472438440873
5	-8.83991263151205	0.807916668029979
6	-8.55102361000518	0.5
7	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 1 - \cos^2 2x + \cos^2 3x^2 - \cos^2 4x^3 + \dots = \\
 & = 0,2919\dots - \frac{0,1732\dots x}{1} + \frac{5,6594\dots x}{1} - \frac{5,2235\dots x}{1} + \frac{0,0207\dots x}{1} - \\
 & - \frac{8,8399\dots x}{1} + \frac{8,5510\dots x}{1} = \frac{0,291926\dots - 0,124219\dots x + x^2}{1 + 0,167706\dots x + 0,167706\dots x^2 + x^3} = \\
 & = \frac{\cos^2 1 - 0,124219\dots x + x^2}{1 + \frac{\sin 3}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 + x^3}. \quad (8.5.18)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\cos^2 1 = 0,291926\dots, \quad \frac{\sin 3}{\sin 1} = 0,167706\dots$$

При $x = 1$ из (8.5.18) получим значение ряда:

$$\cos^2 1 - \cos^2 2 + \cos^2 3 - \cos^2 4 + \dots = 1/2. \quad (8.5.19)$$

Это же значение имеет и соответствующая ряду (8.5.19) цепная дробь (табл. 8.44). Цепная дробь (8.5.18) конечная и имеет 6 звеньев, что обусловлено нулевым значением определителя φ_4 , входящего в формулу определяющую коэффициент ω_7 .

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -\cos^2 2\varphi & \cos^2 3\varphi & -\cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi \\ \cos^2 3\varphi & -\cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi & -\cos^2 6\varphi \\ -\cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi & -\cos^2 6\varphi & \cos^2 7\varphi \\ \cos^2 5\varphi & -\cos^2 6\varphi & \cos^2 7\varphi & -\cos^2 8\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Если в (8.5.18) x заменить на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 1 + \cos^2 2x + \cos^2 3x^2 + \cos^2 4x^3 + \dots = \\
 & = 0,2919\dots + \frac{0,1732\dots x}{1} - \frac{5,6594\dots x}{1} + \frac{5,2235\dots x}{1} - \frac{0,0207\dots x}{1} + \\
 & + \frac{8,8399\dots x}{1} - \frac{8,5510\dots x}{1} = \frac{0,291926\dots + 0,124219\dots x + x^2}{1 - 0,167706\dots x + 0,167706\dots x^2 - x^3} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 1 + 0.124219...x + x^2}{1 - \frac{\sin 3}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 - x^3} \quad (8.5.20)$$

При $x = 1$ из (8.5.20) можно записать:

$$\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cos^2 3 + \cos^2 4 + \dots = \infty \quad (8.5.21)$$

Бесконечно большое значение имеет и конечная цепная дробь (8.5.20), что отражено в табл. 8.45.

Таблица 8.45

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^2 1 + \cos^2 2x + \cos^2 3x^2 + \cos^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.29192658172642	0.291926581726429
1	0.17317818956819	0.465104771294623
2	5.65940287151024	0.254759117494674
3	5.22347137514439	2.202633346300612
4	0.02066385204672	1.918626726163373
5	8.83991263151205	2.169420174043087
6	8.55102361000518	∞
7	0	

Цепная дробь, соответствующая ряду

$$\cos^2 \varphi - \cos^2 2\varphi + \cos^2 3\varphi x^2 - \cos^2 4\varphi x^3 + \dots,$$

имеет шесть звеньев, так как определитель Ганкеля четвертого порядка, входящий в формулу устанавливающую значения коэффициента ω_4 , равен нулю:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} \cos^2 2\varphi & \cos^2 3\varphi & \cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi \\ \cos^2 3\varphi & \cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi & \cos^2 6\varphi \\ \cos^2 4\varphi & \cos^2 5\varphi & \cos^2 6\varphi & \cos^2 7\varphi \\ \cos^2 5\varphi & \cos^2 6\varphi & \cos^2 7\varphi & \cos^2 8\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.22)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\cos^3 \varphi - \cos^3 2\varphi + \cos^3 3\varphi x^2 - \cos^3 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.5.23)$$

В табл.8.46 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.5.23).

Таблица 8.46

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^2 1 - \cos^2 2x + \cos^2 3x^2 - \cos^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.157728605250993	0.157728605250993
1	0.072067555747765	0.229796160998759
2	-13.4634361864228	0.162711346199885
3	-13.1756119425911	-0.523627252614435
4	-0.008072995614691	-0.466571974751009

Окончание табл. 8.46

5	8.21760913169392	-0.516941985479756
6	8.31418428727195	-2.41795845021356
7	0.00789512608553	-1.9726942397511
8	1.10659759141849	0.5
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \cos^3 1 - \cos^3 2x + \cos^3 3x^2 - \cos^3 4x^3 + \dots = \\ & = 0,1577\dots + \frac{0,0720\dots x}{1} + \frac{13,4634\dots x}{1} - \frac{13,1756\dots x}{1} + \frac{0,0080\dots x}{1} + \\ & + \frac{8,2176\dots x}{1} - \frac{8,3141\dots x}{1} + \frac{0,0078\dots x}{1} - \frac{1,1065\dots x}{1}. \end{aligned} \quad (8.5.24)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$\cos^3 \varphi - \cos^3 2\varphi + \cos^3 3\varphi x^2 - \cos^3 4\varphi x^3 + \dots$$

имеет восемь звеньев:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega_8 x}{1}.$$

Коэффициенты ω_3 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -\cos^3 2\varphi & \cos^3 3\varphi & -\cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & -\cos^3 6\varphi \\ \cos^3 3\varphi & -\cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & -\cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi \\ -\cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & -\cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & -\cos^3 8\varphi \\ \cos^3 5\varphi & -\cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & -\cos^3 8\varphi & \cos^3 9\varphi \\ -\cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & -\cos^3 8\varphi & \cos^3 9\varphi & -\cos^3 10\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.25)$$

Из табл. 8.46 следует, что при $x = 1$ ряд (8.5.24) имеет значение $1/2$. Это значение для рядов остаётся неизменным при любом значении степени (табл. 8.47)

$$\cos^k \varphi - \cos^k 2\varphi + \cos^k 3\varphi - \cos^k 4\varphi + \dots = 1/2 \quad (8.5.26)$$

Таблица 8.47

Сводная таблица для знакопеременных рядов

$$\cos^k \varphi - \cos^k 2\varphi + \cos^k 3\varphi - \cos^k 4\varphi + \dots$$

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значение цепных дробей
1	4	0.5
2	6	0.5
3	8	0.5
4	10	0.5
5	12	0.5
6	14	0.5
8	18	0.5
9	20	0.5
10	22	0.5
11	24	0.5
12	26	0.5

В табл. 8.48 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^3 1 + \cos^3 2x + \cos^3 3x^2 + \cos^3 4x^3 + \dots$$

Таблица 8.48

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^3 1 + \cos^3 2x + \cos^3 3x^2 + \cos^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.157728605250993	0.157728605250993
1	-0.0720675557477653	0.085661049503228
2	13.4634361864228	0.163510923599626
3	13.1756119425911	-1.27675114933635
4	0.008072995614691	-1.09845824112699
5	-8.21760913169392	-1.30550651655856
6	-8.31418428727195	-0.49114501837212
7	-0.007895126085530	-0.50957711495260
8	-1.10659759141849	-0.5
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \cos^3 1 + \cos^3 2x + \cos^3 3x^2 + \cos^3 4x^3 + \dots \\ &= 0,1577\dots - \frac{0,0720\dots x}{1} - \frac{13,4634\dots x}{1} + \frac{13,1756\dots x}{1} - \frac{0,0080\dots x}{1} - \\ & \quad - \frac{8,2176\dots x}{1} + \frac{8,3141\dots x}{1} - \frac{0,0078\dots x}{1} + \frac{1,1065\dots x}{1} \end{aligned} \quad (8.5.27)$$

Цепная дробь, соответствующая ряду

$$\cos^3 \varphi - \cos^3 2\varphi x + \cos^3 3\varphi x^2 - \cos^3 4\varphi x^3 + \dots$$

имеет восемь звеньев. Коэффициент ω_8 равен нулю, так как равен нулю определитель Ганкеля пятого порядка:

$$\varphi_7 = \begin{vmatrix} \cos^3 2\varphi & \cos^3 3\varphi & \cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & \cos^3 6\varphi \\ \cos^3 3\varphi & \cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & \cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi \\ \cos^3 4\varphi & \cos^3 5\varphi & \cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & \cos^3 8\varphi \\ \cos^3 5\varphi & \cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & \cos^3 8\varphi & \cos^3 9\varphi \\ \cos^3 6\varphi & \cos^3 7\varphi & \cos^3 8\varphi & \cos^3 9\varphi & \cos^3 10\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.28)$$

В табл. 8.49 показаны значения знакоположительных рядов

Таблица 8.49

Сводная таблица для знакопостоянных рядов

$$\cos^k \varphi + \cos^k 2\varphi + \cos^k 3\varphi + \cos^k 4\varphi + \dots$$

Степень коэф- фициентов ряда	Длина цепной дроби	Значения цепных дробей
1	4	-0.5
2	6	∞
3	8	-0.5
4	10	∞

Окончание табл. 8.49

5	12	-0.5
6	14	∞
7	16	-0.5
8	18	∞
9	20	-0.5
10	22	∞
11	24	-0.5
12	26	∞

Если степень коэффициентов нечётная, то ряды имеют значение, равные $-\frac{1}{2}$.

Если степень коэффициентов чётная, то ряды имеют бесконечно большое значение.

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых косинусы кратных углов в чётной и нечётной степени, то есть для рядов

$$\cos^{2k} \varphi - \cos^{2k} 2\varphi x + \cos^{2k} 3\varphi x^2 - \cos^{2k} 4\varphi x^3 + \dots, \quad (8.5.29)$$

$$\cos^{2k+1} \varphi - \cos^{2k+1} 2\varphi x + \cos^{2k+1} 3\varphi x^2 - \cos^{2k+1} 4\varphi x^3 + \dots, \quad (8.5.30)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -\cos^{2k-2} 2\varphi & \cos^{2k-2} 3\varphi & -\cos^{2k-2} 4\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} 2k\varphi & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi \\ \cos^{2k-2} 3\varphi & -\cos^{2k-2} 4\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (2k+2)\varphi \\ -\cos^{2k-2} 4\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & -\cos^{2k-2} 6\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^{2k-2} 2k\varphi & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} (4k-2)\varphi & \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi \\ \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+3)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & -\cos^{2k-2} (4k)\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -\cos^{2k-1} 2\varphi & \cos^{2k-1} 3\varphi & -\cos^{2k-1} 4\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (2k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (2k+2)\varphi \\ \cos^{2k-1} 3\varphi & -\cos^{2k-1} 4\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & \dots & -\cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi \\ -\cos^{2k-1} 4\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & -\cos^{2k-1} 6\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & -\cos^{2k-1} (2k+4)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-1} (2k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & \dots & -\cos^{2k-1} 4k\varphi & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi \\ -\cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & -\cos^{2k-1} (2k+4)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (4k+2)\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично находятся конечные цепные дроби для знакоположительных рядов, коэффициенты которых косинусы кратных углов в чётной и нечётной степени

$$\cos^{2k} \varphi + \cos^{2k} 2\varphi x + \cos^{2k} 3\varphi x^2 + \cos^{2k} 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.5.31)$$

$$\cos^{2k+1} \varphi + \cos^{2k+1} 2\varphi x + \cos^{2k+1} 3\varphi x^2 + \cos^{2k+1} 4\varphi x^3 + \dots \quad (8.5.32)$$

и устанавливаются определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} \cos^{2k-2} 2\varphi & \cos^{2k-2} 3\varphi & \cos^{2k-2} 4\varphi & \dots & \cos^{2k-2} 2k\varphi & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi \\ \cos^{2k-2} 3\varphi & \cos^{2k-2} 4\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+2)\varphi \\ \cos^{2k-2} 4\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & \cos^{2k-2} 6\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+3)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-2} 2k\varphi & \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k-2)\varphi & \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi \\ \cos^{2k-2} (2k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-2} (2k+3)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k)\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} \cos^{2k-1} 2\varphi & \cos^{2k-1} 3\varphi & \cos^{2k-1} 4\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (2k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+2)\varphi \\ \cos^{2k-1} 3\varphi & \cos^{2k-1} 4\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi \\ \cos^{2k-1} 4\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & \cos^{2k-1} 6\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+4)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-1} (2k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} 4k\varphi & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi \\ \cos^{2k-1} (2k+2)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (2k+4)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+2)\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

8.6. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов нечётных кратных углов

Рассмотрим производящие функции тригонометрических рядов

$$\cos^k \varphi - \cos^k 3\varphi x + \cos^k 5\varphi x^2 - \cos^k 7\varphi x^3 + \dots, \quad (8.6.1)$$

$$\cos^k \varphi + \cos^k 3\varphi x + \cos^k 5\varphi x^2 + \cos^k 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.2)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\cos 1 - \cos 3x + \cos 5x^2 - \cos 7x^3 + \dots \quad (8.6.3)$$

В табл. 8.50 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.6.3)

Таблица 8.50

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos 1 - \cos^3 3x + \cos 5x^2 - \cos 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.54030230586814	0.54030230586814
1	0.989992496600445	1.53029480246859
2	0.286529631726805	1.92787569451007
3	2.94427639170529	1.60784587532222
4	3.49004043307277	0.92540785884046
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \cos 1 - \cos 3x + \cos 5x^2 - \cos 7x^3 + \dots \\ &= 0,5403\dots + \frac{0,9899\dots x}{1} - \frac{0,2865\dots x}{1} + \frac{2,9442\dots x}{1} - \frac{3,4900\dots x}{1} = \\ & \frac{0,5403\dots + 0,5403\dots x}{1 - 0,8323\dots x + x^2} = \frac{\cos 1 + \cos 1x}{1 + 2 \cos 2x + x^2} = \frac{\cos 1(1+x)}{1 + 2 \cos 2x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Из (8.6.4) при $x = 1$ получим значение ряда:

$$\cos 1 - \cos 3 + \cos 5 - \cos 7 + \dots = \frac{\cos 1}{1 + \cos 2} = 0,9254078588\dots \quad (8.6.5)$$

Это же значение для ряда (8.6.5) приведено в табл. 8.50.

Из (8.6.4) можно записать производящую функцию для знакопеременного ряда:

$$\frac{\cos \varphi + \cos \varphi x}{1 + 2 \cos 2\varphi x + x^2} = \frac{\cos \varphi(1+x)}{1 + 2 \cos 2\varphi x + x^2} =$$

$$= \cos \varphi - \cos 3\varphi x + \cos 5\varphi x^2 - \cos 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.6)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$\cos \varphi - \cos 3\varphi x + \cos 5\varphi x^2 - \cos 7\varphi x^3 + \dots$$

имеет четыре звена

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1}.$$

Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка, входящий в формулу, определяющую ω_5 , имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -\cos 3\varphi & \cos 5\varphi & -\cos 7\varphi \\ \cos 5\varphi & -\cos 7\varphi & \cos 9\varphi \\ -\cos 7\varphi & \cos 9\varphi & -\cos 11\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.6.7)$$

Заменяя в (8.6.4) x на $-x$, получим:

$$\cos 1 + \cos 3x + \cos 5x^2 + \cos 7x^3 + \dots =$$

$$= 0,5403\dots - \frac{0,9899\dots x}{1} + \frac{0,2865\dots x}{1} - \frac{2,9442\dots x}{1} + \frac{3,4900\dots x}{1} =$$

$$\frac{0,5403\dots - 0,5403\dots x}{1 + 0,8323\dots x + x^2} = \frac{\cos 1 - \cos 1x}{1 + 2 \cos 2x + x^2} = \frac{\cos 1(1-x)}{1 - 2 \cos 2x + x^2}. \quad (8.6.8)$$

Из (8.6.8) при $x = 1$ получено нулевое значение ряда

$$\cos 1 + \cos 3 + \cos 5 + \cos 7 + \dots = 0. \quad (8.6.9)$$

Это же нулевое значение для ряда (8.6.9) получено и при вычислении подходящих соответствующей цепной дроби (8.6.8) при $x = 1$ (Табл. 8.51).

Таблица 8.51

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos 1 + \cos 3x + \cos 5x^2 + \cos 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.54030230586814	0.54030230586814
1	-0.989992496600445	-0.449690190732306
2	-0.286529631726805	-0.229203869649682
3	-2.94427639170529	-0.620803289735985
4	-3.49004043307277	0
5	0	

Из (8.6.8) можно записать производящую функцию для знакоположительного ряда

$$\frac{\cos \varphi - \cos \varphi x}{1 - 2 \cos 2\varphi x + x^2} = \frac{\cos \varphi(1-x)}{1 - 2 \cos 2\varphi x + x^2} = \cos \varphi + \cos 3\varphi x + \cos 3\varphi x^2 + \cos 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.10)$$

Соответствующая цепная дробь для ряда (8.6.10) конечна и имеет 4 звена, так как определитель Ганкеля третьего порядка равен нулю:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} \cos 3\varphi & \cos 5\varphi & \cos 7\varphi \\ \cos 5\varphi & \cos 7\varphi & \cos 9\varphi \\ \cos 7\varphi & \cos 9\varphi & \cos 11\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.6.11)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду:

$$\cos^2 1 - \cos^2 3x + \cos^2 5x - \cos^2 7x + \dots \quad (8.6.12)$$

В табл. 8.52 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.6.12).

Таблица 8.52

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^2 1 - \cos^2 3x + \cos^2 5x - \cos^2 7x + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.291926581726429	0.291926581726429
1	-0.980085143325183	-0.688158561598754
2	-0.082099229857498	-0.613799174546635
3	6.98151861031862	-0.678179884898468
4	5.66890806680254	-0.882882421907094
5	0.44663232955408	-0.74958621774518
6	2.14862934465489	-0.350749490430595
7	0	

Следовательно,

$$\cos^2 1 - \cos^2 3x + \cos^2 5x - \cos^2 7x + \dots$$

$$= 0,2919\dots - \frac{0,9800\dots x}{1} + \frac{0,0820\dots x}{1} - \frac{6,9815\dots x}{1} + \frac{5,6689\dots x}{1} - \frac{0,4466\dots x}{1} + \frac{2,1486\dots x}{1} \quad (8.6.13)$$

При $x = 1$ получим значения ряда (Табл. 8.52):

$$\cos^2 1 - \cos^2 3 + \cos^2 5 - \cos^2 7 + \dots = -0.3507494904\dots \quad (8.6.14)$$

Если в (8.6.13) x заменить на $-x$, то получим:

$$\cos^2 1 + \cos^2 3x + \cos^2 5x^2 + \cos^2 7x^3 + \dots =$$

$$= 0,2919\dots + \frac{0,9800\dots x}{1} - \frac{0,0820\dots x}{1} + \frac{6,9815\dots x}{1} - \frac{5,6689\dots x}{1} + \frac{0,4466\dots x}{1} - \frac{2,1486\dots x}{1} \quad (8.6.15)$$

При $x = 1$ определим, что ряд имеет бесконечно большое значение (Табл. 8.53)

$$\cos^2 1 + \cos^2 3 + \cos^2 5 + \cos^2 7 + \dots = \infty.$$

Таблица 8.53

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\cos^2 1 + \cos^2 3x + \cos^2 5x^2 + \cos^2 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	0.291926581726429	0.29192658172642
1	-0.980085143325183	1,27201172505161
2	-0.082099229857498	1,35967287327059
3	6.98151861031862	1,25874172064457
4	5.66890806680254	0,64813730381144
5	0.44663232955408	1,54292494580256
6	2.14862934465489	0,29594260424e18
7	0	

Также конечными являются соответствующие цепные дроби для рядов

$$\cos^2 \varphi - \cos^2 3\varphi x + \cos^2 5\varphi x^2 - \cos^2 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.16)$$

и

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 3\varphi x + \cos^2 5\varphi x^2 + \cos^2 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.17)$$

Соответствующие цепные дроби содержат восемь звеньев, так как седьмой коэффициент равен нулю в следствие равенства нулю определителя Ганкеля четвёртого порядка:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -\cos^2 3\varphi & \cos^2 5\varphi & -\cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi \\ \cos^2 5\varphi & -\cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi & -\cos^2 11\varphi \\ -\cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi & -\cos^2 11\varphi & \cos^2 13\varphi \\ \cos^2 9\varphi & -\cos^2 11\varphi & \cos^2 13\varphi & -\cos^2 15\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.6.18)$$

$$\varphi'_4 = \begin{vmatrix} \cos^2 3\varphi & \cos^2 5\varphi & \cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi \\ \cos^2 5\varphi & \cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi & \cos^2 11\varphi \\ \cos^2 7\varphi & \cos^2 9\varphi & \cos^2 11\varphi & \cos^2 13\varphi \\ \cos^2 9\varphi & \cos^2 11\varphi & \cos^2 13\varphi & \cos^2 15\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (8.6.19)$$

В табл. 8.54 и 8.55 приведены, соответственно, значения знакопеременных и знакопостоянных рядов при различных степенях коэффициентов.

Таблица 8.54

Сводная таблица для знакопеременных рядов

$$\cos^2 \varphi - \cos^2 3\varphi x + \cos^2 5\varphi x^2 - \cos^2 7\varphi x^3 + \dots$$

Степень коэффициентов ряда	Длина цепной дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.925407858840463
2	6	-0.350749490430595
3	8	0.567792310891848
4	10	-0.508867343959745
5	12	0.530716685408918
6	14	-0.534106272469359
7	16	0.543515161218366
8	18	-0.550569060396254
9	20	0.558799853083716
10	22	-0.571552210853984
11	24	0.67883433275577
12	26	-0.59474277019282

Таблица 8.55

Сводная таблица для знакопостоянных рядов

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 3\varphi x + \cos^2 5\varphi x^2 + \cos^2 7\varphi x^3 + \dots$$

Степень коэффициентов ряда	Длина цепной дроби	Значения цепных дробей
1	4	0
2	6	∞
3	8	0
4	10	∞
5	12	0

Окончание табл. 8.55

6	14	∞
7	16	0
8	18	∞
9	20	0
10	22	∞
11	24	0
12	26	∞

Соответствующие цепные дроби для рядов (8.6.1) и (8.6.2) конечны и имеют число звеньев N , устанавливаемое формулой

$$N = 2(n + 1), \quad (8.6.20)$$

где n – показатель степени коэффициентов рядов.

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых косинусы нечётных кратных углов чётной и нечётной степени, то есть для рядов:

$$\cos^{2k} \varphi - \cos^{2k} 3\varphi x + \cos^{2k} 5\varphi x^2 - \cos^{2k} 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.21)$$

$$\cos^{2k+1} \varphi - \cos^{2k+1} 3\varphi x + \cos^{2k+1} 5\varphi x^2 - \cos^{2k+1} 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.22)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевое значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -\cos^{2k-2} 3\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & -\cos^{2k-2} 7\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi \\ \cos^{2k-2} 5\varphi & -\cos^{2k-2} 7\varphi & \cos^{2k-2} 9\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (4k+3)\varphi \\ -\cos^{2k-2} 7\varphi & \cos^{2k-2} 9\varphi & -\cos^{2k-2} 11\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+5)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \dots & -\cos^{2k-2} (8k-5)\varphi & \cos^{2k-2} (8k-3)\varphi \\ \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+5)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (8k-3)\varphi & -\cos^{2k-2} (8k-1)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.23)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -\cos^{2k-1} 3\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & -\cos^{2k-1} 7\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (4k+3)\varphi \\ \cos^{2k-1} 5\varphi & -\cos^{2k-1} 7\varphi & \cos^{2k-1} 9\varphi & \dots & -\cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi \\ -\cos^{2k-1} 7\varphi & \cos^{2k-1} 9\varphi & -\cos^{2k-1} 11\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & -\cos^{2k-1} (4k+7)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & \dots & -\cos^{2k-1} (8k-1)\varphi & \cos^{2k-1} (8k+1)\varphi \\ -\cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & -\cos^{2k-1} (4k+7)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (8k+1)\varphi & -\cos^{2k-1} (8k+3)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.24)$$

Аналогично находятся конечные цепные дроби для знакоположительных рядов, коэффициенты которых косинусы нечётных кратных углов чётной и нечётной степени, то есть для рядов:

$$\cos^{2k} \varphi + \cos^{2k} 3\varphi x + \cos^{2k} 5\varphi x^2 + \cos^{2k} 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.25)$$

$$\cos^{2k+1} \varphi + \cos^{2k+1} 3\varphi x + \cos^{2k+1} 5\varphi x^2 + \cos^{2k+1} 7\varphi x^3 + \dots \quad (8.6.26)$$

и устанавливаются, соответственно, определители имеющие нулевое значения:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} \cos^{2k-2} 3\varphi & \cos^{2k-2} 5\varphi & \cos^{2k-2} 7\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi \\ \cos^{2k-2} 5\varphi & \cos^{2k-2} 7\varphi & \cos^{2k-2} 9\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+3)\varphi \\ \cos^{2k-2} 7\varphi & \cos^{2k-2} 9\varphi & \cos^{2k-2} 11\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+5)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-2} (4k-1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (8k-5)\varphi & \cos^{2k-2} (8k-3)\varphi \\ \cos^{2k-2} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-2} (4k+5)\varphi & \dots & \cos^{2k-2} (8k-3)\varphi & \cos^{2k-2} (8k-1)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.27)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} \cos^{2k-1} 3\varphi & \cos^{2k-1} 5\varphi & \cos^{2k-1} 7\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+3)\varphi \\ \cos^{2k-1} 5\varphi & \cos^{2k-1} 7\varphi & \cos^{2k-1} 9\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi \\ \cos^{2k-1} 7\varphi & \cos^{2k-1} 9\varphi & \cos^{2k-1} 11\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+7)\varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{2k-1} (4k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (8k-1)\varphi & \cos^{2k-1} (8k+1)\varphi \\ \cos^{2k-1} (4k+3)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+5)\varphi & \cos^{2k-1} (4k+7)\varphi & \dots & \cos^{2k-1} (8k+1)\varphi & \cos^{2k-1} (8k+3)\varphi \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.28)$$

8.7. Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических синусов

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$sh1x - sh2x + sh3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots \quad (8.7.1)$$

В табл. 8.56 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.7.1)

Таблица 8.56

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh1x - sh2x + sh3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.1752011936438	1.1752011936438
1	-3.62686040784702	-2.45165921420322
2	-2.76213413279854	0.211157839573089
3	-0.038011762049053	0.238336959417085
4	-0.36203889888099	0.231058578630005
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} sh1x - sh2x + sh3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots = \\ = 1,1752\dots - \frac{3.6268\dots x}{1} + \frac{2.7621\dots x}{1} - \frac{0.0380\dots x}{1} + \frac{0.3620\dots x}{1} = \\ = \frac{1.1752\dots}{1 + 3.0861\dots x + x^2} = \frac{sh1}{1 + 2ch1x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

Так как

$$sh1 = 1.17520\dots, \quad ch1 = 1.54308\dots, \quad 2ch1 = 3.08616\dots$$

то производящую функцию для ряда (8.7.1) можно записать:

$$\frac{sh1}{1 + 2ch1x + x^2} = sh1 - sh2x + sh3x^2 - sh4x^3 + \dots \quad (8.7.3)$$

При $x = 1$ из (8.7.3) получим значения ряда:

$$sh1 - sh2 + sh3 - sh4 + \dots = \frac{sh1}{2(1+ch1)} = 0.2310585786\dots \quad (8.7.4)$$

Это же значение ряда (8.7.4) получено при вычислении соответствующей цепной дроби (Табл. 8.56).

Можно записать производящую функцию для произвольного аргумента u :

$$\frac{shu}{1 + 2chux + x^2} = shu - sh2ux + sh3ux^2 - sh4ux^3 + \dots \quad (8.7.5)$$

Формулу (8.7.5) запишем в виде:

$$\frac{shu}{1 + \frac{sh2u}{shu}x + x^2} = shu - sh2ux + sh3ux^2 - sh4ux^3 + \dots \quad (8.7.6)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$shu - sh2ux + sh3ux^2 - sh4ux^3 + \dots,$$

имеет четыре звена:

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1}. \quad (8.7.7)$$

Коэффициент ω_i конечной цепной дроби (8.7.6) определяются по формулам Хейлсманна-Стилтьеса (8.3.11) и (8.3.12). Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, устанавливающую значение ω_5 , то есть в формулу:

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3},$$

имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -sh2u & sh3u & -sh4u \\ sh3u & -sh4u & sh5u \\ -sh4u & sh5u & -sh6u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.8)$$

Вычислим определитель (8.7.8) при $u = 1$.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -sh2u & sh3u & -sh4u \\ sh3u & -sh4u & sh5u \\ -sh4u & sh5u & -sh6u \end{vmatrix} = \\ & = -sh2 \cdot sh4 \cdot sh6 - 2sh3 \cdot sh4 \cdot sh2 + sh^3 4 + sh^3 3sh6 + sh2sh^2 5 = \\ & = -19964,91077 - 40572,36678 + 20323,88775 + 20243,47671 + 19969691323 = \\ & = -60537627755 + 60537627755 = 0. \end{aligned}$$

Заменяя в (8.7.2) x на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned} & sh1 + sh2x + sh3x^2 + sh4x^3 + \dots = \\ & = 1,1752\dots + \frac{3.6268\dots x}{1} - \frac{2.7621\dots x}{1} + \frac{0.0380\dots x}{1} - \frac{0.3620\dots x}{1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1.1752...}{1 - 3.0861...x + x^2} = \frac{sh1}{1 - 2ch1x + x^2}. \quad (8.7.9)$$

так как

$$sh1 = 1.17520..., \quad ch1 = 1.54308..., \quad 2ch1 = 3.08616...$$

Таким образом,

$$\frac{sh1}{1 - 2ch1x + x^2} = sh1 + sh2x + sh3x^2 + sh4x^3 + \dots \quad (8.7.10)$$

При $x = 1$ из (8.7.10) определим значения ряда

$$sh1 + sh2x + sh3 + sh4 + \dots = \frac{sh1}{2(1 - ch1)} = -0.819768726...$$

Это же значение ряда (8.7.10) получено при вычислении соответствующей цепной дроби (8.7.9) при $x = 1$ (табл. 8.57).

Таблица 8.57

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh1x + sh2x + sh3x^2 + sh^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.17520119364380	1.1752011936438
1	3.62686040784702	4.80206160149082
2	2.76213413279854	-0.88301919965111
3	0.03801176204905	-1.00835829524484
4	0.36203889888099	-1.08197670686933
5	0	

Можно записать производящую функцию общего вида:

$$\frac{shu}{1 - 2chux + x^2} = shu + sh2ux + sh3ux^2 + sh4ux^3 + \dots \quad (8.7.11)$$

Формулу (8.7.11) запишем в виде:

$$\frac{shu}{1 - \frac{sh2u}{shu}x + x^2} = shu + sh2ux + sh3ux^2 + sh4ux^3 + \dots \quad (8.7.12)$$

Имеет также место «нулевой» определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} sh2u & sh3u & sh4u \\ sh3u & sh4u & sh5u \\ sh4u & sh5u & sh6u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.13)$$

Определим цепную дробь, соответствующей ряду

$$sh^2 1 - sh^2 2x + sh^2 3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots \quad (8.7.14)$$

В табл. 8.58 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.7.14)

Таблица 8.58

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^2 1 - sh^2 2x + sh^2 3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.38109784554182	1.38109784554182
1	-13.1541164180082	-11.7730185724664
2	-7.62938496757077	-0.143242123927783
3	-0.20854227675293	0.144769438305832
4	-0.97849693059613	0.000567398925614
5	-0.00890079464522	-0.763438333655e-4
6	-0.13395255539852	0
7	0	

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 sh^2 1 - sh^2 2x + sh^2 3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots = \\
 = 1,3810\dots - \frac{13,1541\dots x}{1} + \frac{7,6293\dots x}{1} - \frac{0,2085\dots x}{1} + \frac{0,9784\dots x}{1} \\
 - \frac{0,0089\dots x}{1} + \frac{0,1339\dots x}{1} = \frac{1,381095\dots - 1,381095\dots x}{1 + 8,524395\dots x + 8,524395\dots x^2 + x^3} \quad (8.7.15)
 \end{aligned}$$

Так как

$$sh1 = 1.17520\dots, \quad sh^2 1 = 1.38109\dots, \quad sh3 = 10.01787\dots, \quad \frac{sh3}{sh1} = 8.52439\dots,$$

то производящую функцию (8.7.15) можно записать в виде:

$$\frac{1,381095\dots - 1,381095\dots x}{1 + 8,524395\dots x + 8,524395\dots x^2 + x^3} = \frac{sh^2 1 - sh^2 1x}{1 + \frac{sh3}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 + x^3} \quad (8.7.16)$$

При $x = 1$ из (8.7.16) получим значение ряда:

$$sh^2 1 - sh^2 2 + sh^2 3 - sh^2 4 + \dots = 0. \quad (8.7.17)$$

То же нулевое значение для ряда (8.7.17) получено при вычислении значения цепной дроби (8.7.14) при $x = 1$ (Табл. 8.58).

Помимо производящей функции

$$\frac{sh^2 1 - sh^2 1x}{1 + \frac{sh3}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 + x^3} = sh^2 1 - sh^2 2x + sh^2 3x^2 - sh^2 4x^3 + \dots \quad (8.7.18)$$

можно записать производящую функцию для произвольного аргумента u :

$$\frac{sh^2 u - sh^2 ux}{1 + \frac{sh3u}{shu}x + \frac{sh3u}{shu}x^2 + x^3} = sh^2 u - sh^2 2ux + sh^2 3ux^2 - sh^2 4ux^3 + \dots, \quad (8.7.19)$$

Заменяя в (8.7.15) x на $-x$, то получим:

$$\begin{aligned}
& sh^2 1 + sh^2 2x + sh^2 3x^2 + sh^2 4x^3 + \dots \\
& = 1,3810\dots + \frac{13.1541\dots x}{1} - \frac{7.6293\dots x}{1} + \frac{0.2085\dots x}{1} - \frac{0.9784\dots x}{1} + \\
& \quad + \frac{0.0089\dots x}{1} - \frac{0.1339\dots x}{1} = \frac{1.381095\dots + 1.381095\dots x}{1 - 8.524395\dots x + 8.524395\dots x^2 - x^3}. \quad (8.7.20)
\end{aligned}$$

Производящая функция для ряда (8.7.20) может быть записана следующим образом:

$$\frac{sh^2 1 + sh^2 1x}{1 - \frac{sh3}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 - x^3} = sh^2 1 + sh^2 2x + sh^2 3x^2 + sh^2 4x^3 + \dots \quad (8.7.21)$$

При $x = 1$ из (8.7.21) установим, что ряд (8.7.20) имеет бесконечно большое значение:

$$sh^2 1 + sh^2 2 + sh^2 3 + sh^2 4 + \dots = \infty, \quad (8.7.22)$$

что соответствует вычислениям подходящих цепной дроби (Табл. 8.59)

Таблица 8.59

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^2 1x + sh^2 2x + sh^2 3x^2 + sh^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.38109784554182	1.38109784554182
1	13.1541164180082	14.5352142635501
2	7.62938496757077	-0.603115845826956
3	0.208542276752939	-1.09479302579614
4	0.97849693059613	47.2370807044622
5	0.008900794645221	359.718582922617
6	0.133952555398524	∞
7	0	

Цепные дроби (8.7.15) и (8.7.20) конечны и имеют шесть звеньев, так как равны нулю определители Ганкеля четвёртого порядка (8.7.23) и (8.7.24), которые входят в формулу определяющую значение седьмого коэффициента:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -sh^2 3u & sh^2 5u & -sh^2 7u & sh^2 9u \\ sh^2 5u & -sh^2 7u & sh^2 9u & -sh^2 11u \\ -sh^2 7u & sh^2 9u & -sh^2 11u & sh^2 13u \\ sh^2 9u & -sh^2 11u & sh^2 13u & -sh^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.23)$$

$$\varphi'_4 = \begin{vmatrix} sh^2 3u & sh^2 5u & sh^2 7u & sh^2 9u \\ sh^2 5u & sh^2 7u & sh^2 9u & sh^2 11u \\ sh^2 7u & sh^2 9u & sh^2 11u & sh^2 13u \\ sh^2 9u & sh^2 11u & sh^2 13u & sh^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.24)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$sh^3 1 - sh^3 2x + sh^3 3x^2 - sh^3 4x^3 + \dots \quad (8.7.25)$$

В табл. 8.60 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.7.25)

Таблица 8.60

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^3 1x - sh^3 2x + sh^3 3x^2 - sh^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.62306783661962	1.62306783661962
1	-47.7081440366845	-46.0850762000649
2	-21.0733846311873	-0.538274650444096
3	-0.858101047317638	1.30397072691274
4	-2.64458101184923	-0.0472118207329882
5	-0.048526046677701	-0.0649183216941332
6	-0.362958134631953	-0.0601578712095969
7	-0.002248443880123	-0.0601500324166027
8	-0.049437021392953	-0.0601504022668954
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 sh^3 1 - sh^3 2x + sh^3 3x^2 - sh^3 4x^3 + \dots = \\
 = 1,6230\dots - \frac{47.7081\dots x}{1} + \frac{21.0733\dots x}{1} - \frac{0.8581\dots x}{1} + \frac{2.6445\dots x}{1} - \\
 - \frac{0.0485\dots x}{1} + \frac{0.3629\dots x}{1} - \frac{0.0022\dots x}{1} + \frac{0.0494\dots x}{1}.
 \end{aligned} \quad (8.7.26)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду:

$$sh^3 u - sh^3 2ux + sh^3 3ux^2 - sh^3 4ux^3 + \dots$$

имеет восемь звеньев

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} + \dots - \frac{\omega_8 x}{1}.$$

Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\begin{vmatrix}
 -sh^3 2u & sh^3 3u & -sh^3 4u & sh^3 5u & -sh^3 6u \\
 sh^3 3u & -sh^3 4u & sh^3 5u & -sh^3 6u & sh^3 7u \\
 -sh^3 4u & sh^3 5u & -sh^3 6u & sh^3 7u & -sh^3 8u \\
 sh^3 5u & -sh^3 6u & sh^3 7u & -sh^3 8u & sh^3 9u \\
 -sh^3 6u & sh^3 7u & -sh^3 8u & sh^3 9u & -sh^3 10u
 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.27)$$

Как следует из табл. 8.60, при $x = 1$ ряд имеет значение

$$sh^3 1 - sh^3 2 + sh^3 3 - sh^3 4 + \dots = -0.0601504022\dots$$

В табл. 8.61 приведены значения цепных дробей, соответствующих знакопеременным рядам, коэффициенты которых – степени гиперболических синусов кратных углов:

$$sh^k 1 - sh^k 2 + sh^k 3 - sh^k 4 + \dots \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.7.28)$$

Таблица 8.61

Значения для знакпеременных рядов (8.7.28)

Степень коэффициен- тов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.231058578630005...
2	6	0
3	8	-0.0601504022668954...
4	10	0
5	12	0.0338138938289749...
6	14	0
7	16	-0.0240164794297419...
8	18	0
9	20	0.0190011237781078...
10	22	0
11	24	-0.0159609846190726...
12	26	0

В табл. 8.62 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей знако-
постоянному ряду

$$sh^3 1 + sh^3 2x + sh^3 3x^2 + sh^3 4x^3 + \dots \quad (8.7.29)$$

Таблица 8.62

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^3 1x + sh^3 2x + sh^3 3x^2 + sh^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.62306783661962	1.62306783661962
1	47.7081440366845	49.3312118733042
2	21.0733846311873	-0.75361875177773
3	0.858101047317638	-2.99026779349092
4	2.64458101184923	0.51527193563716
5	0.048526046677701	0.61451035074710
6	0.362958134631953	0.67360579022876
7	0.002248443880123	0.67339455089095
8	0.049437021392953	0.67338360602918
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & sh^3 1 + sh^3 2x + sh^3 3x^2 + sh^3 4x^3 + \dots = \\
 & = 1,6230\dots + \frac{47.7081\dots x}{1} - \frac{21.0733\dots x}{1} + \frac{0.8581\dots x}{1} - \frac{2.6445\dots x}{1} + \\
 & + \frac{0.0485\dots x}{1} - \frac{0.3629\dots x}{1} + \frac{0.0022\dots x}{1} - \frac{0.0494\dots x}{1} + \dots \quad (8.7.30)
 \end{aligned}$$

Цепная дробь (8.7.30) при $x = 1$ имеет значение, указанное в третьей колонке
табл. 8.62. Следовательно,

$$sh^3 1 + sh^3 2 + sh^3 3 + sh^3 4 + \dots = 0.6733836060\dots \quad (8.7.31)$$

В табл. 8.63 приведены значения конечных цепных дробей, соответствующих
знакопостоянным рядам, коэффициенты которых – степени гиперболических синусов
кратных углов:

$$sh^k 1 + sh^k 2 + sh^k 3 + sh^k 4 + \dots \quad (8.7.32)$$

Таблица 8.63

Значения для знакопостоянных рядов (8.7.32)

Степень коэффициен- тов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	-1.08197670686933...
2	6	∞
3	8	0.673383606029181...
4	10	∞
5	12	-0.535285765071456...
6	14	∞
7	16	0.45805387475314...
8	18	∞
9	20	-0.406890418490834...
10	22	∞
11	24	0.369778421367718...
12	26	∞

Если степень коэффициентов чётная, то ряды имеют бесконечно большое значение.

Устанавливая конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых гиперболические синусы кратных углов в чётной и нечётной степени, то есть для рядов:

$$sh^{2k} u - sh^{2k} 2u + sh^{2k} 3u - sh^{2k} 4u + \dots \quad (8.7.33)$$

$$sh^{2k+1} u - sh^{2k+1} 2u + sh^{2k+1} 3u - sh^{2k+1} 4u + \dots, \quad (8.7.34)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевое значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -sh^{2k-2} 2u & sh^{2k-2} 3u & -sh^{2k-2} 4u & \dots & -sh^{2k-2} (2k)u & sh^{2k-2} (2k+1)u \\ sh^{2k-2} 3u & -sh^{2k-2} 4u & sh^{2k-2} 5u & \dots & sh^{2k-2} (2k+1)u & -sh^{2k-2} (2k+2)u \\ -sh^{2k-2} 4u & sh^{2k-2} 5u & -sh^{2k-2} 6u & \dots & -sh^{2k-2} (2k+2)u & sh^{2k-2} (2k+2)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-2} 2ku & sh^{2k-2} (2k+1)u & -sh^{2k-2} (2k+2)u & \dots & -sh^{2k-2} (4k-2)u & sh^{2k-2} (4k-1)u \\ sh^{2k-2} (2k+1)u & -sh^{2k-2} (2k+2)u & sh^{2k-2} (2k+3)u & \dots & sh^{2k-2} (4k-1)u & -sh^{2k-2} 4ku \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.35)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -sh^{2k-1} 2u & sh^{2k-1} 3u & -sh^{2k-1} 4u & \dots & sh^{2k-1} (2k)u & -sh^{2k-1} (2k+2)u \\ sh^{2k-1} 3u & -sh^{2k-1} 4u & sh^{2k-1} 5u & \dots & -sh^{2k-1} (2k+2)u & sh^{2k-1} (2k+3)u \\ -sh^{2k-1} 4u & sh^{2k-1} 5u & -sh^{2k-1} 6u & \dots & sh^{2k-1} (2k+3)u & -sh^{2k-1} (2k+4)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-1} (2k+1)u & sh^{2k-1} (2k+2)u & -sh^{2k-1} (2k+3)u & \dots & -sh^{2k-1} (4k)u & sh^{2k-1} (4k+1)u \\ sh^{2k-1} (2k+2)u & -sh^{2k-1} (2k+3)u & sh^{2k-1} (2k+4)u & \dots & sh^{2k-1} (4k+1)u & -sh^{2k-1} (4k+2)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.36)$$

Аналогично, устанавливая цепные дроби для знакоположительных рядов, коэффициенты которых гиперболические синусы кратных углов в чётной и нечётной степени, то есть для рядов

$$sh^{2k} u + sh^{2k} 2ux + sh^{2k} 3ux^2 + sh^{2k} 4ux^3 + \dots \quad (8.7.37)$$

$$sh^{2k+1} u + sh^{2k+1} 2ux + sh^{2k+1} 3ux^2 + sh^{2k+1} 4ux^3 + \dots \quad (8.7.38)$$

можно, соответственно, записать такие определители, имеющие нулевые значения:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} sh^{2k-2} 2u & sh^{2k-2} 3u & sh^{2k-2} 4u & \dots & sh^{2k-2} (2k)u & sh^{2k-2} (2k+1)u \\ sh^{2k-2} 3u & sh^{2k-2} 4u & sh^{2k-2} 5u & \dots & sh^{2k-2} (2k+1)u & sh^{2k-2} (2k+2)u \\ sh^{2k-2} 4u & sh^{2k-2} 5u & sh^{2k-2} 6u & \dots & sh^{2k-2} (2k+2)u & sh^{2k-2} (2k+3)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-2} 2ku & sh^{2k-2} (2k+1)u & sh^{2k-2} (2k+2)u & \dots & sh^{2k-2} (4k-2)u & sh^{2k-2} (4k-1)u \\ sh^{2k-2} (2k+1)u & sh^{2k-2} (2k+2)u & sh^{2k-2} (2k+3)u & \dots & sh^{2k-2} (4k-1)u & sh^{2k-2} 4ku \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.39)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} sh^{2k-1} 2u & sh^{2k-1} 3u & sh^{2k-1} 4u & \dots & sh^{2k-1} (2k)u & sh^{2k-1} (2k+1)u \\ sh^{2k-1} 3u & sh^{2k-1} 4u & sh^{2k-1} 5u & \dots & sh^{2k-1} (2k+1)u & sh^{2k-1} (2k+2)u \\ sh^{2k-1} 4u & sh^{2k-1} 5u & sh^{2k-1} 6u & \dots & sh^{2k-1} (2k+2)u & sh^{2k-1} (2k+3)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-1} (2k+1)u & sh^{2k-1} (2k+2)u & sh^{2k-1} (2k+3)u & \dots & sh^{2k-1} (4k)u & sh^{2k-1} (4k+1)u \\ sh^{2k-1} (2k+2)u & sh^{2k-1} (2k+3)u & sh^{2k-1} (2k+4)u & \dots & sh^{2k-1} (4k+1)u & sh^{2k-1} (4k+2)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7.40)$$

8.8. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических синусов нечетных кратных углов

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$sh1 - sh3x + sh5x^2 - sh7x^3 + \dots \quad (8.8.1)$$

В табл. 8.64 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующие ряду (8.8.1)

Таблица 8.64

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh1 - sh3x + sh5x^2 - sh7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.1752011936438	1.1752011936438
1	-10.0178749274099	-8,8426737337661
2	-7.40708095434106	-0,0163984807041
3	-0.01769552204315	0,0022185621721
4	-0.13500594986935	0
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & sh1 - sh3x + sh5x^2 - sh7x^3 + \dots = \\ & = 1,1752\dots - \frac{10.0178\dots x}{1} + \frac{7.4070\dots x}{1} - \frac{0.0176\dots x}{1} + \frac{0.1350\dots x}{1} = \frac{1.1752\dots - 1.1752\dots x}{1 + 7.5244\dots x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

Так как

$$sh1 = 1.17520\dots, \quad ch2 = 3.76220\dots, \quad 2ch2 = 7.52440\dots,$$

то производящая функция ряда (8.8.1) может быть записана в виде:

$$\frac{sh1 - sh1x}{1 + 2ch2x + x^2} = sh1 - sh3x + sh5x^2 - sh7x^3 + \dots \quad (8.8.3)$$

При $x = 1$ из (8.8.3) получим значение ряда:

$$sh1 - sh3 + sh5 - sh7 + \dots = 0. \quad (8.8.4)$$

Это же нулевое значение ряда (8.8.4) даёт непосредственное вычисление соответствующей цепной дроби (8.8.2) при $x = 1$ (табл. 8.64).

Запишем производящую функцию для произвольного аргумента « u ».

$$\frac{shu - shux}{1 + 2ch2ux + x^2} = \frac{shu(1-x)}{1 + 2ch2ux + x^2} = sh1 - sh3ux + sh5ux^2 - sh7ux^3 + \dots \quad (8.8.5)$$

Производящая функция (8.8.5) может быть записана так же в виде:

$$\frac{shu(1-x)}{1 + \frac{sh4u}{sh2u}x + x^2} = sh1 - sh3ux + sh5ux^2 - sh7ux^3 + \dots \quad (8.8.6)$$

При $x = 1$ ряд (8.8.6) имеет нулевое значение

$$sh1 - sh3u + sh5u - sh7u + \dots = 0. \quad (8.8.7)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду (8.8.6), конечна и имеет четыре звена. Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, устанавливающую значение коэффициента ω_5 , имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -sh3u & sh5u & -sh7u \\ sh5u & -sh7u & sh9u \\ -sh7u & sh9u & -sh11u \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяя в (8.8.2) x на $-x$, то получим:

$$sh1 + sh3x + sh5x^2 + sh7x^3 + \dots = 1.1752\dots + \frac{10.0178\dots x}{1} - \frac{7.4070\dots x}{1} + \frac{0.0176\dots x}{1} - \frac{0.1350\dots x}{1} = \frac{1.1752\dots + 1.1752\dots x}{1 - 7.5244\dots x + x^2} \quad (8.8.8)$$

Производящую функцию (8.8.8) запишем в виде:

$$\frac{sh1 + sh1x}{1 - 2ch2x + x^2} = \frac{sh1(1+x)}{1 - \frac{sh4}{sh2}x + x^2} = sh1 + sh3x + sh5x^2 + sh7x^3 + \dots \quad (8.8.9)$$

При $x = 1$ из (8.8.9) получим значение ряда:

$$sh1 + sh3 + sh5 + sh7 + \dots = \frac{sh1}{1 - ch2} = -0.4254579682\dots \quad (8.8.10)$$

Это же значение ряда (8.8.10) получено при вычислении соответствующие цепной дроби (8.8.8). Результаты вычислений приведены в табл. 8.65.

Таблица 8.65

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh1 + sh3x + sh5x^2 + sh7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.1752011936438	1.1752011936438
1	10.017874927409	11.1930761210537
2	7.4070809543410	-0.38836183900718
3	0.0176955220431	-0.42043684729792
4	0.1350059498693	-0.42545906411966
5	0	

Можно записать производящую функцию общего вида:

$$\frac{shu + shux}{1 - 2ch2ux + x^2} = \frac{shu(1+x)}{1 - \frac{sh4u}{sh2u}x + x^2} = shu + sh3ux + sh5ux^2 + sh7ux^3 + \dots \quad (8.8.11)$$

Имеет место «нулевой» определитель Ганкеля третьего порядка:

$$\varphi'_3 = \begin{vmatrix} sh3u & sh5u & sh7u \\ sh5u & sh7u & sh9u \\ sh7u & sh9u & sh11u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.12)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$sh^2 1 - sh^2 3x + sh^2 5x^2 - sh^2 7x^3 + \dots \quad (8.8.13)$$

В таблице 8.66 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.8.13).

Таблица 8.66

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^2 1 - sh^2 3x + sh^2 5x^2 - sh^2 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.38109784554182	1.38109784554182
1	-100.357818061228	-98.9767202156861
2	-54.8648482641621	-0.415341618263342
3	-0.261831197105548	0.0487778685518086
4	-0.996396129668944	-0.1834080580694
5	-0.0012400551003007	-0.183552030679497
6	-0,01829253040774	-0,18354944279148
7	0	

Таким образом,

$$\begin{aligned} sh^2 1 - sh^2 3x + sh^2 5x^2 - sh^2 7x^3 + \dots = \\ = 1,3810\dots - \frac{100.3578\dots x}{1} + \frac{54.8648\dots x}{1} - \frac{0.2618\dots x}{1} + \frac{0.9963\dots x}{1} - \\ - \frac{0.0012\dots x}{1} + \frac{0.0182\dots x}{1} = \frac{1.3810\dots - 23.5514\dots x + 1.3810\dots x^2}{1 + 55.6165\dots x + 55.6165\dots x^2 + x^3}. \end{aligned} \quad (8.8.14)$$

Значения ряда (8.8.14) при $x = 1$ равно:

$$sh^2 1 - sh^2 3 + sh^2 5 - sh^2 7 + \dots = -0.1835494427\dots$$

Заменяя в (8.8.14) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned} sh^2 1 + sh^2 3x + sh^2 5x^2 + sh^2 7x^3 + \dots = \\ = 1,3810\dots + \frac{100.3578\dots x}{1} - \frac{54.8648\dots x}{1} + \frac{0.2618\dots x}{1} - \frac{0.9963\dots x}{1} + \\ + \frac{0.0012\dots x}{1} - \frac{0.0182\dots x}{1} = \frac{1.3810\dots + 23.5514\dots x + 1.3810\dots x^2}{1 - 55.6165\dots x + 55.6165\dots x^2 - x^3} \end{aligned} \quad (8.8.15)$$

При $x = 1$ из (8.8.15) получим бесконечно большое значение ряда:

$$sh^2 1 + sh^2 3 + sh^2 5 + sh^2 7 + \dots = \infty. \quad (8.8.16)$$

Бесконечно большое значение ряда получаем при вычислении подходящих цепных дробей (8.8.15) при $x = 1$ (Табл. 8.67).

Таблица 8.67

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^3 1 - sh^3 3x + sh^3 5x^2 - sh^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.38109784554182	1.38109784554182
1	100.357818061228	101.73891590677
2	54.8648482641621	-0.482043354987639
3	0.261831197105548	-0.981355475783027
4	0.996396129668944	394.805584205996
5	0.0012400551003007	21635.5517462684
6	0.0182925304077423	-0.13391403640e595
7	0	

Цепные дроби (8.8.14) и (8.8.15) конечны, что определяется нулевым значением определителей Ганкеля четвёртого порядка:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -sh^2 3u & sh^2 5u & -sh^2 7u & sh^2 9u \\ sh^2 5u & -sh^2 7u & sh^2 9u & -sh^2 11u \\ -sh^2 7u & sh^2 9u & -sh^2 11u & sh^2 13u \\ sh^2 9u & -sh^2 11u & sh^2 13u & -sh^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.17)$$

$$\varphi'_4 = \begin{vmatrix} sh^2 3u & sh^2 5u & sh^2 7u & sh^2 9u \\ sh^2 5u & sh^2 7u & sh^2 9u & sh^2 11u \\ sh^2 7u & sh^2 9u & sh^2 11u & sh^2 13u \\ sh^2 9u & sh^2 11u & sh^2 13u & sh^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.18)$$

Определим в цепную дробь, соответствующую ряду

$$sh^3 1 - sh^3 3x + sh^3 5x^2 - sh^3 7x^3 + \dots \quad (8.8.19)$$

В таблице 8.68 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду.

Таблица 8.68

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^3 1 - sh^3 3x + sh^3 5x^2 - sh^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.62306783661962	1.62306783661962
1	-1005.37206932514	-1003.74900148852
2	-406.388372640288	-0.84477890826736
3	-2.90563376546561	6.3596629444641
4	-7.35378533331343	0.01221817884771
5	-0.0183331142513947	-0.00165456358309
6	-0.135107779248113	-0.16268052262e-6
7	-0.000111911942186	0.40294501778e-9
8	-0.002476665888929	0
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & sh^3 1 - sh^3 3x + sh^3 5x^2 - sh^3 7x^3 + \dots = \\ & = 1,6230\dots - \frac{1005.3720\dots x}{1} + \frac{406.3883\dots x}{1} - \frac{2.9056\dots x}{1} + \frac{7.3537\dots x}{1} - \\ & - \frac{0.0183\dots x}{1} + \frac{0.1351\dots x}{1} - \frac{0.0001\dots x}{1} + \frac{0.0024\dots x}{1} \end{aligned} \quad (8.8.20)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$sh^3 u - sh^3 3ux + sh^3 5ux^2 - sh^3 7ux^3 + \dots$$

содержит восемь звеньев. Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определить Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -sh^3 3u & sh^3 5u & -sh^3 7u & sh^3 9u & -sh^3 11u \\ sh^3 5u & -sh^3 7u & sh^3 9u & -sh^3 11u & sh^3 13u \\ -sh^3 7u & sh^3 9u & -sh^3 11u & sh^3 13u & -sh^3 15u \\ sh^3 9u & -sh^3 11u & sh^3 13u & -sh^3 15u & sh^3 17u \\ -sh^3 11u & sh^3 13u & -sh^3 15u & sh^3 17u & -sh^3 19u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.21)$$

Как следует из таблицы 8.68, при $x = 1$ ряд имеет нулевое значение.

$$sh^3 1 - sh^3 3 + sh^3 5 - sh^3 7 + \dots = 0. \quad (8.8.22)$$

В табл. 8.69 приведены значения цепных дробей, соответствующих знакопеременным рядам, коэффициенты которых – степени гиперболических синусов нечетных кратных углов.

$$sh^k 1 - sh^k 3 + sh^k 5 - sh^k 7 + \dots \quad (8.8.23)$$

Таблица 8.69
Значения для знакопеременных рядов (8.8.23)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0
2	6	-0.18354944279148
3	8	0
4	10	0.123338129883585
5	12	0
6	14	-0.0973081727255838
7	16	0
8	18	0.0824274145960413
9	20	0
10	22	-0.0726165461800968
11	24	0
12	26	0.0655672841865999

Из табл. 8.69 видно, что знакопеременные ряды, коэффициенты которых в нечетных степенях, имеют нулевое значение. Значение рядов, коэффициенты которых в

четных степенях $N = 4n - 2$, то есть в степенях 2, 6, 10, ..., имеют значениями отрицательные числа, причём, уменьшающиеся по модулю. Значениями имеет рядов, степени коэффициентов которых определяются формулой $N = 4n$, $n = 1, 2, \dots$, являются положительные уменьшающиеся числа.

В таблице 8.70 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей знакопостоянному ряду

$$sh^3 1 + sh^3 3 + sh^3 5 + sh^3 7 + \dots \quad (8.8.24)$$

Таблица 8.70

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$sh^3 1 + sh^3 3x + sh^3 5x^2 + sh^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.62306783661962	1.62306783661962
1	1005.37206932514	1006.99513716176
2	406.388372640288	-0.85695413040712
3	2.90563376546561	-8.13291601448792
4	7.3537853331343	0.278695096515914
5	0.01833311425139	0.302833788006782
6	0.13510777924811	0.306617092790242
7	0.00011191194218	0.306616603096803
8	0.00247666588892	0.306616601881143
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & sh^3 1 + sh^3 3x + sh^3 5x^2 + sh^3 7x^3 + \dots = \\ & = 1.6230\dots + \frac{1005.3720\dots x}{1} - \frac{406.3883\dots x}{1} + \frac{2.9056\dots x}{1} - \frac{7.3537\dots x}{1} + \\ & + \frac{0.0183\dots x}{1} - \frac{0.1351\dots x}{1} + \frac{0.0001\dots x}{1} - \frac{0.0024\dots x}{1}. \end{aligned}$$

Запишем значение ряда (8.8.23):

$$sh^3 1 + sh^3 3 + sh^3 5 + sh^3 7 + \dots = 0.3066166018\dots$$

Цепная дробь, соответствующая знакоположительному ряду

$$sh^3 u + sh^3 3ux + sh^3 5ux^2 + sh^3 7ux^3 + \dots,$$

содержит восемь звеньев. Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определить Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} sh^3 3u & sh^3 5u & sh^3 7u & sh^3 9u & sh^3 11u \\ sh^3 5u & sh^3 7u & sh^3 9u & sh^3 11u & sh^3 13u \\ sh^3 7u & sh^3 9u & sh^3 11u & sh^3 13u & sh^3 15u \\ sh^3 9u & sh^3 11u & sh^3 13u & sh^3 15u & sh^3 17u \\ sh^3 11u & sh^3 13u & sh^3 15u & sh^3 17u & sh^3 19u \end{vmatrix} = 0.$$

В табл. 8.71 приведены значения цепных дробей, соответствующих знакопостоянным рядам, коэффициенты которых – степень гиперболических синусов нечетных кратных углов.

$$sh^k 1 + sh^k 3 + sh^k 5 + sh^k 7 + \dots \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.8.25)$$

Таблица 8.71
Значения для знакопостоянных рядов (8.8.25)

Степень коэффициентов ряда	Длина цепной дроби	Значения цепных дробей
1	4	-0,425459064119661...
2	6	∞
3	8	0,306616601881143...
4	10	∞
5	12	-0,25073593562124...
6	14	∞
7	16	0,217018697661699...
8	18	∞
9	20	-0,193944647356363...
10	22	∞
11	24	0,176908718374323...
12	26	∞

Из табл. 8.71 можно записать, что ряды (8.8.25), степень коэффициентов которых определяется формулой $N = 4n - 3$, то есть $k = 1, 5, 9, \dots$, имеют суммой отрицательные числа, причём модули этих чисел уменьшаются. Ряды (8.8.25) степень коэффициентов которых $3, 7, 11, \dots$, имеют суммой уменьшающиеся положительные числа. Ряды (8.8.25) с чётными степенями коэффициентов имеют бесконечно большие значения.

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых гиперболические синусы кратных углов в четной и нечетной степени, то есть для рядов

$$sh^{2k}u - sh^{2k}3ux + sh^{2k}5ux^2 - sh^{2k}7ux^3 + \dots \quad (8.8.26)$$

$$sh^{2k+1}u - sh^{2k+1}3ux + sh^{2k+1}5ux^2 - sh^{2k+1}7ux^3 + \dots \quad (8.8.27)$$

можно, соответственно, записать определители, имеющие нулевое значение:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -sh^{2k-2}3u & sh^{2k-2}5u & -sh^{2k-2}7u & \dots & -sh^{2k-2}(4k-1)u & sh^{2k-2}(4k+1)u \\ sh^{2k-2}5u & -sh^{2k-2}7u & sh^{2k-2}9u & \dots & sh^{2k-2}(4k+1)u & -sh^{2k-2}(4k+3)u \\ -sh^{2k-2}7u & sh^{2k-2}9u & -sh^{2k-2}11u & \dots & -sh^{2k-2}(4k+3)u & sh^{2k-2}(4k+5)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -sh^{2k-2}(4k-1)u & sh^{2k-2}(4k+1)u & -sh^{2k-2}(4k+3)u & \dots & -sh^{2k-2}(8k-5)u & sh^{2k-2}(8k-3)u \\ sh^{2k-2}(4k+1)u & -sh^{2k-2}(4k+3)u & sh^{2k-2}(4k+5)u & \dots & sh^{2k-2}(8k-3)u & -sh^{2k-2}(8k-1)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.28)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -sh^{2k-1}3u & sh^{2k-1}5u & -sh^{2k-1}7u & \dots & sh^{2k-1}(4k+1)u & -sh^{2k-1}(4k+3)u \\ sh^{2k-1}5u & -sh^{2k-1}7u & sh^{2k-1}9u & \dots & -sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u \\ -sh^{2k-1}7u & sh^{2k-1}9u & -sh^{2k-1}11u & \dots & sh^{2k-1}(4k+5)u & -sh^{2k-1}(4k+7)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-1}(4k+1)u & -sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u & \dots & -sh^{2k-1}(8k-1)u & sh^{2k-1}(8k+1)u \\ -sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u & -sh^{2k-1}(4k+7)u & \dots & sh^{2k-1}(8k+1)u & -sh^{2k-1}(8k+3)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.29)$$

Аналогично, устанавливая цепные дроби для знакоположительных рядов, коэффициенты которых гиперболические синусы кратных углов в чётной и нечётной степени, то есть для рядов

$$sh^{2k}u + sh^{2k}3ux + sh^{2k}5ux^2 + sh^{2k}7ux^3 + \dots, \quad (8.8.30)$$

$$sh^{2k+1}u + sh^{2k+1}3ux + sh^{2k+1}5ux^2 + sh^{2k+1}7ux^3 + \dots, \quad (8.8.31)$$

можно записать определители, имеющие нулевое значение:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} sh^{2k-2}3u & sh^{2k-2}5u & sh^{2k-2}7u & \dots & sh^{2k-2}(4k-1)u & sh^{2k-2}(4k+1)u \\ sh^{2k-2}5u & sh^{2k-2}7u & sh^{2k-2}9u & \dots & sh^{2k-2}(4k+1)u & sh^{2k-2}(4k+3)u \\ sh^{2k-2}7u & sh^{2k-2}9u & sh^{2k-2}11u & \dots & sh^{2k-2}(4k+3)u & sh^{2k-2}(4k+5)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-2}(4k-1)u & sh^{2k-2}(4k+1)u & sh^{2k-2}(4k+3)u & \dots & sh^{2k-2}(8k-5)u & sh^{2k-2}(8k-3)u \\ sh^{2k-2}(4k+1)u & sh^{2k-2}(4k+3)u & sh^{2k-2}(4k+5)u & \dots & sh^{2k-2}(8k-3)u & sh^{2k-2}(8k-1)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.32)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} sh^{2k-1}3u & sh^{2k-1}5u & sh^{2k-1}7u & \dots & sh^{2k-1}(4k+1)u & sh^{2k-1}(4k+3)u \\ sh^{2k-1}5u & sh^{2k-1}7u & sh^{2k-1}9u & \dots & sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u \\ sh^{2k-1}7u & sh^{2k-1}9u & sh^{2k-1}11u & \dots & sh^{2k-1}(4k+5)u & sh^{2k-1}(4k+7)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ sh^{2k-1}(4k+1)u & sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u & \dots & sh^{2k-1}(8k-1)u & sh^{2k-1}(8k+1)u \\ sh^{2k-1}(4k+3)u & sh^{2k-1}(4k+5)u & sh^{2k-1}(4k+7)u & \dots & sh^{2k-1}(8k+1)u & sh^{2k-1}(8k+3)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8.33)$$

8.9. Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических косинусов

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch1 - ch2x + ch3x^2 - ch4x^3 + \dots. \quad (8.9.1)$$

В табл. 8.72 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.9.1).

Таблица 8.72

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch1 - ch2x + ch3x^2 - ch4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.54308063481524	1.54308063481524
1	-3.76219569108363	-2.21911505626839
2	-2.67600699762589	0.51963435369733
3	0.03646317146293	0.49273488116793
4	-0.37369110054165	0.5
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} ch1 - ch2x + ch3x^2 - ch4x^3 + \dots &= \\ &= 1,5430\dots - \frac{3.7621\dots x}{1} + \frac{2.6760\dots x}{1} + \frac{0.0364\dots x}{1} + \frac{0.3736\dots x}{1} = \\ &= \frac{1.5431\dots + x}{1 + 0.0861\dots x + x^2} = \frac{ch1 + x}{1 + 2ch1x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.9.2)$$

$$ch1 = 1.54308\dots, \quad 2ch1 = 3.08616\dots,$$

Таким образом, производящая функция для ряда (8.9.1), имеет вид:

$$\frac{ch1+x}{1+2ch1x+x^2} = ch1 - ch2x + ch3x^2 - ch4x^3 + \dots \quad (8.9.3)$$

При $x = 1$ из (8.9.3) определим значение ряда:

$$ch1 - ch2 + ch3 - ch4 + \dots = \frac{ch1+1}{2(ch1+1)} = \frac{1}{2}. \quad (8.9.4)$$

Это же значение ряда (8.9.4) получено при вычислении соответствующей цепной дроби. (табл. 8.72).

Можно записать производящую функцию для произвольного аргумента « u ».

$$\frac{chu+1}{1+2chux+x^2} = chu - ch2ux + ch3ux^2 - ch4ux^3 + \dots \quad (8.9.5)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$chu - ch2ux + ch3ux^2 - ch4ux^3 + \dots$$

имеет 4 звена. Коэффициенты ω_i для конечной цепной дроби

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \frac{\omega_4 x}{1} \quad (8.9.6)$$

определяется по формуле Хейлсманна-Стилтьеса (8.3.11) и (8.3.12). Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, устанавливающую значение ω_5 , то есть в формулу

$$\omega_5 = -\frac{\varphi_3 \psi_2}{\varphi_2 \psi_3},$$

имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -ch2u & ch3u & -ch4u \\ ch3u & -ch4u & ch5u \\ -ch4u & ch5u & -ch6u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.7)$$

Вычислим определитель (8.9.7) при $u = 1$.

$$\begin{vmatrix} -ch2 & ch3 & -ch4 \\ ch3 & -ch4 & ch5 \\ -ch4 & ch5 & -ch6 \end{vmatrix} =$$

$$= -ch2 \cdot ch4 \cdot ch6 - 2ch3 \cdot ch4 \cdot ch5 + ch^3 4 + \cdot ch^2 3 \cdot ch6 + ch2 \cdot ch^2 5 =$$

$$= -3.76220 \cdot 27.30823 \cdot 201.7156 - 2 \cdot 10.06766 \cdot 27.30823 \cdot 74.20995 +$$

$$+ 27.30823^3 + 10.06766^2 \cdot 201.7156 + 3.76220 \cdot 74.20995^2 =$$

$$= -61529.14302 + 61529.14302 = 0.$$

Заменяя в (8.9.2) x на $-x$, получим:

$$ch1 + ch2x + ch3x^2 + ch4x^3 + \dots =$$

$$= 1.5430... + \frac{3.7621...x}{1} - \frac{2.6760...x}{1} - \frac{0.0364...x}{1} - \frac{0.3736...x}{1} =$$

$$= \frac{1.5431... - x}{1 - 3.0861...x + x^2} = \frac{ch1 - x}{1 - 2ch1x + x^2}. \quad (8.9.8)$$

Таким образом,

$$\frac{ch1-x}{1-2ch1x+x^2} = ch1 + ch2x + ch3x^2 + ch4x^3 + \dots \quad (8.9.9)$$

При $x = 1$ из (8.9.9) определим значение ряда:

$$ch1 + ch2 + ch3 + ch4 + \dots = \frac{ch1-1}{2(1-ch1)} = -\frac{1}{2}. \quad (8.9.10)$$

Это же значение ряда (8.9.10) получим при вычислении соответствующей цепной дроби (8.9.8) при $x = 1$ (табл. 8.73).

Таблица 8.70

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch1 + ch2x + ch3x^2 + ch4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.54308063481524	1.54308063481524
1	3.76219569108363	5.30527632589888
2	2.67600699762589	-0.70165682535818
3	-0.036463171462939	-0.57375279677166
4	0.37369110054165	-0.5
5	0	

Можно записать производящую функцию обратного вида:

$$\frac{chu-x}{1-2chux+x^2} = chu + ch2ux + ch3ux^2 + ch4ux^3 + \dots \quad (8.9.11)$$

Имеет место также нулевой определитель Ганкеля третьего порядка

$$\varphi'_3 = \begin{vmatrix} ch2u & ch3u & ch4u \\ ch3u & ch4u & ch5u \\ ch4u & ch5u & ch6u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.12)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch^2 1 - ch^2 2x + ch^2 3x^2 - ch^2 4x^3 + \dots \quad (8.9.13)$$

В табл. 8.74 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.9.13).

Таблица 8.74

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^2 1 - ch^2 2x + ch^2 3x^2 - ch^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	2.38109784554182	2.38109784554182
1	-14.1541164180082	-11.7730185724664
2	-7.16101345134273	0.646740157933854
3	0.19648096685405	0.354757168614718
4	-1.02143000766822	0.500559845357225
5	0.00875172610962	0.499923794509193
6	-0.13671523019264	0.5
7	0	

Следовательно,

$$ch^2 1 - ch^2 2x + ch^2 3x^2 - ch^2 4x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= 2,3810... - \frac{14.1541...x}{1} + \frac{7.1610...x}{1} - \frac{0.1965...x}{1} + \frac{1.0214...x}{1} - \frac{0.0088...x}{1} + \frac{0.1367...x}{1} = \\
&= \frac{2.3810... + 6.1425...x + x^2}{1 + 8.5244...x + 8.5244...x^2 + x^3} = \frac{ch^2 1 + 6.1425...x + x^2}{1 + \frac{sh3}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 + x^3}. \quad (8.9.14)
\end{aligned}$$

При $x = 1$ из (8.9.14) получим значение ряда:

$$ch^2 1 - ch^2 2 + ch^2 3 - ch^2 4 + \dots = 1/2.$$

Это же значение имеет и соответствующая ряду (8.9.13) цепная дробь (табл. 8.74).

Заменяя в (8.9.14) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned}
&ch^2 1 + ch^2 2x + ch^2 3x^2 + ch^2 4x^3 + \dots \\
&= 2,3810... + \frac{14.1541...x}{1} - \frac{7.1610...x}{1} + \frac{0.1965...x}{1} - \frac{1.0214...x}{1} + \frac{0.0088...x}{1} - \frac{0.1367...x}{1} = \\
&= \frac{2.3810... - 6.1425...x + x^2}{1 - 8.5244...x + 8.5244...x^2 - x^3} = \frac{ch^2 1 - 6.1425...x + x^2}{1 - \frac{sh3}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 - x^3}. \quad (8.9.15)
\end{aligned}$$

При $x = 1$ из (8.9.15) получим, что ряд имеет бесконечно большое значение:

$$ch^2 1 + ch^2 2 + ch^2 3 + ch^2 4 + \dots = \infty. \quad (8.9.16)$$

Это же значение имеет и соответствующая ряду (8.9.16) при $x = 1$ цепная дробь (табл. 8.75).

Таблица 8.75

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^2 1 + ch^2 2x + ch^2 3x^2 + ch^2 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	2.38109784554182	2.38109784554182
1	14.1541164180082	16.5352142635501
2	7.16101345134273	0.08372963984125
3	-0.196480966854051	0.59216950504961
4	1.02143000766822	50.2370807044622
5	-0.008751726109621	363.718582922617
6	0.136715230192646	-0.1108238367e296
7	0	

Цепные дроби (8.9.14) и (8.9.15) конечны и имеют шесть звеньев, так как равны нулю определителя Ганкеля четвертого порядка (8.9.17) и (8.9.18), которые входят в формулу устанавливающую значение седьмого коэффициента этих цепных дробей:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -ch^2 2u & ch^2 3u & -ch^2 4u & ch^2 5u \\ ch^2 3u & -ch^2 4u & ch^2 5u & -ch^2 6u \\ -ch^2 4u & ch^2 5u & -ch^2 6u & ch^2 7u \\ ch^2 5u & -ch^2 6u & ch^2 7u & -ch^2 8u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.17)$$

$$\varphi'_4 = \begin{vmatrix} ch^2 2u & ch^2 3u & ch^2 4u & ch^2 5u \\ ch^2 3u & ch^2 4u & ch^2 5u & ch^2 6u \\ ch^2 4u & ch^2 5u & ch^2 6u & ch^2 7u \\ ch^2 5u & ch^2 6u & ch^2 7u & ch^2 8u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.18)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch^3 1 - ch^3 2x + ch^3 3x^2 - ch^3 4x^3 + \dots \quad (8.9.19)$$

В табл. 8.76 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.9.19).

Таблица 8.76

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^3 1 - ch^3 2x + ch^3 3x^2 - ch^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	3.67422597505587	3.67422597505587
1	-53.2505557989267	-49.5763298238708
2	-19.1629221058863	1.03321216171673
3	0.79406202271006	-0.884387958172148
4	-2.79188782442761	0.512987916806167
5	0.04744712839257	0.495229624753009
6	-0.372808077840194	0.500007376368067
7	0.00222148945500	0.499999630773447
8	-0.05013661247431	0.5
9	0	

Можно записать конечную соответствующую цепную дробь:

$$\begin{aligned} & ch^3 1 - ch^3 2x + ch^3 3x^2 - ch^3 4x^3 + \dots = \\ & = 3,6742... - \frac{53.2505...x}{1} + \frac{19.1629...x}{1} - \frac{0.7940...x}{1} + \frac{2.7918...x}{1} + \\ & \quad \frac{0.0474...x}{1} - \frac{0.3728...x}{1} + \frac{0.0022...x}{1} - \frac{0.0501...x}{1}. \end{aligned} \quad (8.9.20)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$ch^2 u - ch^2 2ux + ch^2 3ux^2 - ch^2 4ux^3 + \dots,$$

конечная и имеет восемь звеньев.

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega_8 x}{1}.$$

Коэффициент ω_9 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка, входящий в формулу, по которой устанавливается этот коэффициент, имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -ch^3 2u & ch^3 3u & -ch^3 4u & ch^3 5u & -ch^3 6u \\ ch^3 3u & -ch^3 4u & ch^3 5u & -ch^3 6u & ch^3 7u \\ -ch^3 4u & ch^3 5u & -ch^3 6u & ch^3 7u & -ch^3 8u \\ ch^3 5u & -ch^3 6u & ch^3 7u & -ch^3 8u & ch^3 9u \\ -ch^3 6u & ch^3 7u & -ch^3 8u & ch^3 9u & -ch^3 10u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.21)$$

Как следует из табл. 8.76, ряд при $x = 1$ имеет значение, равное $1/2$.

$$ch^3 1 - ch^3 2 + ch^3 3 - ch^3 4 + \dots = 1/2. \quad (8.9.22)$$

В табл. 8.77 приведены значения цепных дробей, соответствующих знакопеременным рядам, коэффициенты которых – степени гиперболических косинусов кратных углов, то есть рядов:

$$ch^k 1 - ch^k 2 + ch^k 3 - ch^k 4 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.9.23)$$

Таблица 8.77

Значения знакопеременных рядов (8.9.23)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0,5
2	6	0,5
3	8	0,5
4	10	0,5
5	12	0,5
6	14	0,5
7	16	0,5
8	18	0,5
9	20	0,5
10	22	0,5
11	24	0,5
12	26	0,5

В табл. 8.78 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.9.24).

$$ch^3 1 + ch^3 2x + ch^3 3x^2 + ch^3 4x^3 + \dots \quad (8.9.24)$$

Таблица 8.78

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^3 1 + ch^3 2x + ch^3 3x^2 + ch^3 4x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	3.67422597505587	3.67422597505587
1	53.2505557989267	56.9247817739826
2	19.1629221058863	0.742398404112914
3	-0.794062022710067	3.09574198855228
4	2.79188782442761	-0.662631136136706
5	-0.047447128392572	-0.559098220537209
6	0.372808077840194	-0.500216822012107
7	-0.002221489455003	-0.500010908737037
8	0.050136612474315	-0.5
9	0	

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & ch^3 1 + ch^3 2x + ch^3 3x^2 + ch^3 4x^3 + \dots = \\
 & = 3,6742\dots + \frac{53.2505\dots x}{1} - \frac{19.1629\dots x}{1} - \frac{0.7940\dots x}{1} - \frac{2.7918\dots x}{1} - \\
 & \quad - \frac{0.0474\dots x}{1} - \frac{0.3728\dots x}{1} - \frac{0.0022\dots x}{1} - \frac{0.0501\dots x}{1} \quad (8.9.25)
 \end{aligned}$$

Цепная дробь, соответствующая знакопостоянному ряду

$$ch^3 u + ch^3 2ux + ch^3 3ux^2 + ch^3 4ux^3 + \dots$$

конечная и имеет 8 звеньев. Коэффициент ω_9 равен нулю, так как имеет нулевое значение определитель Ганкеля:

$$\varphi'_5 = \begin{vmatrix} ch^3 2u & ch^3 3u & ch^3 4u & ch^3 5u & ch^3 6u \\ ch^3 3u & ch^3 4u & ch^3 5u & ch^3 6u & ch^3 7u \\ ch^3 4u & ch^3 5u & ch^3 6u & ch^3 7u & ch^3 8u \\ ch^3 5u & ch^3 6u & ch^3 7u & ch^3 8u & ch^3 9u \\ ch^3 6u & ch^3 7u & ch^3 8u & ch^3 9u & ch^3 10u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.26)$$

Как следует из табл. 8.78, ряд (8.9.24) при $x = 1$ имеет отрицательное значение:

$$ch^3 1 + ch^3 2 + ch^3 3 + ch^3 4 + \dots = -1/2. \quad (8.9.27)$$

В табл. 8.77 приведены значения цепных дробей, соответствующих знакопостоянным рядам, коэффициенты которых – степени гиперболических косинусов кратных углов, то есть рядов:

$$ch^k 1 + ch^k 2 + ch^k 3 + ch^k 4 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.9.28)$$

Таблица 8.79

Значения знакопостоянных рядов (8.9.28)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	– 0,5
2	6	∞
3	8	– 0,5
4	10	∞
5	12	– 0,5
6	14	∞
7	16	– 0,5
8	18	∞
9	20	– 0,5
10	22	∞
11	24	– 0,5
12	26	∞

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых – гиперболические косинусы кратных углов в четной и нечетной степени, то есть для рядов:

$$ch^{2k} u - ch^{2k} 2ux + ch^{2k} 3ux^2 - ch^{2k} 4ux^3 + \dots, \quad (8.9.29)$$

$$ch^{2k+1} u - ch^{2k+1} 2ux + ch^{2k+1} 3ux^2 - ch^{2k+1} 4ux^3 + \dots, \quad (8.9.30)$$

можно записать определители Ганкеля, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -ch^{2k-2} 2u & ch^{2k-2} 3u & -ch^{2k-2} 4u & \dots & -ch^{2k-2} 2ku & ch^{2k-2} (2k+1)u \\ ch^{2k-2} 3u & -ch^{2k-2} 4u & ch^{2k-2} 5u & \dots & ch^{2k-2} (2k+1)u & -ch^{2k-2} (2k+2)u \\ -ch^{2k-2} 4u & ch^{2k-2} 5u & -ch^{2k-2} 6u & \dots & -ch^{2k-2} (2k+2)u & ch^{2k-2} (2k+3)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ch^{2k-2} (2k)u & ch^{2k-2} (2k+1)u & -ch^{2k-2} (2k+2)u & \dots & -ch^{2k-2} (4k-2)u & ch^{2k-2} (4k-1)u \\ ch^{2k-2} (2k+1)u & -ch^{2k-2} (2k+2)u & ch^{2k-2} (2k+3)u & \dots & ch^{2k-2} (4k-1)u & -ch^{2k-2} 4ku \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.31)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -ch^{2k-1}2u & ch^{2k-1}3u & -ch^{2k-1}4u & \dots & ch^{2k-1}(2k+1)u & -ch^{2k-1}(2k+2)u \\ ch^{2k-1}3u & -ch^{2k-1}4u & ch^{2k-1}5u & \dots & -ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u \\ -ch^{2k-1}4u & ch^{2k-1}5u & -ch^{2k-1}6u & \dots & ch^{2k-1}(2k+3)u & -ch^{2k-1}(2k+4)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-1}(2k+1)u & -ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u & \dots & -ch^{2k-1}4ku & ch^{2k-1}(4k+1)u \\ -ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u & -ch^{2k-1}(2k+4)u & \dots & ch^{2k-1}(4k+1)u & -ch^{2k-1}(4k+2)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.32)$$

Аналогично записываются определители Ганкеля, имеющие нулевые значения, которые получены при построении конечных соответствующих цепных дробей для знакоположительных рядов, коэффициенты которых – гиперболические синусы кратных углов в четной и нечетной степени, то есть для рядов:

$$ch^{2k}u + ch^{2k}2ux + ch^{2k}3ux^2 + ch^{2k}4ux^3 + \dots, \quad (8.9.33)$$

$$ch^{2k+1}u + ch^{2k+1}2ux + ch^{2k+1}3ux^2 + ch^{2k+1}4ux^3 + \dots \quad (8.9.34)$$

Приведём определители Ганкеля, имеющие нулевые значения:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} ch^{2k-2}2u & ch^{2k-2}3u & ch^{2k-2}4u & \dots & ch^{2k-2}2ku & ch^{2k-2}(2k+1)u \\ ch^{2k-2}3u & ch^{2k-2}4u & ch^{2k-2}5u & \dots & ch^{2k-2}(2k+1)u & ch^{2k-2}(2k+2)u \\ ch^{2k-2}4u & ch^{2k-2}5u & ch^{2k-2}6u & \dots & ch^{2k-2}(2k+2)u & ch^{2k-2}(2k+3)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-2}(2k)u & ch^{2k-2}(2k+1)u & ch^{2k-2}(2k+2)u & \dots & ch^{2k-2}(4k-2)u & ch^{2k-2}(4k-1)u \\ ch^{2k-2}(2k+1)u & ch^{2k-2}(2k+2)u & ch^{2k-2}(2k+3)u & \dots & ch^{2k-2}(4k-1)u & ch^{2k-2}(4k)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.35)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} ch^{2k-1}2u & ch^{2k-1}3u & ch^{2k-1}4u & \dots & ch^{2k-1}(2k+1)u & ch^{2k-1}(2k+2)u \\ ch^{2k-1}3u & ch^{2k-1}4u & ch^{2k-1}5u & \dots & ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u \\ ch^{2k-1}4u & ch^{2k-1}5u & ch^{2k-1}6u & \dots & ch^{2k-1}(2k+3)u & ch^{2k-1}(2k+4)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-1}(2k+1)u & -ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u & \dots & ch^{2k-1}4ku & ch^{2k-1}(4k+1)u \\ ch^{2k-1}(2k+2)u & ch^{2k-1}(2k+3)u & ch^{2k-1}(2k+4)u & \dots & ch^{2k-1}(4k+1)u & ch^{2k-1}(4k+2)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9.36)$$

8.10. Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических косинусов нечетных кратных углов

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch1 - ch3x + ch5x^2 - ch7x^3 + \dots. \quad (8.10.1)$$

В табл. 8.80 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.10.1).

Таблица 8.80

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch1 - ch3x + ch5x^2 - ch7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.54308063481524	1.54308063481524
1	-10.0676619957778	-8.52458136096252
2	-7.371120380870	0.340414619070832
3	0.01760641459545	0.321808601922215
4	-0.13566458670180	0.324027136831943
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & ch1 - ch3x + ch5x^2 - ch7x^3 + \dots = \\ & = 1,5430\dots - \frac{10.0676\dots x}{1} + \frac{7.3711\dots x}{1} - \frac{0.0176\dots x}{1} + \frac{0.1356\dots x}{1} = \frac{1.5430\dots + 1.5430\dots x}{1 + 7.5244\dots x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.10.2)$$

$$ch1 = 1.54308\dots, \quad ch2 = 3.76220\dots, \quad 2ch2 = 7.52440\dots$$

Производящая функция для ряда (8.10.1) может быть записана в виде:

$$\frac{ch1 + ch1x}{1 + 2ch2x + x^2} = ch1 - ch3x + ch5x^2 - ch7x^3 + \dots \quad (8.10.3)$$

При $x = 1$ из (8.10.3) определим значение ряда:

$$ch1 - ch3 + ch5 - ch7 + \dots = 0.3240271368\dots \quad (8.10.4)$$

Это же значение ряда (8.10.4) даёт непосредственное вычисление соответствующей цепной дроби (8.10.2) при $x = 1$ (табл. 8.80).

Запишем производящую функцию для произвольного аргумента « u ».

$$\frac{chu + chux}{1 + 2ch2ux + x^2} = \frac{chu(1+x)}{1 + 2ch2ux + x^2} = chu - ch3ux + ch5ux^2 - ch7ux^3 + \dots \quad (8.10.5)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду (8.10.5) конечна и имеет четыре звена. Коэффициент ω_5 равен нулю, так как определитель Ганкеля третьего порядка, входящий в формулу, устанавливающую значение коэффициента ω_5 , имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} -ch3u & ch5u & -ch7u \\ ch5u & -ch7u & ch9u \\ -ch7u & ch9u & -ch11u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.6)$$

Заменяя в (8.10.2) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned} & ch1 + ch3x + ch5x^2 + ch7x^3 + \dots = \\ & = 1,5430\dots + \frac{10.0676\dots x}{1} - \frac{7.3711\dots x}{1} + \frac{0.0176\dots x}{1} - \frac{0.1356\dots x}{1} = \\ & = \frac{1.5430\dots - 1.5430\dots x}{1 - 7.5244\dots x + x^2} = \frac{ch1 - ch1x}{1 - 2ch2x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.10.7)$$

Запишем производящую функцию общего вида:

$$\frac{chu - chux}{1 - 2ch2ux + x^2} = \frac{chu(1-x)}{1 - 2ch2ux + x^2} = chu + ch3ux + ch5ux^2 + ch7ux^3 + \dots \quad (8.10.8)$$

При $x = 1$ из (8.10.7) получим значение ряда:

$$ch1 + ch3 + ch5 + ch7 + \dots = 0. \quad (8.10.9)$$

Это же нулевое значение ряда (8.10.9) получено при вычислении соответствующей цепной дроби (8.10.7) при $x = 1$.

Результаты вычисления приведены в табл. 8.81.

Таблица 8.81

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch1 + ch3x + ch5x^2 + ch7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1.54308063481524	1.54308063481524
1	10.0676619957778	11.61074263059312
2	7.37112038087023	-0.037122122930009
3	-0.01760641459545	-0.005022278537249
4	0.1356645867018	0
5	0	

Определитель Ганкеля третьего порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} ch3u & ch5u & ch7u \\ ch5u & ch7u & ch9u \\ ch7u & ch9u & ch11u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.10)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch^2 1 - ch^2 3x + ch^2 5x^2 - ch^2 7x^3 + \dots \quad (8.10.11)$$

В табл. 8.82 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.10.11).

Таблица 8.82

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^2 1 - ch^2 3x + ch^2 5x^2 - ch^2 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	2.38109784554182	2.38109784554182
1	-101.357818061228	-98.9767202156861
2	-54.3334156692771	0.54933277491912
3	0.2598679887521	0.08410328104360
4	-1.00360622947515	0.31659175701704
5	0.00123703817128	0.31644796938253
6	-0.01833874635732	0.31645055720852
7	0	

Соответствующая цепная дробь имеет вид

$$\begin{aligned} & ch^2 1 - ch^2 3x + ch^2 5x^2 - ch^2 7x^3 + \dots = \\ & = 2,3810\dots - \frac{101.3578\dots x}{1} + \frac{54.3334\dots x}{1} + \frac{0.2598\dots x}{1} + \frac{1.0036\dots x}{1} + \frac{0.002\dots x}{1} + \frac{0.0183\dots x}{1} = \\ & = \frac{2.3810\dots + 31.0646\dots x + 2.3810\dots x^2}{1 + 55.6165\dots x + 55.6165\dots x^2 + x^3}. \end{aligned} \quad (8.10.12)$$

Значение ряда (8.10.12) при $x = 1$ равно:

$$ch^2 1 - ch^2 3x + ch^2 5x^2 - ch^2 7x^3 + \dots = 0.3164505572\dots \quad (8.10.13)$$

Этот же результат имеем при вычислении значения цепной дроби (8.10.12) при $x = 1$. (табл. 8.82).

Заменяя в (8.10.12) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned} & ch^2 1 + ch^2 3x + ch^2 5x^2 + ch^2 7x^3 + \dots = \\ & = 2,3810\dots + \frac{101.3578\dots x}{1} - \frac{54.3334\dots x}{1} - \frac{0.2598\dots x}{1} - \frac{1.0036\dots x}{1} - \frac{0.002\dots x}{1} - \frac{0.0183\dots x}{1} = \\ & = \frac{2.3810\dots - 31.0646\dots x + 2.3810\dots x^2}{1 - 55.6165\dots x + 55.6165\dots x^2 - x^3}. \end{aligned} \quad (8.10.14)$$

При $x = 1$ из (8.10.14) получим бесконечно большое значение ряда:

$$ch^2 1 + ch^2 3x + ch^2 5x^2 + ch^2 7x^3 + \dots = \infty. \quad (8.10.15)$$

Бесконечно большое значение ряда получаем при вычислении подходящих цепной дроби (8.10.14) при $x = 1$ (табл. 8.83).

Таблица 8.83

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^2 1 + ch^2 3x + ch^2 5x^2 + ch^2 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	2.38109784554182	2.38109784554182
1	101.357818061228	103.73891590677
2	54.3334156692771	0.480641690816
3	-0.2598679887521	0.98132980341110
4	1.00360622947515	397.805584205996
5	-0.00123703817128	21639.5517462684
6	0.01833874635732	0.5322121383e593
7	0	

Цепные дроби (8.10.12) и (8.10.14) конечны, и содержат 6 звеньев, что обусловлено нулевыми значениями определителей Ганкеля четверного порядка:

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} -ch^2 3u & ch^2 5u & -ch^2 7u & ch^2 9u \\ ch^2 5u & -ch^2 7u & ch^2 9u & -ch^2 11u \\ -ch^2 7u & ch^2 9u & -ch^2 11u & ch^2 13u \\ ch^2 9u & -ch^2 11u & ch^2 13u & -ch^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.16)$$

$$\varphi'_4 = \begin{vmatrix} ch^2 3u & ch^2 5u & ch^2 7u & ch^2 9u \\ ch^2 5u & ch^2 7u & ch^2 9u & ch^2 11u \\ ch^2 7u & ch^2 9u & ch^2 11u & ch^2 13u \\ ch^2 9u & ch^2 11u & ch^2 13u & ch^2 15u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.17)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$ch^3 1 - ch^3 3x + ch^3 5x^2 - ch^3 7x^3 + \dots \quad (8.10.18)$$

В табл. 8.84 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.10.18).

Таблица 8.84

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^3 1 - ch^3 3x + ch^3 5x^2 - ch^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	3.67422597505587	3.67422597505587
1	-1020.43625286998	-1016.76202689493
2	-400.49814760209	1.13265446603537
3	2.87671021443677	-6.1086167715066
4	-7.42437662442417	0.26766975867482
5	0.01827366844488	0.25378174220133
6	-0.13556295206095	0.25543650598578
7	0.00011172721981	0.25543634314845
8	-0.00248083840241	0.25543634355138
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & ch^3 1 - ch^3 3x + ch^3 5x^2 - ch^3 7x^3 + \dots = \\
 & = 3,6742\dots - \frac{1020.4362\dots x}{1} + \frac{400.4981\dots x}{1} - \frac{2.8767\dots x}{1} + \frac{7.4243\dots x}{1} + \\
 & + \frac{0.0182\dots x}{1} - \frac{0.1355\dots x}{1} + \frac{0.0001\dots x}{1} - \frac{0.0024\dots x}{1}
 \end{aligned} \quad (8.10.19)$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$ch^3 1 - ch^3 3x + ch^3 5x^2 - ch^3 7x^3 + \dots$$

содержит в 8 звеньев. Коэффициент ω_9 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} -ch^3 3u & ch^3 5u & -ch^3 7u & ch^3 9u & -ch^3 11u \\ ch^3 5u & -ch^3 7u & ch^3 9u & -ch^3 11u & ch^3 13u \\ -ch^3 7u & ch^3 9u & -ch^3 11u & ch^3 13u & -ch^3 15u \\ ch^3 9u & -ch^3 11u & ch^3 13u & -ch^3 15u & ch^3 17u \\ -ch^3 11u & ch^3 13u & -ch^3 15u & ch^3 17u & ch^3 19u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.20)$$

Как следует из таблицы 8.84, при $x = 1$ ряд (8.10.18) имеет значение:

$$ch^3 1 - ch^3 3 + ch^3 5 - ch^3 7 + \dots = 0.2554363435\dots \quad (8.10.21)$$

В табл. 8.85 приведена таблица значений знакопеременного ряда, коэффициенты которых – степени гиперболического косинуса нечетных кратных углов:

$$ch^k 1 - ch^k 3 + ch^k 5 - ch^k 7 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.10.22)$$

Таблица 8.85

Таблица значений знакопеременных рядов (8.10.22)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.324027136831943
2	6	0.31645055720852
3	8	0.255436343551386
4	10	0.256239244300625
5	12	0.218458051748666
6	14	0.222057888550732
7	16	0.194249506187561
8	18	0.199025731829299
9	20	0.176758115676142
10	22	0.182072884422726
11	24	0.163332894238035
12	26	0.168891063039865

В табл. 8.86 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.10.23).

$$ch^3 1 + ch^3 3x + ch^3 5x^2 + ch^3 7x^3 + \dots \quad (8.10.23)$$

Таблица 8.86

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$ch^3 1 + ch^3 3x + ch^3 5x^2 + ch^3 7x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	3.67422597505587	3.67422597505587
1	1020.43625286998	1024.11047884504
2	400.49814760209	1.11993064478976
3	-2.87671021443677	8.43362657313176
4	7.42437662442417	-0.02798249882035
5	-0.01827366844488	-0.00378296506119
6	0.1355629520609	-0.48993894961e-6
7	-0.00011172721981	-0.12156164072e-8
8	0.0024808384024	0
9	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & ch^3 1 + ch^3 3x + ch^3 5x^2 + ch^3 7x^3 + \dots = \\
 & = 3,6742\dots + \frac{1020.4362\dots x}{1} - \frac{400.4981\dots x}{1} - \frac{2.8767\dots x}{1} - \frac{7.4243\dots x}{1} - \\
 & - \frac{0.0182\dots x}{1} - \frac{0.1355\dots x}{1} - \frac{0.0001\dots x}{1} - \frac{0.0024\dots x}{1} \quad (8.10.24)
 \end{aligned}$$

Цепная дробь, соответствующая знакопеременному ряду

$$ch^3 1 + ch^3 3x + ch^3 5x^2 + ch^3 7x^3 + \dots ,$$

содержит в 8 звеньев. Коэффициент ω_9 равен нулю, так как определитель Ганкеля пятого порядка имеет нулевое значение:

$$\varphi_5 = \begin{vmatrix} ch^3 3u & ch^3 5u & ch^3 7u & ch^3 9u & ch^3 11u \\ ch^3 5u & ch^3 7u & ch^3 9u & ch^3 11u & ch^3 13u \\ ch^3 7u & ch^3 9u & ch^3 11u & ch^3 13u & ch^3 15u \\ ch^3 9u & ch^3 11u & ch^3 13u & ch^3 15u & ch^3 17u \\ ch^3 11u & ch^3 13u & ch^3 15u & ch^3 17u & ch^3 19u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.25)$$

Как следует из таблицы 8.83, при $x = 1$ ряд имеет нулевое значение:

$$ch^3 1 - ch^3 3x + ch^3 5x^2 - ch^3 7x^3 + \dots = 0. \quad (8.10.26)$$

В табл. 8.87 приведена таблица значений знакопостоянного ряда, коэффициенты которых – степени гиперболического косинуса нечетных кратных углов:

$$ch^k 1 + ch^k 3x + ch^k 5x^2 + ch^k 7x^3 + \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.10.27)$$

Таблица 8.87
Значений знакопостоянных рядов (8.10.27)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0
2	6	∞
3	8	0
4	10	∞
5	12	0
6	14	∞
7	16	0
8	18	∞
9	20	0
10	22	∞
11	24	0
12	26	∞

Определяя конечные соответствующие цепные дроби для знакопеременных рядов, коэффициенты которых гиперболические косинусы кратных углов в четной и нечетной степени, то есть для рядов:

$$ch^{2k} u - ch^{2k} 3ux + ch^{2k} 5ux^2 - ch^{2k} 7ux^3 + \dots \quad (8.10.28)$$

$$ch^{2k+1} u - ch^{2k+1} 3ux + ch^{2k+1} 5ux^2 - ch^{2k+1} 7ux^3 + \dots \quad (8.10.29)$$

запишем определители Ганкеля, имеющие нулевые значения:

$$\varphi_{2k} = \begin{vmatrix} -ch^{2k-2} 3u & ch^{2k-2} 5u & -ch^{2k-2} 7u & \dots & -ch^{2k-2} (4k-1)u & ch^{2k-2} (4k+1)u \\ ch^{2k-2} 5u & -ch^{2k-2} 7u & ch^{2k-2} 9u & \dots & ch^{2k-2} (4k+1)u & -ch^{2k-2} (4k+3)u \\ -ch^{2k-2} 7u & ch^{2k-2} 9u & -ch^{2k-2} 11u & \dots & -ch^{2k-2} (4k+3)u & ch^{2k-2} (4k+5)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ch^{2k-2} (4k-1)u & ch^{2k-2} (4k+1)u & -ch^{2k-2} (4k+3)u & \dots & -ch^{2k-2} (8k-5)u & ch^{2k-2} (8k-3)u \\ ch^{2k-2} (4k+1)u & -ch^{2k-2} (4k+3)u & ch^{2k-2} (4k+5)u & \dots & ch^{2k-2} (8k-3)u & -ch^{2k-2} (8k-1)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.30)$$

$$\varphi_{2k+1} = \begin{vmatrix} -ch^{2k-1} 3u & ch^{2k-1} 5u & -ch^{2k-1} 7u & \dots & ch^{2k-1} (4k+1)u & -ch^{2k-1} (4k+3)u \\ ch^{2k-1} 5u & -ch^{2k-1} 7u & ch^{2k-1} 9u & \dots & -ch^{2k-1} (4k+3)u & ch^{2k-1} (4k+5)u \\ -ch^{2k-1} 7u & ch^{2k-1} 9u & -ch^{2k-1} 11u & \dots & ch^{2k-1} (4k+5)u & -ch^{2k-1} (4k+7)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-1} (4k+1)u & -ch^{2k-1} (4k+3)u & ch^{2k-1} (4k+5)u & \dots & -ch^{2k-1} (8k-1)u & ch^{2k-1} (8k+1)u \\ -ch^{2k-1} (4k+3)u & ch^{2k-1} (4k+5)u & -ch^{2k-1} (4k+7)u & \dots & ch^{2k-1} (8k+1)u & -ch^{2k-1} (8k+3)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.31)$$

При нахождении конечных соответствующих цепных дробей (8.10.32) и (8.10.33)

$$ch^{2k}u + ch^{2k}3ux + ch^{2k}5ux^2 + ch^{2k}7ux^3 + \dots, \quad (8.10.32)$$

$$ch^{2k+1}u + ch^{2k+1}3ux + ch^{2k+1}5ux^2 + ch^{2k+1}7ux^3 + \dots, \quad (8.10.33)$$

были установлены определители Ганкеля, имеющие нулевые значения:

$$\varphi'_{2k} = \begin{vmatrix} ch^{2k-2}3u & ch^{2k-2}5u & ch^{2k-2}7u & \dots & ch^{2k-2}(4k-1)u & ch^{2k-2}(4k+1)u \\ ch^{2k-2}5u & ch^{2k-2}7u & ch^{2k-2}9u & \dots & ch^{2k-2}(4k+1)u & ch^{2k-2}(4k+3)u \\ ch^{2k-2}7u & ch^{2k-2}9u & ch^{2k-2}11u & \dots & ch^{2k-2}(4k+3)u & ch^{2k-2}(4k+5)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-2}(4k-1)u & ch^{2k-2}(4k+1)u & ch^{2k-2}(4k+3)u & \dots & ch^{2k-2}(8k-5)u & ch^{2k-2}(8k-3)u \\ ch^{2k-2}(4k+1)u & ch^{2k-2}(4k+3)u & ch^{2k-2}(4k+5)u & \dots & ch^{2k-2}(8k-3)u & ch^{2k-2}(8k-1)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.36)$$

$$\varphi'_{2k+1} = \begin{vmatrix} ch^{2k-1}3u & ch^{2k-1}5u & ch^{2k-1}7u & \dots & ch^{2k-1}(4k+1)u & ch^{2k-1}(4k+3)u \\ ch^{2k-1}5u & ch^{2k-1}7u & ch^{2k-1}9u & \dots & ch^{2k-1}(4k+3)u & ch^{2k-1}(4k+5)u \\ ch^{2k-1}7u & ch^{2k-1}9u & ch^{2k-1}11u & \dots & ch^{2k-1}(4k+5)u & ch^{2k-1}(4k+7)u \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ch^{2k-1}(4k+1)u & ch^{2k-1}(4k+3)u & ch^{2k-1}(4k+5)u & \dots & ch^{2k-1}(8k-1)u & ch^{2k-1}(8k+1)u \\ ch^{2k-1}(4k+3)u & ch^{2k-1}(4k+5)u & ch^{2k-1}(4k+7)u & \dots & ch^{2k-1}(8k+1)u & ch^{2k-1}(8k+3)u \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10.37)$$

8.11. Построение производящих функций для рядов, коэффициентами которых являются эллиптические числа

Под эллиптическими числами понимаются числа вида [20]:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}, \dots, \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \dots \quad (8.11.1)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$1 - \frac{\sin 2}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 - \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + \dots \quad (8.11.2)$$

В табл. 8.88 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующий ряду (8.11.2).

Таблица 8.88

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - \frac{\sin 2}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 - \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1.080604611736	-0.080604611736
2	-0.155196752895	0.0645709408138
3	-5.518025920159	-0.119044422344
4	-6.443433778999	0.3246116026023
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{\sin 2}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 - \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + \dots = \\
& = 1 - \frac{1.0806\dots x}{1} + \frac{0.1551\dots x}{1} - \frac{5.5180\dots x}{1} + \frac{6.44434\dots x}{1} = \\
& = \frac{1}{1 + 1.0806\dots x + x^2} = \frac{1}{1 + 2\cos 1x + x^2}.
\end{aligned} \quad (8.11.3)$$

При $x = 1$ из (8.11.3) получим значение ряда:

$$1 - \frac{\sin 2}{\sin 1} + \frac{\sin 3}{\sin 1} - \frac{\sin 4}{\sin 1} + \dots = 0,3246116026\dots \quad (8.11.4)$$

Это же значение ряда (8.11.4) получим при вычислении соответствующей цепной дроби (8.11.3) при $x = 1$. (табл. 8.88).

Можно записать производящую функцию для произвольного аргумента φ :

$$\frac{1}{1 + 2\cos \varphi x + x^2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}x - \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x^2 - \frac{\sin 4\varphi}{\sin \varphi}x^3 + \dots \quad (8.11.5)$$

Левую часть формулы (8.11.5) можно записать следующим образом

$$\frac{1}{1 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}x + x^2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}x^2 - \frac{\sin 4\varphi}{\sin \varphi}x^3 + \dots \quad (8.11.6)$$

Заменяя в (8.11.3) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{\sin 2}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 + \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + \dots = \\
& = 1 + \frac{1.0806\dots x}{1} - \frac{0.1551\dots x}{1} + \frac{5.5180\dots x}{1} - \frac{6.44434\dots x}{1} = \\
& = \frac{1}{1 - 1.0806\dots x + x^2} = \frac{1}{1 - 2\cos 1x + x^2}.
\end{aligned} \quad (8.11.7)$$

При $x = 1$ из (8.11.7) найдём значение ряда:

$$1 + \frac{\sin 2}{\sin 1} + \frac{\sin 3}{\sin 1} + \frac{\sin 4}{\sin 1} + \dots = \frac{1}{2(1 - \cos 1)} = 1.0876713248\dots \quad (8.11.8)$$

Это же значение ряда (8.11.8) получим при вычислении соответствующей цепной дроби (8.11.7) при $x = 1$. (табл. 8.89).

Таблица 8.89

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\frac{\sin 1}{\sin 1} + \frac{\sin 2}{\sin 1}x + \frac{\sin 3}{\sin 1}x^2 + \frac{\sin 4}{\sin 1}x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1.080604611736	2.08060461173628
2	-0.155196752895	2.27911986067806
3	-5.518025920159	2.10696180638934
4	-6.443433778999	1.08767132483501
5	0	

Имеют место производящие функции:

$$\frac{1}{1-2\cos\varphi x+x^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}x^2 + \frac{\sin 4\varphi}{\sin\varphi}x^3 + \dots \quad (8.11.9)$$

или

$$\frac{1}{1-\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x+x^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x + \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}x^2 + \frac{\sin 4\varphi}{\sin\varphi}x^3 + \dots \quad (8.11.10)$$

Для сравнения можно привести производящие функции, порождающие числа натурального ряда:

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots, \quad (8.11.11)$$

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots. \quad (8.11.12)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду:

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2 x + \left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2 x^3 + \dots \quad (8.11.13)$$

В табл. 8.90 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.11.13).

Таблица 8.90

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2 x + \left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2 x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x=1$
0	1	1
1	-1.1677063269057	-0.1677063269057
2	-0.0240860321094	-0.1402424115681
3	28.7358506451436	-0.1667612505640
4	27.1772223291379	-0.5495518855152
5	0.11266240667844	-0.3065216213541
6	1.52767042788781	0
7	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2 x + \left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2 x^3 + \dots = \\ & = 1 - \frac{1.1677\dots x}{1} + \frac{0.0240\dots x}{1} - \frac{28.7358\dots x}{1} + \frac{27.1772\dots x}{1} - \frac{0.1126\dots x}{1} + \frac{1.5276\dots x}{1} = \\ & = \frac{1-x}{1+0.1677\dots x+0.1677\dots x^2+x^3} = \frac{1-x}{1+\frac{\sin 3}{\sin 1}x+\frac{\sin 3}{\sin 1}x^2+x^3}. \end{aligned} \quad (8.11.14)$$

Запишем производящую функцию:

$$\frac{1-x}{1+\frac{\sin 3}{\sin 1}x+\frac{\sin 3}{\sin 1}x^2+x^3}=\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2-\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2x+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2x^2-\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2x^3+\dots \quad (8.11.15)$$

При $x = 1$ из (8.11.15) следует, что знакопеременный ряд имеет нулевое значение:

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2-\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2-\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2+\dots=0. \quad (8.11.16)$$

Заменяя в (8.11.14) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2x+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2x^2+\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2x^3+\dots= \\ &=1+\frac{1.1677\dots x}{1}-\frac{0.0240\dots x}{1}-\frac{28.7358\dots x}{1}+\frac{27.1772\dots x}{1}-\frac{0.1126\dots x}{1}+\frac{1.5276\dots x}{1}= \\ &=\frac{1+x}{1-0.1677\dots x+0.1677\dots x^2-x^3}=\frac{1+x}{1-\frac{\sin 3}{\sin 1}x+\frac{\sin 3}{\sin 1}x^2-x^3}. \end{aligned} \quad (8.11.17)$$

При $x = 1$ из (8.11.17) следует, что ряд имеет бесконечно большое значение:

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2+\dots=\infty. \quad (8.11.18)$$

Это же бесконечно большое значение для ряда (8.11.18) получим при вычислении соответствующей цепной дроби (8.11.17) при $x = 1$ (табл. 8.91)

Таблица 8.91

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2x+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2x^2+\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2x^3+\dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_i	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-1.1677063269057	2.16770632690572
2	0.0240860321094	2.19652588786046
3	-28.7358506451436	2.16669316133509
4	-27.1772223291379	1.52720501282655
5	-0.11266240667844	2.58529663551028
6	-1.52767042788781	∞
7	0	

Запишем производящую функцию для ряда (8.11.18):

$$\frac{1-x}{1+\frac{\sin 3}{\sin 1}x+\frac{\sin 3}{\sin 1}x^2+x^3}=\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^2+\left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^2x+\left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^2x^2+\left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^2x^3+\dots \quad (8.11.19)$$

В табл. 8.92 приведены значения знакопеременных рядов, коэффициенты которых – степени эллиптических чисел:

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^k - \left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^k + \left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^k - \left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^k + \dots, \quad k=1, 2, \dots, 12. \quad (8.11.20)$$

Таблица 8.92
Значения знакопеременных рядов (8.11.20)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.3246116026023
2	6	0
3	8	-2.61455741239315
4	10	0
5	12	-4.87328065368627
6	14	0
7	16	-7.39108346617819
8	18	0
9	20	-10.5385795179831
10	22	0
11	24	-14.6476934948922
12	26	0

В табл. 8.93 приведены значения рядов, коэффициенты которых степени эллиптических чисел:

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 1}\right)^k + \left(\frac{\sin 2}{\sin 1}\right)^k + \left(\frac{\sin 3}{\sin 1}\right)^k + \left(\frac{\sin 4}{\sin 1}\right)^k + \dots, \quad k=1, 2, \dots, 12. \quad (8.11.21)$$

Таблица 8.93
Значения знакопеременных рядов (8.11.20)

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	1.08767132483501
2	6	∞
3	8	1.13719723987452
4	10	∞
5	12	1.23045913225719
6	14	∞
7	16	1.32169585969308
8	18	∞
9	20	1.40982955954259
10	22	∞
11	24	1.49300537424065
12	26	∞

8.12. Определение производящих функций для рядов, коэффициенты которых гиперболические числа

Под гиперболическими числами понимаются числа вида [20]:

$$\frac{shu}{shu}, \frac{sh2u}{shu}, \frac{sh3u}{shu}, \dots, \frac{shnu}{shu}, \dots \quad (8.12.1)$$

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\frac{sh1}{sh1} - \frac{sh2}{sh1}x - \frac{sh3}{sh1}x^2 - \frac{sh4}{sh1}x^3 + \dots \quad (8.12.2)$$

В табл. 8.94 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.12.2).

Таблица 8.94

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - \frac{sh2}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 - \frac{sh4}{sh1}x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-3.08616126963049	-2.08616126963049
2	-2.76213413279854	0.179678033612592
3	-0.038011762049053	0.202805239397437
4	-0.362038898880996	0.196611933241482
5	0	

Следовательно,

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{sh2}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 - \frac{sh4}{sh1}x^3 + \dots = \\ & = 1 - \frac{3.0861..x}{1} + \frac{2.7621..x}{1} - \frac{0.0380..x}{1} + \frac{0.3620..x}{1} = \\ & = \frac{1}{1 + 3.0862..x + x^2} = \frac{1}{1 - 2ch1x + x^2}. \end{aligned} \quad (8.12.3)$$

При $x = 1$ из (8.12.3) имеем значение ряда:

$$1 - \frac{sh2}{sh1} + \frac{sh3}{sh1} - \frac{sh4}{sh1} + \dots = 0.1966119332... \quad (8.12.4)$$

Это же значение ряда (8.12.4) получим при вычислении соответствующий цепной дроби при $x = 1$. (Табл. 8.94).

Можно записать производящую функцию для произвольного аргумента «u»:

$$\frac{1}{1 + 2chux + x^2} = \frac{shu}{shu} - \frac{sh2u}{shu}x + \frac{sh3u}{shu}x^2 - \frac{sh4u}{shu}x^3 + \dots \quad (8.12.5)$$

Левую часть (8.12.5) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{1 + \frac{sh2u}{shu}x + x^2} = \frac{shu}{shu} - \frac{sh2u}{shu}x + \frac{sh3u}{shu}x^2 - \frac{sh4u}{shu}x^3 + \dots \quad (8.12.6)$$

Заменяя в (8.12.3) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{sh2}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 + \frac{sh4}{sh1}x^3 + \dots = \\
& = 1 + \frac{3.0861...x}{1} - \frac{2.7621...x}{1} + \frac{0.0380...x}{1} - \frac{0.3620...x}{1} = \\
& = \frac{1}{1 - 3.0862...x + x^2} = \frac{1}{1 - 2ch1x + x^2}.
\end{aligned} \tag{8.12.7}$$

При $x = 1$, из (8.12.7) получим значение ряда:

$$1 + \frac{sh2}{sh1} + \frac{sh3}{sh1} + \frac{sh4}{sh1} + \dots = -0.9206739420... \tag{8.12.8}$$

Это же значение ряда (8.12.8) получим при вычислении соответствующей цепной дроби при $x = 1$ (Табл. 8.95)

Таблица 8.95

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$\frac{sh1}{sh1} + \frac{sh2}{sh1}x + \frac{sh3}{sh1}x^2 + \frac{sh4}{sh1}x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	3.08616126963049	4.08616126963049
2	2.76213413279854	-0.75137704456651
3	0.038011762049053	-0.85803035318433
4	0.362038898880996	-0.92067359420779
5	0	

Определим цепную дробь, соответствующую ряду

$$\left(\frac{sh1}{sh1}\right)^2 - \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + \dots \tag{8.12.9}$$

В табл. 8.96 приведены коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду (8.12.9).

Таблица 8.96

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 - \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	-9.52439138216726	-8.52439138216726
2	-7.62938496757077	-0.10371613017149
3	-0.20854227675293	0.10482199995688
4	-0.97849693059613	0.00041083180851
5	-0.00890079464522	-0.552776427912e-4
6	-0.13395255539852	0
7	0	

Следовательно,

$$1 - \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{9.5243...x}{1} + \frac{7.6293...x}{1} - \frac{0.2085...x}{1} + \frac{0.9784...x}{1} - \frac{0.0089...x}{1} + \frac{0.1339...x}{1} = \\
&= \frac{1-x}{1+8.5243...x+8.5243...x^2+x^3} = \frac{1-x}{1+\frac{sh3}{sh1}x+\frac{sh3}{sh1}x^2+x^3}. \quad (8.12.10)
\end{aligned}$$

Здесь

$$sh1=1,17520..., \quad sh3=10,01787..., \quad \frac{sh3}{sh1}=8,5243... .$$

Запишем производящую функцию:

$$\frac{1-x}{1+\frac{sh3}{sh1}x+\frac{sh3}{sh1}x^2+x^3} = \left(\frac{sh1}{sh1}\right)^2 - \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 - \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + ... \quad (8.12.11)$$

Производящая функция общего вида:

$$\frac{1-x}{1+\frac{sh3u}{shu}x+\frac{sh3u}{shu}x^2+x^3} = \left(\frac{shu}{shu}\right)^2 - \left(\frac{sh2u}{shu}\right)^2 x + \left(\frac{sh3u}{shu}\right)^2 x^2 - \left(\frac{sh4u}{shu}\right)^2 x^3 + ... \quad (8.12.12)$$

При $x = 1$ из (8.12.12) следует, что знакопеременный ряд, коэффициенты которого – степени гиперболических чисел – имеют нулевое значение:

$$\left(\frac{shu}{shu}\right)^2 - \left(\frac{sh2u}{shu}\right)^2 + \left(\frac{sh3u}{shu}\right)^2 - \left(\frac{sh4u}{shu}\right)^2 + ... = 0. \quad (8.12.13)$$

В табл. 8.97 приведены значения знакопеременных рядов, коэффициенты которых – степени гиперболических чисел

$$\left(\frac{sh1}{sh1}\right)^k - \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^k + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^k - \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^k + ... \quad k=1,2,...,12. \quad (8.12.14)$$

Таблица 8.97

Значения рядов (8.12.14) при различных степенях коэффициентов

Степень коэффициентов ряда	Число звеньев дроби	Значения цепных дробей
1	4	0.196611933241482
2	6	0
3	8	-0.037059697019300
4	10	0
5	12	0.0150846092671873
6	14	0
7	16	-0.007757535601450
8	18	0
9	20	0.0044439511061163
10	22	0
11	24	-0.002702870363081
12	26	

Заменяя в (8.12.10) x на $-x$, получим:

$$\begin{aligned}
 & 1 + \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{9.5243\dots x}{1} - \frac{7.6293\dots x}{1} + \frac{0.2085\dots x}{1} - \frac{0.9784\dots x}{1} + \frac{0.0089\dots x}{1} - \frac{0.1339\dots x}{1} = \\
 & = \frac{1+x}{1-8.5243\dots x+8.5243\dots x^2-x^3} = \frac{1+x}{1-\frac{sh3}{sh1}x+\frac{sh3}{sh1}x^2-x^3}. \quad (8.12.15)
 \end{aligned}$$

Запишем производящую функцию:

$$\frac{1+x}{1-\frac{sh3}{sh1}x+\frac{sh3}{sh1}x^2-x^3} = 1 + \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + \dots \quad (8.12.16)$$

Производящая функция общего вида:

$$\frac{1+x}{1-\frac{sh3u}{shu}x+\frac{sh3u}{shu}x^2-x^3} = 1 + \left(\frac{sh2u}{shu}\right)^2 x + \left(\frac{sh3u}{shu}\right)^2 x^2 + \left(\frac{sh4u}{shu}\right)^2 x^3 + \dots \quad (8.12.17)$$

При $x = 1$ из (8.12.16) следует, что знаменательный ряд, коэффициенты которого – квадраты гиперболических чисел, имеют бесконечно большое значение:

$$1 + \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 + \dots = \infty. \quad (8.12.18)$$

Это же бесконечно большое значение получим для ряда (8.12.17), вычисляя соответствующую цепную дробь (8.12.15), если $x = 1$. (Табл. 8.98).

Таблица 8.98

Коэффициенты цепной дроби, соответствующей ряду

$$1 + \left(\frac{sh2}{sh1}\right)^2 x + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^2 x^3 + \dots$$

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби, ω_0	Значения подходящих дробей P_n/Q_n при $x = 1$
0	1	1
1	9.52439138216726	10.5243913821673
2	7.62938496757077	-0.43669306108456
3	0.20854227675293	-0.79269765667228
4	0.97849693059613	34.2025591140726
5	0.00890079464522	260.458434631397
6	0.13395255539852	∞
7	0	

В табл. 8.99 приведены значения знакопостоянных рядов, коэффициенты которых – степени гиперболических чисел.

$$\left(\frac{sh1}{sh1}\right)^k + \left(\frac{sh2}{sh}\right)^k + \left(\frac{sh3}{sh1}\right)^k + \left(\frac{sh4}{sh1}\right)^k + \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.12.19)$$

Таблица 8.99

Значения знакопостоянных рядов (8.12.19)
при различных степенях коэффициентов

Степень	Длина дроби	Значение P_n/Q_n при $x = 1$
1	4	-0.920673594207792
2	6	∞
3	8	0.414883217346998
4	10	∞
5	12	-0.238794640251436
6	14	∞
7	16	0.147955459132747
8	18	∞
9	20	-0.095162851757421
10	22	∞
11	24	0.0626191403522509
12	26	∞

ГЛАВА 9

ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

9.1 Функция Вейерштрасса

Пример непрерывной недифференцируемой функции был опубликован Вейерштрассом в 1875 г. Функция Вейерштрасса представляется тригонометрическим рядом вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad 0 < b < 1, \quad a = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Эта публикация 1875 года принята за точку отчёта кризиса математики. Пример подорвал интуитивное представление о том, что к непрерывной кривой всегда можно провести касательную. «Как интуиция может обмануть нас до такой степени?» – недоумевал Анри Пуанкаре. Более эмоционален был его старший товарищ Шарль Эрмит: «Я с ужасом отворачиваюсь от внушающих сомнение язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производных» [32]. Такие функции стали называть «плохими» и «монстрами».

Ниже приведён список классических фрактальных функций.

Классические фрактальные функции	
Функция Больцано, 1830 г.	Функция Римана, 1861 г.
Функция Вейерштрасса, 1872 г.	Функция Дарбу, 1872 г.
Функция Ханкеля, 1875 г.	Функция Кантора, 1883 г.
Ковер Серпиньского, 1915 г.	Салфетка Серпиньского, 1915 г.
Функция Безинковича, 1922 г.	Функция Ван дер Вардена, 1930 г.

Приведём аналитические записи функции Римана

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{n^2}$$

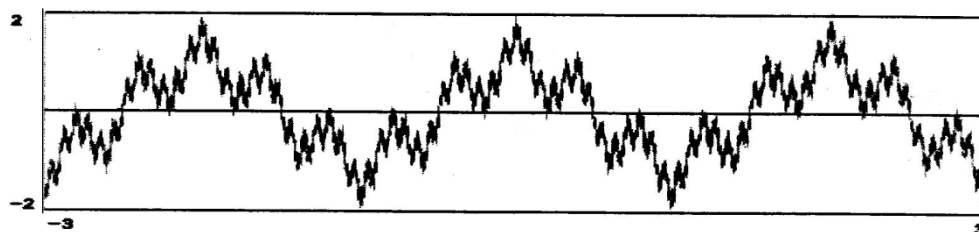
и функции Ван дер Вардена

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n},$$

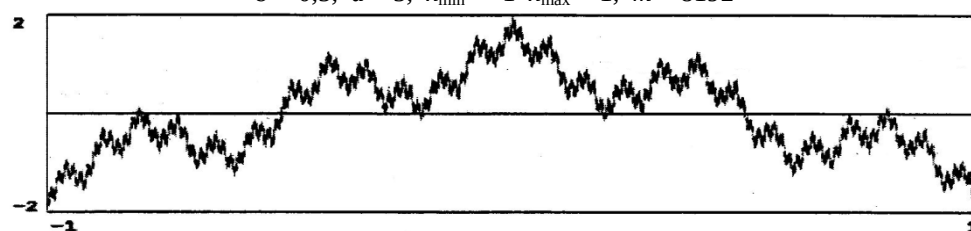
где $\{ \}$ – дробная часть числа.

На рис. 9.1 показаны графики функции Вейерштрасса. Из представленных графиков функции Вейерштрасса на различных интервалах изменения переменной x хорошо просматривается свойство самоподобия, столь характерное для фрактальных функций.

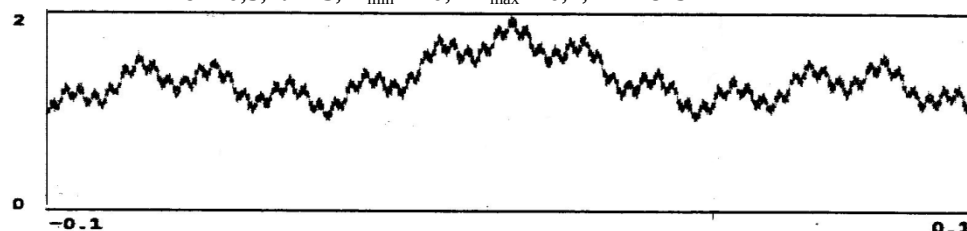
$$b = 0,5, a = 5, x_{\min} = -3, x_{\max} = 3, m = 8192$$



$$b = 0,5, a = 5, x_{\min} = -1, x_{\max} = 1, m = 8192$$



$$b = 0,5, a = 5, x_{\min} = -0,1, x_{\max} = 0,1, m = 8192$$



$$b = 0,5, a = 5, x_{\min} = -0,01, x_{\max} = 0,01, m = 8192$$

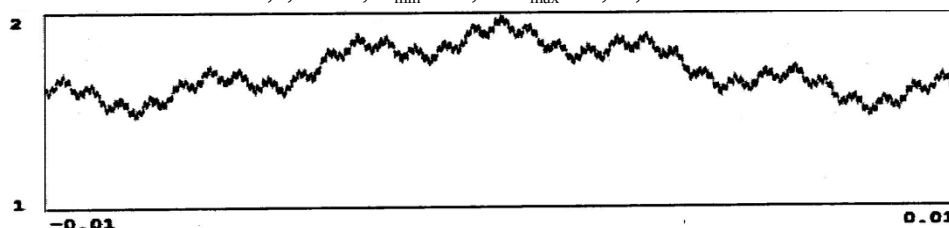


Рис. 9.1. Графики функции Вейерштрасса $w(0,5; 5)$ на различных интервалах.

Непрерывные нигде недифференцируемые функции – одно из семейств функций со сложным локальным строением. Примеры Б. Больцано и К. Вейерштрасса – первые из таких конструкций. В последующее время недифференцируемые функции всё чаще фигурируют в теоретических и прикладных исследованиях. В частности, они используются при конструировании фрактальных антенн, в процессе моделирования речевых сигналов и обработки цифровых изображений, в теории динамических систем, в теории приближений, в теории оптимизации и т. д. [54].

"Негладкий анализ" – интенсивно развивающийся раздел математики, в котором изучаются недифференцируемые функции. Быстрому становлению этого направления способствовали как потребности современной науки, так и возросшие возможности вычислительной техники. Сформировались направления негладкого анализа, такие как недифференцируемая оптимизация, негладкие задачи вариационного исчисления и другие [47]. Одним из перспективных подходов в изучении недифференцируемых функций рассматривается подход, связанный с использованием фрактального анализа. В [54] с помощью средств фрактального анализа изучаются свойства непрерывной недифференцируемой функции, весьма близкой к знаменитой функции Вейерштрасса. В [101, 102] был рассмотрен подход к изучению недифференцируемых функций, основные идеи которого связаны с r/φ -алгоритмом, предложенным для суммирования расходящихся непрерывных дробей. Была введена модификация функции Вейерштрасса, названная «функцией Вейерштрасса на интервале», и определены для этой функции r/φ -характеристики.

Применим к изучению свойств функции Вейерштрасса несколько необычный приём, связанный с построением для рядов, так называемых, соответствующих цепных дробей [28]. Следует отметить, что цепные дроби получили в последнее время в вычислительной математике разнообразные применения. Для суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей используется r/φ -алгоритм [75], существенно расширивший область использования цепных дробей [75-102].

Функция Вейерштрасса определяется рядом

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (9.1.1)$$

где $0 < b < 1$, a – нечетное натуральное число.

Ряд (9.1.1) равномерно сходится в любом интервале, так что функция Вейерштрасса всюду непрерывна. К. Вейерштрасс доказал [150], что если $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$, то функция (9.1.1) не имеет конечной производной ни при каком значении x .

Функция Вейерштрасса имеет период равный 2. На рис. 9.2 представлен график функции Вейерштрасса на интервале $-2 \leq x \leq 2$ при $a = 7$ и $b = 0,9$.

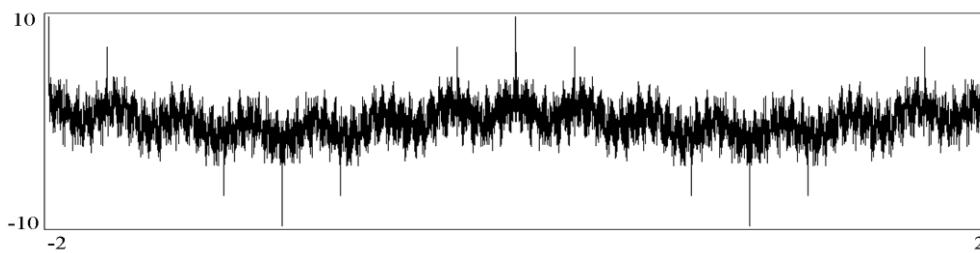


Рис. 9.2. График функции Вейерштрасса.

В табл. 9.1 показана точность, достигаемая при вычислении функции Вейерштрасса $w(7; 0,9; 0,1)$ с учетом различного числа членов ряда.

Рассмотрим распределение значений функции Вейерштрасса на малом интервале. На рис. 9.3 показан график функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ на интервале $\Delta = 10^{-300}$.

Таблица 9.1

Вычисление функции Вейерштрасса при различном числе членов ряда

Число членов ряда, n	Значения отрезка ряда, представляющего функцию Вейерштрасса	Погрешность
2	4.2204978923192775586460397420421665166781144024692e-01	1.89e-01
4	8.0189459954066273614274755098801163816884173646915e-02	1.53e-01
8	1.3280176462992915573260042191912460739714187997666e-01	1.00e-01
16	1.8996856973325144189846843158747302278573490702436e-01	4.32e-02
32	2.2517012922955381321127980074052478742166044585789e-01	8.01e-03
64	2.3290175952504074389342519523909093248589396724251e-01	2.75e-04
128	2.3317635499836877544784036173119612917618731038072e-01	3.24e-07
256	2.3317667913321116811724129275538570577751743695572e-01	4.51e-13
512	2.3317667913366174357160353497497570773161651672808e-01	8.71e-25
1024	2.3317667913366174357160440563768875782752013272985e-01	3.25e-48

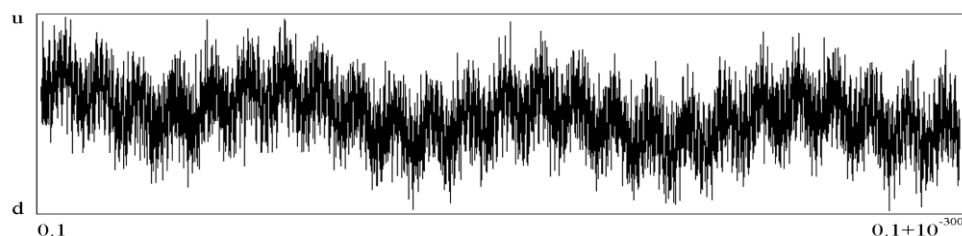


Рис. 9.3. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1 + 10^{-300})$, $u = 2.3317667913366195134e-01$, $d = 2.3317667913366137302e-01$.

Функция Вейерштрасса непрерывна в классическом смысле, так как существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Однако значения функции Вейерштрасса в точках $x_0 + \Delta$ становятся «близкими» к значению функции Вейерштрасса в точке x_0 при чрезвычайно малых значениях Δ . В табл. 9.2 приведены значения функции Вейерштрасса в точках $0,1 + \Delta$ при различных Δ .

Таблица 9.2

Значения функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$, $b = 0.9$ при различных Δ

Значение интервала Δ	Значение функции Вейерштрасса в точках $0,1 + \Delta$	Погрешность $ w(0,1) - w(0,1 + \Delta) $
10^1	2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326233293e-01	0
10^0	-2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326233293e-01	4.66e-01
10^{-1}	2.79421947072365653900120706167516792571587083679099022687775e+00	2.56e+00
10^{-2}	1.37685211023282374001780935329259808283502910036371946069195e+00	1.14e+00
10^{-4}	4.96762002463445910291670824064921068274791345674378794043767e-02	1.84e-01
10^{-8}	7.03572868503591089731662656211376043098531727582289028119593e-01	4.70e-01
10^{-16}	3.20733180632571301134540019606572188653878229737862341637813e-01	8.76e-02
10^{-32}	2.56180928511730305513974903805138604459611382716200133685240e-01	2.30e-02
10^{-64}	2.33541303271725083375936916633689033437185591321161407388559e-01	3.65e-04
10^{-128}	2.33176322692160345779285021926333847664419161660568200330212e-01	3.56e-07
10^{-256}	2.33176679133625844502873812089507021787307127291212906598672e-01	3.59e-14
10^{-512}	2.33176679133661743571604406042422476731687042776296698327206e-01	4.05e-28
10^{-1024}	2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326271496e-01	3.82e-56

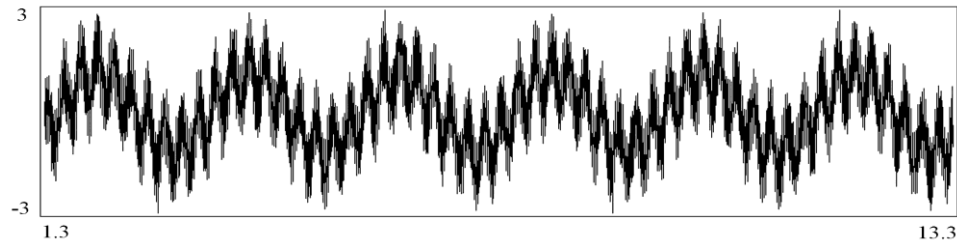
В табл. 9.3 приведены значения функции Вейерштрасса в различных точках x , полученные вычислением ряда (9.1.1) при $a = 7$; $b = 0,9$.

Таблица 9.3

Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда для различных значений x

Аргумент, x	Значение функции Вейерштрасса
0,1	2.3317667913366174357160440563768875782752013273310e-1
0,2	2.7942194707236565390012070616751679257158708367909e+0
0,3	7.9764426351276869838314991971299265064242055710293e-1
0,4	-2.2057805292763434609987929383248320742841291632091e+0
0,6	2.2057805292763434609987929383248320742841291632090e+0
0,7	-7.9764426351276869838314991971299265064242055710294e-1
0,8	-2.7942194707236565390012070616751679257158708367910e+0
0,9	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1
1,0	-1.0000000000000000000000000000000000000000000000000e1
1,1	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1

На рис. 9.3 показаны значения функции Вейерштрасса при параметрах $a = 9$, $b = 0,7$ на интервале $\Delta = 1,3 \div 13,3$. Всего представлено 8192 значений функции.

Рис. 9.3. График значений функции Вейерштрасса на интервале $1,3 \div 13,3$.

В точке $x = 1,3$ функция Вейерштрасса $w(9; 0,7; x)$ имеет отрицательное значение: $-0,345756030760\dots$. В табл. 9.4 приведены значения функции Вейерштрасса в точках $1,3 + \Delta$ при различных Δ .

Таблица 9.4

Значения функции Вейерштрасса с параметрами $a = 9$, $b = 0,7$ в точках $1,3 + \Delta$

Значение интервала, Δ	Значение функции Вейерштрасса в точках $1,3 + \Delta$	Погрешность $ w(1,3) - w(1,3 + \Delta) $
10^1	-3.45756030760278311275709385081807510939795551554791759454278e-01	0
10^0	3.45756030760278311275709385081807510939795551554791759454278e-01	6.92e-01
10^{-1}	-1.03005664791649141367431139060939686286718196634293810355908e+00	6.84e-01
10^{-2}	5.02280048447134686201947919875578252705428180063421306724025e-02	3.96e-01
10^{-4}	2.92109189892759350992649396281127585423140533086713937622190e-01	6.38e-01
10^{-8}	-2.46222987121663843344296124305029093759242235423862297116265e-01	9.95e-02
10^{-16}	-3.45590707781033681047106982655588650305386535266653267592301e-01	1.65e-04
10^{-32}	-3.45749196836879869617953993530183327251468715838712534616496e-01	6.83e-06
10^{-64}	-3.45756030789811925974558017962227886890935634937869060301925e-01	2.95e-11
10^{-128}	-3.45756030760278311271601943622372227840040709299187665435248e-01	4.11e-22
10^{-256}	-3.45756030760278311275709385081807510939790180284617678000104e-01	5.37e-43

9.2. Интервальные и предельные r/φ -характеристики функции Вейерштрасса

Исследуем поведение функции Вейерштрасса в окрестности точки x_0 . Пусть $x_0 = 0,1$. Зафиксируем параметры функции Вейерштрасса: $a = 7$, $b = 0,9$. Определим интервал Δ , который будет разбит на равные подинтервалы. Положим $\Delta = 10^{-20}$, число

подинтервалов $k = 2^{21} = 2097152$. На концах подинтервалов, последовательно приближаясь к точке x_0 , вычисляются значения функции Вейерштрасса. Погрешность при вычислении функции не более 10^{-15} .

Необходимо обратить внимание на технические трудности, связанные с вычислением значений функции Вейерштрасса. Основная сложность заключается в вычислении аргумента косинуса, то есть величины $a^n \pi x$. Для решения данной задачи необходимо вычислить число a^n без округления мантиссы. При вычислениях использовался ряд (9.1.1) с числом членов $n = 328$, количество двоичных разрядов – 921.

На рис. 9.5 показан график значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$.

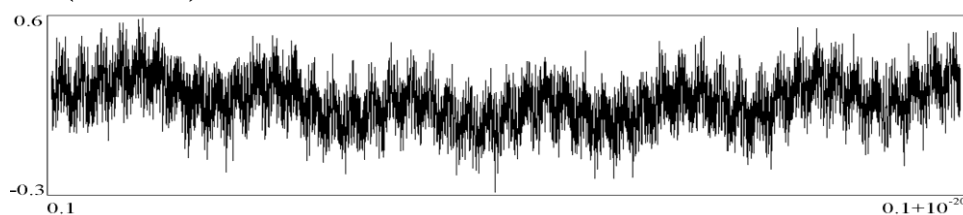


Рис. 9.5. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$.

На рис. 9.6 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$ при разбиении интервала на 2^{21} подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$, равное величине $0.233176679133662\dots$.

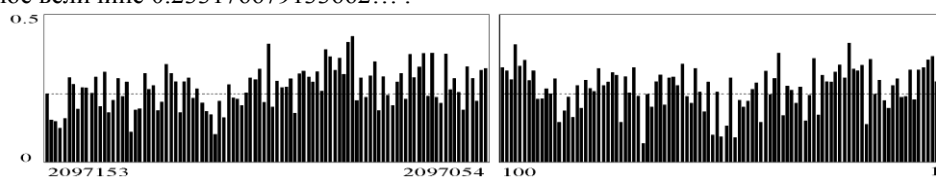


Рис. 9.6. График значений функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$.

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале $\Delta = 10^{-20}$, приведены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

Значения функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-20}$

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
1	3.24014862156500e-01	2097138	2.10991015021163e-01
2	2.74289439233013e-01	2097139	1.67513366971720e-01
3	3.59284219294589e-01	2097140	3.05878002954722e-01
4	3.46981500573381e-01	2097141	1.90184673531470e-01
5	3.21259163112732e-01	2097142	2.88853681374806e-01
6	3.13954021162165e-01	2097143	2.33956481702537e-01
7	2.13003106734017e-01	2097144	2.52189129082863e-01
8	3.13799922112283e-01	2097145	2.53105387775118e-01
9	2.23139061724919e-01	2097146	1.79924537986997e-01
10	2.20166036849900e-01	2097147	2.63796484186860e-01
11	2.82887413388193e-01	2097148	2.87176242316425e-01
12	2.60196374217181e-01	2097149	1.48097057172765e-01
13	1.83107597783911e-01	2097150	1.16383280790168e-01
14	2.10074070258832e-01	2097151	1.39161415417736e-01
15	2.78049265560823e-01	2097152	1.43395529410563e-01
16	2.30314228854660e-01	2097153	2.33176679133662e-01

Из табл. 9.5 можно видеть, что значение функции Вейерштрасса в ближайшей к x_0 точке, то есть в точке $x_0 + 10^{-20}/2^{21}$, составляет величину 0,1433955294... . Это значение не приближает значения функции в точке x_0 , равное величине 0,2331766791...

Анализируя графики значений функции Вейерштрасса заключаем, что значения функции на интервале Δ осциллируют относительно "уровня x_0 ", то есть относительно значения, равного значению функции Вейерштрасса в точке x_0 . Схожий осциллирующий характер имеют подходящие дроби расходящихся непрерывных дробей, которые удалось просуммировать, то есть найти их значения, используя, так называемый, r/φ -алгоритм, нашедший в последствии многочисленные применения в вычислительной математике [75]. Следует, однако, отметить важную особенность: в r/φ -алгоритме "уровень" задается осью x , которая разделяет подходящие дроби на положительные и отрицательные. Оказалось, что идеи "усреднения" и "уровня", связанные с r/φ -алгоритмом, могут эффективно быть использованы при разработке метода анализа быстро осциллирующих функций, в частности, функции Вейерштрасса.

Для функции Вейерштрасса можно получить некоторые характеристики, которые по аналогии с r/φ -алгоритмом назовём r/φ -характеристиками.

Введём для функции Вейерштрасса (9.1.1) r/φ -характеристики.

r -характеристика:

$$r(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x_i)}, \quad (9.2.1)$$

где $w(a, b, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x_i)$ - значение функции Вейерштрасса в точке x_i равномерно делимого интервала $[x_0, x_0 + \Delta]$, на котором определяется r -характеристика функции (9.1.1).

Модуль φ -характеристики:

$$|\varphi(a, b, [x_0, x_0 + \Delta])| = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}, \quad (9.2.2)$$

где k_n – число значений функции Вейерштрасса $w(a, b, x_i)$, меньших значения функции Вейерштрасса в точке x_0 , из общего числа n значений функции $w(a, b, x_i)$ при равномерном делении интервала $[x_0, x_0 + \Delta]$.

Можно отметить, что из определения интеграла Римана следует, что r -характеристика любой функции $f(x)$, для которой функция $\ln|f(x)|$ интегрируема на соответствующем промежутке, вычисляется по формуле

$$r = e^{\frac{1}{\Delta} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta} \ln|f(x)| dx}.$$

Так как функция Вейерштрасса непрерывна, то r -характеристика может быть записана следующим образом:

$$r(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = e^{\frac{1}{\Delta} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta} \ln|\omega(a, b, x)| dx}.$$

В табл. 9.6 даны результаты вычисления по формулам (9.2.1) и (9.2.2) r/φ -характеристик функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 25$. Вычисления r/φ -характеристик последовательно производились при равномерном разбиении интервала на 2^m подинтервалов.

Таблица 9.6

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 25$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\varepsilon_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\varepsilon_\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	-2.331766791e-01	2.3317667910e-01	-	1.5707963268e+00	-
2	2.205780529e+00	4.9314826341e-01	0.2599715843	1.0471975512e+00	0.5235987756
4	1.724603181e+00	7.7988275492e-01	0.2867344915	6.2831853072e-01	0.4188790205
8	1.333442649e+00	1.4464849509e+00	0.6666021960	3.4906585040e-01	0.2792526803
16	3.796251302e+00	1.7881574346e+00	0.3416724837	1.1087974071e+00	0.7597315567
32	-2.129762209e-01	8.3950843324e-01	0.9486490014	1.3327968833e+00	0.2239994762
64	1.422117868e+00	6.0494810976e-01	0.2345603235	1.4016336454e+00	0.0688367621
128	2.975271748e-01	6.8063524070e-01	0.0756871309	1.6803867682e+00	0.2787531228
256	1.647489222e+00	7.0823901958e-01	0.0276037789	1.6869252381e+00	0.0065384699
...	...	...	...	...	...
131072	2.543908594e-01	8.7062555163e-01	0.0001938679	1.7551722203e+00	0.0036537262
262144	1.108887951e+00	8.6857735559e-01	0.0020481960	1.7570604318e+00	0.0018882115
524288	-1.682734508e-01	8.7023793431e-01	0.0016605787	1.7552481766e+00	0.0018122552
1048576	8.577267975e-02	8.7113592115e-01	0.0008979868	1.7541922436e+00	0.0010559330
2097152	1.465355619e+00	8.7078133339e-01	0.0003545878	1.7547383621e+00	0.0005461185

В первой колонке табл. 9.6 приведено количество подинтервалов, на которые равномерно разбивается исходный интервал $\Delta = 25$. Во второй колонке даны значения функции Вейерштрасса в точках x_i , соответствующей последнему подинтервалу при равномерном делении исходного интервала на 2^m фрагментов, причём, приближение к точке $x_0 = 0,1$ осуществляется справа.

В третьей колонке приведены значения r -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 25$, вычисленные по формуле (9.2.1). Несмотря на то, что при вычислении r -характеристики использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые определялись последовательно в точках x_i интервала $\Delta = 25$, разбиваемого всякий раз на 2^m частей ($m = 1, 2, \dots, 21$), в колонке 3 фиксировались числа, асимптотически стремящиеся к некоторому значению. В колонке 4 дана разность значений r_{2^m} и $r_{2^{m-1}}$, полученных при разбиении интервала Δ на 2^m и 2^{m-1} частей, соответственно. В колонке 5 показаны значения модуля φ -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на том же интервале $\Delta = 25$. Выше уже отмечалось, что за уровень отчёта, который определял, какие значения функции Вейерштрасса, вычисленные в точке x_i интервала Δ , относить к множеству k_n формулы (9.2.2), было взято значение функции Вейерштрасса в точке x_0 .

На рис. 9.7 представлены значения r -характеристики функции Вейерштрасса, вычисленные на интервале $0,1 \div 25,1$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов. В левой части рис. 9.7 приведены значения r_n , найденные по формуле (9.2.1) при использовании значений функции Вейерштрасса на начальном участке интервала ($k = 1 \div 100$). В правой части рис. 9.7 значения r_n практически одинаковые. При их вычислении используется значительное число отчётов функции Вейерштрасса ($k = 2^{21} - i$, где $i = 100, 99, \dots, 1$).

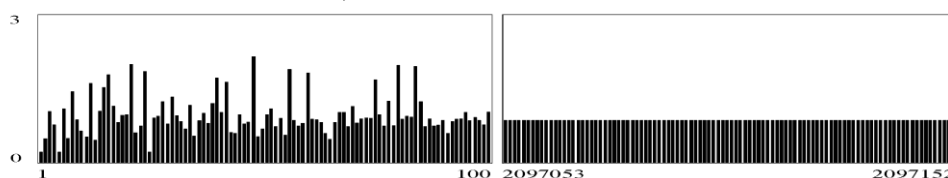


Рис. 9.7. График значений r -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 25,1$.

На рис. 9.8 показаны значения φ -характеристики функции Вейерштрасса, полученные по формуле (9.2.2) на интервале $0,1 \div 25,1$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов.

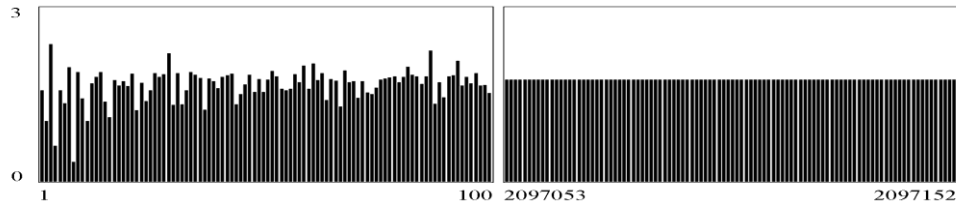


Рис. 9.8. График значений φ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 25,1$.

В табл. 9.7 даны результаты вычисления по формулам (9.2.1) и (9.2.2) r/φ -характеристик функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 2$. Вычисления r/φ -характеристик последовательно производились при равномерном разбиении интервала на 2^n подинтервалов.

Таблица 9.7

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 2$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\varepsilon_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\varepsilon_\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	2.33176679133662e-01	0.2331766791	-	0.0000000000	-
2	-2.33176679133663e-01	0.2331766791	0.0000000000	1.0471975512	1.0471975512
4	2.20578052927634e+00	0.5728434969	0.3396668178	1.2566370614	0.2094395102
8	1.72460318109052e+00	0.8918458265	0.3190023296	1.3962634016	0.1396263402
16	-1.33344264922251e+00	1.6104199560	0.7185741294	1.4783965429	0.0821331413
32	3.93834935811930e+00	1.9020217070	0.2916017510	1.6183962155	0.1399996726
64	-3.07225675894610e-01	0.8562175775	1.0458041295	1.8366233975	0.2182271820
128	5.61180636551890e-01	0.6094354070	0.2467821705	1.8752142196	0.0385908221
256	-3.93218785952536e-01	0.6834781925	0.0740427855	1.8091661974	0.0660480222
...	...	...	...	...	...
131072	-8.28042548021563e-02	0.8704404310	0.0024525610	1.7453931674	0.0033182476
262144	1.26462292644948e+00	0.8706299270	0.0001894960	1.7464784016	0.0010852342
524288	-3.41619609891292e-01	0.8685795342	0.0020503928	1.7488126601	0.0023342585
1048576	3.21418793964801e-01	0.8702390273	0.0016594931	1.7475919381	0.0012207220
2097152	1.01082077196144e-01	0.8711364686	0.0008974413	1.7467149273	0.0008770108

Во второй колонке табл. 9.7 приведены значения функции Вейерштрасса в точках x_i , которые соответствуют последнему подинтервалу при равномерном разбиении исходного интервала $\Delta = 2$ на 2^n фрагментов, причём, приближение к точке $x_0 = 0,1$ осуществляется справа (рис. 9.9).

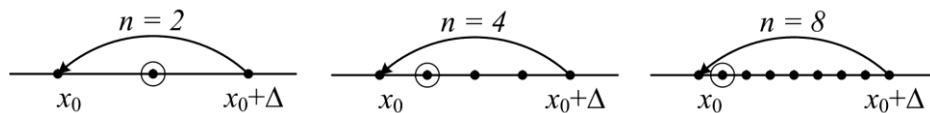


Рис. 9.9 Точки x_i , соответствующие последнему подинтервалу при $x \rightarrow x_0$.

В третьей и пятой колонках табл. 9.7 даны значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса на интервале $\Delta = 2$, найденные по формулам (9.2.1) и (9.2.2). При вычислении r/φ -характеристик использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые определялись последовательно в точках x_i интервала $\Delta = 2$, разбиваемого всякий раз на 2^n частей.

На рис. 9.10 и рис. 9.11 показаны r/φ -характеристики функции Вейерштрасса, полученные по формулам (9.2.1) и (9.2.2) на интервале $0,1 \div 2,1$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов.

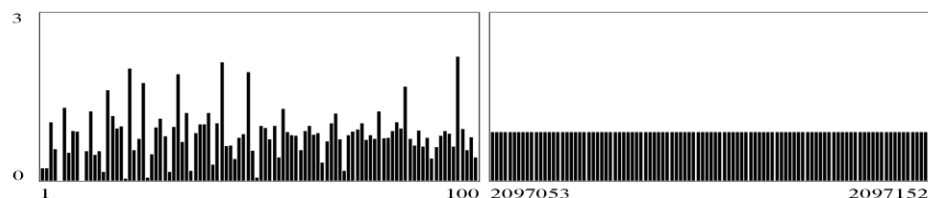


Рис. 9.10. График значений r -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 2,1$ при $x \rightarrow x_0$.

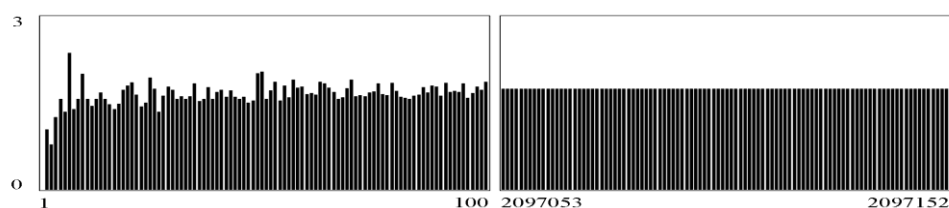


Рис. 9.11. График значений φ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 2,1$ при $x \rightarrow x_0$.

На рис. 9.12 показано распределение значений функций Вейерштрасса при параметрах $a = 7, b = 0,9$. Интервал $\Delta = 2$ расположен справа от точки $x_0 = 0,1$.

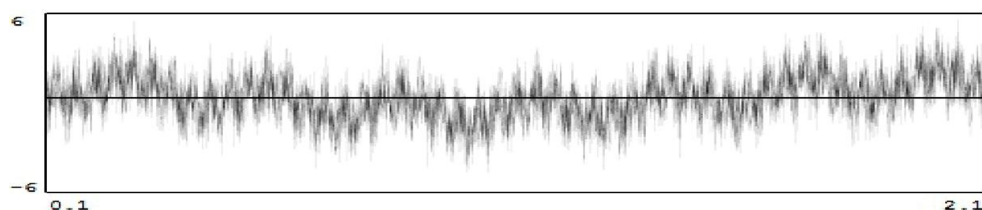


Рис. 9.12. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 2,1$.

В табл. 9.8 показаны результаты вычисления r/φ -характеристик для функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7, b = 0,9$ в различных точках x_i . Значения r/φ -характеристик находились на интервале $\Delta = 2$, совпадающем с периодом функции Вейерштрасса. При вычислениях r/φ -характеристик интервал, равный двум, делился на 2^{15} подинтервалов.

Таблица 9.8

Значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса в различных точках x_i

Значения x_n	Значение функции	r -характеристика	φ -характеристика
2.000000000000E-01	2.308645109994E+00	8.690535358586E-01	-2.890567016602E+00
4.000000000000E-01	-2.151471298696E+00	8.636984419579E-01	-2.962915039063E-01
8.000000000000E-01	-2.547472121106E+00	8.718099475199E-01	1.832177734375E-01
1.600000000000E+00	-2.041082571184E+00	8.684730998755E-01	3.340466308594E-01
3.200000000000E+00	-2.468809509029E+00	8.681299921637E-01	2.050659179688E-01
6.400000000000E+00	-1.745189569423E+00	8.686769926723E-01	4.496118164063E-01
1.280000000000E+01	-1.970023096583E+00	8.716328025421E-01	3.612609863281E-01
2.560000000000E+01	-1.912729619093E+00	8.650545455502E-01	-3.788928222656E-01
5.120000000000E+01	-2.526002736602E+00	8.652528565257E-01	-1.877215576172E-01
1.024000000000E+02	-2.101157295175E+00	8.718363633985E-01	-3.111444091797E-01
2.048000000000E+02	-2.659016102361E+00	8.730483069895E-01	1.616571044922E-01

На рис. 9.13 представлен график, построенный по r/φ -характеристикам для 1024-х различных точек x_i .

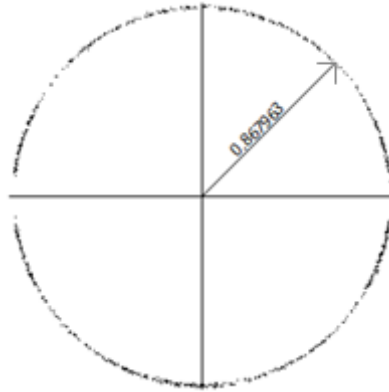


Рис. 9.13. Отображение на плоскости r/φ -характеристик функции Вейерштрасса в зависимости от x_i .

Исследуем поведение функции Вейерштрасса в окрестности точки x_0 . Пусть $x_0 = 0,1$. Зафиксируем параметры функции Вейерштрасса: $a = 7$, $b = 0,9$. Определим интервал Δ , который будет разбит на n равных подинтервалов. Положим $\Delta = 10^{-10}$, число подинтервалов $k = 2^{21} = 2097512$. На концах подинтервалов, последовательно приближаясь к точке x_0 , вычисляются значения функции Вейерштрасса. Погрешность при вычислении функции не более 10^{-15} . Можно определить количество членов ряда при заданной погрешности ε по формуле:

$$n = \log_b \varepsilon.$$

Погрешность $\varepsilon = 10^{-15}$ обеспечивается при сложении не менее 328 членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n$. Необходимо вычислить число a^n без округления мантиссы, что требует использования q двоичных разрядов, определяемых соотношением:

$$q = n \log_2 a.$$

Таким образом, для заданных $a = 7$ и $n = 328$ число разрядов q равно 921. Далее число a^n умножается на x и из целой части полученного числа $a^n x$ вычитаются "двойки", так что в результате целая часть числа примет значения 0 или 1. Оставшееся число умножается на π и производится вычисление косинуса приведенного аргумента.

На рис. 9.14 показан график распределения значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$.

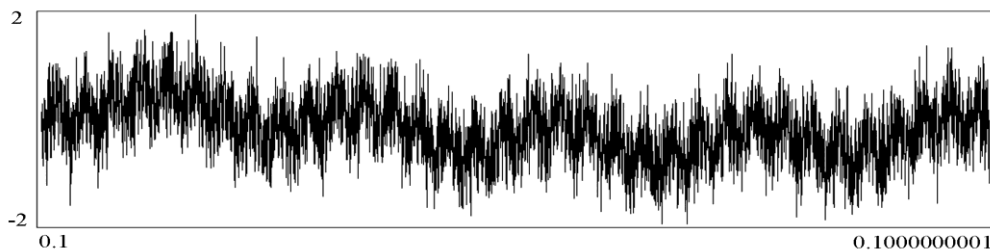


Рис. 9.14. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$.

На рис. 9.15 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$ при разбиении интервала на 2^{21} подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$, равное величине $0.233176679133662\dots$.

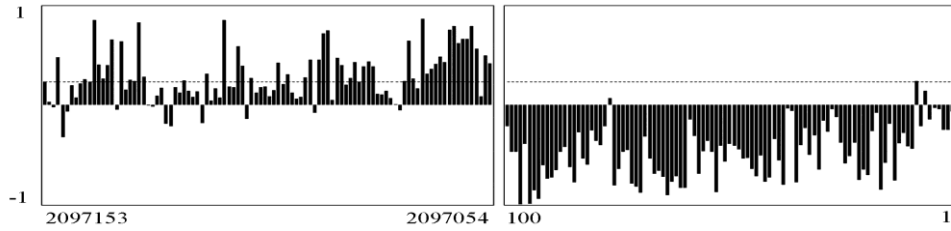


Рис. 9.15. График значений функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$.

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале $\Delta = 10^{-10}$, приведены в табл. 9.9.

Таблица 9.9

Значения функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-10}$

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
1	-6.25295466594902e-02	2097138	6.58705767988363e-01
2	-2.46059762683363e-01	2097139	4.02279072733480e-01
3	-2.50442222816751e-01	2097140	2.65183931577267e-01
4	-3.68471510642392e-02	2097141	4.06768989569054e-01
5	-2.44733031714151e-02	2097142	8.50289818676165e-01
6	-1.45979895538211e-01	2097143	2.37568124209613e-01
7	1.45500477666179e-01	2097144	2.61479861132985e-01
8	-2.09814349222072e-01	2097145	2.16874728369376e-01
9	2.43878170479272e-01	2097146	7.42738407640374e-02
10	-4.38116756819190e-01	2097147	1.98941408343906e-01
11	-4.13815910644200e-01	2097148	-6.37797916245480e-02
12	-2.76569127387281e-01	2097149	-3.18268645926570e-01
13	-3.84249833520620e-01	2097150	4.78659303361735e-01
14	-7.56032435891457e-01	2097151	-2.30638116883090e-02
15	-1.84374744877942e-01	2097152	3.21174235040281e-02
16	-5.76671388409889e-01	2097153	2.33176679133662e-01

Из табл. 9.9 можно заключить, что значение функции Вейерштрасса в ближайшей точке $x_0 + 10^{-10}/2^{21}$, которое составляет величину 0,0321174235..., ни в коей мере не характеризует значения функции в x_0 , равное величине 0,2331766791...

В табл. 9.10 приведены результаты вычисления r/φ -характеристик функции Вейерштрасса (9.1.1) с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 10^{-10}$. Вычисления r/φ -характеристик последовательно производились при делении интервала 10^{-10} на 2^n равных частей. Максимальное число подинтервалов, на которое разбивается интервал 10^{-10} , равно 2^{21} . Интервал Δ находится справа от точки x_0 .

Таблица 9.10

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-10}$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\varepsilon_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{2^n} - \varphi_{2^{n-1}} $
1	-6.25295466594903e-02	0.1207494598	-	1.5707963268	-
2	-2.32422470684058e-01	0.1502044625	0.0294550027	2.0943951024	0.5235987756
4	-4.33432595932641e-01	0.2487735235	0.0985690610	1.8849555922	0.2094395102
8	9.76210134357022e-01	0.3572331963	0.1084596728	1.7453292520	0.1396263402
16	2.79440153989695e-01	0.3000386495	0.0571945468	1.8479956786	0.1026664266
32	2.97620826589979e-01	0.2603374663	0.0397011831	1.9991953250	0.1511996464
64	7.17181131573445e-01	0.2840429296	0.0237054632	2.0299521762	0.0307568512

Окончание табл. 9.10

128	6.23094349268071e-01	0.2626265647	0.0214163648	2.1187485338	0.0887963576
256	-3.78521098919205e-01	0.2536947912	0.0089317735	2.1758890752	0.0571405414
...	...	...	...	...	...
131072	-4.69773057812122e-02	0.2482948974	0.0003948879	2.1972429359	0.0006159655
262144	2.16874728369377e-01	0.2482663434	0.0000285540	2.1951421021	0.0021008338
524288	-3.18268645926570e-01	0.2477378704	0.0005284730	2.1960331200	0.0008910179
1048576	-2.30638116883090e-02	0.2474486938	0.0002891766	2.1981923727	0.0021592527
2097152	3.21174235040281e-02	0.2475438482	0.0000951544	2.1981529741	0.0000393986

В первой колонке табл. 9.10 приведено количество подинтервалов, на которые равномерно разбивается исходный интервал $\Delta = 10^{-10}$. Во второй колонке даны значения функции Вейерштрасса в точке x_i , соответствующей последнему подинтервалу при равномерном делении исходного интервала на 2^n фрагментов. В третьей колонке приведены значения r -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 10^{-10}$, вычисленные по формуле (9.2.1). Несмотря на то, что при определении r -характеристики использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые находились последовательно в точках x_i интервала $\Delta = 10^{-10}$, разбиваемого всякий раз на 2^n равных частей ($n = 1, 2, \dots, 21$), в колонке 3 фиксировались числа, асимптотически стремящиеся к некоторому пределу. В колонке 4 приведена «погрешность», то есть разность значений r_{2^n} и $r_{2^{n-1}}$, полученных при разбиении интервала Δ на 2^n и 2^{n-1} частей, соответственно. В колонке 5 приведены значения модуля φ -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на том же интервале $\Delta = 10^{-10}$. Выше уже отмечалось, что за уровень отчёта, который определял, какие значения функции Вейерштрасса, вычисленные в точке x_i интервала Δ , относить к множеству k_n формулы (9.2.2), было взято значение функции Вейерштрасса в точке x_0 .

На рис. 9.16 показаны значения r -характеристики функции Вейерштрасса, вычисленные на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-10})$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов. В левой части рис. 16 приведены значения r_n , найденные по формуле (9.2.1) при использовании значений функции Вейерштрасса на начальном участке интервала ($n = 1 \div 100$). В правой части рис. 9.16 значения r_n практически одинаковые. При их вычислении используется большое число отчётов функции Вейерштрасса ($n = 2^{21}-i$, где $i = 100, 99, \dots, 1$).

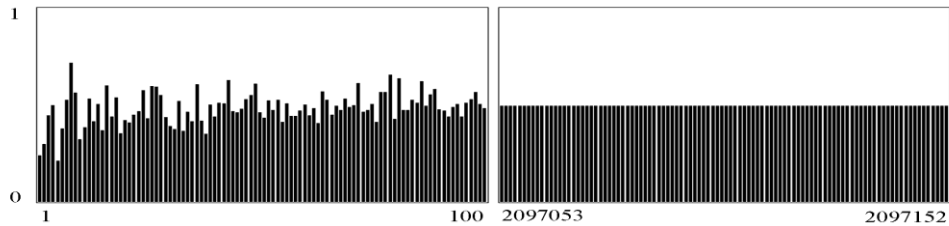


Рис. 9.16. График значений r -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-10})$ при $x \rightarrow x_0$.

Из формулы (9.2.1) следует, что r -характеристика функции Вейерштрасса является функцией не только параметров a , b и x_0 , но и интервала Δ , который, как уже отмечалось выше, равномерно разбивается на n подинтервалов.

В табл. 9.11 приведены результаты вычисления r/φ -характеристик функции Вейерштрасса (9.1.1) с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 10^{-20}$. Вычисления r/φ -характеристик производились при делении интервала 10^{-20} на 2^m равных частей. Максимальное число подинтервалов, на которое разбивается интервал 10^{-20} , равно 2^{21} . Интервал находится справа от точки x_0 .

Таблица 9.11

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-20}$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\varepsilon_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\varepsilon_\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	3.240148622e-01	2.7486853139e-01	-	0.0000000000e+00	-
2	9.650026221e-02	1.9390671359e-01	0.0809618178	1.0471975512e+00	1.0471975512
4	7.988068791e-02	1.6716348256e-01	0.0267432310	1.8849555922e+00	0.8377580410
8	2.010828886e-01	1.5872152501e-01	0.0084419575	2.4434609528e+00	0.5585053606
16	2.480473704e-01	1.7341251074e-01	0.0146909857	2.0327952464e+00	0.4106657064
32	2.886019029e-01	1.4870439103e-01	0.0247081197	1.9039955476e+00	0.1287996988
64	1.895001450e-01	1.3142961433e-01	0.0172747767	2.0299521762e+00	0.1259566286
128	3.450337590e-01	1.3130094160e-01	0.0001286727	1.9726279453e+00	0.0573242309
256	1.624167902e-01	1.3275157044e-01	0.0014506288	2.0536481160e+00	0.0810201707
...	...	...	...	...	...
131072	2.851406799e-01	1.3413490794e-01	0.0000945052	2.1310905191e+00	0.0003757800
262144	2.531053878e-01	1.3412941345e-01	0.0000054945	2.1312424587e+00	0.0001519396
524288	1.480970572e-01	1.3407793658e-01	0.0000514769	2.1319835521e+00	0.0007410934
1048576	1.391614154e-01	1.3411193015e-01	0.0000339936	2.1315062168e+00	0.0004773353
2097152	1.433955294e-01	1.3414134116e-01	0.0000294110	2.1320075743e+00	0.0005013575

Во второй колонке табл. 9.11 приведены значения функции Вейерштрасса в точках x_i , которые соответствуют последнему подинтервалу при равномерном разбиении исходного интервала $\Delta = 10^{-20}$ на 2^m фрагментов. В третьей и пятой колонках табл. 9.11 даны значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса на интервале $\Delta = 10^{-20}$, найденные по формулам (9.2.1) и (9.2.2).

На рис. 9.17 показан график распределения значений функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ на интервале $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$. На графике показано 4096 значений функции. Следует заметить, что характер распределения значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$ аналогичен рассмотренным выше распределениям значений этой функции на интервалах $0,1 \div 0,1 + 10^{-10}$.

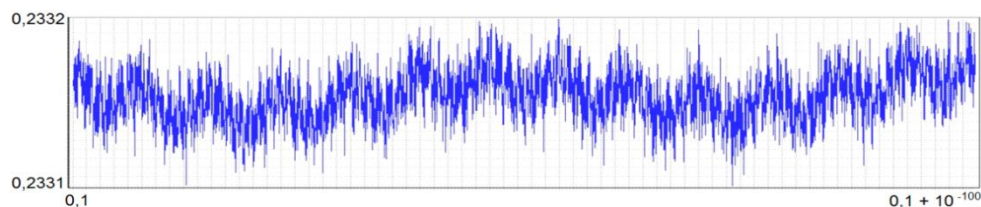


Рис. 3.17. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$.

Рассмотрим характер значений функции Вейерштрасса на экстремально малом интервале, а именно, при $\Delta = 10^{-200}$. На рис. 9.18 показан график распределения 4096-ти значений функции Вейерштрасса с параметрами $a=7$, $b=0,9$ на интервале $\Delta = 10^{-200}$.

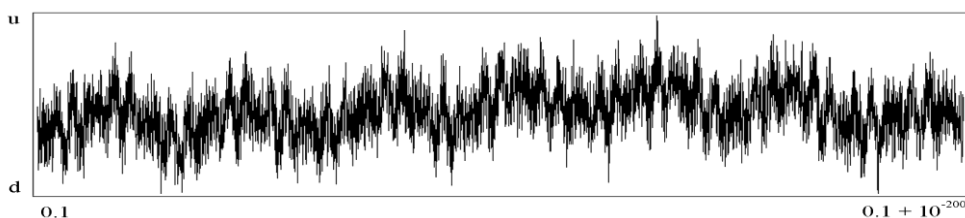


Рис. 9.18. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1 + 10^{-200})$, $u = 0.233176679167$, $d = 0.233176679100$.

На рис. 9.19 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-200})$ при разбиении интервала на 2^{21} подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$.

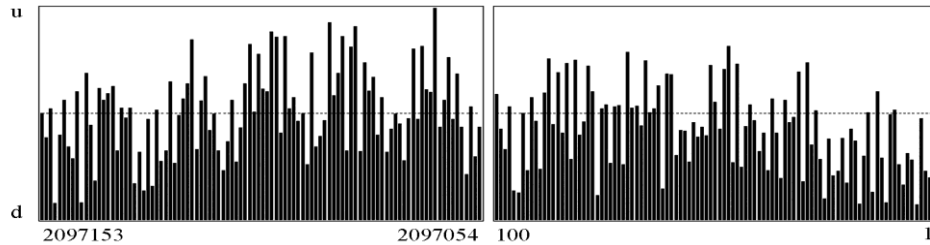


Рис. 9.19. График значений функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$,
 $u = 0.233176679167$, $d = 0.233176679100$.

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале $\Delta = 10^{-200}$, приведены в табл. 9.12.

Таблица 9.12

Значения функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-200}$

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
1	2.33176679145689e-01	2097138	2.33176679139683e-01
2	2.33176679113599e-01	2097139	2.33176679137684e-01
3	2.33176679115616e-01	2097140	2.33176679141364e-01
4	2.33176679131997e-01	2097141	2.33176679112461e-01
5	2.33176679105118e-01	2097142	2.33176679129824e-01
6	2.33176679119075e-01	2097143	2.33176679146028e-01
7	2.33176679121118e-01	2097144	2.33176679105808e-01
8	2.33176679111253e-01	2097145	2.33176679140444e-01
9	2.33176679117685e-01	2097146	2.33176679119439e-01
10	2.33176679134588e-01	2097147	2.33176679123117e-01
11	2.33176679133199e-01	2097148	2.33176679137782e-01
12	2.33176679105757e-01	2097149	2.33176679126739e-01
13	2.33176679119677e-01	2097150	2.33176679105471e-01
14	2.33176679140439e-01	2097151	2.33176679135110e-01
15	2.33176679109013e-01	2097152	2.33176679126020e-01
16	2.33176679133808e-01	2097153	2.33176679133662e-01

В табл. 9.12 значения функции Вейерштрасса в точках интервала $\Delta = 10^{-200}$ совпадают между собой до десятого десятичного знака. Таким образом, можно считать экспериментально подтвержденной непрерывность функции Вейерштрасса по Гейне, ибо для функции Вейерштрасса имеет место соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

В табл. 9.13 приведены значения r/φ -характеристик при различных интервалах Δ . Интервалы расположены справа от точки $x_0 = 0,1$. Параметры функции Вейерштрасса $a = 7$, $b = 0,9$. Интервалы делятся на 4096 подинтервалов. Погрешность при вычислении функции Вейерштрасса $\varepsilon = 10^{-19}$, число членов ряда (9.1.1) $n = 416$, количество двоичных разрядов q при вычислении равно 1168.

Таблица 9.13

Значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса

Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики	Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики
10^0	8.651433596418810895e-01	1.9568817310	10^{-285}	2.331766791336616606e-01	1.7529120835
10^{-1}	7.025592194035421638e-01	1.6823661904	10^{-286}	2.331766791336614380e-01	2.2981091488
10^{-2}	6.597091448592013706e-01	2.2428993194	10^{-287}	2.331766791336615407e-01	2.1202108097
10^{-3}	5.772967252326349288e-01	2.1347800702	10^{-288}	2.331766791336618612e-01	1.2061814118
10^{-4}	5.841863118852507782e-01	1.1402363378	10^{-289}	2.331766791336617044e-01	1.7046034828
10^{-5}	4.835840536675427629e-01	1.5550768615	10^{-290}	2.331766791336614771e-01	2.4951775677
10^{-6}	4.644177523639089034e-01	2.5496205939	10^{-291}	2.331766791336617516e-01	1.5389739946
10^{-7}	3.740502219643338458e-01	1.6202551323	10^{-292}	2.331766791336616973e-01	1.8265251894
10^{-8}	3.195769220421550078e-01	1.7682481472	10^{-293}	2.331766791336616152e-01	2.2697374310
10^{-9}	2.704785929803229862e-01	2.2329308780	10^{-294}	2.331766791336616372e-01	2.2068595697
10^{-10}	2.508260074266836269e-01	2.1861558837	10^{-295}	2.331766791336617442e-01	1.5535432551
10^{-11}	2.455366327977460663e-01	1.5428080105	10^{-296}	2.331766791336616882e-01	2.0205263955
10^{-12}	1.916368040897333251e-01	2.0289612305	10^{-297}	2.331766791336616606e-01	2.2919747234
10^{-13}	1.569066828256521631e-01	2.4108292172	10^{-298}	2.331766791336617697e-01	1.2874625495
10^{-14}	2.235238427564558248e-01	1.3879137669	10^{-299}	2.331766791336617497e-01	1.4753293301
...	...	...	10^{-300}	2.331766791336616618e-01	2.5595890353

Из табл. 9.13 следует, что при $\Delta \rightarrow 0$ r -характеристика стремится к значению 0.233176679133661..., то есть к значению функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$.

В общем случае, для непрерывной функции предельная r -характеристика в точке x_0 равна модулю функции в этой точке. Для функции Вейерштрасса можно записать

$$r(a, b, x_0) = |\omega(a, b, x_0)|.$$

Зависимость r -характеристики от интервала Δ имеет ярко выраженный характер, если интервал, на котором определяется r -характеристика по формуле (9.2.1), существенно меньше периода функции Вейерштрасса, равному, как уже отмечалось выше, двум. Если интервал $\Delta > 2$, то r -характеристика функции Вейерштрасса весьма слабо зависит от Δ , что легко объяснимо периодическим характером в расположении отсчетов значений функции в различных точках «большого» интервала.

На рис. 9.20 показаны значения r характеристики $w(0,7; 7; 0,1 + \Delta)$ в зависимости от величины интервала Δ , на котором эти характеристики определяются.

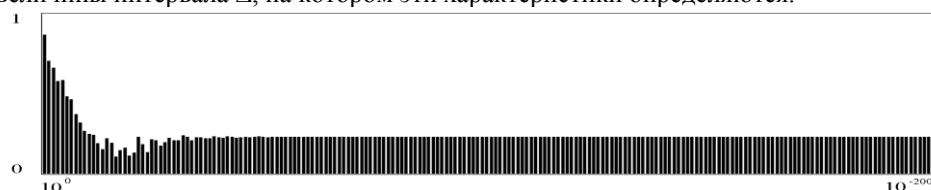


Рис. 9.20. Зависимость r -характеристики от значения интервала Δ .

Под предельным значением φ -характеристики понимается характеристика, определяемая при интервале $\Delta \rightarrow 0$. Из табл. 9.13 видно, что модуль φ -характеристики функции Вейерштрасса, устанавливаемой по формуле (9.2.2), при $\Delta \rightarrow 0$ не стремится к определенному значению. На рис. 9.21 показаны значения модуля φ -характеристики в зависимости от величины интервала Δ , на котором эта характеристика определяется.

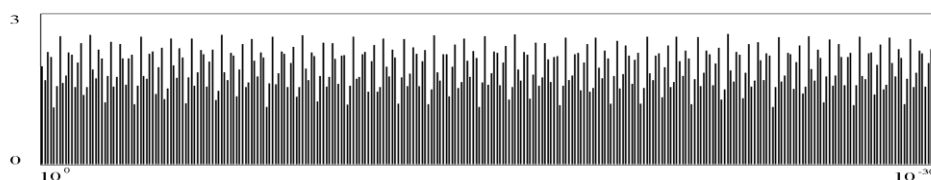


Рис. 9.21. Зависимость модуля φ -характеристики от значения интервала.

Для получения модуля предельной φ -характеристики следует использовать операцию усреднения, аналогичную операции, проводимой при получении r -характеристики:

$$\varphi(a, b, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^n \varphi(a, b, [x_0, x_0 + R^{-i}])}, \quad (9.2.3)$$

где $R > 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

В табл. 9.14 приведены значения модулей предельной φ -характеристики при разном числе φ -характеристик, полученных на интервалах $\Delta_i = 10^{-i}$ по формуле (9.2.3).

Таблица 9.14

Значения модулей предельных φ -характеристик функции Вейерштрасса $W(7;0,7;0,1)$

Число значений, k	Модуль усредненной φ -характеристики	Число значений, k	Модуль усредненной φ -характеристики
1	1.9568817310	285	1.8755585502
2	1.8144397655	286	1.8768868123
3	1.9472944675	287	1.8776814058
4	1.9925627512	288	1.8748081017
5	1.7820856839	289	1.8741929179
6	1.7420707722	290	1.8760369855
7	1.8394829242	291	1.8747650166
8	1.8105341312	292	1.8745982277
9	1.8057861881	293	1.8758181960
10	1.8445363667	294	1.8768519330
11	1.8732500759	295	1.8756535553
12	1.8431984763	296	1.8761234806
13	1.8568632528	297	1.8773843449
14	1.8918162828	298	1.8750174065
15	1.8531526461	299	1.8735196368
...	...	300	1.8754628045

Из табл. 9.14 следует, что при увеличении числа модулей φ -характеристик модуль усредненной φ -характеристики стремится к определенному значению, а именно 1.875....

На рис. 9.22 показаны значения модулей предельных φ -характеристик функции Вейерштрасса $W(7;0,7;0,1)$ в зависимости от числа φ -характеристик.

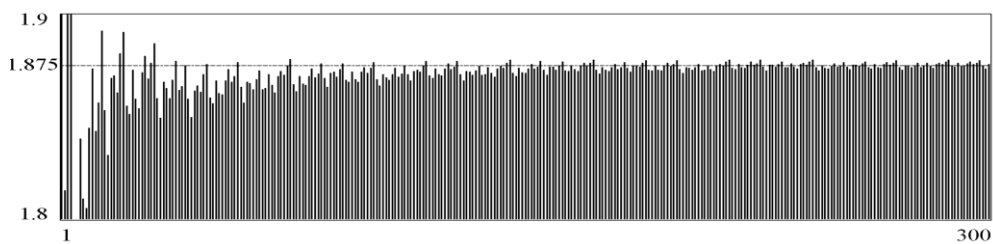


Рис. 9.22. График модулей предельных φ -характеристик.

Опираясь на проведенные исследования, можно ввести в рассмотрение некоторую модификацию функции Вейерштрасса, которую назовём «функцией Вейерштрасса на интервале» и обозначим $\overline{w}(a, b, [x_0, x_0 + \Delta])$. Эта функция определена не значением функции в произвольной точке x бесконечного интервала, как то имеет место в клас-

сическом случае, а совокупностью равномерно распределенных значений функции Вейерштрасса на фиксированном интервале изменения переменной. При этих условиях «функция Вейерштрасса на интервале» имеет единственные r и φ -характеристики, определённые выше. При интервале, стремящемся к нулю, r -характеристика функции Вейерштрасса совпадает со значением модуля функции Вейерштрасса в точке x_0 . Показано, что при усреднении значений φ -характеристик, полученных на различных интервалах при $\Delta \rightarrow 0$, имеет место предельная φ -характеристика, отличная от нуля или от π . Следовательно, разность $w(x_i) - w(x_0)$ при $x_i \rightarrow x_0$ бесконечное число раз меняет знак.

Метод r/φ -характеристик может быть использован для анализа других быстро осциллирующих функций. Так как при построении метода r/φ -характеристик основные идеи заимствованы из ранее построенного алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей, то предложенный способ анализа быстро осциллирующих функций можно рассматривать в качестве одного из приложений r/φ -алгоритма.

9.3. Алгоритм определения знака φ -характеристики

Как и в случае r/φ -алгоритма, формула (9.2.2) определяет модуль φ -характеристики. Знак φ -характеристики устанавливается также из анализа динамики в распределении «отсчетов», в данном случае – из анализа значений функции Вейерштрасса на равномерно делимом интервале Δ .

Знак φ -характеристики будет положительным, если на принятом интервале Δ среди взятых по модулю отчётов число «убывающих» по модулю отсчетов значений в соседних точках составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар взятых по модулю отчётов, принадлежит к множеству «возрастающих» пар, то знак φ -характеристики будет отрицательным.

9.4. Предельные r/φ -характеристики функции Вейерштрасса

В табл. 9.15 приведены значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса $W(9;0,7;1,3)$ при различных интервалах Δ . Интервалы делятся на 4096 подинтервалов. Погрешность при вычислении функции Вейерштрасса $\epsilon = 10^{-19}$, число членов ряда (9.1.1) $n = 130$, количество двоичных разрядов при вычислении $q = 413$.

Таблица 9.15

Значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса $W(9;0,7;1,3)$ при различных интервалах Δ

Интервал, Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики	Интервал, Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики
10^0	5.46564107533792592e-01	0.43707781610	10^{-10}	3.32615049946075383e-01	0.90866177557
10^{-1}	2.96146003170371750e-01	0.86648760033	10^{-11}	3.31785551706131767e-01	0.52679378887
10^{-2}	2.57240645235534283e-01	0.42404216193	10^{-12}	3.40401159599534913e-01	1.03288389170
10^{-3}	1.50482545031747610e-01	0.60577451705	...	...	...
10^{-4}	1.38837229518570280e-01	0.52526018250	10^{-95}	3.45756030760278016e-01	0.56360034181
10^{-5}	1.81426979364141637e-01	0.46928354991	10^{-96}	3.45756030760278209e-01	1.08349290201
10^{-6}	2.31555182798778094e-01	0.65331631459	10^{-97}	3.45756030760278193e-01	0.67632041017
10^{-7}	2.85425658038011290e-01	0.53752903348	10^{-98}	3.45756030760278292e-01	1.32810311842
10^{-8}	3.14973036486336087e-01	0.80284293588	10^{-99}	3.45756030760278247e-01	0.61420935209
10^{-9}	3.15059642486667364e-01	0.47925199133	10^{-100}	3.45756030760278307e-01	1.46766129833

При определении предельной r -характеристики представляет интерес не само значение этой характеристики, которое, в силу непрерывности функции Вейерштрасса, заведомо равно значению модуля функции Вейерштрасса в точке x_0 , а скорость, с которой эта характеристика устанавливается при стремлении x к точке x_0 в зависимости от параметров “ a ” и “ b ” функции Вейерштрасса.

Под предельным значением φ -характеристики понимается характеристика, определяемая при интервале $\Delta \rightarrow 0$. Из табл. 9.15 видно, что значения модуля φ -характеристики функции Вейерштрасса, устанавливаемые по формуле (9.2.2), при $\Delta \rightarrow 0$ не стремятся к определенному значению.

Для получения модуля предельной φ -характеристики следует использовать операцию, аналогичную операции, проводимой при получении r -характеристики. В табл. 9.16 приведены значения модулей предельных φ -характеристик по формуле (9.2.3).

Таблица 9.16

Значения модулей предельных φ -характеристик функции Вейерштрасса $w(9; 0,7; 1,3)$

Число значений характеристик	Модуль предельной φ -характеристики	Число значений характеристик	Модуль предельной φ -характеристики
1	0.43707781610	12	0.58328993830
2	0.61540434515	13	0.60950076589
3	0.54355486298	14	0.61164939512
4	0.55848342601	15	0.64209531041
5	0.55167477606	...	...
6	0.53700108268	95	0.65301878649
7	0.55225443238	96	0.65643645266
8	0.55039192015	97	0.65663636834
9	0.57397062367	98	0.66132493990
10	0.56371175534	99	0.66083633870
11	0.58871710210	100	0.66607774851

Из табл. 9.16 следует, что модуль предельной φ -характеристики стремится к определенному значению, а именно, к 0.666...

На рис. 9.25 показаны значения модулей предельных модулей φ -характеристик в зависимости от количества “текущих” значений φ -характеристик.



Рис. 9.25. График модулей предельных φ -характеристик функции Вейерштрасса $w(9; 0,7; 1,3)$.

9.5. Значения r/φ -характеристик в зависимости от координаты x

В табл. 9.17 показаны результаты вычисления r/φ -характеристик для функции Вейерштрасса с параметрами $a = 9$, $b = 0,7$ в различных точках x_i . Значения r/φ -характеристик находились на интервале $\Delta = 2$, совпадающем с периодом функции Вейерштрасса. При вычислениях r/φ -характеристик в точке x_i интервал $\Delta = 2$ делился на 2^{15} подинтервалов. Шаг изменения x_i равнялся 0,001.

Таблица 9.17

Значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса в различных точках x_i

Значения x_0	Значение функции	r -характеристика	φ -характеристика
0.001	1.619882506e+00	5.4987165570e-01	2.9769823638e+00
0.002	2.148800089e+00	5.4541974082e-01	3.0644166004e+00
0.004	1.898649340e+00	5.5825585821e-01	3.1038195294e+00
0.008	1.844134390e+00	5.5337883964e-01	3.0768798140e+00
0.016	1.454766248e+00	5.5264858149e-01	2.6747014997e+00
0.032	1.033087932e+00	5.4445246568e-01	2.8339430205e+00
0.064	2.625692622e-01	5.5807695260e-01	2.1276622955e+00
0.128	6.829734706e-01	5.5427436099e-01	2.3897732636e+00
0.256	1.075349051e+00	5.4798075801e-01	2.2770291164e+00
0.512	-3.314627852e-01	5.5196817900e-01	-7.5450377441e-01
1.024	-2.015582900e+00	5.4535572003e-01	1.1466156470e-01

На рис. 9.26 показана зависимость r -характеристики от x .

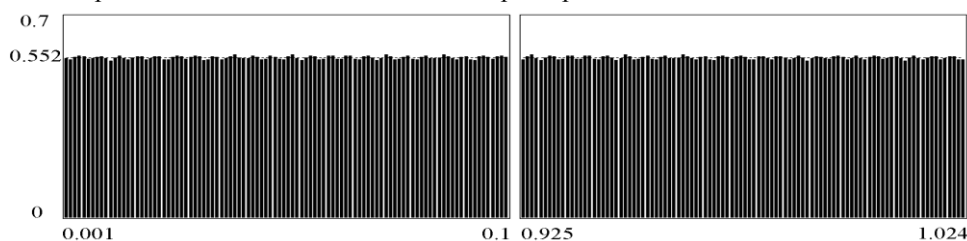


Рис. 9.26. Значения r -характеристики при различных x_i .

На рис. 9.27 представлен график, построенный по r/φ -характеристикам для 4096-х различных точек x_i .

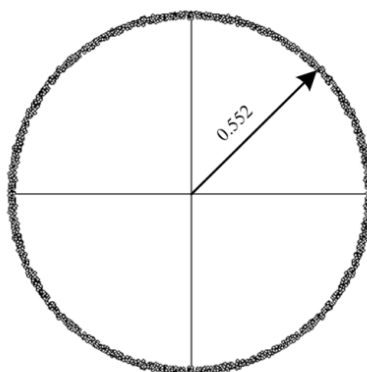


Рис. 9.27. Отображение на плоскости r/φ -характеристик функции Вейерштрасса в зависимости от x_i .

Продолжим экспериментальное исследование функции Вейерштрасса.

Ряд (9.1.1) мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, $0 < b < 1$, поэтому функция Вейерштрасса определена и непрерывна при всех вещественных x .

На рис. 9.28 представлен график функции Вейерштрасса на интервале $-3 \leq x \leq 3$ при $a = 5$ и $b = 0,5$. Всего показано 8192 значений функций.

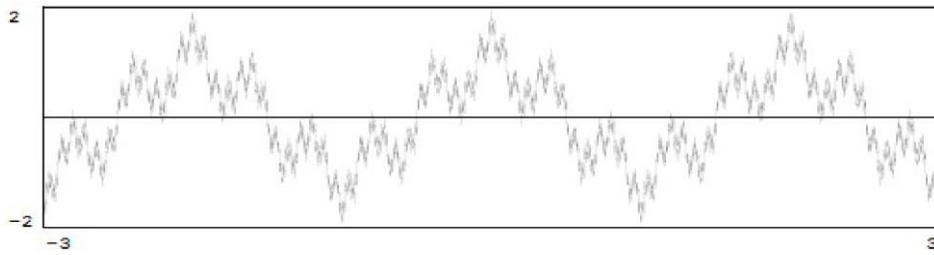


Рис. 9.28. График функции Вейерштрасса, $W(5;0,5)$

На рис. 9.29 представлен график функции Вейерштрасса при $a = 9$ и $b = 0,6$. На интервале $-2 \leq x \leq 2$ показано 8192 значений функции.

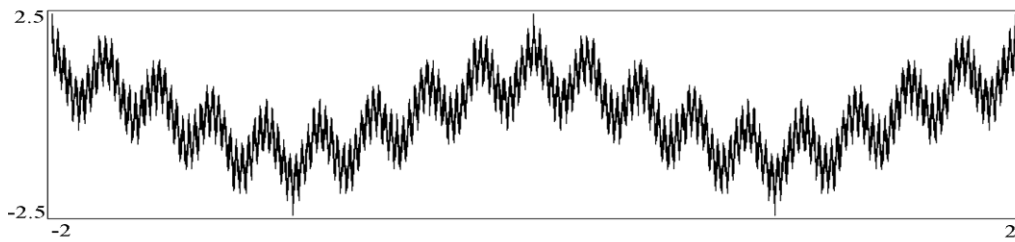


Рис. 9.29. График функции Вейерштрасса.

В литературе имеется небольшое число публикаций, в которых приводились результаты экспериментального изучения классической функции Вейерштрасса. В этом параграфе приведены графики функции Вейерштрасса на интервалах Δ при различных параметрах a и b (рис. 9.30 – 9.34).

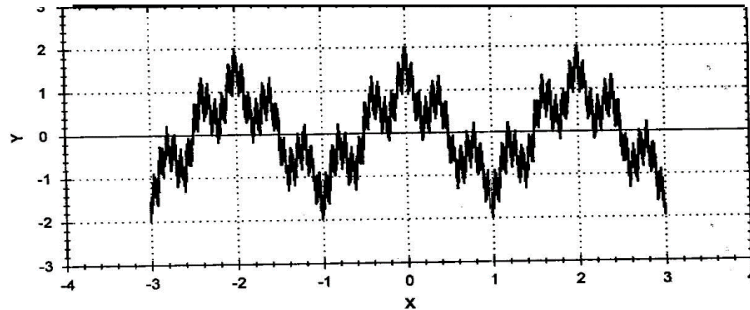


Рис. 9.30. График функции Вейерштрасса $w(0,5;5)$ при $-3 < x < 3$

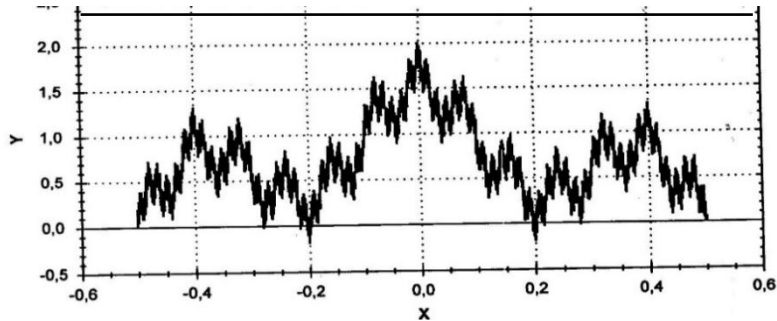


Рис. 9.31. График функции Вейерштрасса $w(0,5;5)$ при $-0,5 < x < 0,5$

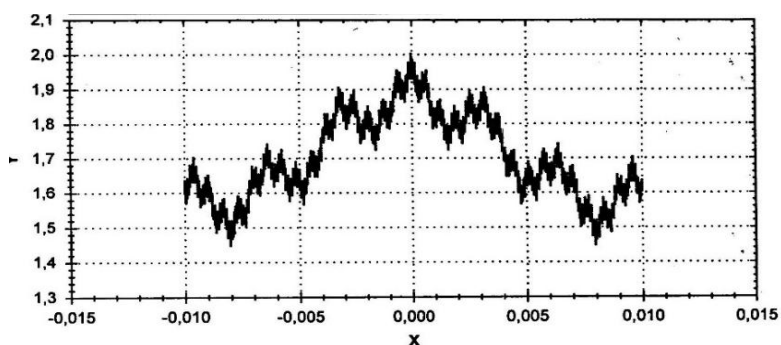


Рис. 9.32. График функции Вейерштрасса $w(0,5;5)$ при $-0,01 < x < 0,01$

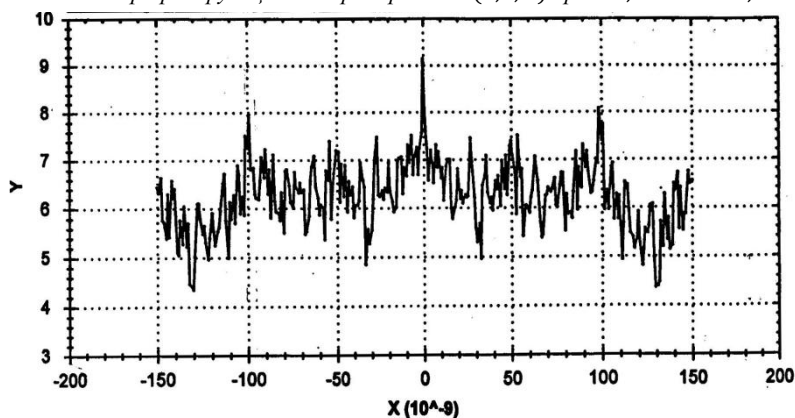


Рис. 9.33. График функции Вейерштрасса $w(0,9;7)$ при $-10^{-7} < x < 10^{-7}$

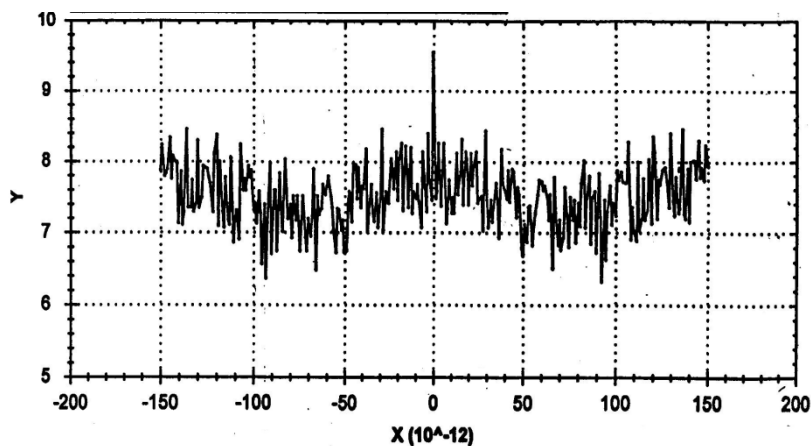


Рис. 9.34. График функции Вейерштрасса $w(0,9;7)$ при $-1,5 \cdot 10^{-10} < x < 1,5 \cdot 10^{-10}$

9.6. Определение функции Вейерштрасса цепными дробями

Построим по ряду Вейерштрасса, так называемую, соответствующую цепную дробь. В [93] были рассмотрены многочисленные соответствующие непрерывные дроби для элементарных и специальных функций. Соответствующие цепные дроби, как правило, представляют функции в более широкой области, нежели ряды, а также имеют более высокую скорость сходимости. Соответствующие цепные дроби могут быть

установлены по степенным рядам, которыми представляются функции. Помимо формул Хейлсманна – Стильтьеса и формул Хлопонина, известны рекуррентные алгоритмы для определения коэффициентов соответствующих непрерывных дробей, например, алгоритмы Висковатова, Никипорца, Рутисхаузера. Запишем алгоритм Рутисхаузера [55] и приведем граф этого алгоритма.

Определим для ряда:

$$a_{00} + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n-1} + \dots \quad (9.6.1)$$

коэффициенты α_{n0} соответствующей цепной дроби:

$$a_{00} + \frac{a_{10}}{1} - \frac{a_{20}}{1} + \frac{a_{30}}{1} - \frac{a_{40}}{1} + \frac{a_{50}}{1} - \dots - \frac{a_{2n,0}}{1} + \frac{a_{2n+1,0}}{1} - \dots \quad (9.6.2)$$

Коэффициенты цепной дроби (9.6.2) находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{2,v} &= \frac{\alpha_{1,v+1}}{\alpha_{1,v}}, \\ \alpha_{3,v} &= -\alpha_{2,v+1} + \alpha_{2,v}, \\ \alpha_{4,v} &= \frac{\alpha_{2,v+1} \cdot \alpha_{3,v+1}}{\alpha_{3,v}}, \\ \alpha_{5,v} &= \alpha_{3,v+1} - \alpha_{4,v+1} + \alpha_{4,v}, \\ &\dots \\ \alpha_{2n,v} &= \frac{\alpha_{2n-2,v+1} \cdot \alpha_{2n-1,v+1}}{\alpha_{2n-1,v}}, \\ \alpha_{2n+1,v} &= \alpha_{2n-1,v+1} - \alpha_{2n,v+1} + \alpha_{2n,v}. \end{aligned} \quad (9.6.3)$$

Схема Рутисхаузера, определяемая формулами (9.6.3), показана на рис. 9.35.

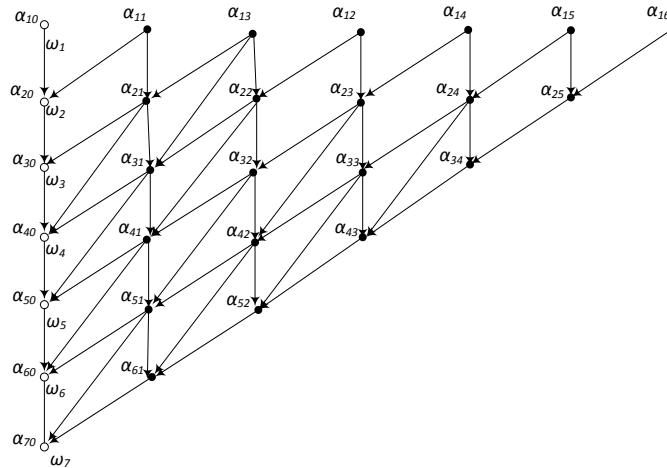


Рис. 9.35. Схема алгоритма Рутисхаузера.

Коэффициенты цепной дроби α_{n0} будем обозначать символом с одним индексом, то есть положим $\alpha_{n0} = \omega_n$.

Вычислим функцию Вейерштрасса (9.1.1) при $a = 7$; $b = 0,9$; $x_0 = 0,1$ преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь. Разрядность переменных 5000 бит. В табл. 9.18 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби для функции Вейерштрасса $w(7; 0,9; 0,1)$.

Таблица 9.18
Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса $w(7; 0, 9; 0, 1)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	0.951056516295	0.951056516295
1	-0.529006727063	0.422049789232
2	1.456230589874	2.110572644331
3	2.012461179749	-0.072964113728
4	0.556230589874	0.233176679133
5	-2.52539e-1202	

Так как $\omega_5 = \alpha_{50} = 0.513 \cdot 10^{-1202}$, то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 9.18, в цепную дробь вида (9.6.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7; 0, 9; 0, 1) = 0,951057 - \frac{0,529006}{1} - \frac{1,456230}{1} + \frac{2,012461}{1} - \frac{0,556231}{1} = 0,233177.$$

В табл. 9.19 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные, построенных из исходных рядов (9.1.1), представляющих функцию Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в тех же рациональных точках x , что использовались при вычислении функции Вейерштрасса рядами.

Таблица 9.19

Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби для различных значений x

Аргумент, x	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,1	2.331766791336617435716044056376e-1	-2.52539e-1202	5
0,2	2.794219470723656539001207061675e+0	-1.13488e-1201	5
0,3	7.976442635127686983831499197129e-1	2.80477e-1201	5
0,4	-2.20578052927634346099879293832e+0	9.60665e-1201	5
0,6	2.205780529276343460998792938324e+0	-1.25450e-1200	5

Из колонки 3 табл. 9.19 видно, что цепные дроби, представляющие функцию Вейерштрасса в рациональных точках $x = 0,1; 0,2; 0,3, \dots$ конечны, так как пятые частные числители цепных дробей близки к нулю. Сравнивая вторые колонки табл. 9.3 и табл. 9.19 можно заключить, что значения функций Вейерштрасса, определенные рядами и цепными дробями, совпадают. Причем, для вычисления функции Вейерштрасса $w(7; 0, 9; 0, 1)$ с точностью 45 десятичных знаков требуется 1024 членов ряда, в то время как при “точном” вычислении этой же функции соответствующая цепная дробь имеет всего четыре звена. Очевидна вычислительная эффективность цепных дробей в сравнении с рядами.

Соответствующие цепные дроби для функции Вейерштрасса будут конечными в произвольных рациональных точках x , заданных числами с конечным числом десятичных разрядов.

В табл. 9.20 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса $w(7; 0, 9)$ в точке $x = 0,111$.

Таблица 9.20

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса $w(7; 0, 9; 0, 111)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	0.939811951086	0.939811951086
1	-0.688024378281	0.251787572805
2	0.224232938784	0.052916370340
3	4.825758794111	0.224245482975
4	4.357264191278	0.484961931198
5	-0.255710922537	0.958313937066
...	...	...
31	-19.071794834810	-0.093790187744
32	-18.717927452156	-0.131787400445
33	0.37484e-9004	

В табл. 9.21 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные дроби, построенных из исходных рядов (9.1.1) с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$. Переменные x имеют три десятичных разряда: $x = 0,111$; $x = 0,222$; $x = 0,333$; ...

Таблица 9.21

Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби при различных значениях x

Аргумент, x	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,111	-0.1317874004452739846525173072027e0	0.37484e-9004	33
0,222	-0.1530569770194524217559734019612e0	0.10853e-9004	33
0,333	0.12088194190984092396183752849618e1	0.19338e-9005	33
0,444	0.11463808279503072984087704261067e1	0.23072e-9018	17
0,555	0.89346677457495307448235913713774e0	0.32041e-9024	9
0,666	-0.9164091146439475946496679047149e0	-0.18714e-9004	33
0,777	-0.1190665946146215174923275561407e1	-0.66182e-9005	33
0,888	0.10228533583044874671171509840906e0	0.195129e-9017	17
0,999	-0.23351462022290565773815456526942e1	-0.58527e-9005	33
1,111	0.131787400445273984652517307202751e0	-0.48127e-9005	33

В табл. 9.22 приведены значения функции Вейерштрасса $w(7; 0,9)$, определенные при помощи ряда (9.1.1) в тех же точках x , в которых значения функции устанавливались конечными цепными дробями.

Таблица 9.22

Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда для различных значений x

Аргумент, x	Значения функции Вейерштрасса
0,111	-0.1317874004452739846525173072027e0
0,222	-0.1530569770194524217559734019612e0
0,333	0.12088194190984092396183752849618e1
0,444	0.11463808279503072984087704261067e1
0,555	0.89346677457495307448235913713774e0
0,666	-0.9164091146439475946496679047149e0

Сравнивая вторые колонки табл. 9.21 и табл. 9.22 можно отметить совпадение значений функций Вейерштрасса, вычисленные по различным алгоритмам, – при помощи рядов и цепных дробей.

В табл. 9.23 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса $w(7; 0,9)$ в точке $x = 0,222222$.

Таблица 9.23

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса $w(7; 0, 9; 0, 222222)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_{n+1}/Q_{n+1}
0	0,7660448919	0,7660448919
1	0,1562790285	0,9223239204
2	-4,8704010562	0,7926664169
3	-4,1365577979	0,4833329437
4	-0,1660285263	0,5946467407
5	-0,0014186983	0,5947479255
...	...	...
797	0,6909124693	0,0122795277
798	-9,4798262229	0,0122795277
799	-10,3483975575	0,0122795277
800	-0,7585597831	0,0122795277
801	4.156312e-150	

Так как $\alpha_{801,0} = 4,1563 \cdot 10^{-150}$, то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 9.23, в цепную дробь вида (9.6.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7;0,9;0,222222) = 0,766044 + \frac{0,156279}{1} - \frac{4,870401}{1} + \dots - \frac{10,348397}{1} + \frac{0,758559}{1} = 0,012279 \dots$$

В табл. 9.24 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные дроби, построенных из исходных рядов (9.1.1) с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$. Переменные x имеют шесть десятичных разряда: $x = 0,111111$; $x = 0,222222$; $x = 0,333333$; $x = 0,444444$.

Таблица 9.24

Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби при различных значениях x

Аргумент, x	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,111111	-0.2891258132695	0.1563119e-152	801
0,222222	0.0122795276749	4.1563119e-150	801
0,333333	3.6761809804422	-2.4201470e-155	801
0,444444	-1.2241731996156	-1,6155829e-327	801

В табл. 9.25 приведены значения функции Вейерштрасса $w(7;09)$, определенные при помощи ряда (9.1.1) в тех же точках x , в которых значения функции устанавливались конечными цепными дробями.

Таблица 9.25

Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи рядов для различных значений x

Аргумент, x	Значения функции Вейерштрасса
0,111111	-0.2891258132695
0,222222	0.0122795276749
0,333333	3.6761809804422
0,444444	-1.2241731996156

Сравнивая вторые колонки табл. 9.24 и табл. 9.25 можно отметить совпадение значений функций Вейерштрасса, вычисленных по различным алгоритмам, – при помощи рядов и цепных дробей.

В табл. 9.26 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса $w(7; 0, 9)$ в точке $x = 0,111111$.

Таблица 9.26

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса $w(7; 0, 9; 0, 111111)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_{n+1}/Q_{n+1}
1	-0.6894398575	0.25025277527398164842548187180206949407052444307592
2	0.204015458	0.073545338271625997303649263732588407086166927334005
3	5.074316153	0.22629209666383923025767635037413900346183614984639
4	3.970351901	0.40442430134219747631843686626752581177610436345982
5	0.9604274562e-4	0.40438724915757798813700678464216544531663851145265
...	...	...
7997	7.906047051	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
7998	156.1613173	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
7999	121.2765738	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
8000	-0.00015947556	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
8001	-0.8213866354e-2269	

Так как $\alpha_{8001,0} = -0,8213e^{-2269}$, то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 9.26, в цепную дробь вида (9.3.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7; 0, 9; 0, 111111) = -0,689439... + \frac{0,204015...}{1} - \frac{5,074316...}{1} + \dots + \frac{121,276573...}{1} - \frac{-0,000159...}{1} = 1,547095... .$$

Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда в точке $x = 0,111111$, также равно величине 1,5470951952130..., которая была установлена через цепные дроби (табл. 9.26).

Функция Вейерштрасса (9.1.1), как известно, определена при $b < 1$. При $b > 1$ ряд (9.1.1) – расходящийся. Значения расходящегося ряда (9.1.1) при $b > 1$ можно установить через соответствующие цепные дроби.

Определим обобщённую функцию Вейерштрасса $w(a, b, x)$ как соответствующую цепную дробь, построенную для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (9.6.4)$$

где $|b| > 0$, a – нечетное натуральное число,

При $0 < b < 1$ имеем, как частный случай, классическую функцию Вейерштрасса, представленную сходящимся рядом (9.1.1), или соответствующей цепной дробью (9.6.2), построенной по коэффициентам этого ряда.

Если точка x , в которой определяется значение обобщённой функции Вейерштрасса, представлена числом с конечным числом десятичных разрядов, то соответствующая цепная дробь, которая собственно определяет эту функцию, будет конечной, как то имеет место при представлении цепной дробью классической функции Вейерштрасса (9.1.1).

Во второй колонке табл. 9.27 помещены коэффициенты цепной дроби, представляющей обобщённую функцию Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 1,9$ в точке $x = 0,1$.

Таблица 9.27

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей обобщённую функцию Вейерштрасса в точке $w(7; 1, 9; 0, 1)$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	0.951056516295	0.951056516295
1	-1.116791979541	-0.165735463060
2	3.074264579213	1.489460339445
3	4.248529157256	-1.744804568807
4	1.174264579351	-0.035951293506
5	0.108462e-1501	

Четвертая подходящая дробь определяет значение обобщённой функции Вейерштрасса, полученное суммированием расходящегося ряда (9.6.4), при $a = 7$; $b = 1,9$; $x = 0,1$ через соответствующую цепную дробь, найденную по алгоритму Рутисхаузера, описываемому формулами (9.6.3). Производная обобщённой функции Вейерштрасса $w(7; 1,9)$ в точке $x = 0,1$ равна 0.19770373570561. Пятый коэффициент цепной дроби для производной функции $w(7; 1,9)$ в точке $x = 0,1$ равен -0.398e-1501.

В табл. 9.28 даны коэффициенты соответствующей цепной дроби для функции $w(7; 1,9)$ в точке $x = 0,111$. Последняя, тридцать вторая, подходящая дробь, определяет значение обобщённой функции Вейерштрасса $w(7; 1,9)$ в точке $x = 0,111$.

Таблица 9.28

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей обобщённую функцию Вейерштрасса в точке $x = 0,111$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	0.939811951086	0.939811951086
1	-1.452495912658	-0.512683958618
2	0.473380648575	-1.818339464525
3	10.187713011258	-0.576858135091
4	9.198668848963	0.447646380374
5	-0.539834169878	69.213058376730
...	...	...
28	6.351799878789	-0.249475671627
29	-0.725494238896	-7.407455641224
30	-0.034855245524	-8.850496019138
31	-40.262677968236	-7.376998634760
32	-39.515624614879	0.027178664886
33	0.71063e-1480	

Значение производной обобщённой функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 1,9$ в точке $x = 0,111$ равно $0.08297651645874\dots$. Тридцать третий коэффициент конечной цепной дроби, представляющий производную обобщённой функции Вейерштрасса $w(7; 1,9)$ в точке $x = 0,111$, равен $-0.651e-1478$.

9.7. Нахождение производной функции Вейерштрасса цепными дробями

Применение цепных дробей позволило установить значения производной функции Вейерштрасса в рациональных точках, имеющих представление десятичной дробью с конечным числом разрядов. Прием суммирования расходящихся рядов построением, так называемых, соответствующих дробей, можно использовать при изучении других быстро осциллирующих функций, которые не имеют производных в классическом смысле.

Как уже отмечалось, установлено, что при $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$ функция Вейерштрасса

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

не имеет производной в классическом смысле, т.е. не существует предела

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (9.7.1)$$

ни при каком значении x . Более того, Н. Харди [67] показал, что функция Вейерштрасса (9.1.1) не имеет производной и при $ab > 1$.

Определим производную функции Вейерштрасса из расходящегося ряда, которым производная функции Вейерштрасса может быть формально представлена:

$$w'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]. \quad (9.7.2)$$

Построим для расходящегося ряда (9.7.2) с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$; $x = 0,1$ соответствующую цепную дробь. Была получена конечная цепная дробь, причем, число звеньев этой цепной дроби такое же, как и в случае цепной дроби, построенной по сходящемуся ряду (9.1.1), представляющему функцию Вейерштрасса с теми же параметрами.

В табл. 9.29 приведены значения коэффициентов конечной цепной дроби, найденной для производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,1$.

Таблица 9.29

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющую производную функции Вейерштрасса в точке $x = 0,1$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	-0.970805519363	-0.970805519363
1	-16.012091630793	-16.982897150156
2	2.406385870876	10.414470714125
3	-14.087228258249	-14.495984106989
4	-16.493614129124	0.438947974933
5	1,30211e-1501	

Следовательно, можем записать конечную цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса

$$w'(7; 0,9; 0,1) = -0,970805 - \frac{16,012091}{1} - \frac{2,406385}{1} - \frac{14,087228}{1} + \frac{16,493614}{1} = 0,438947$$

В табл. 9.30 показаны значения производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в серии рациональных точек: $x = 0,1$; $x = 0,2$; $x = 0,3$; ...

Таблица 9.30

Значения производной функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби в различных точках x

Аргумент, x	Значения производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер конечного звена дроби
0.1	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	1.30211e-1501	5
0.2	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	1.16618e-1501	5
0.3	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	-1.06706e-1501	5
0.4	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	-5.53924e-1502	5
0.5	-4.3035515802599907376200594291500039509550265744865e-1	-3.39830e-1504	3
0.6	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	9.51526e-1502	5
0.7	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	2.279132e-1501	5
0.8	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	-4.66134e-1501	5
0.9	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	-1.10445e-1500	5
1.1	-4.3894797493294912660825500663464136289965439960119e-1	1.761655e-1500	5
1.2	-4.1722194169037467909295703880070490957108237720458e-1	8.08202e-1501	5

Найдем цепные дроби для производной функции Вейерштрасса в других рациональных точках, причем, в точках x с большим числом десятичных знаков. Во второй колонке табл. 9.31 имеются коэффициенты конечной цепной дроби, значение которой определяет производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,111$.

Таблица 9.31

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке $x = 0,111$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, ω_n	Значения подходящих дробей, P_n/Q_n
0	-1.073457415941	-1.073457415941
1	-12.759082751230	-13.832540167172
2	-9.593730933009	-2.277856775517
3	-8.134837372902	35.948877318004
4	-5.228667081790	-0.653042714684
5	-2.259478771726	-4.541690470137
...	...	...
28	-4.364340785423	-2.798291065816
29	-44.145082382365	34.970282748019
30	-44.368483683669	-26.636513449076
31	3.633816638510	82.596798624171
32	3.980892708365	0.152651178956
33	-4.25646e-1479	

В табл. 9.32 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в серии рациональных точек: $x = 0,111$; $x = 0,222$; $x = 0,333$; ...

Таблица 9.32

**Значения производной функции Вейерштрасса, установленные
через цепные дроби в различных точках x**

Аргумент, x	Значение производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер конечного звена дроби
0.111	1.5265117895643695651893300367688522926574754014192e-1	-4.25646e-1479	33
0.222	-4.2807511367387880114435151288631239346406015660738e-1	-5.66595e-1479	33
0.333	3.8168174156937645757911787896376217070351479656766e-1	-1.79850e-1478	33
0.444	-5.7206810595214165787580600646832446019812785358066e-1	-3.14017e-1492	17
0.555	4.0675357188496212279603999890764278713237363256503e-1	-3.87306e-1498	9
0.666	-3.5132007233052424871125997731754409216990406442564e-1	-1.11563e-1478	33
0.777	1.9462041188856063108295407652369018827207837280964e-1	-4.23894e-1478	33
0.888	7.8454993784100843004813091816480145881840379645092e-2	-1.75835e-1491	17
0.999	-1.4795282818702000107503819762713296954223265028076e-1	1.29550e-1477	33
1.111	-1.5265117895643695651893300367688522926574754014193e-1	3.67141e-1479	33

В табл. 9.33 приведены коэффициенты конечной цепной дроби для производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,222222$.

Таблица 9.33

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей
производную функции Вейерштрасса в точке $x=0,222222$**

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_{n+1}/Q_{n+1}
0	-2,0193751523	-2,0193751523
1	19,4913650484	17,4719898961
2	-2,1881707922	4,0942763172
3	-14,0238061943	21,4081167697
4	-18,1397215545	0,1023857378
5	0,0285510428	-0,0387938579
...	...	...
797	-0,5746896483	-13,3023567439
798	-316,1175508901	-19,3952807426
799	-313,4270699003	94,6087767123
800	0,2741924574	0,0719814736
801	-2,086761283e-326	

В табл. 9.34 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в серии рациональных точек: $x = 0,111111$; $x = 0,222222$; $x = 0,333333$; $x = 0,444444$.

Таблица 9.34

**Значения производной функции Вейерштрасса, установленные
через цепные дроби в различных точках x**

Аргумент, x	Значение производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер конечного звена дроби
0.111111	-0.062460305523185	0.2199911e-151	801
0.222222	0.071981473618939	-2.0867613e-326	801
0.333333	9.844370595748815	-0.4870014e-326	801
0.444444	0.049322958204706	1.69615029e-325	801

В табл. 9.35 приведены коэффициенты конечной цепной дроби для производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,111111$.

Таблица 9.35

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке $x=0,111111$

Номер звена дроби, n	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, P_n/Q_{n+1}
1	-12.72207775	-13.796565615456274007760628406878074322380241332858
2	-9.652154262	-2.2688075728787350875689620640415853633950101669534
3	-7.464258537	24.722717191653413989183510344256858277365097915535
4	-4.112302708	-0.43775673782930637247202161194105127607921452156084
5	-0.001633467112	-0.44054510732139743954932620052652471803133335888112
...	...	...
7997	-4.754090929	21.662635866555299815577860969764365200888741124758
7998	-4161.168967	21.64327570874947548579682533526900802048181002832
7999	-4304.241892	-72.089370603999758561888834772805673356318803317038
8000	-0.0007055683769	0.42109879949037836246860181405984024606476927569621
8001	0.528724294e-2268	

В [75] предложено иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей используется r/φ – алгоритм.

Несмотря на то, что понятия сходимости и расходимости относятся к бесконечным цепным дробям, определим эти понятия для конечных цепных дробей, беря термины в кавычки, указывая, тем самым, что рассматриваются конечные цепные дроби. Целесообразность введения понятий “сходимости” и “расходимости” применительно к конечным цепным дробям обусловлено тем обстоятельством, что в некоторых практически важных случаях решение задачи мы получаем именно в конечных цепных дробях, как, например, при решении систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей или при суммировании некоторых расходящихся рядов [90, 100]. К конечным цепным дробям приходим и при определении производной функции Вейерштрасса в рациональных точках, представляемых числами с конечным числом десятичных разрядов.

Конечная цепная дробь с n звеньями

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad (9.7.3)$$

будет “сходиться”, если последовательность её подходящих дробей приближается к значению $\frac{P_n}{Q_n}$.

Если последовательность подходящих дробей (9.7.3) не приближается к значению конечной цепной дроби (9.7.3), то конечную цепную дробь (9.7.3) будем называть “расходящейся”.

Для определения значений “расходящихся” конечных цепных дробей, также, как и в случае расходящихся бесконечных цепных дробей, будем использовать, с некоторой модификацией, r/φ – алгоритм:

Конечная цепная дробь (9.7.3) имеет в общем случае комплексное значение $z = r_n e^{i\varphi_n}$. Модуль r_n и модуль аргумента $|\varphi_n|$ определяются по формулам:

$$r_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|}, \quad (9.7.4)$$

$$|\varphi_n| = \pi \frac{k_n}{n}, \quad (9.7.5)$$

где P_i/Q_i – подходящие цепной дроби (9.7.3), k_n – число отрицательных подходящих из общего числа n подходящих дробей.

Здесь надо отметить, что сам факт конечности цепных дробей не имеет принципиального значения при определении их “сходимости” и “расходимости”, так как конечные цепные дроби могут включать сколь угодно большое число звеньев.

Перспективным подходом к изучению быстро осциллирующих функций является метод, связанный со способом суммирования расходящихся цепных дробей, именуемый как r/φ -алгоритм. Этот алгоритм дает возможность установить комплексные значения расходящихся в классическом смысле цепных дробей, имеющих вещественные звенья, и позволяет подойти к изучению производных быстро осциллирующих функций с принципиально новых позиций.

На рис. 9.36 приведены первые и последние сто подходящих дробей цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,222222$. Конечная цепная дробь для производной функции Вейерштрасса в точке $x = 0,222222$ с шестью десятичными разрядами содержит 800 звеньев.

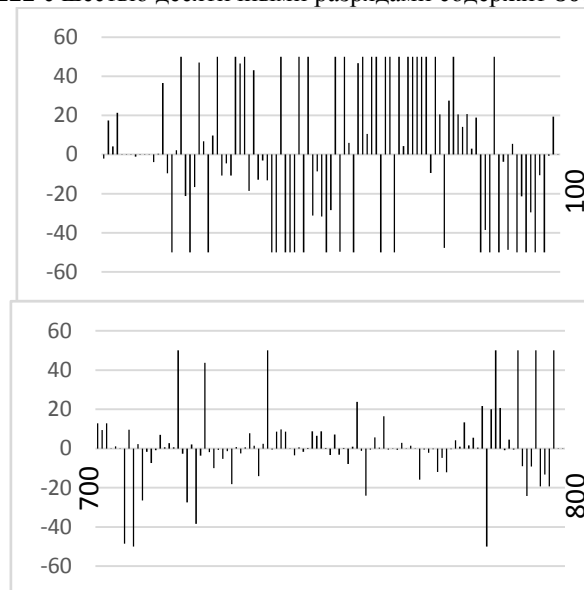


Рис. 9.36. Значения подходящих цепной дроби, представляющей производную $w'(7;0,9;0,222222)$.

Из рис. 9.36 видно, что цепная дробь, представляющая производную функции Вейерштрасса не сходится в классическом смысле.

В табл. 9.36 приведены результаты определения значений расходящейся в классическом смысле цепной дроби, которая получена для производной функции Вейерштрасса при помощи модифицированного r/φ -алгоритма. Для определения коэффициентов цепной дроби использовался алгоритм Рутисхаузера. Полученная цепная дробь – конечная, так как 801-й коэффициент этой цепной дроби близок к нулю: $\alpha_{801,0} = -2,08676e-326$.

Таблица 9.36

Определение комплексной производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,222222$

n	Коэффициенты ряда, c_n	Коэффициенты цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих, P_{n+1}/Q_{n+1}	Значения модуля r_{n+1}	Значения аргумента φ_{n+1}
0	-2,019375152	-2,019375152	-2,019375152	2,019375152	3,141592654
1	19,49136505	19,49136505	17,4719899	5,939907597	1,570796327
2	-42,6504357	-2,188170792	4,094276317	5,247013429	1,047197551
3	-504,7950067	-14,02380619	21,40811677	7,457250777	0,785398163
4	4875,186804	-18,13972155	0,102385738	3,163085208	0,628318531
5	-11006,63776	0,028551043	-0,038793858	1,518982969	1,047197551
...	...	...	...	...	...
795	-3,4214820e+635	-45,98182002	75,12667203	10,54416939	1,716825131
796	-3,0036140e+636	1,403436219	-19,4158875	10,55224954	1,718612794
797	2,0565214e+637	-0,574689648	-13,30235674	10,55531254	1,720395977
798	-1,9077442e+638	-316,1175509	-19,39528074	10,56335297	1,722174696
799	-5,0894769e+638	-313,4270699	94,60877671	10,59234101	1,720021978
800	-5,8928721e+639	0,274192457	0,071981474	10,52653946	1,717874635
801	5,8566322e+640	-2,08676e-326			

Таким образом, просуммировав при помощи r/φ -алгоритма расходящуюся в классическом смысле цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,222222$, получим значение комплексной производной: $w'(7; 0,9; 0,222222) = 10,520 e^{i1,718}$.

На рис. 9.37 показаны значения модуля r_n комплексного числа, являющегося значением “расходящейся” цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,222222$.

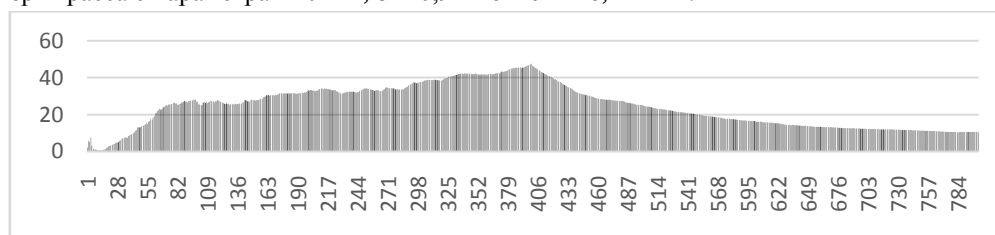


Рис. 9.37. Значение модуля r_n комплексного числа.

На рис. 9.38 приведены значения аргумента φ_n комплексного числа, представленного расходящейся цепной дробью, найденной для производной функции Вейерштрасса.

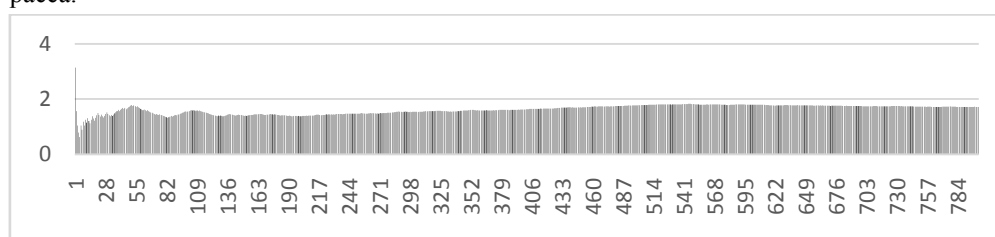


Рис. 9.38. Значение аргумента φ_n комплексного числа.

Аналогичным способом были установлены значения комплексных производных функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точках: $x = 0,111111$ и $x = 0,444444$:

$$w'(7;0,9;0,111111) = 20,220 e^{i1,419}; \quad w'(7;0,9;0,444444) = 37,590 e^{i1,518}.$$

Применение цепных дробей позволило установить наличие производной функции Вейерштрасса в рациональных точках. Эти производные представлены конечными

цепными дробями. Цепные дроби можно использовать при рассмотрении других функций, которые не имеют производных в классическом смысле.

В табл. 9.37 приведены результаты определения значений расходящейся в классическом смысле цепной дроби, которая получена для производной функции Вейерштрасса при помощи модифицированного r/φ -алгоритма. Для определения коэффициентов цепной дроби использовался алгоритм Рутисхаузера. Полученная цепная дробь – конечная, так как 8001-й коэффициент этой цепной дроби близок к нулю: $\alpha_{8001,0} = 0,5287e^{-2268}$.

Таблица 9.37

Определение комплексной производной функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,1111111$

n	Коэффициенты цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих P_{n+1}/Q_{n+1}	Значения модуля Γ_{n+1}	Значения аргумента φ_{n+1}
1	-12.72207775	-13.7965656154	3.85023	3.14159
2	-9.652154262	-2.2688075728	3.22792	3.14159
3	-7.464258537	24.7227171916	5.3699	2.35619
4	-4.112302708	-0.4377567378	3.25252	2.51327
5	-0.001633467112	-0.4405451073	2.33085	2.61799
...	...	...	...	...
7995	-0.02672761665	21.0796274990	63.2953	1.49654
7996	-142.9003835	21.6432712107	63.2868	1.49635
7997	-4.754090929	21.6626358665	63.2783	1.49616
7998	-4161.168967	21.6432757087	63.2698	1.49598
7999	-4304.241892	-72.0893706039	63.2708	1.49618
8000	-0.0007055683769	0.4210987994	63.2312	1.49601
8001	0.5287242942e-2268			

Таким образом, просуммировав при помощи r/φ -алгоритма расходящуюся в классическом смысле цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$; $b = 0,9$ в точке $x = 0,1111111$, получим значение комплексной производной:

$$w'(7; 0,9; 0,1111111) = 63,231 e^{i1,718}.$$

9.8. Определение предела функции через непрерывные дроби

Весьма интересным представляется возможность использования r/φ -алгоритма при определении предела функции – одного из основных понятий в анализе. Известны два эквивалентных между собой определения предела функции в точке x_0 [43]. Определение предела функции “на языке последовательностей”, или определение предела “по Гейне”, формулируется следующим образом: “Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 или при $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$ сходится к числу A ”.

В этом случае следует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Геометрический смысл предела функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

означает, что для всех точек x , достаточно близких к точке x_0 , существуют значения функции, как угодно мало отличающиеся от числа A .

Определение предела функции “на языке $\varepsilon - \delta$ ”, или определение предела функции “по Коши”, имеет такую формулировку: “Число A называется пределом функции в точке x_0 или при $x \rightarrow x_0$, если для любого положительного ε найдётся такое положи-

тельное число δ , что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”.

Можно привести определение предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ в более общем случае [43]. Пусть E есть метрическое пространство. Предположим, что точка $x_0 \in E$ не есть изолированная точка в E . Тогда направление $x \rightarrow x_0$ определим как совокупность всех шаров $U_r(x_0) = \{x \in E: p(x_0, x) < r\}$, из которых выброшена центральная точка. Функция $f(x)$, определённая на E со значениями в метрическом пространстве M , имеет предел при $x \rightarrow x_0$, если существует точка A , для которой при любом $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ так, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$, то есть для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $p(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство:

$$p(f(x), A) \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим трансцендентные функции, представимые, так называемыми, соответствующими непрерывными дробями, и для них дадим формулировку предела функции, отличающуюся от традиционных определений предела. Следует отметить, что трансцендентные функции представляются бесконечными непрерывными дробями и точно получить значение такой функции в точке x_0 нельзя. Погрешность приближения будет уменьшаться с ростом числа звеньев цепной дроби. Чтобы связать классическое определение предела функции в точке x_0 с пределом функции, представленной цепной дробью, установим соответствие между значением i -й подходящей дроби, представляющей функцию в точке x_0 , и “точным” значением этой же функции в некоторой точке x_i интервала (Рис. 9.39).

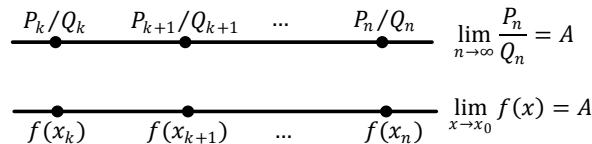


Рис. 9.39. Соответствие $f(x_i)$ и P_i/Q_i .

Для функций, которые могут быть представлены соответствующими непрерывными дробями, то есть установлены через коэффициенты степенных рядов по формулам Хейлерманна-Стилтьеса или найдены по формулам Тиле через обратные производные [78], можно дать такое определение предела:

Если функция $f(x)$ представлена соответствующей непрерывной дробью

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \dots' \quad (9.8.1)$$

то функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, совпадающий со значением бесконечной непрерывной дроби для этой функции в точке x_0 . Непрерывная дробь (9.8.1) сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i| |Q_i|} = r_0, \quad (9.8.2)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (9.8.3)$$

где

P_i/Q_i – значение i -й подходящей дроби;

k_n – число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей n подходящих дробей.

Аналогичные определения предела функции в точке x_0 можно привести, если функция представима непрерывными дробями иных классов, например, ветвящимися непрерывными дробями.

Таким образом, при установлении предела функции при $x \rightarrow x_0$ вместо рассмотрения последовательности “точных” значений функции

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

при $x_n \rightarrow x_0$, рассматриваются значения подходящих непрерывной дроби функции в точке x_0 . Если цепная дробь сходится в классическом смысле, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ существует и он равен значению функции в точке x_0 . Таким образом можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x_0)}{Q_n(x_0)}.$$

Если соответствующая непрерывная дробь, представляющая функцию в точке x_0 , не сходится в классическом смысле, то по последовательности подходящих дробей (9.8.1) при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (9.8.2) и (9.8.3), может быть установлено комплексное значение цепной дроби. В этом случае функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеет комплексный предел $r_0 e^{i\varphi_0}$.

Итак, предлагается использовать конкретный алгоритм вычисления функции, предел которой находится в точке x_0 , а именно, – представление функции, так называемыми, соответствующими непрерывными дробями. Вводится однозначный механизм квантования при определении предела функции в точке x_0 , заключающийся в использовании подходящих дробей. Устанавливается комплексный предел функции, если он имеет место, при помощи r/φ -алгоритма.

Для примера рассмотрим соответствующую непрерывную дробь логарифмической функции.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \frac{3^2 x}{6 + \frac{3^2 x}{7 + \dots + \frac{n^2 x}{2n + \frac{n^2 x}{2n+1 + \dots}}}}}}}}}. \quad (9.8.4)$$

Очевидно, что “точно” определить значение функции $\ln(1+x)$ в точке x_0 нельзя, так как точное значение функции в точке x_0 можно получить только в пределе, с учетом бесконечного числа звеньев цепной дроби (9.8.4).

Будем устанавливать значение функции $\ln(1+x)$ в точке x_0 , используя последовательность подходящих дробей:

$$\frac{P_k}{Q_n}, \frac{P_{k+1}}{Q_{n+1}}, \dots, \frac{P_m}{Q_m}, \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}, \dots$$

Цепная дробь с возрастающим числом звеньев определяет значение функции в точке x_0 со все большей точностью. Будем полагать, что значение непрерывной дроби логарифмической функции с конечным числом звеньев k дает значение, которое соответствует “точному” значению логарифмической функции, в некоторой точке x_k , лежащей в окрестности точки x_0 . Беря непрерывную дробь для $\ln(1+x)$ в точке x_0 , со все большим числом звеньев, например, с числом $m \gg k$, получим “точное” значение функции в некоторой окрестности точки x_0 , причем, эта точка x_m лежит ближе к точке x_0 , нежели точка x_k , а само значение функции в точке x_m ближе к значению искомого предела, т.е. значению функции в точке x_0 , нежели, когда использовалась цепная дробь с меньшим числом звеньев. Таким образом, определяя цепную дробь для функции в точке x_0 , тем самым будем получать последовательность “точных” значений функции в точках, приближающихся в точке x_0 , то есть фактически определяя предел функции в точке x_0 в классическом смысле.

Как известно, непрерывные дроби, представляющие функции, могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Если функция представляется расходящейся цепной дробью, то нельзя вычислить значения функции в последовательности точек, приближающихся к точке x_0 . Тем не менее, используя введенные выше определение предела, можно установить предел функции в точке x_0 в случае расходящийся непрерыв-

ной дроби.

Известно, что цепная дробь, соответствующая степенному ряду конечна тогда, когда степенной ряд является рядом Тейлора рациональной функции. В случае, если функция представима конечной цепной дробью, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{P_n(x_0)}{Q_n(x_0)}.$$

В качестве примера функции, которая представима конечной соответствующей цепной дробью, может быть указана функция Вейерштрасса $w(a, b, x)$ в рациональных точках x_i [73].

9.9. О некоторых особенностях представления функций и производных рядами

Ряды в общем случае не могут представлять функцию, для вычисления которой они получены тем или иным способом. Часто степенные ряды определяют функцию в достаточно небольшом и интервале изменения переменных, например, в единичном круге, как ряды для степенной функции или логарифмической функции. Известны ряды которые расходятся всюду, кроме $x = 0$. Но парадокс состоит в том, что ряды, даже с нулевым радиусом сходимости, достаточны для восстановления значений функции на всей плоскости комплексного переменного. «Восстановления» функции осуществляется через построение по степенным рядам, в том числе и расходящимся, так называемых, соответствующих цепных дробей. При «свертке» цепных дробей, содержащих $2n$ звеньев приходим к дробно-рациональным функциям n -го порядка, которые есть ничто иное как диагональные аппроксимации Паде рассматриваемой функции. Эти диагональные аппроксимации Паде следует рассматривать как производящие функции, порождающие степенные ряды, которые могут быть как сходящимися, так и расходящимися.

Функция Вейерштрасса задаётся сходящимся рядом:

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad (9.9.1)$$

при условии $ab > 3\pi/2 + 1$.

Производная функции Вейерштрасса может быть представлена расходящимся рядом:

$$w'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)] \quad (9.9.2)$$

Выражение «функция Вейерштрасса непрерывная, но, тем не менее, не имеет производную», означает лишь то, что производная функции Вейерштрасса представляется расходящимся рядом, по которому нельзя устанавливать производную непосредственно, но можно, если просуммировать этот расходящийся ряд построением соответствующий цепной дроби.

Можно заключить, что рядами следует пользоваться с большой осторожностью и не делать на их основе каких-то окончательных выводов не о самих функциях, которые ряды представляют, не о производных функций, когда те также записываются через ряды. Рядами можно пользоваться как некой промежуточной формой записи функции и производной, полагая, что это промежуточная форма записи несёт между тем всю информацию как о функции, так и о её производной, если эту информацию прочесть через построение по рядам, в том числе и расходящимся, соответствующих цепных дробей. Следовательно, функции или производные нельзя в окончательном виде рассматривать через ряды, степенные или тригонометрические, так как можно во

многих случаях получить неверные заключения. Именно пренебрежение этого обстоятельства привело к парадоксу, связанной с отсутствием у непрерывной, функции Вейерштрасса производной.

Если рассматривать функцию Вейерштрасса через призму соответствующих цепных дробей, то, оказывается, что функция Вейерштрасса (9.9.1) сходится в значительно более широкой области изменения параметров, чем в случае определения её рядом, например, при $b > 1$, что было рассмотрено выше. Кроме того, представление функций и производных соответствующими цепными дробями позволяют определять комплексные значения функций и производных, несмотря на то, что элементы соответствующих цепных дробей вещественные числа.

Именно через соответствующие цепные дроби, которые определяем производные функции Вейерштрасса, было установлено, что производные функции Вейерштрасса при вещественных параметрах (a, b, x) функции имеют комплексные значения.

ГЛАВА 10

ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

10.1. О записи комплексных чисел цепными дробями

Будем рассматривать комплексные числа в алгебраической и показательной формах. Пусть

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = a - ib.$$

Составим квадратное уравнение:

$$z^2 + pz + q = 0, \quad p = -(z_1 + z_2) = -2a, \quad q = z_1 z_2 = a^2 + b^2.$$

Представим корни квадратного уравнения цепными дробями:

$$z_1 = a + ib = 2a - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots, \quad (10.1.1)$$

$$z_2 = a - ib = \frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots. \quad (10.1.2)$$

Итак, произвольное комплексное число, заданное в алгебраической форме, можно представить в виде бесконечной чисто периодической цепной дроби (10.1.1) или (10.1.2).

Если комплексное число имеет вид

$$-a + ib,$$

то

$$\begin{aligned} -a + ib &= (-2a) - \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \dots = \\ &= -2a + \frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots. \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Если комплексное число имеет вид

$$-a - ib,$$

то

$$\begin{aligned} -a - ib &= \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{(-2a)} - \dots = \\ &= -\frac{a^2 + b^2}{2a} + \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots + \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots. \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Например:

$$5 + i3 = 10 - \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \dots - \frac{34}{10} - \dots, \quad 5 - i3 = \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \dots - \frac{34}{10} - \dots,$$

$$-5+i3 = -10 + \frac{34}{10} - \frac{34}{10} + \frac{34}{10} - \dots, \quad -5-i3 = -\frac{34}{10} + \frac{34}{10} - \frac{34}{10} + \frac{34}{10} - \dots,$$

Пусть комплексные числа представлены в показательной форме:

$$z_1 = re^{i\varphi}, \quad z_2 = re^{-i\varphi},$$

Так как

$$z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z_2 = r(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

то

$$p = -2r \cos \varphi, \quad q = r^2.$$

Используя полученные разложения (10.1.1) и (10.1.2), запишем:

$$re^{i\varphi} = 2r \cos \varphi - \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \dots - \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \dots, \quad (10.1.5)$$

а также

$$re^{-i\varphi} = \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \dots - \frac{r^2}{2r \cos \varphi} - \dots. \quad (10.1.6)$$

Из разложения (10.1.1) получаем цепную дробь:

$$ib = a - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots. \quad (10.1.7)$$

Можем также записать

$$-ib = -a + \frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots - \frac{a^2 + b^2}{2a} - \dots. \quad (10.1.8)$$

Так как аргумент φ мнимого числа равен $\pi/2$, то можно заключить, что количество подходящих дробей разложений (10.1.7) и (10.1.8), имеющих отрицательные значения, с ростом n стремится к $n/2$, что очевидно, если учесть формулу, определяющую модуль аргумента комплексного числа, являющегося значением цепной дроби:

$$|\varphi_n| = \pi \frac{k_n}{n}, \quad (10.1.9)$$

где k_n - число подходящих дробей, имеющих отрицательные значения из общего числа n подходящих дробей.

Рассмотрим пример. Пусть имеется квадратное уравнение

$$x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Можно записать цепную дробь:

$$i = 3 - \frac{10}{6} - \frac{10}{6} - \dots - \frac{10}{6} - \dots = e^{i\frac{\pi}{2}}. \quad (10.1.10)$$

В табл. 10.1 приведены результаты определения значения “расходящейся” цепной дроби (10.1.10) при помощи r/φ -алгоритма. В колонках 1 и 2 табл. 10.1 даны номера и значения подходящих цепной дроби (10.1.10). В колонке 3 приведены значения модуля комплексного числа, представленного разложением (10.1.10).

Модуль комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$ определяется формулой:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|} = r_0, \quad (10.1.11)$$

где P_i/Q_i – значение i -й подходящей дроби.

В колонке 4 приводится погрешность в определении модуля. В колонках 5 и 6 приведены результаты определения аргумента комплексного числа $e^{i\pi/2}$, Модуль аргумента определяется по формуле (10.1.9). Знак аргумента устанавливается алгоритмом:

Знак аргумента φ будет положительным, если на принятом интервале Δ среди взятых по модулю отчётов число «убывающих» пар отчётов значений в соседних точках составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар взятых по модулю отчётов принадлежит к множеству «возрастающих» пар, то знак аргумента φ будет отрицательным.

Таблица 10.1

Представление ценной дробью мнимой единицы

$$i = 3 - \frac{10}{6} - \frac{10}{6} - \dots - \frac{10}{6} - \dots = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$r_0 = 1.0000000000\dots, \quad \varphi_0 = 1.5707963268\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	3.0000000000	3.0000000000	2.0000000000	0.0000000000	1.5707963268
2	1.3333333333	2.0000000000	1.0000000000	0.0000000000	1.5707963268
4	0.2916666667	1.0548446713	0.0548446713	0.0000000000	1.5707963268
8	-1.5684523810	1.6950503212	0.6950503212	1.5707963268	0.0000000000
16	-0.4654406117	1.3073346896	0.3073346896	1.3744467859	0.1963495409
32	0.8415306026	1.0208168532	0.0208168532	1.4726215564	0.0981747704
64	-0.1733901559	1.0587663355	0.0587663355	1.5217089416	0.0490873852
128	2.7969749741	1.0150819469	0.0150819469	1.5707963268	0.0000000000
256	1.2197229272	1.0041816224	0.0041816224	1.5707963268	0.0000000000
512	0.1999322995	1.0062262963	0.0062262963	1.5585244805	0.0122718463
1024	-2.4008803928	1.0054812385	0.0054812385	1.5738642884	0.0030679616
2048	-0.9921832581	1.0031430411	0.0031430411	1.5723303076	0.0015339808
4096	0.0078475334	1.0021582954	0.0021582954	1.5707963268	0.0000000000
8192	-63.7103641626	1.0001088658	0.0001088658	1.5715633172	0.0007669904
16384	-31.8473340646	1.0002400866	0.0002400866	1.5713715696	0.0005752428
32768	-15.9079671311	1.0001401995	0.0001401995	1.5709880744	0.0001917476
65536	-7.9225527739	1.0001194064	0.0001194064	1.5708922006	0.0000958738
131072	-3.8981654157	1.0000237432	0.0000237432	1.5708442637	0.0000479369

Определим значения сопряженных комплексных чисел, представленных цепными дробями

$$3 + i2 = \sqrt{13} e^{i \arctg \frac{2}{3}} = 6 - \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \dots - \frac{13}{6} - \dots, \quad (10.1.12)$$

$$3 - i2 = \sqrt{13} e^{-i \arctg \frac{2}{3}} = \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \dots - \frac{13}{6} - \dots. \quad (10.1.13)$$

В табл. 10.2 и 10.3 приведены значения модулей и аргументов этих чисел, установленных по подходящим дробям разложений (10.1.12) и (10.1.13).

Таблица 10.2

Определение значения цепной дроби

$$3+i2 = \sqrt{13}e^{i \arctg \frac{2}{3}} = 6 - \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \dots - \frac{13}{6} - \dots$$

$$r_0 = 3,605551275 \dots, \varphi_0 = 0,588002603 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	6.0000000000	6.0000000000	2.3944487250	0.0000000000	0.5880026030
2	3.8333333333	4.7958315233	1.1902802483	0.0000000000	0.5880026030
4	1.0166666667	2.7946823927	0.8108688823	0.0000000000	0.5880026030
8	3.0167366947	3.7956241541	0.1900728791	0.3926990817	0.1953035213
16	-116.4895396025	3.5997943381	0.0057569369	0.5890486225	0.0010460195
32	-56.7280319344	3.5996865183	0.0058647567	0.5890486225	0.0010460195
64	-26.8305308525	3.5994588526	0.0060924224	0.5890486225	0.0010460195
128	-11.8482200220	3.5989464252	0.0066048498	0.5890486225	0.0010460195
256	-4.2894137311	3.5975805180	0.0079707570	0.5890486225	0.0010460195
512	-0.3703363779	3.5889757902	0.0165754848	0.5890486225	0.0010460195
1024	1.9082443894	3.6049268047	0.0006244703	0.5859806610	0.0020219420
2048	4.2860340078	3.6065887082	0.0010374332	0.5875146418	0.0004879612
4096	2.0878481764	3.6055059436	0.0000453314	0.5875146418	0.0004879612
8192	4.7365415321	3.6058071065	0.0002558315	0.5878981370	0.0001044660
16384	2.7165563019	3.6056164759	0.0000652009	0.5878981370	0.0001044660
32768	9.9143531801	3.6055865090	0.0000352340	0.5879940108	0.0000085922
65536	6.1679232141	3.6055787045	0.0000274295	0.5879940108	0.0000085922
131072	3.9526331736	3.6055672027	0.0000159277	0.5879940108	0.0000085922

Таблица 10.3

Определение значения цепной дроби

$$3-i2 = \sqrt{13}e^{-i \arctg \frac{2}{3}} = \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \frac{13}{6} - \dots - \frac{13}{6} - \dots$$

$$r_0 = 3,605551275 \dots, \varphi_0 = -0,588002603 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	2.1666666667	2.1666666667	1.4388846083	0.0000000000	0.5880026030
2	3.3913043478	2.7106873827	0.8948638923	0.0000000000	0.5880026030
4	12.7868852459	4.6516913815	1.0461401065	0.0000000000	0.5880026030
8	4.3092922306	3.4249966468	0.1805546282	-0.3926990817	0.1953035213
16	-0.1115980031	3.6113174195	0.0057661445	-0.5890486225	0.0010460195
32	-0.2291635997	3.6114255878	0.0058743128	-0.5890486225	0.0010460195
64	-0.4845226534	3.6116540104	0.0061027354	-0.5890486225	0.0010460195
128	-1.0972112246	3.6121682471	0.0066169721	-0.5890486225	0.0010460195
256	-3.0307172063	3.6135396929	0.0079884179	-0.5890486225	0.0010460195
512	-35.1032217606	3.6222033137	0.0166520387	-0.5890486225	0.0010460195
1024	6.8125445945	3.6061758544	0.0006245794	-0.5859806610	0.0020219420
2048	3.0331070581	3.6045141412	0.0010371338	-0.5875146418	0.0004879612
4096	6.2265063845	3.6055966078	0.0000453328	-0.5875146418	0.0004879612
8192	2.7446186024	3.6052954626	0.0002558124	-0.5878981370	0.0001044660
16384	4.7854704836	3.6054860762	0.0000651988	-0.5878981370	0.0001044660
32768	1.3112302703	3.6055160422	0.0000352328	-0.5879940108	0.0000085922
65536	2.1076786381	3.6055238467	0.0000274283	-0.5879940108	0.0000085922
131072	3.2889467423	3.6055353483	0.0000159267	-0.5879940108	0.0000085922

В библиографии работ по цепным дробям, приведенной в книге Брезински [117], имеется ссылка на диссертацию немецкого математика Пауля Лунца “Kettenbrüche, deren Teilnenner dem Ring der Zuhlen 1 und $\sqrt{-2}$ angehören”, в которой, судя по названию, речь шла и о представлении цепной дробью комплексного числа $\sqrt{-2}$. Сведения о работе Лунца есть и в монографии Перрона [138]. Лунц выполнял свои исследования под руководством Перрона, профессора Мюнхенского университета.

Определим значение $\sqrt{-2}$ при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (10.1.9) и (10.1.11). При $a=1$, $b=\sqrt{2}$ из (10.1.1) получим цепную дробь:

$$\sqrt{-2} = 1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \dots - \frac{3}{2} - \dots \quad (10.1.14)$$

Из (10.1.1) при $a=10$, $b=\sqrt{2}$ запишем:

$$\sqrt{-2} = 10 - \frac{102}{20} - \frac{102}{20} - \dots - \frac{102}{20} - \dots \quad (10.1.15)$$

В табл. 10.4 и 10.5 даны результаты вычислений $\sqrt{-2}$.

Таблица 10.4

Определение значения цепной дроби

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \dots - \frac{3}{2} - \dots$$

$$r_0 = 1,4142135623 \dots, \quad \varphi_0 = 1,5707963268 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	1.0000000000	1.0000000000	0.4142135623	0.0000000000	1.5707963268
2	-0.5000000000	1.4142135624	0.0000000001	1.5707963268	0.0000000000
4	1.7500000000	1.4462538043	0.0320402420	1.5707963268	0.0000000000
8	0.3035714286	1.0106775043	0.4035360580	1.5707963268	0.0000000000
16	-3.1423319328	1.3133251430	0.1008884193	1.7671458676	0.1963495408
...	...	...	...	...	...
16384	2.6331435284	1.4140476039	0.0001659584	1.5711798220	0.0003834952
32768	0.9367975555	1.4140672336	0.0001463287	1.5707963268	0.0000000000
65536	-0.5990677140	1.4140073417	0.0002062206	1.5708922006	0.0000958738
131072	1.3697265231	1.4141860382	0.0000275241	1.5708202952	0.0000239684

Таблица 10.5

Определение значения цепной дроби

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = 10 - \frac{102}{20} - \frac{102}{20} - \dots - \frac{102}{20} - \dots$$

$$r_0 = 1,4142135623 \dots, \quad \varphi_0 = 1,5707963268 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	10.0000000000	10.0000000000	8.5857864377	0.0000000000	1.5707963268
2	4.9000000000	7.0000000000	5.5857864377	0.0000000000	1.5707963268

Окончание табл. 10.5

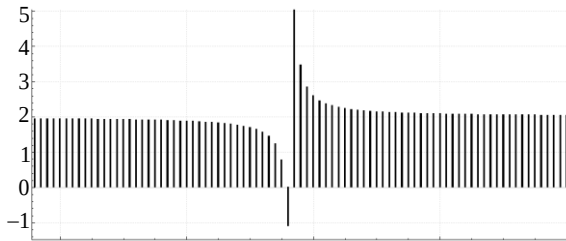
4	2.2459183673	4.3164370248	2.9022234625	0.0000000000	1.5707963268
8	0.6777070256	2.1556916147	0.7414780524	0.0000000000	1.5707963268
16	-1.1367103552	1.1914529787	0.2227605836	0.9817477042	0.5890486226
...	...	...	...	...	...
8192	0.7763952276	1.4147864822	0.0005729199	1.5707963268	0.0000000000
16384	-0.8998061817	1.4129639363	0.0012496260	1.5704128316	0.0003834952
32768	0.6614473536	1.4140109363	0.0002026260	1.5705087054	0.0002876214
65536	-1.1811124423	1.4138354804	0.0003780819	1.5707483899	0.0000479369
131072	0.2561032197	1.4142172188	0.0000036565	1.5707483899	0.0000479369

10.2. Примеры записи комплексных чисел цепными дробями

Пример 1.

На рис. 10.1 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.1).

$$2 + i0.01 = 4 - \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots \quad (10.2.1)$$



Номер дроби	Значения подходящих дробей
1255	0.7860813648
1256	-1.0886589851

Рис. 10.1. Распределение подходящих дроби (10.2.1).

Из рис. 10.1 видно, что номер первой подходящей с отрицательным значением равен 1256. Столь позднее появление подходящей дроби с отрицательным значением объясняется малой величиной аргумента комплексного числа $2 + i0.01$, которое представлено цепной дробью (10.2.1).

В табл. 10.6 приведены результаты восстановления комплексного числа $2 + i0.01$ по подходящим дробям при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.6

Определение значения цепной дроби

$$2 + i0.01 = 4 - \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots = 2,00002499e^{i0,00499995}.$$

$$r_0 = 2.000024999843\dots, \quad \varphi_0 = 0.0049999583\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	4.0000000000	4.0000000000	1.9999750002	0.0000000000	0.0049999583
2	2.9999750000	3.4640871814	1.4640621815	0.0000000000	0.0049999583
4	2.4999374987	2.9906601781	0.9906351783	0.0000000000	0.0049999583
8	2.2498687369	2.6320712500	0.6320462501	0.0000000000	0.0049999583
16	2.1247342634	2.3872939776	0.3872689777	0.0000000000	0.0049999583
32	2.0619662795	2.2306293123	0.2306043125	0.0000000000	0.0049999583
64	2.0301762493	2.1342355175	0.1342105176	0.0000000000	0.0049999583

Окончание табл. 10.6

128	2.0134311924	2.0762795009	0.0762545011	0.0000000000	0.0049999583
256	2.0029929185	2.0415197757	0.0414947758	0.0000000000	0.0049999583
512	1.9847903581	2.0184364343	0.0184114345	0.0000000000	0.0049999583
1024	1.9956825674	2.0102282009	0.0102032010	0.0030679616	0.0019319967
2048	2.0094222405	2.0048994628	0.0048744629	0.0046019424	0.0003980159
4096	1.9994045268	2.0026127643	0.0025877645	0.0046019424	0.0003980159
8192	2.0836690974	2.0008083476	0.0007833478	0.0049854376	0.0000145207
16384	2.0412369565	2.0004978894	0.0004728896	0.0049854376	0.0000145207
32768	2.0194059736	2.0003013425	0.0002763426	0.0049854376	0.0000145207
65536	2.0071264606	2.0001805415	0.0001555417	0.0049854376	0.0000145207
131072	1.9965471247	2.0001049626	0.0000799628	0.0049854376	0.0000145207

Пример 2.

На рис. 10.2 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.2).

$$2 - i0.01 = \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots \quad (10.2.2)$$

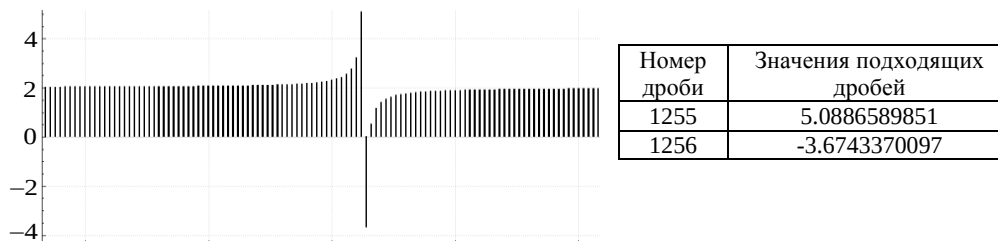


Рис. 10.2. Распределение подходящих дроби (10.2.2).

Подходящая дробь с отрицательным значением имеет номер 1256.

Сравнивая графики подходящих, приведённых на рис. 10.1 и 10.2, можно обратить внимание на различное поведение подходящих перед появлением первой подходящей с отрицательным значением. Если на рис. 10.1 подходящие цепной дроби (10.2.1), представляющие комплексное число с положительным аргументом, образуют убывающую последовательность, то на рис. 10.2, где показаны подходящие цепной дроби (10.2.2), которые определяют комплексное число с отрицательным аргументом, можно наблюдать возрастающую последовательность подходящих. Как было отмечено выше, знак аргумента комплексного числа, записываемого цепной дробью, устанавливается из рассмотрения поведения подходящих дробей.

В табл. 10.7 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.2).

Таблица 10.7

Определение значения цепной дроби

$$2 - i0.01 = \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots = 2,00002499e^{-i0,00499995}$$

$$r_0 = 2.0000249984\dots, \varphi_0 = -0.0049999583\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	1.0000250000	1.0000250000	0.9999999998	0.0000000000	0.0049999583
2	1.3333777781	1.1547342173	0.8452907825	0.0000000000	0.0049999583
4	1.6000800028	1.3375307664	0.6624942335	0.0000000000	0.0049999583

Окончание табл. 10.7

8	1.7779259449	1.5197536921	0.4802713077	0.0000000000	0.0049999583
16	1.8826354283	1.6755791443	0.3244458556	0.0000000000	0.0049999583
32	1.9399444306	1.7932607529	0.2067642470	0.0000000000	0.0049999583
64	1.9703215430	1.8742542551	0.1257707447	0.0000000000	0.0049999583
128	1.9867080708	1.9265710605	0.0734539393	0.0000000000	0.0049999583
256	1.9970614788	1.9593736233	0.0406513765	0.0000000000	0.0049999583
512	2.0153765780	1.9817815077	0.0182434922	0.0000000000	0.0049999583
1024	2.0043768810	1.9898735866	0.0101514132	-0.0030679616	0.0019319967
2048	1.9906717062	1.9951623881	0.0048626118	-0.0046019424	0.0003980159
4096	2.0006456654	1.9974405793	0.0025844206	-0.0046019424	0.0003980159
8192	1.9197386020	1.9992419588	0.0007830411	-0.0049854376	0.0000145207
16384	1.9596451001	1.9995522220	0.0004727778	-0.0049854376	0.0000145207
32768	1.9808300323	1.9997486954	0.0002763045	-0.0049854376	0.0000145207
65536	1.9929486649	1.9998694703	0.0001555296	-0.0049854376	0.0000145207
131072	2.0035089332	1.9999450402	0.0000799596	-0.0049854376	0.0000145207

Пример 3.

$$-2 + i0.01 = -4 + \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} + \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} + \dots \quad (10.2.3)$$

На рис. 10.3 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.3).

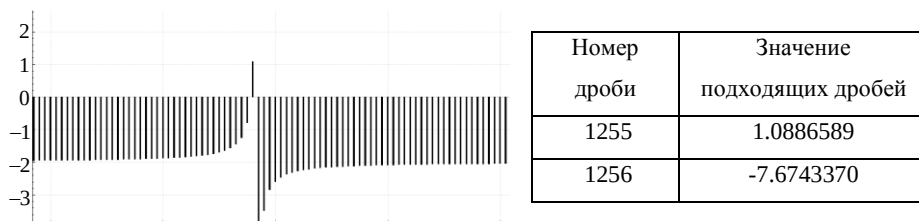


Рис. 10.3. Распределение подходящих дроби (10.2.3).

Запишем комплексное число (10.2.3) в показательной форме:

$$-2 + i0.01 = 2,00002499^{i3.1365}.$$

Аргумент комплексного числа положительный и весьма близок к π . Первые 1255 подходящих цепной дроби (10.2.3) отрицательные, что согласуется с формулой (10.1.9) для модуля аргумента комплексного числа, определяемого при помощи r/φ -алгоритма.

Знак аргумента следует взять положительным, что определяется динамикой в распределении подходящих. Из графика на рис. 10.3 видно, что значение подходящих убывают по модулю.

В табл. 10.8 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.3) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.8

Определение значения цепной дроби

$$-2 + i0,01 = -4 + \frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots = 2,00002499e^{i3,13659269}.$$

$$r_0 = 2.00002499984375\dots, \quad \varphi_0 = -3.13659269525584\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-4.0000000000	4.0000000000	1.9999750002	3.1415926536	0.0050003977
2	-2.9999750000	3.4640871814	1.4640621815	3.1415926536	0.0050003977
4	-2.4999374987	2.9906601781	0.9906351783	3.1415926536	0.0050003977
8	-2.2498687369	2.6320712500	0.6320462501	3.1415926536	0.0050003977
16	-2.1247342634	2.3872939776	0.3872689777	3.1415926536	0.0050003977
32	-2.0619662795	2.2306293123	0.2306043125	3.1415926536	0.0050003977
64	-2.0301762493	2.1342355175	0.1342105176	3.1415926536	0.0050003977
128	-2.0134311924	2.0762795009	0.0762545011	3.1415926536	0.0050003977
256	-2.0029929185	2.0415197757	0.0414947758	3.1415926536	0.0050003977
512	-1.9847903581	2.0184364343	0.0184114345	3.1415926536	0.0050003977
1024	-1.9956825674	2.0102282009	0.0102032010	3.1385246920	0.0019324362
2048	-2.0094222405	2.0048994628	0.0048744629	3.1369907112	0.0003984554
4096	-1.9994045268	2.0026127643	0.0025877645	3.1369907112	0.0003984554
8192	-2.0836690974	2.0008083476	0.0007833478	3.1366072160	0.0000149602
16384	-2.0412369565	2.0004978894	0.0004728896	3.1366072160	0.0000149602
32768	-2.0194059736	2.0003013425	0.0002763426	3.1366072160	0.0000149602
65536	-2.0071264606	2.0001805415	0.0001555417	3.1366072160	0.0000149602
131072	-1.9965471247	2.0001049626	0.0000799628	3.1366072160	0.0000149602

Пример 4.

$$-2 - i0.01 = -\frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots \quad (10.2.4)$$

В табл. 10.9 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.4) при помощи r/φ -алгоритма.

На рис. 10.4 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.4).

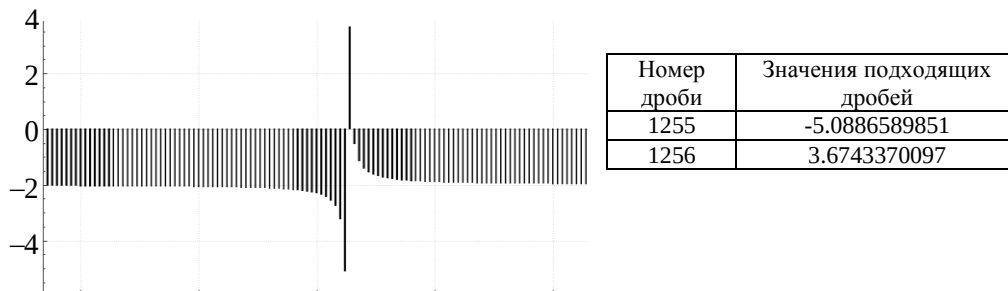


Рис. 10.4. Распределение подходящих дроби (10.2.4).

График, приведенный на рис. 10.4, показывает подходящие цепной дроби, представляющей комплексное число, аргумент которого отрицателен, а модуль аргумента близок к π . Знак аргумента устанавливается по распределению подходящих. Из рис. 10.4 видно, что подходящие цепной дроби возрастают по модулю. Следовательно, аргумент φ комплексного числа отрицательный.

В табл. 10.9 показаны результаты определения значения комплексного числа через подходящие цепной дроби, которой представлено это число. Из табл. 10.9 видно, что используя достаточно большое число подходящих, можно «восстановить» комплексное число с любой заданной погрешностью.

Таблица 10.9

Определение значения цепной дроби

$$-2 - i0.01 = -\frac{4,0001}{4} - \frac{4,0001}{4} - \dots - \frac{4,0001}{4} - \dots = 2,00002499e^{-i3,13659269}.$$

$$r_0 = 2.00002499984\dots, \varphi_0 = 3,136592695255\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-1.0000250000	1.0000250000	0.9999999998	-3.1415926536	0.0049999583
2	-1.3333777781	1.1547342173	0.8452907825	-3.1415926536	0.0049999583
4	-1.6000800028	1.3375307664	0.6624942335	-3.1415926536	0.0049999583
8	-1.7779259449	1.5197536921	0.4802713077	-3.1415926536	0.0049999583
16	-1.8826354283	1.6755791443	0.3244458556	-3.1415926536	0.0049999583
32	-1.9399444306	1.7932607529	0.2067642470	-3.1415926536	0.0049999583
64	-1.9703215430	1.8742542551	0.1257707447	-3.1415926536	0.0049999583
128	-1.9867080708	1.9265710605	0.0734539393	-3.1415926536	0.0049999583
256	-1.9970614788	1.9593736233	0.0406513765	-3.1415926536	0.0049999583
512	-2.0153765780	1.9817815077	0.0182434922	-3.1415926536	0.0049999583
1024	-2.0043768810	1.9898735866	0.0101514132	-3.1385246920	0.0019319968
2048	-1.9906717062	1.9951623881	0.0048626118	-3.1369907112	0.0003980160
4096	-2.0006456654	1.9974405793	0.0025844206	-3.1369907112	0.0003980160
8192	-1.9197386020	1.9992419588	0.0007830411	-3.1366072160	0.0000145208
16384	-1.9596451001	1.9995522220	0.0004727778	-3.1366072160	0.0000145208
32768	-1.9808300323	1.9997486954	0.0002763045	-3.1366072160	0.0000145208
65536	-1.9929486649	1.9998694703	0.0001555296	-3.1366072160	0.0000145208
131072	-2.0035089332	1.9999450402	0.0000799596	-3.1366072160	0.0000145208

Далее будут показаны варианты определения комплексных чисел через подходящие цепных дробей, а также показаны графики представления при различных аргументах комплексных чисел. Эти графики, как и цепные дроби, могут быть использованы в качестве калибровочных.

Пример 5.

На рис. 10.5 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.5).

$$9 + i2 = 18 - \frac{85}{18} - \frac{85}{18} - \dots - \frac{85}{18} - \dots \quad (10.2.5)$$

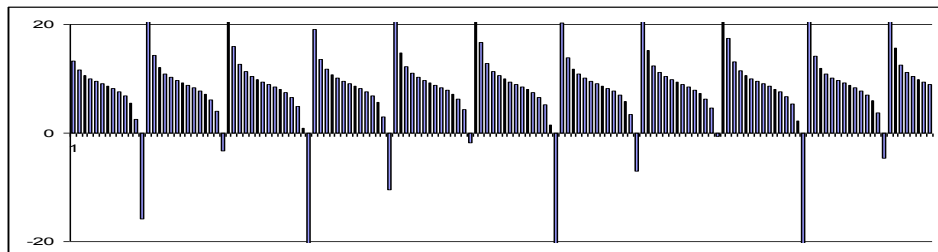


Рис. 10.5. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.5).

В табл.10.10 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.5) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.10

Определение значения цепной дроби

$$9 + i2 = 18 - \frac{85}{18 - \frac{85}{18 - \dots - \frac{85}{18 - \dots}}} = 9,21954445e^{i0,21866894}.$$

$$r_0 = 9.21954445729289\dots, \quad \varphi_0 = 0.21866894587394\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	18.0000000000	18.0000000000	8.7804555427	0.0000000000	0.2186689459
2	13.2777777778	15.4596248337	6.2400803764	0.0000000000	0.2186689459
4	10.6713564214	13.1145445536	3.8950000963	0.0000000000	0.2186689459
8	8.6390453594	11.0476246276	1.8280801703	0.0000000000	0.2186689459
16	14.3603850901	9.7653707146	0.5458262573	0.1963495408	0.0223194050
32	11.3070850227	9.6045633283	0.3850188710	0.1963495408	0.0223194050
...	...	...	...	...	...
8192	11.7534961286	9.2209394644	0.0013950071	0.2185922623	0.0000766836
16384	9.6503987591	9.2204018450	0.0008573877	0.2185922623	0.0000766836
32768	6.2501627623	9.2197157392	0.0001712819	0.2185922623	0.0000766836
65536	8.3523971556	9.2197385329	0.0001940756	0.2186401992	0.0000287467
131072	11.7645111403	9.2196315209	0.0000870636	0.2186641676	0.0000047783

Пример 6.

На рис. 10.6 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.6)

$$9 - i2 = \frac{85}{18 - \frac{85}{18 - \dots - \frac{85}{18 - \dots}}} \quad (10.2.6)$$

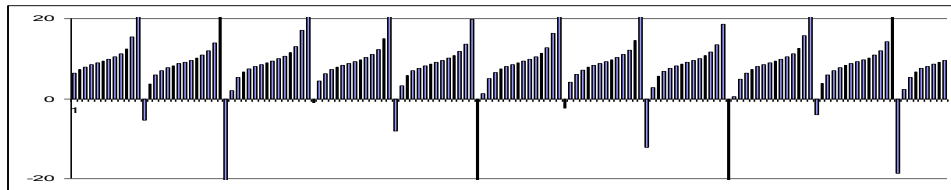


Рис. 10.6. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.6).

В табл. 10.11 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.6) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.11

Определение значения цепной дроби

$$9 - i2 = \frac{85}{18 - \frac{85}{18 - \dots - \frac{85}{18 - \dots}}} = 9,21954445e^{-i0,21866894}.$$

$$r_0 = 9.21954445729289\dots, \quad \varphi_0 = -0.21866894587394\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	4.7222222222	4.7222222222	4.4973222351	0.0000000000	0.2186689459
2	6.4016736402	5.4981929325	3.7213515248	0.0000000000	0.2186689459
4	7.9652479632	6.4813535577	2.7381908996	0.0000000000	0.2186689459
8	9.8390500876	7.6939616312	1.5255828261	0.0000000000	0.2186689459
16	5.9190613251	8.7042266478	0.5153178095	-0.1963495408	0.0223194050

Окончание табл. 10.11

32768	13.5996458384	9.2193731785	0.0001712788	-0.2185922623	0.0000766836
65536	10.1767191403	9.2193503858	0.0001940715	-0.2186401992	0.0000287467
131072	7.2251195979	9.2194573946	0.0000870627	-0.2186641676	0.0000047783

Пример 7.

На рис. 10.7 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.7).

$$-9 + i2 = -18 + \frac{85}{18 - 18 - \dots - 18 - \dots} \quad (10.2.7)$$

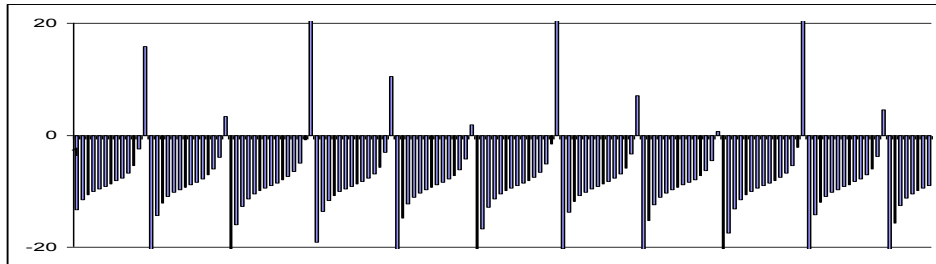


Рис. 10.7. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.7).

В табл. 10.12 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.7) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.12

Определение значения цепной дроби

$$-9 + i2 = -18 + \frac{85}{18 - 18 - \dots - 18 - \dots} = 9,21954445e^{-i2,92292370}$$

$$r_0 = 9.21954445729\dots, \quad \varphi_0 = -2.9229237077\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-18.0000000000	18.0000000000	8.7804555427	3.1415926536	2.9229237077
2	-13.2777777778	15.4596248337	6.2400803764	3.1415926536	2.9229237077
4	-10.6713564214	13.1145445536	3.8950000963	3.1415926536	2.9229237077
8	-8.6390453594	11.0476246276	1.8280801703	3.1415926536	2.9229237077
16	-14.3603850901	9.7653707146	0.5458262573	2.9452431127	2.7265741669
...	...	...	...	...	...
32768	-6.2501627623	9.2197157392	0.0001712819	2.9230003913	2.7043314454
65536	-8.3523971556	9.2197385329	0.0001940756	2.9229524544	2.7042835085
131072	-11.7645111403	9.2196315209	0.0000870636	2.9229284860	2.7042595401

Пример 8.

$$-9 - i2 = -\frac{85}{18 - 18 - \dots - 18 - \dots} \quad (10.2.8)$$

На рис. 10.8 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.8).

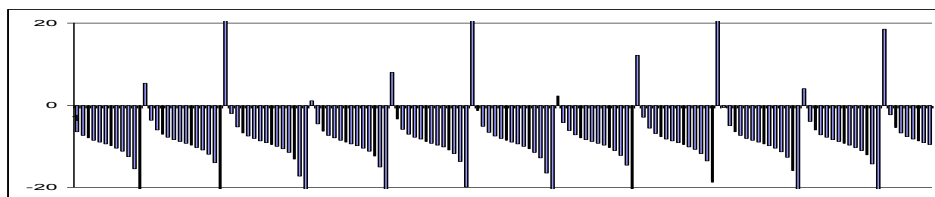


Рис. 10.8. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.8).

В табл. 10.13 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.8) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.13

Определение значения цепной дроби

$$-9 - i2 = -\frac{85}{18} - \frac{85}{18} - \dots - \frac{85}{18} - \dots = 9,21954445e^{-i2,92292370}$$

$$r_0 = 9.21954445729\dots, \quad \varphi_0 = -2,9229237077\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-4.722222222	4.722222222	4.4973222351	-3.1415926536	2.9229237077
2	-6.4016736402	5.4981929325	3.7213515248	-3.1415926536	2.9229237077
4	-7.9652479632	6.4813535577	2.7381908996	-3.1415926536	2.9229237077
8	-9.8390500876	7.6939616312	1.5255828261	-3.1415926536	2.9229237077
16	-5.9190613251	8.7042266478	0.5153178095	-2.9452431127	2.7265741669
8192	-7.2318907557	9.2181496612	0.0013947961	-2.9230003913	2.7043314454
16384	-8.8079261927	9.2186871493	0.0008573080	-2.9230003913	2.7043314454
32768	-13.5996458384	9.2193731785	0.0001712788	-2.9230003913	2.7043314454
65536	-10.1767191403	9.2193503858	0.0001940715	-2.9229524544	2.7042835085
131072	-7.2251195979	9.2194573946	0.0000870627	-2.9229284860	2.7042595401

Пример 9.

На рис. 10.9 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.9).

$$9 + i8 = 18 - \frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots \quad (10.2.9)$$

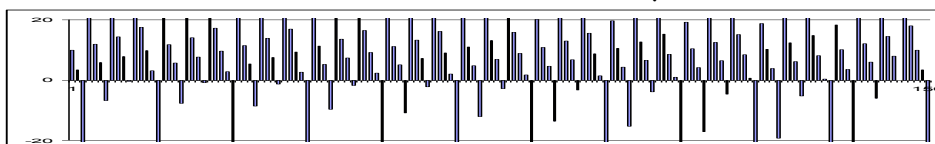


Рис. 10.9. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.9).

В табл. 10.14 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.9) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.14

Определение значения цепной дроби

$$9 + i8 = 18 - \frac{85}{18} - \frac{85}{18} - \dots - \frac{85}{18} - \dots = 12,04159457e^{i0,72664234}$$

$$r_0 = 12.0415945787\dots, \quad \varphi_0 = 0.7266423406\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	18.0000000000	18.0000000000	5.9584054213	0.0000000000	0.7266423406
2	13.2777777778	15.4596248337	3.4180302550	0.0000000000	0.7266423406

Окончание табл. 10.14

4	10.6713564214	13.1145445536	1.0729499749	0.7853981634	0.7266423406
8	8.6390453594	11.0476246276	0.9939699511	0.7853981634	0.7266423406
16	14.3603850901	9.7653707146	2.2762238641	0.5890486225	0.5302927998
...	...	...	...	...	...
8192	11.7534961286	9.2209394644	2.8206551143	0.7267233983	0.5080500783
16384	9.6503987591	9.2204018450	2.8211927337	0.7265316507	0.5080500783
32768	6.2501627623	9.2197157392	2.8218788395	0.7266275245	0.5080500783
65536	8.3523971556	9.2197385329	2.8218560458	0.7266275245	0.5080021414
131072	11.7645111403	9.2196315209	2.8219630578	0.7266275245	0.5079781730

Пример 10.

На рис. 10.10 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.10).

$$9 - i8 = \frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots \quad (10.2.10)$$

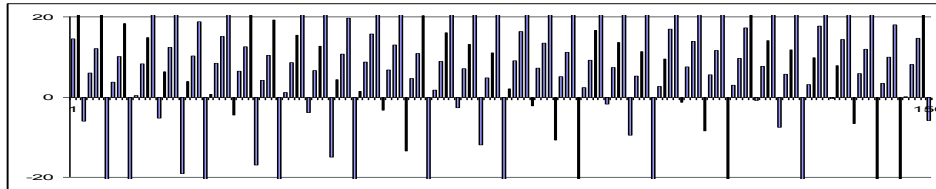


Рис. 10.10. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.10).

В табл.10.15 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.10) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.15

Определение значения цепной дроби

$$9 - i8 = \frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots = 12,04159457e^{-i0,72664234}$$

$$r_0 = 12,0415945787\dots, \quad \varphi_0 = -0,7266423406\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	8.0555555556	8.0555555556	3.9860390231	0.0000000000	0.7266423406
2	14.5810055866	10.8378088449	1.2037857338	0.0000000000	0.7266423406
4	-5.9401566370	13.1155836120	1.0739890333	-0.7853981634	0.0587558228
8	-21.4901665646	13.5808076382	1.5392130595	-0.7853981634	0.0587558228
16	45.9084202929	12.9333100548	0.8917154761	-0.5890486225	0.1375937181
...	...	...	...	...	...
8192	-118.5904329383	12.0450676513	0.0034730726	-0.7267233983	0.0000810577
16384	20.6583840481	12.0417126042	0.0001180255	-0.7265316507	0.0001106899
32768	6.0010455514	12.0414684675	0.0001261112	-0.7266275245	0.0000148161
65536	10.0202117600	12.0415209251	0.0000736536	-0.7266275245	0.0000148161
131072	24.6343546738	12.0416292493	0.0000346706	-0.7266275245	0.0000148161

Пример 11.

На рис. 10.11 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.11).

$$-9 + i8 = -18 + \frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots \quad (10.2.11)$$

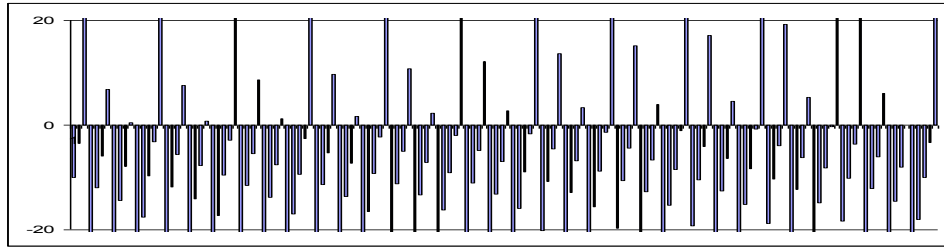


Рис. 10.11. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.11).

В табл. 10.16 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.11) при помощи r/φ -алгоритма

Таблица 10.16

Определение значения цепной дроби

$$-9 + i8 = -18 + \frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots = 12,04159457e^{i2,41495031}$$

$$r_0 = 12.0415945787923\dots, \quad \varphi_0 = 2.41495031290807\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-18.0000000000	18.0000000000	5.9584054212	3.1415926536	0.7266423407
2	-9.9444444444	13.3790881603	1.3374935815	3.1415926536	0.7266423407
4	24.4101307190	11.0555507318	0.9860438470	2.3561944902	0.0587558227
8	6.7472720402	10.6768318839	1.3647626949	2.3561944902	0.0587558227
16	-3.1584619788	11.2113603854	0.8302341934	2.5525440310	0.1375937181
8192	1.2226955953	12.0381225077	0.0034720711	2.4148692553	0.0000810576
16384	-7.0189420267	12.0414765546	0.0001180242	2.4150610029	0.0001106900
32768	-24.1624561517	12.0417206914	0.0001261126	2.4149651291	0.0000148162
65536	-14.4707520632	12.0416682330	0.0000736542	2.4149651291	0.0000148162
131072	-5.8860888349	12.0415599084	0.0000346704	2.4149651291	0.0000148162

Пример 12.

На рис. 10.12 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.12).

$$-9 - i8 = -\frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots \quad (10.2.12)$$

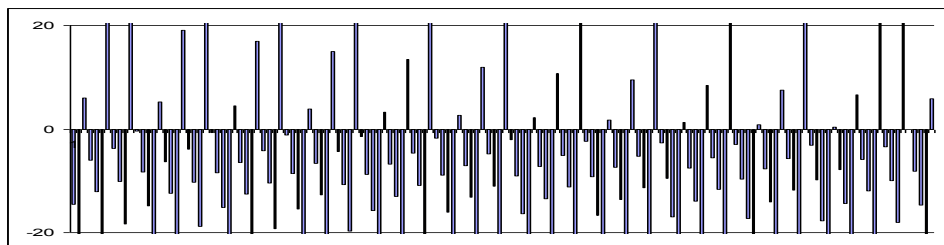


Рис. 10.12. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.12).

В табл.10.17 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.12) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.17

Определение значения цепной дроби

$$-9 - i8 = -\frac{145}{18} - \frac{145}{18} - \dots - \frac{145}{18} - \dots = 12,04159457e^{i2,41495031}$$

$$r_0 = 12.0415945787\dots, \varphi_0 = -2.4149503129\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-8.0555555556	8.0555555556	3.9860390202	-3.1415926536	0.7266423407
2	-14.5810055866	10.8378088449	1.2037857309	-3.1415926536	0.7266423407
4	5.9401566370	13.1155836120	1.0739890362	-2.3561944902	0.0587558227
8	21.4901665646	13.5808076382	1.5392130624	-2.3561944902	0.0587558227
16	-45.9084202929	12.9333100548	0.8917154790	-2.5525440310	0.1375937181
8192	118.5904329383	12.0450676513	0.0034730755	-2.4148692553	0.0000810576
16384	-20.6583840481	12.0417126042	0.0001180284	-2.4150610029	0.0001106900
32768	-6.0010455514	12.0414684675	0.0001261083	-2.4149651291	0.0000148162
65536	-10.0202117600	12.0415209251	0.0000736507	-2.4149651291	0.0000148162
131072	-24.6343546738	12.0416292493	0.0000346735	-2.4149651291	0.0000148162

Пример 13.

На рис. 10.13 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.13).

$$5 + i8 = 10 - \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots \quad (10.2.13)$$

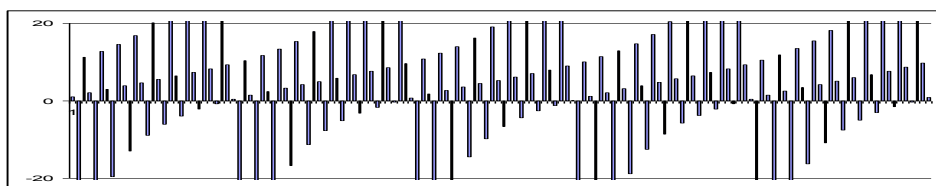


Рис. 10.13. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.13).

В табл. 10.18 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.13) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.18

Определение значения цепной дроби

$$5 + i8 = 10 - \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots = 9,43398113e^{i1,01219701}$$

$$r_0 = 9.433981132056\dots, \varphi_0 = 1.01219701145133\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	10.0000000000	10.0000000000	0.5660188679	0.0000000000	1.0121970115
2	1.1000000000	3.3166247904	6.1173563417	0.0000000000	1.0121970115
4	11.2551282051	9.6796858401	0.2457047081	0.7853981634	0.2267988481
8	3.0117616840	8.3182985323	1.1156825998	0.7853981634	0.2267988481
16	20.1005309366	9.5301788237	0.0961976916	0.9817477042	0.0304493072
32	10.4311346818	9.4563629859	0.0223818539	0.9817477042	0.0304493072
64	1.8236125515	9.2079850119	0.2259961202	0.9817477042	0.0304493072
128	13.4861440319	9.4446948920	0.0107137599	1.0062913969	0.0059056146
256	5.4722192140	9.4199328922	0.0140482399	1.0062913969	0.0059056146

Окончание табл. 10.18

512	-62.5290279616	9.4324354281	0.0015457039	1.0124273200	0.0002303086
1024	-28.2906436917	9.4322233304	0.0017578017	1.0124273200	0.0002303086
2048	-10.6840908076	9.4316804271	0.0023007050	1.0124273200	0.0002303086
4096	-0.8017613738	9.4281979299	0.0057832022	1.0124273200	0.0002303086
8192	7.6146856969	9.4338658463	0.0001152858	1.0120438248	0.0001531866
16384	-5.9312218243	9.4335056134	0.0004755186	1.0122355724	0.0000385610
32768	2.4617837117	9.4336280229	0.0003531091	1.0121396986	0.0000573128
65536	16.3381704975	9.4340046415	0.0000235095	1.0121876355	0.0000093759
131072	7.8467604295	9.4339754493	0.0000056828	1.0121876355	0.0000093759

Пример 14.

На рис. 10.14 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.14)

$$5 - i8 = \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots \quad (10.2.14)$$

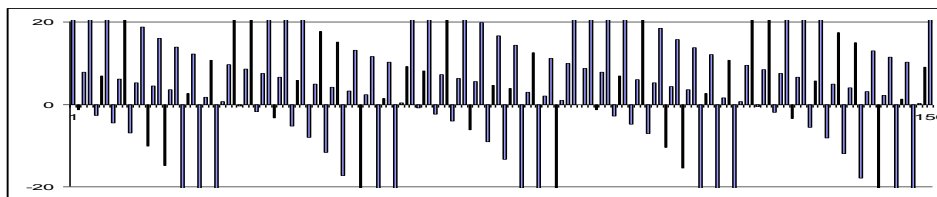


Рис. 10.14. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.14).

В табл. 10.19 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.14) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.19

Определение значения цепной дроби

$$5 - i8 = \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots = 9,43398113e^{-i1,01219701}$$

$$r_0 = 9.4339811320\dots, \quad \varphi_0 = -1.0121970114\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	8.9000000000	8.9000000000	0.5339811321	0.0000000000	1.0121970115
2	80.9090909091	26.8345096674	17.4005285354	0.0000000000	1.0121970115
4	7.9075065497	9.1945132796	0.2394678524	-0.7853981634	0.2267988481
8	29.5508108997	10.6993034278	1.2653222958	-0.7853981634	0.2267988481
16	4.4277437388	9.3387544606	0.0952266714	-0.9817477042	0.0304493072
...	...	...	...	...	...
8192	11.6879413732	9.4340964193	0.0001152872	-1.0120438248	0.0001531866
16384	-15.0053399850	9.4344566746	0.0004755426	-1.0122355724	0.0000385610
32768	36.1526480082	9.4343342544	0.0003531223	-1.0121396986	0.0000573128
65536	5.4473663384	9.4339576226	0.0000235094	-1.0121876355	0.0000093759
131072	11.3422603888	9.4339868148	0.0000056828	-1.0121876355	0.0000093759

Пример 15.

На рис. 10.15 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.15).

$$-5 + i8 = -10 + \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots \quad (10.2.15)$$

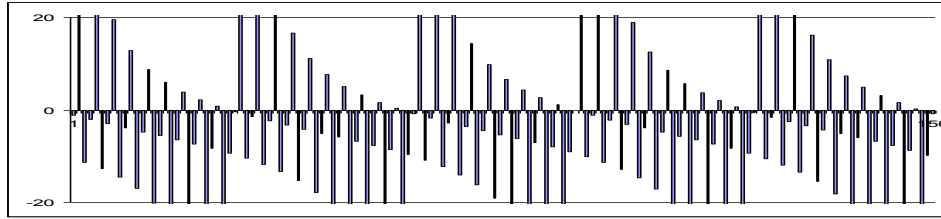


Рис. 10.15. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.15).

В табл. 10.20 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.15) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.20

Определение значения цепной дроби

$$-5 + i8 = -10 + \frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots = 9,43398113e^{j2,12939564}$$

$$r_0 = 9.4339811320566\dots, \quad \varphi_0 = 2.12939564213846$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-10.0000000000	10.0000000000	0.5660188679	3.1415926536	1.0121970115
2	-1.1000000000	3.3166247904	6.1173563417	3.1415926536	1.0121970115
4	-11.2551282051	9.6796858401	0.2457047081	2.3561944902	0.2267988481
8	-3.0117616840	8.3182985323	1.1156825998	2.3561944902	0.2267988481
16	-20.1005309366	9.5301788237	0.0961976916	2.1598449493	0.0304493072
8192	-7.6146856969	9.4338658463	0.0001152858	2.1295488288	0.0001531866
16384	5.9312218243	9.4335056134	0.0004755186	2.1293570812	0.0000385610
32768	-2.4617837117	9.4336280229	0.0003531091	2.1294529550	0.0000573128
65536	-16.3381704975	9.4340046415	0.0000235095	2.1294050181	0.0000093759
131072	-7.8467604295	9.4339754493	0.0000056828	2.1294050181	0.0000093759

Пример 16.

На рис. 10.16 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.16).

$$-5 - i8 = -\frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots, \quad (10.2.16)$$

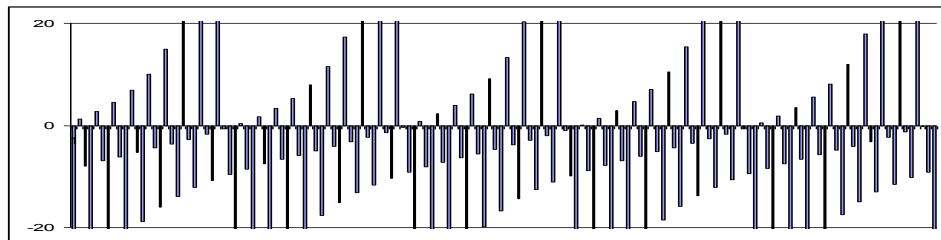


Рис. 10.16. Распределение подходящих цепной дроби (10.2.16).

В табл. 10.21 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.16) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.21

Определение значения цепной дроби

$$-5 - i8 = -\frac{89}{10} - \frac{89}{10} - \dots - \frac{89}{10} - \dots = 9,43398113e^{-i2,12939564}$$

$$r_0 = 9.4339811320566\dots, \quad \varphi_0 = -2.1293956421384\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-8.9000000000	8.9000000000	0.5339811321	-3.1415926536	1.0121970115
2	-80.9090909091	26.8345096674	17.4005285354	-3.1415926536	1.0121970115
4	-7.9075065497	9.1945132796	0.2394678524	-2.3561944902	0.2267988481
8	-29.5508108997	10.6993034278	1.2653222958	-2.3561944902	0.2267988481
16	-4.4277437388	9.3387544606	0.0952266714	-2.1598449493	0.0304493072
32	-8.5321494463	9.4116522528	0.0223288792	-2.1598449493	0.0304493072
64	-48.8042264926	9.6655239865	0.2315428545	-2.1598449493	0.0304493072
128	-6.5993659707	9.4232795255	0.0107016066	-2.1353012567	0.0059056146
256	-16.2639683316	9.4480503225	0.0140691904	-2.1353012567	0.0059056146
512	1.4233389340	9.4355270893	0.0015459572	-2.1291653336	0.0002303086
1024	3.1459164015	9.4357392613	0.0017581293	-2.1291653336	0.0002303086
2048	8.3301426020	9.4362823983	0.0023012662	-2.1291653336	0.0002303086
4096	111.0055970620	9.4397678816	0.0057867496	-2.1291653336	0.0002303086
8192	-11.6879413732	9.4340964193	0.0001152872	-2.1295488288	0.0001531866
16384	15.0053399850	9.4344566746	0.0004755426	-2.1293570812	0.0000385610
32768	-36.1526480082	9.4343342544	0.0003531223	-2.1294529550	0.0000573128
65536	-5.4473663384	9.4339576226	0.0000235094	-2.1294050181	0.0000093759
131072	-11.3422603888	9.4339868148	0.0000056828	-2.1294050181	0.0000093759

Пример 17.

На рис. 10.17 показано распределение подходящих цепной дроби (10.2.17)

$$0.01 + i2 = 0.02 - \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots \quad (10.2.17)$$

На рис. 10.17 показано распределение значений подходящих дробей цепной дроби (10.2.17).

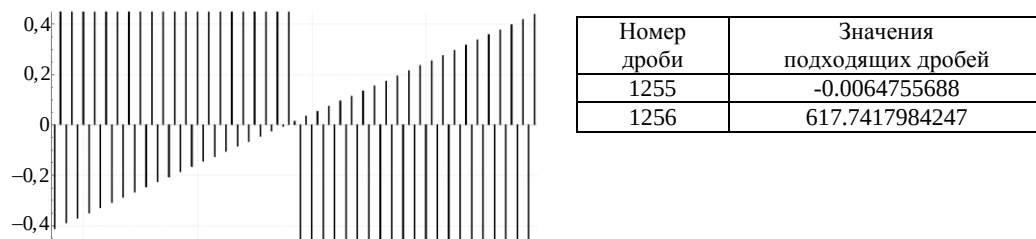


Рис. 10.17. Распределение подходящих дроби (10.2.17)

Следует сравнить графики подходящих цепных дробей, представляющих комплексные числа $z = 2 + i0,01$ (Рис. 10.1) и $z = 0,01 + i2$ (Рис. 10.17). На графике подходящих цепной дроби (10.2.2) первая подходящая дробь с отрицательным значением имеет номер 1256, так как аргумент комплексного числа весьма мал ($\varphi = 0,0049\dots$). На графике рис. 10.17 подходящие цепной дроби 10.2.17 чередует свой знак, вследствие

того, что аргумент представляемого комплексного числа $z = 0,01 + i2$ близок к $\pi/2$ ($\varphi = 1,5657\dots$).

В табл. 10.22 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.17) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.22

Определение значений цепной дроби

$$0.01 + i2 = 0.02 - \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots = 2,00002499e^{i1,56579636}$$

$$r_0 = 2.00002499984\dots \quad \varphi_0 = 1.5657963684\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	0.0200000000	50.0000000000	47.9999750002	0.0000000000	1.5657963684
2	-199.9850000000	1.9999249986	0.0001000012	1.5707963268	0.0049999584
4	-99.9774997500	1.9998749898	0.0001500100	1.5707963268	0.0049999584
8	-49.9637473746	1.9997749311	0.0002500688	1.5707963268	0.0049999584
16	-24.9368526742	1.9995745077	0.0004504922	1.5707963268	0.0049999584
32	-12.3832559033	1.9991712970	0.0008537028	1.5707963268	0.0049999584
64	-6.0252498590	1.9983458134	0.0016791865	1.5707963268	0.0049999584
128	-2.6762384837	1.9965240716	0.0035009282	1.5707963268	0.0049999584
256	-0.5885837093	1.9901580654	0.0098669345	1.5707963268	0.0049999584
512	3.0519283771	1.9993362399	0.0006887599	1.5646604036	0.0011359648
1024	0.8734865125	1.9982408666	0.0017841332	1.5646604036	0.0011359648
2048	-1.8744481040	1.9996514604	0.0003735394	1.5661943844	0.0003980160
4096	0.1290946416	1.9986865023	0.0013384976	1.5654273940	0.0003689744
8192	-16.7238194722	2.0000231225	0.0000018774	1.5658108892	0.0000145208
16384	-8.2373912960	2.0000213640	0.0000036358	1.5658108892	0.0000145208
32768	-3.8711947252	2.0000176555	0.0000073444	1.5658108892	0.0000145208
65536	-1.4152921173	2.0000081797	0.0000168202	1.5658108892	0.0000145208
131072	0.7005750606	2.0000081339	0.0000168660	1.5657869208	0.0000094476

Пример 18.

$$0.01 - i2 = \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots \quad (10.2.18)$$

На рис. 10.18 показано распределение значений подходящих дробей цепной дроби (10.2.18).

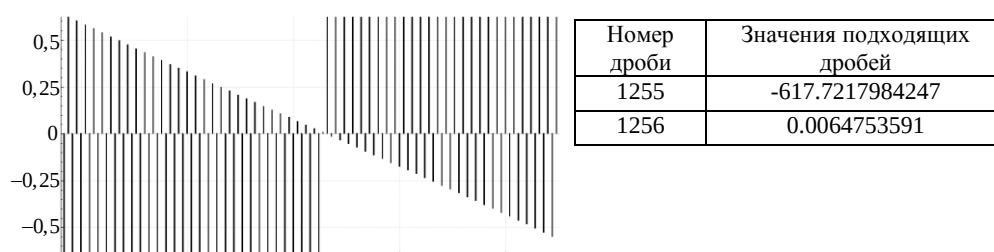


Рис. 10.18. Распределение подходящих дроби (10.2.18).

Цепная дробь (10.2.18) представляет сопряженное комплексное число, то есть число $z = 2,00002499e^{-i1,565796}$, которое имеет отрицательное значение аргумента. Представленные графики можно рассматривать как калибровочные при определении знака аргумента комплексного числа, когда аргумент весьма близок к $\pi/2$.

В табл. 10.23 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.18) при помощи r/φ -алгоритма. Из таблицы следует, что цепная дробь (10.2.18) представляет комплексное число $z = 2,000024 \dots e^{-i1,565796 \dots}$.

Таблица 10.23

Определение значения цепной дроби

$$0.01 - i2 = \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots = 2,00002499e^{-i1,56579636}$$

$$r_0 = 2.000024999843750 \dots \quad \varphi_0 = -1.56579636846094 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	200.0050000000	200.0050000000	198.0049750002	0.0000000000	1.5657963685
2	-0.0200020002	2.0001250061	0.0001000063	-1.5707963268	0.0049999583
4	-0.0400100024	2.0001750211	0.0001500213	-1.5707963268	0.0049999583
8	-0.0800600477	2.0002750999	0.0002501001	-1.5707963268	0.0049999583
16	-0.1604091764	2.0004755935	0.0004505937	-1.5707963268	0.0049999583
32	-0.3230249000	2.0008790672	0.0008540674	-1.5707963268	0.0049999583
64	-0.6638894807	2.0017055973	0.0016805975	-1.5707963268	0.0049999583
128	-1.4946724757	2.0035320670	0.0035070671	-1.5707963268	0.0049999583
256	-6.7961446037	2.0099408533	0.0099158534	-1.5707963268	0.0049999583
512	1.3106795133	2.0007139971	0.0006889972	-1.5646604036	0.0011359648
1024	4.5794639559	2.0018107260	0.0017857262	-1.5646604036	0.0011359648
2048	-2.1340148022	2.0003986090	0.0003736092	-1.5661943844	0.0003980160
4096	30.9857942161	2.0013643938	0.0013393940	-1.5654273940	0.0003689744
8192	-0.2391857917	2.0000268772	0.0000018774	-1.5658108892	0.0000145208
16384	-0.4856027662	2.0000286357	0.0000036359	-1.5658108892	0.0000145208
32768	-1.0332985768	2.0000323443	0.0000073444	-1.5658108892	0.0000145208
65536	-2.8263423156	2.0000418201	0.0000168203	-1.5658108892	0.0000145208
131072	5.7097379355	2.0000418659	0.0000168661	-1.5657869208	0.0000094477

Пример 19.

$$-0.01 + i2 = -0.02 + \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots \quad (10.2.19)$$

На рис. 10.19 показано распределение значений подходящих дробей цепной дроби (10.2.19).

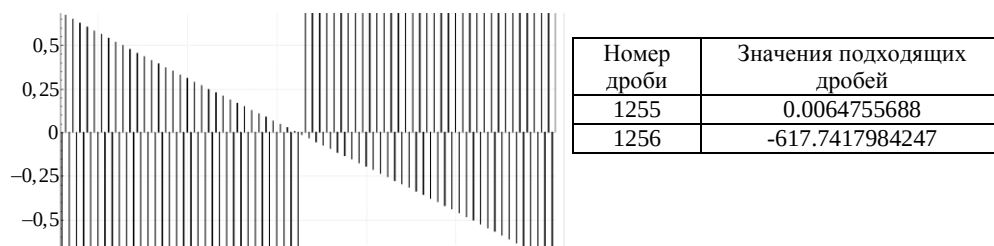


Рис. 10.19. Распределение подходящих дроби (10.2.19).

Комплексное число $z = 2,00002499e^{-i1.565796}$ имеет положительный аргумент, значение которого несколько больше, чем $\pi/2$. Значение модуля аргумента определяется формулой (10.1.9).

В табл. 10.24 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.19) при помощи r/φ -алгоритма.

Таблица 10.24

Определение значения цепной дроби

$$-0.01 + i2 = -0.02 + \frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots = 2,00002499e^{i1.57579628}$$

$$r_0 = 2.00002499984 \dots \varphi_0 = 1.5757962851 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-0.0200000000	50.0000000000	47.9999750002	3.1415926536	1.5757962851
2	199.9850000000	1.9999249986	0.0001000013	1.5707963268	0.0049999583
4	99.9774997500	1.9998749898	0.0001500100	1.5707963268	0.0049999583
8	49.9637473746	1.9997749311	0.0002500688	1.5707963268	0.0049999583
16	24.9368526742	1.9995745077	0.0004504922	1.5707963268	0.0049999583
32	12.3832559033	1.9991712970	0.0008537028	1.5707963268	0.0049999583
64	6.0252498590	1.9983458134	0.0016791865	1.5707963268	0.0049999583
128	2.6762384837	1.9965240716	0.0035009282	1.5707963268	0.0049999583
256	0.5885837093	1.9901580654	0.0098669345	1.5707963268	0.0049999583
512	-3.0519283771	1.9993362399	0.0006887599	1.5769322499	0.0111358815
1024	-0.8734865125	1.9982408666	0.0017841332	1.5769322499	0.0111358815
2048	1.8744481040	1.9996514604	0.0003735394	1.5753982692	0.0096019007
4096	-0.1290946416	1.9986865023	0.0013384976	1.5761652596	0.0103688911
8192	16.7238194722	2.0000231225	0.0000018774	1.5757817644	0.0099853959
16384	8.2373912960	2.0000213640	0.0000036358	1.5757817644	0.0099853959
32768	3.8711947252	2.0000176555	0.0000073444	1.5757817644	0.0099853959
65536	1.4152921173	2.0000081797	0.0000168202	1.5757817644	0.0099853959
131072	-0.7005750606	2.0000081339	0.0000168660	1.5758057328	0.0100093643

Пример 20.

$$-0.01 + i2 = -\frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots \quad (10.2.20)$$

На рис. 10.20 показано распределение значений подходящих дробей цепной дроби (10.2.20).

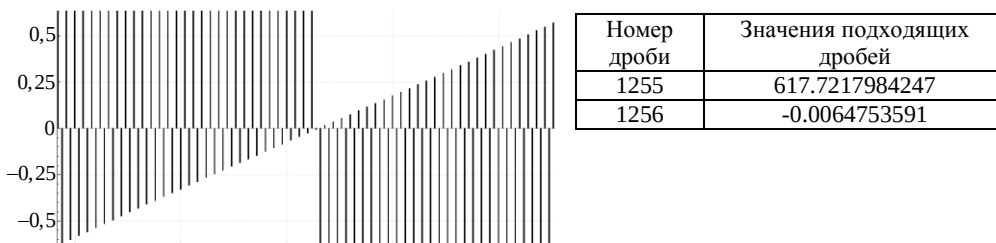


Рис. 10.20. Распределение подходящих дроби (10.2.20).

В табл. 10.25 приведены результаты определения значения цепной дроби (10.2.20) при помощи r/φ -алгоритма. Цепная дробь представляет комплексное число $z = 2,000024 \dots e^{-i1.575796 \dots}$.

Таблица 10.25

Определение значений цепной дроби

$$-0.01 + i2 = -\frac{4,0001}{0.02} - \frac{4,0001}{0.02} - \dots - \frac{4,0001}{0.02} - \dots = 2,00002499e^{-i1,57579628}$$

$$r_0 = 2.0000249998\dots, \quad \varphi_0 = -1.5757962851\dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-200.005000000	200.0050000000	198.0049750002	-3.1415926536	1.5757962851
2	0.0200020002	2.0001250061	0.0001000063	-1.5707963268	0.0049999583
4	0.0400100024	2.0001750211	0.0001500213	-1.5707963268	0.0049999583
8	0.0800600477	2.0002750999	0.0002501001	-1.5707963268	0.0049999583
16	0.1604091764	2.0004755935	0.0004505937	-1.5707963268	0.0049999583
32	0.3230249000	2.0008790672	0.0008540674	-1.5707963268	0.0049999583
64	0.6638894807	2.0017055973	0.0016805975	-1.5707963268	0.0049999583
128	1.4946724757	2.0035320670	0.0035070671	-1.5707963268	0.0049999583
256	6.7961446037	2.0099408533	0.0099158534	-1.5707963268	0.0049999583
512	-1.3106795133	2.0007139971	0.0006889972	-1.5769322499	0.0111358815
1024	-4.5794639559	2.0018107260	0.0017857262	-1.5769322499	0.0111358815
2048	2.1340148022	2.0003986090	0.0003736092	-1.5753982692	0.0096019007
4096	-30.9857942161	2.0013643938	0.0013393940	-1.5761652596	0.0103688911
8192	0.2391857917	2.0000268772	0.0000018774	-1.5757817644	0.0099853959
16384	0.4856027662	2.0000286357	0.0000036359	-1.5757817644	0.0099853959
32768	1.0332985768	2.0000323443	0.0000073444	-1.5757817644	0.0099853959
65536	2.8263423156	2.0000418201	0.0000168203	-1.5757817644	0.0099853959
131072	-5.7097379355	2.0000418659	0.0000168661	-1.5758057328	0.0100093643

10.2. Суммирование комплексных чисел, представленных цепными дробями**Пример 1.**

Выполним суммирование двух комплексных чисел, представленных цепными дробями

$$2 + i5 = 4 + \frac{29}{4} + \frac{29}{4} + \dots + \frac{29}{4} + \dots, \quad (10.3.1)$$

$$7 + i3 = 14 + \frac{58}{4} + \frac{58}{4} + \dots + \frac{58}{4} + \dots. \quad (10.3.2)$$

В колонках 2 и 3 табл. 10.26 приведены, соответственно, подходящие цепных дробей (10.3.1) и (10.3.2), которые представляют комплексные числа $2 + i5$ и $7 + i3$. В колонке 4 даны суммы подходящих цепных дробей (10.3.1) и (10.3.2), причём, складывались алгебраически подходящие с одинаковыми номерами:

$$(P_n/Q_n)^{(1)} + (P_n/Q_n)^{(2)} = (P_n/Q_n)^{(\Sigma)}.$$

По подходящим дробям “суммы” определим при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|} = r_0,$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|,$$

модуль и аргумент комплексного числа, которое представляет последовательность подходящих дробей $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$. Значения модуля и аргумента этого комплексного числа приведены в колонках 5 и 6 в табл. 10.26, из чего можно заключить, что комплексное число, полученное из подходящих $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$, близко к комплексному числу, которое является суммой исходных комплексных чисел:

$$(2+5i) + (7+3i) = 9+8i = 12,0415942e^{i0,7266423}$$

Таблица 10.26

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих дробей без сдвига

$$(2+5i) + (7+3i) = 9+8i = 12,0415942e^{i0,7266423}$$

$$r_0=12.0415945787923..., \varphi_0=0.726642340681726..., \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	-12.5152542372	5.53725898906	-6.97799524823	5.9625745409662	0.7853981633974
8	3.45383480685	12.45984277832	15.91367758516	9.2727911329687	0.7853981633974
16	2.93788898477	11.38532252997	14.32321151475	10.6220094405956	0.7853981633974
32	1.95169764923	9.94259176957	11.89428941880	12.0439828520282	0.7853981633974
64	-0.11294487481	8.21766237866	8.10471750385	11.9415886851498	0.7363107781851
128	-10.1418406924	5.75010376879	-4.39173692370	11.7545077771727	0.7363107781851
256	4.11848605771	14.41119376855	18.52967982625	12.0295266018483	0.7240389318820
512	4.23902423375	14.86572376574	19.10474799949	12.1216317174143	0.7301748550336
1024	4.48688803678	15.93739094756	20.42427898433	12.0494989582796	0.7301748550336
...	...	...	...	...	...
1048576	-41.5132294507	4.61838802186	-36.89484142890	12.0415470475091	0.7266065520680
2097152	1.23565438412	9.20440688331	10.44006126744	12.0415823825673	0.7266469988271

В табл. 10.27 приведены погрешности суммирования комплексных чисел $2 + i5$ и $7 + i3$, представленных подходящими цепными дробями (10.3.1) и (10.3.2)

Таблица 10.27

Погрешности суммирования при сложении подходящих дробей без сдвига

$$r_0 = 12.0415945787923..., \varphi_0 = 0.726642340681726...$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	5.9625745409662	6.0790200378261	0.7853981633974	0.0587558227157
8	9.2727911329687	2.7688034458236	0.7853981633974	0.0587558227157
16	10.6220094405956	1.4195851381967	0.7853981633974	0.0587558227157
32	12.0439828520282	0.0023882732359	0.7853981633974	0.0587558227157
64	11.9415886851498	0.1000058936425	0.7363107781851	0.0096684375034
128	11.7545077771727	0.2870868016196	0.7363107781851	0.0096684375034
256	12.0295266018483	0.0120679769440	0.7240389318820	0.0026034087997
512	12.1216317174143	0.0800371386220	0.7301748550336	0.0035325143518
1024	12.0494989582796	0.0079043794873	0.7301748550336	0.0035325143518
...	...	...	...	...
1048576	12.0415470475091	0.0000475312832	0.7266065520680	0.0000357886137
2097152	12.0415823825673	0.0000121962250	0.7266469988271	0.0000046581453

Таким образом, выполнено суммирование комплексных чисел, представленных цепными дробями, через сложение подходящих цепных дробей, представляющих слагаемые. Этот алгоритм позволяет найти сумму комплексных чисел через подходящее с высокой точностью.

Пример 2.

Выполним сложение двух комплексных чисел, представленных цепными дробями

$$2 - i5 = \frac{29}{4} - \frac{29}{4} - \dots - \frac{29}{4} - \dots, \quad (10.3.3)$$

$$7 - i3 = \frac{58}{14} - \frac{58}{14} - \dots - \frac{58}{14} - \dots, \quad (10.3.4)$$

методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых (табл. 10.28).

Таблица 10.28

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих дробей без сдвига

$$(2 - i5) + (7 - i3) = 9 - i8 = 12,041594e^{-0,726642}$$

$$r_0 = 12.0415945787923..., \varphi_0 = -0.726642340681726..., \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	-2.31717226436	10.47449651797	8.157324253620	6.6137569375118	-0.7853981633974
8	8.39646411070	4.654954402870	13.05141851357	9.7212927256483	-0.7853981633974
16	9.87103329986	5.094278167990	14.96531146785	9.5081533598091	-0.7853981633974
32	14.85885890751	5.833489028230	20.69234793575	12.1483178296450	-0.5890486225481
64	-256.762425465	7.057968230790	-249.704457234	11.2900900334697	-0.7363107781851
128	-2.85944148398	10.08677448827	7.227333004300	11.6569955836151	-0.7363107781851
256	7.04142240466	4.024649236660	11.06607164132	11.9855902155803	-0.7240389318820
512	6.84119703047	3.901592745430	10.74278977590	12.0397500540877	-0.7117670855789
1024	6.46327694436	3.639240587800	10.10251753216	12.0242457117941	-0.7209709703063
...	...	...	...	...	...
1048576	-0.69857248843	12.55849437628	11.85992188785	12.0414074147068	-0.7266784574174
2097152	23.46934577551	6.301329432230	29.77067520774	12.0415814162690	-0.7266410067146
4194304	-13.97168562609	7.939161985390	-6.03252364069	12.0415562816385	-0.7266425047427

В колонках 2 и 3 табл. 10.28 приведены, соответственно, подходящие цепных дробей (10.3.3) и (10.3.4), которые представляют комплексные числа $z_1 = 2 - i5$ и $z_2 = 7 - i3$. В колонке 4 табл. 10.28 помещены суммы подходящих цепных дробей (10.3.3) и (10.3.4):

$$(P_n/Q_n)^{(1)} + (P_n/Q_n)^{(2)} = (P_n/Q_n)^{(\Sigma)}. \quad (10.3.5)$$

По подходящим дробям (10.3.5), которые получены поэлементным сложением подходящих цепных дробей, представляющих комплексные числа $z_1 = 2 - i5$ и $z_2 = 7 - i3$, при помощи r/φ -алгоритма определено комплексное число, которое является суммой комплексных чисел $z_1 = 2 - i5$ и $z_2 = 7 - i3$.

$$z_3 = z_1 + z_2 = (2 - i5) + (7 - i3) = 9 - i8 = 12,041594e^{-i0,726642}.$$

В колонках 5 и 6 табл. 10.28 приведены результаты сложения двух комплексных чисел, представленных цепными дробями (10.3.3) и (10.3.4).

В табл. 10.29 показаны погрешности в определении суммы двух комплексных чисел через сложение подходящих дробей. Из колонок 3 и 5 следует, что для получения результата с высокой точностью следует взять значительное число подходящих

дробей, то есть должны быть использованы цепные дроби с большим количеством звеньев.

Таблица 10.29

Погрешности суммирования при сложении подходящих дробей без сдвига

$$r_0 = 12.0415945787923\dots \quad \varphi_0 = -0.726642340681726\dots$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	6.6137569375118	5.4278376412806	-0.7853981633974	0.0587558227157
8	9.7212927256483	2.3203018531440	-0.7853981633974	0.0587558227157
16	9.5081533598091	2.5334412189832	-0.7853981633974	0.0587558227157
32	12.1483178296450	0.1067232508527	-0.5890486225481	0.1375937181336
64	11.2900900334697	0.7515045453226	-0.7363107781851	0.0096684375034
128	11.6569955836151	0.3845989951772	-0.7363107781851	0.0096684375034
256	11.9855902155803	0.0560043632120	-0.7240389318820	0.0026034087997
512	12.0397500540877	0.0018445247046	-0.7117670855789	0.0148752551028
1024	12.0242457117941	0.0173488669982	-0.7209709703063	0.0056713703755
...	...	...	...	...
1048576	12.0414074147068	0.0001871640855	-0.7266784574174	0.0000361167357
2097152	12.0415814162690	0.0000131625233	-0.7266410067146	0.0000013339671
4194304	12.0415562816385	0.0000382971538	-0.7266425047427	0.0000001640610

Выше было рассмотрено суммирование комплексных чисел через суммирование подходящих дробей слагаемых. Можно также записать:

$$(2-5i) + (7-3i) = 9-8i = \frac{145}{18} - \frac{145}{18}i - \dots - \frac{145}{18}i - \dots \quad (10.3.6)$$

На рис. 10.21, 10.22, 10.24 и 10.25 показаны первые 150 подходящих цепных дробей, представляющих комплексные числа:

$$2 + i5; 7 + i3; 2 - i5; 7 - i3.$$

На рис. 10.23 и 10.26 показаны графики подходящих цепных дробей, которые представляют суммы комплексных чисел:

$$(2 + i5) + (7 + i3) \text{ и } (2 - i5) + (7 - i3).$$

Как уже отмечалось выше, подходящие цепной дроби “суммы” определялись поэлементным синхронным сложением подходящих цепных дробей слагаемых:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Sigma)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Sigma)}, \dots, \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Sigma)}, \dots$$

Здесь выражение “поэлементное синхронное сложение подходящих” означает, что суммировались подходящие, имеющие одинаковые номера. На графиках подходящих цепных дробей комплексного числа “суммы” факт “синхронного” сложения подходящих цепных дробей слагаемых обозначается значком $\Delta = 0$. Далее будет показано, что сумма комплексных чисел, представленных подходящими, может быть получена, если складываются подходящие с произвольным смещением:

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{1+\Delta}}{Q_{1+\Delta}}\right)^{(2)} &= \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Sigma)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{2+\Delta}}{Q_{2+\Delta}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Sigma)}, \dots, \\ \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{n+\Delta}}{Q_{n+\Delta}}\right)^{(2)} &= \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Sigma)}. \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

$$2+i5=4-\frac{29}{4}-\frac{29}{4}-\dots-\frac{29}{4}-\dots$$

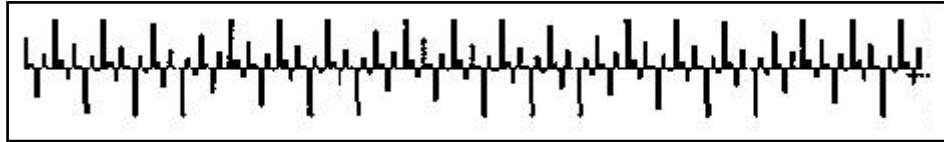


Рис. 10.21. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.7).

$$7+i3=14-\frac{58}{14}-\frac{58}{14}-\dots-\frac{58}{14}-\dots \quad (10.3.8)$$

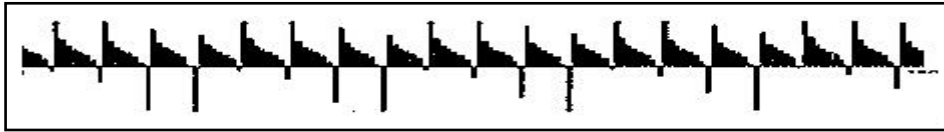


Рис. 10.22. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.8)

$$(2+i5)+(7+i3)=9+i8$$

Рис. 10.23. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.7) и (10.3.8), $\Delta=0$.

$$2-i5=\frac{29}{4}-\frac{29}{4}-\dots-\frac{29}{4}-\dots \quad (10.3.9)$$

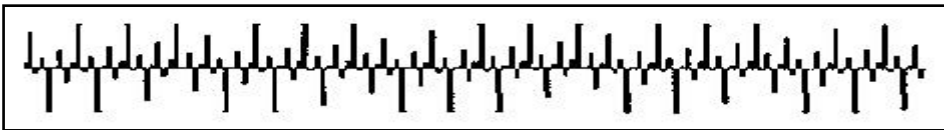


Рис. 10.24. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.9).

$$7-i3=\frac{58}{14}-\frac{58}{14}-\dots-\frac{58}{14}-\dots \quad (10.3.10)$$



Рис. 10.25. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.10).

$$(2-i5)+(7-i3)=9-i8$$

Рис. 10.26. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.9) и (10.3.10), $\Delta=0$.

Рассматривая рис. 10.22 и рис. 10.25, можно говорить, что графики представляют взаимно-сопряжённые комплексные числа. Это объясняется тем, что комплексные числа $z_1 = 7 + i3$ и $z_2 = 7 - i3$, будучи представлены в показательной форме, имеют сравнительно небольшое значение аргумента φ , что обеспечивает “период”, содержа-

ций достаточное число подходящих, чтобы “на глаз” определить “динамику” в следовании подходящих дробей, а именно, увеличиваются на “периоде” значения подходящих дробей, или, напротив, значения подходящих дробей спадают.

Пример 3.

Выполним сложение двух комплексных чисел, представленных цепными дробями:

$$-2 + i5 = -4 + \frac{29}{4 - \frac{29}{4 - \dots - \frac{29}{4 - \dots}}} \quad (10.3.11)$$

$$-7 + i3 = -14 + \frac{58}{14 - \frac{58}{14 - \dots - \frac{58}{14 - \dots}}} \quad (10.3.12)$$

методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых (табл. 10.30).

Таблица 10.30

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих дробей без сдвига

$$(-2 + 5i) + (-7 + 3i) = -9 + 8i = 12,041594e^{i2,414950}$$

$$r_0 = 12.0415945787923\dots, \quad \varphi_0 = 2.41495031290807\dots, \quad \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	12.515254237288	-5.537258989057	6.977995248231	5.9625745409662	2.3561944901923
8	-3.453834806848	-12.459842778316	-15.913677585164	9.2727911329687	2.3561944901923
16	-2.937888984774	-11.385322529973	-14.323211514747	10.6220094405956	2.3561944901923
32	-1.951697649228	-9.942591769570	-11.894289418798	12.0439828520282	2.3561944901923
64	0.112944874810	-8.217662378665	-8.104717503855	11.9415886851498	2.4052818754047
128	10.141840692491	-5.750103768794	4.391736923696	11.7545077771727	2.4052818754047
256	-4.118486057705	-14.411193768548	-18.529679826253	12.0295266018483	2.4175537217078
512	-4.239024233748	-14.865723765741	-19.104747999489	12.1216317174143	2.4114177985562
1024	-4.486888036776	-15.937390947555	-20.424278984331	12.0494989582796	2.4114177985562
...	...	...	...	...	...
1048576	41.513229450763	-4.618388021859	36.894841428904	12.0415470475091	2.4149861015218
2097152	-1.235654384123	-9.204406883313	-10.440061267436	12.0415823825673	2.4149456547627
4194304	2.075626433067	-7.305556947535	-5.229930514468	12.0415739715687	2.4149464037768

В колонках 2 и 3 табл. 10.30 приведены, соответственно, подходящие цепных дробей (10.3.11) и (10.3.12), которые представляют комплексные числа $z_1 = -2 + i5$ и $z_2 = -7 + i3$. В колонке 4 табл. 10.30 помещены суммы подходящих цепных дробей (10.3.11) и (10.3.12). По подходящим “суммы”, которые получены “синхронным” поэлементным сложением подходящих цепных дробей слагаемых, при помощи r/φ -алгоритма определено комплексное число, являющееся суммой комплексных чисел $z_1 = -2 + i5$ и $z_2 = -7 + i3$:

$$z_3 = z_1 + z_2 = (-2 + i5) + (-7 + i3) = -9 + i8 = 12,41594e^{i2,414950}.$$

В табл. 10.31 показаны погрешности в определении суммы двух комплексных чисел через сложение подходящих дробей.

Таблица 10.31

Определение погрешности суммирования через подходящие дроби без сдвига

$$r_0 = 12.0415945787923\dots, \varphi_0 = 2.41495031290807\dots, \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	5.9625745409662	6.0790200378261	2.3561944901923	0.0587558227157
8	9.2727911329687	2.7688034458236	2.3561944901923	0.0587558227157
16	10.6220094405956	1.4195851381967	2.3561944901923	0.0587558227157
32	12.0439828520282	0.0023882732359	2.3561944901923	0.0587558227157
64	11.9415886851498	0.1000058936425	2.4052818754047	0.0096684375034
128	11.7545077771727	0.2870868016196	2.4052818754047	0.0096684375034
256	12.0295266018483	0.0120679769440	2.4175537217078	0.0026034087997
512	12.1216317174143	0.0800371386220	2.4114177985562	0.0035325143518
1024	12.0494989582796	0.0079043794873	2.4114177985562	0.0035325143518
...	...	...	...	...
1048576	12.0415470475091	0.0000475312832	2.4149861015218	0.0000357886137
2097152	12.0415823825673	0.0000121962250	2.4149456547627	0.0000046581453
4194304	12.0415739715687	0.0000206072236	2.4149464037768	0.0000039091313

Пример 4.

Выполним сложение двух комплексных чисел, представленных цепными дробями

$$-2 - 5i = -\frac{29}{4} - \frac{29}{4} - \dots - \frac{29}{4} - \dots \quad (10.3.13)$$

$$-7 - 3i = -\frac{58}{14} - \frac{58}{14} - \dots - \frac{58}{14} - \dots \quad (10.3.14)$$

методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых (табл. 10.32).

Таблица 10.32

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих дробей без сдвига

$$(-2 - 5i) + (-7 - 3i) = -9 - 8i = 12,041594e^{-i2,414950}, \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	2.317172264355	-10.474496517975	-8.157324253619	6.6137569375118	-2.3561944901923
8	-8.396464110704	-4.654954402871	-13.051418513575	9.7212927256483	-2.3561944901923
16	-9.871033299861	-5.094278167993	-14.965311467854	9.5081533598091	-2.3561944901923
32	-14.858858907512	-5.833489028234	-20.692347935746	12.1483178296450	-2.5525440310417
64	256.762425465318	-7.057968230793	249.704457234525	11.2900900334697	-2.4052818754047
128	2.859441483978	-10.086774488274	-7.227333004296	11.6569955836151	-2.4052818754047
256	-7.041422404659	-4.024649236664	-11.066071641322	11.9855902155803	-2.4175537217078
512	-6.841197030468	-3.901592745431	-10.742789775899	12.0397500540877	-2.4298255680109
1024	-6.463276944356	-3.639240587801	-10.102517532157	12.0242457117941	-2.4206216832835
...	...	...	...	...	...
1048576	0.698572488426	-12.558494376280	-11.859921887855	12.0414074147068	-2.4149141961724
2097152	-23.469345775512	-6.301329432225	-29.770675207737	12.0415814162690	-2.4149516468752
4194304	13.971685626086	-7.939161985394	6.032523640692	12.0415562816385	-2.4149501488471

В колонках 2 и 3 табл. 10.32 приведены, соответственно, подходящие цепных дробей (10.3.13) и (10.3.14), которые представляют комплексные числа $z_1 = -2 - i5$ и $z_2 = -7 - i3$. В колонке 4 табл. 10.32 помещены суммы подходящих цепных дробей (10.3.13) и (10.3.14). По подходящим “суммы”, которые получены поэлементным “синхронным” сложением подходящих цепных дробей слагаемых, при помощи r/φ -алгоритма определено комплексное число, которое является суммой комплексных чисел $z_1 = -2 - i5$ и $z_2 = -7 - i3$:

$$z_3 = z_1 + z_2 = (-2 - i5) + (-7 - i3) = -9 - i8 = 12,041594e^{-i2,414950}.$$

В табл. 10.33 показаны погрешности в определении суммы двух комплексных чисел через сложение подходящих цепных дробей слагаемых.

Таблица 10.33

Погрешности суммирования сложением подходящие дроби без сдвига

$r_0=12.0415945787923\dots$, $\varphi_0=-2.41495031290807\dots$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	6.6137569375118	5.4278376412806	-2.3561944901923	0.0587558227157
8	9.7212927256483	2.3203018531440	-2.3561944901923	0.0587558227157
16	9.5081533598091	2.5334412189832	-2.3561944901923	0.0587558227157
32	12.1483178296450	0.1067232508527	-2.5525440310417	0.1375937181336
64	11.2900900334697	0.7515045453226	-2.4052818754047	0.0096684375034
128	11.6569955836151	0.3845989951772	-2.4052818754047	0.0096684375034
256	11.9855902155803	0.0560043632120	-2.4175537217078	0.0026034087997
512	12.0397500540877	0.0018445247046	-2.4298255680109	0.0148752551028
1024	12.0242457117941	0.0173488669982	-2.4206216832835	0.0056713703755
...	...	...	...	...
1048576	12.0414074147068	0.0001871640855	-2.4149141961724	0.0000361167357
2097152	12.0415814162690	0.0000131625233	-2.4149516468752	0.0000013339671
4194304	12.0415562816385	0.0000382971538	-2.4149501488471	0.0000001640610

На рис. 10.27, 10.28, 10.30 и 10.31 показаны первые 150 подходящих цепных дробей, представляющих комплексные числа:

$$-2 + i5; -7 + i3; -2 - i5; -7 - i3.$$

На рис. 10.29 и 10.32 показаны графики подходящих цепных дробей, которые представляют суммы комплексных чисел:

$$(-2 + i5) + (-7 + i3) \text{ и } (-2 - i5) + (-7 - i3).$$

Для определения подходящих цепной дроби суммы комплексных чисел, складывались подходящие цепных дробей слагаемых с одними и теми же номерами. Такой способ сложения подходящих цепных дробей слагаемых был определен как “синхронный” и обозначался на графиках подходящих цепных дробей “суммы” символом $\Delta = 0$.

$$-2 + i5 = -\frac{29}{4} - \frac{29}{4} - \dots - \frac{29}{4} - \dots \quad (10.3.15)$$



1

150

Рис. 10.27. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.15).

$$-7 + i3 = -\frac{58}{14} - \frac{58}{14} - \dots - \frac{58}{14} - \dots \quad (10.3.16)$$



1

150

Рис. 10.28. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.16).

$$(-2 + i5) + (-7 + i3) = -9 + i8$$



Рис. 10.29. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.15) и (10.3.16) при $\Delta = 0$.

$$-2 - i5 = -4 + \frac{29}{4} - \frac{29}{4} + \frac{29}{4} - \dots \quad (10.3.17)$$



Рис. 10.30. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.17).

$$-7 - 3i = -14 + \frac{58}{14} - \frac{58}{14} + \frac{58}{14} - \dots \quad (10.3.18)$$



Рис. 10.31. График подходящих дробей цепной дроби (10.3.18).

$$(-2 - i5) + (-7 - i3) = -9 - i8$$



Рис. 10.32. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.18) и (10.3.19) при $\Delta = 0$.

Выше были рассмотрены примеры сложения комплексных чисел, представленных подходящими цепными дробями, причём, подходящие дроби слагаемых имели одни и те же номера. На рис. 10.33 показана “синхронная” обработка подходящих дробей при выполнении арифметических операций над комплексными числами, представленными цепными дробями.

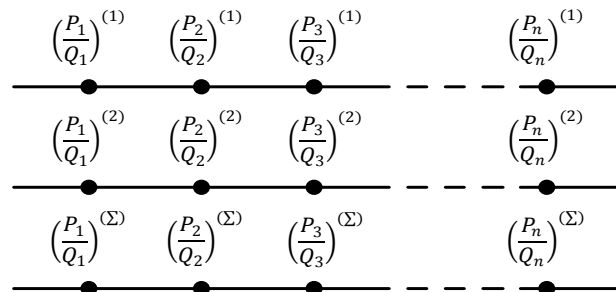


Рис. 10.33. “Синхронное” суммирование подходящих дробей.

Операции с подходящими дробями, принадлежащими первому и второму операндам, выполняются при нулевом сдвиге, т.е. при $\Delta = 0$.

Очевидно, что жёсткая синхронизация подходящих дробей, представляющих операнды, весьма неудобна в практическом плане. Оказалось, что необходимости в синхронизации подходящих дробей нет. Арифметические операции с комплексными числами, представленными подходящими, можно выполнять при различных сдвигах подходящих, то есть, например, выполнять сложение не только подходящих с одинаковыми индексами, но и с произвольным сдвигом Δ :

$$\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{i+\Delta}}{Q_{i+\Delta}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(\Sigma)}. \quad (10.3.19)$$

Рассмотрим сложение двух комплексных чисел, представленных периодическими цепными дробями, при нулевом сдвиге подходящих операндов, а также при сдвиге на 10 и 100 подходящих:

$$\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(2)}; \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{i+10}}{Q_{i+10}}\right)^{(2)}; \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{i+100}}{Q_{i+100}}\right)^{(2)}. \quad (10.3.20)$$

Пример 5.

Найдём сумму двух комплексных чисел, представленных цепными дробями

$$10 + i2 = 20 - \frac{104}{20} - \frac{104}{20} - \dots - \frac{104}{20} - \dots, \quad (10.3.21)$$

$$5 + i3 = 10 - \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \dots - \frac{34}{10} - \dots, \quad (10.3.22)$$

методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых при нулевом сдвиге подходящих (табл. 10.34).

В колонках 2 и 3 табл. 10.34 приведены, соответственно, подходящие цепных дробей (10.3.21) и (10.3.22), которые представляют комплексные числа $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$. В колонке 4 табл. 10.34 помещены суммы подходящих цепных дробей (10.3.21) и (10.3.22) без сдвига, т.е. при $\Delta = 0$:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Sigma)}; \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Sigma)}; \dots, \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Sigma)}, \dots \quad (10.3.23)$$

по которым определены r/φ -алгоритмом значения модуля и аргумента комплексного числа z_3 , являющегося суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 .

Таблица 10.34

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих без сдвига

$$(10 + 2i) + (5 + 3i) = 15 + 5i = 15,811388e^{j0,321750},$$

$$r_0 = 15.811388300841896\dots, \quad \varphi_0 = 0.3217505543966\dots, \quad \Delta = 0$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
8	9.9832633053221	6.25492324126690	16.2381865465891	12.9908939969266	0.000000000000000
16	129.48953960245	4.16608690440466	133.65562660685	13.5804295555868	0.000000000000000
32	69.728031934406	5.35568450656902	75.083716440975	14.9536394254994	0.196349540949362
64	39.830530852505	6.45385960052771	46.284390453032	14.6627109238597	0.294524311274043
128	24.848220022002	5.12526752536949	29.97348754737	14.5564293954722	0.368155359092554
256	17.299413731108	6.13423709799158	123.433650829099	15.5336232365525	0.33133995018'298
512	13.370336377916	2.34236579822220	15.712702176138	15.5267097369930	0.325203927031756
1024	11.091755610586	4.30788328313447	15.392638893120	15.5745556949767	0.319068003890213
...	...	...	...	...	...
2097152	11.832164319706	13.1669101956588	24.999074515364	15.8114453215074	0.321734493921655
4194304	9.8244770136939	9.51369002664065	19.338167040333	15.8114510716407	0.321738238991939
8388608	21.906757493185	7.61454446995954	29.521301963144	15.8114061237217	0.321746103639532

В табл. 10.35 показаны погрешности в определении суммы двух комплексных чисел через “синхронное” сложение подходящих цепных дробей слагаемых.

Таблица 10.35

Погрешности суммы, установленной суммированием подходящих дробей

$$r_0 = 15.811388300841896..., \quad \varphi_0 = 0.3217505543966..., \quad \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
8	12.9908939969266	2.8204943039153	0.000000000000000	0.3217505543966
16	13.5804295555868	2.2309517452551	0.000000000000000	0.3217505543966
32	14.9536394254994	0.8577483753425	0.196349540849362	0.1254010135472
64	14.6627108238597	1.1416774769822	0.294524311274043	0.0272262431226
128	14.5564293954722	1.2549589053697	0.368155319092554	0.0464048846960
256	15.5336232365525	0.2777650642194	0.331339850183298	0.0095892957167
512	15.5267087369930	0.2846795638489	0.325203927031756	0.0034535726352
1024	15.5745556848767	0.2361326159652	0.319068003880213	0.0026825505164
...	...	...	...	...
1048576	15.8114453215074	0.0000570206655	0.321734493921655	0.0000160604749
2097152	15.8114510716407	0.0000627707988	0.321738238991938	0.0000123154047
4194304	15.8114061237217	0.0000178221798	0.321746103639532	0.0000044507571

Пример 6.

Найдём сумму двух комплексных чисел $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$ (табл. 10.36), представленных цепными дробями (10.3.21) и (10.3.22) методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых при $\Delta = 10$, т.е. когда имеет место сложение подходящих с индексами, отличающимися на 10:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{11}}{Q_{11}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Sigma)}, \quad \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{12}}{Q_{12}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Sigma)}, \quad \dots, \quad \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{n+10}}{Q_{n+10}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Sigma)}.$$

Таблица 10.36

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих со сдвигом

$$(10 + i2) + (5 + i3) = 15 + i5 = 15.811388e^{i0.321750}, \quad \Delta = 10$$

$$r_0 = 15.811388300841896..., \quad \varphi_0 = 0.3217505543966...$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
8	9.9832633053221	6.254923241266	24.587035369638	10.845568465121	0.0000000000000
16	129.48953960245	4.166086904404	134.74896316176	13.140473792296	0.1963495408493
32	69.728031934406	5.355684506569	78.243340966744	15.361171611233	0.1963495408493
64	39.830530852505	6.453859600527	42.193297654465	14.531258557327	0.2454369260617
128	24.848220022002	5.125267525369	27.050131245846	14.270880633923	0.2945243112740
256	17.299413731108	6.134237097991	19.143587901259	14.947965984668	0.3067961575771
512	13.370336377916	2.342365798222	14.377482973865	15.341515142052	0.3067961575771
1024	11.091755610586	4.307883283134	9.1842331503310	15.636167406065	0.3098641191529
...	...	...	...	...	...
2097152	11.832164319706	13.16691019565	15.522973047764	15.811222377980	0.3217734426525
4194304	9.8244770136939	9.513690026640	14.428716890859	15.811367661372	0.3217502232168
8388608	21.906757493185	7.614544469959	27.680735370214	15.811320927089	0.3217517282449

В колонке 2 табл. 10.36 приведены подходящие цепной дроби (10.3.21), то есть подходящие цепной дроби первого комплексного слагаемого $z_1 = 10 + i2$. В третьей

колонке табл. 10.36 даны подходящие цепной дроби (10.3.22), то есть подходящие цепной дроби второго комплексного слагаемого $z_2 = 5 + i3$. Данные 4-й колонки табл. 10.36 формируются соотношениями (10.3.20):

$$\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{i+10}}{Q_{i+10}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(\Sigma)}.$$

По подходящим дробям $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)^{(\Sigma)}$, полученным сложением подходящих цепных дробей (10.3.21) и (10.3.22) со сдвигом $\Delta = 10$, при помощи r/φ -алгоритма находится комплексное число, являющиеся суммой комплексных чисел $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$. В колонках 5 и 6 табл. 10.36 приведены значения модуля и аргумента комплексного числа z_3 , которое является суммой комплексных чисел z_1 и z_2 :

$$z_3 = z_1 + z_2 = (10 + i2) + (5 + i3) = 15 + i5 = 15,811388e^{i0,32175}.$$

В табл. 10.37 показаны погрешности в определении суммы двух чисел через сложение со сдвигом $\Delta = 10$ подходящих цепных дробей слагаемых.

Таблица 10.37

Погрешности суммы, установленной суммированием подходящих

$$r_0 = 15.811388300841896..., \quad \varphi_0 = 0.3217505543966..., \quad \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
8	10.1455484651216	4.9651191357203	0.000000000000000	0.3217505543966
16	13.1404737922967	2.6709143015432	0.196349540849362	0.1254010135472
32	15.3611716112319	0.4502166896080	0.196349540849362	0.1254010135472
64	14.5312585573277	1.2801297435142	0.245436926061703	0.0763136283349
128	14.2708806339231	1.5405076669188	0.294524311274043	0.0272262431226
256	14.9479659846686	0.8634223161733	0.306796157577128	0.0149543961195
512	15.3415151420524	0.4698731587895	0.306796157577128	0.0149543963195
1024	15.6361674060658	0.1752208947761	0.309864119152900	0.0118864352437
...	...	...	...	...
2097152	15.8112223779809	0.0001659221610	0.321773442652591	0.0000228882560
4194304	15.8113676613729	0.0000206394690	0.321750223216843	0.0000003311791
8388608	15.8113209270892	0.0000673737527	0.321751721244957	0.0000011668484

Сравнивая погрешности в определении суммы комплексных чисел через “синхронное” сложение подходящих (табл. 10.35) и сложением подходящих со сдвигом $\Delta = 10$ (табл. 10.37), можно заключить, что заметных отличий в точности определения комплексного числа, являющегося суммой, при реализации этих двух алгоритмов не наблюдается.

Пример 7.

Установим сумму двух комплексных чисел $z_3 = z_1 + z_2$, где $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$, которые представлены цепными дробями (10.3.21) и (10.3.22), методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых при ином сдвиге подходящих, а именно, при $\Delta = 100$, что означает, что выполняется сложение подходящих с индексами, отличающимися на 100:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{101}}{Q_{101}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Sigma)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{102}}{Q_{102}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Sigma)}, \dots, \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} + \left(\frac{P_{n+100}}{Q_{n+100}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Sigma)}$$

В табл. 10.38 даны результаты суммирования комплексных чисел $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$ методом сложения подходящих цепных дробей слагаемых со сдвигом $\Delta = 100$.

Таблица 10.38

Суммирование комплексных чисел сложением подходящих со сдвигом

$$(10 + 2i) + (5 + 3i) = 15 + 5i = 15,811388e^{i0,321750}, \Delta = 100,$$

$$r_0 = 15.811388300841896..., \varphi_0 = 0.3217505543966....$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	11.983333333333	7.28690476190476	8.63649227546950	7.13754028675387	0.000000000000
8	9.9832633053221	6.25492324126690	14.2305110225858	11.7459261784430	0.000000000000
16	129.48953960245	4.16608690440466	113.691195242132	10.2579930943761	0.000000000000
32	69.728031934406	5.35568450656902	72.4495916624000	13.6167078310799	0.098174770424681
64	39.830530852505	6.45385960052771	48.6626191310235	14.6474322719357	0.147262155637022
128	24.848220022002	5.12526752536949	33.4570585712802	14.1924401137749	0.220193233455532
256	17.299413731108	6.13423709799158	25.4955136150656	15.2531467416380	0.269980611667173
512	13.370336377916	2.34236579822220	20.9031213399541	15.5497865577522	0.288388388122501
1024	11.091755610586	4.30788328313447	17.6030697739199	15.7025037500999	0.312932060721671
...	...	...	...	...	...
2097152	11.832164319706	13.1669101956588	24.9359563702920	15.8111573711693	0.321737419977182
4194304	9.8244770136939	9.51369002664065	55.1642934003612	15.8114445580185	0.321751721244957
8388608	21.906757493185	7.61454446995954	20.6334048932448	15.8114395074918	0.321756215329296

В табл. 10.39 показаны погрешности в определении суммы двух чисел через сложение со сдвигом $\Delta = 100$ подходящих цепных дробей слагаемых.

Таким образом, сравнивая погрешности определения суммы комплексных чисел через суммирование подходящих цепных дробей, представляющих эти комплексные числа, при “синхронном” сложении подходящих, а также при сложении подходящих, связанных со слагаемыми, с некоторым сдвигом Δ , можно сделать вывод, что вне зависимости от способа определения суммы двух комплексных чисел, представимых периодическими цепными дробями, достигается примерно один и тот же положительный результат. Это обстоятельство является важным при разработке комплексной арифметики в случае представления комплексных чисел потоком подходящих дробей или осциллирующих отсчётов той или иной природы. На рис. 10.34 и рис. 10.35 показаны первые 150 подходящих дробей (10.3.21) и (10.3.22), представляющие комплексные числа $z_1 = 10 + i2$ и $z_2 = 5 + i3$.

Таблица 10.39

Определение погрешности суммирования при сдвиге подходящих $\Delta = 100$

$$r_0 = 15.811388300841896..., \varphi_0 = 0.3217505543966....$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	7.13754028675387	8.6738480140880	0.00000000000000	0.3217505543966
8	11.7459261784430	4.0654621223989	0.00000000000000	0.3217505543966
16	10.2579930943761	5.5533852064658	0.00000000000000	0.3217505543966
32	13.6167078310799	2.1946804697620	0.098174770424631	0.2235757839719
64	14.6684322719357	1.1239560239062	0.147262155637022	0.1744883987596
128	14.1924401137749	1.6119411170670	0.220893233455532	0.1001573209411
256	15.2531467416380	0.5512415592039	0.269980618667873	0.0517699357287
512	15.5497865577522	0.2616017430197	0.288388388122501	0.0333621662741
1024	15.7025037500999	0.1088845507420	0.312932080728671	0.0088184736679
...	...	...	...	...
2097152	15.8111573711693	0.0002309296726	0.321737489977882	0.0000130644187
4194304	15.8114445580185	0.0000562571766	0.321751721244957	0.0000011668484
8388608	15.8114395074918	0.0000512066499	0.321756215329290	0.0000056609327

На рис 10.36 – рис. 10.38 показаны графики суммы подходящих дробей (10.3.24) и (10.3.25) при нулевом сдвиге подходящих ($\Delta = 0$), а также при сдвигах подходящих цепной дроби второго слагаемого относительно подходящих цепной дроби, представляющей первое слагаемое, соответственно, при $\Delta = 10$ и $\Delta = 100$.

$$10 + i2 = 20 - \frac{104}{20} - \frac{104}{20} - \dots - \frac{104}{20} - \dots \quad (10.3.24)$$

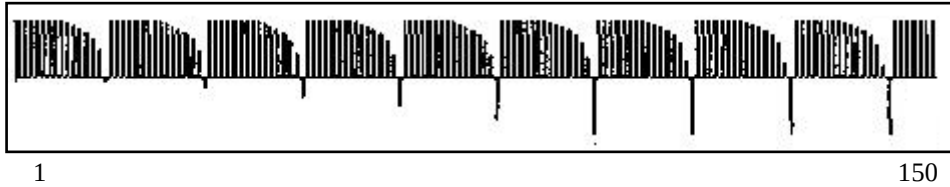


Рис. 10.34. График подходящих цепной дроби (10.3.24).

$$5 + i3 = 10 - \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \dots - \frac{34}{10} - \dots \quad (10.3.25)$$

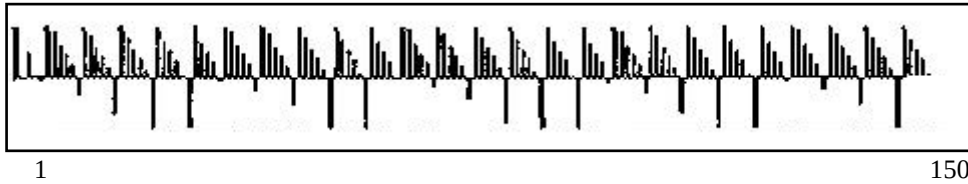


Рис. 10.35. График подходящих цепной дроби (10.3.25).

$$(10 + i2) + (5 + i3) = 15 + i5 = 15,811388e^{i0,321730}, \Delta = 0.$$



Рис. 10.36. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.24) и (10.3.25) при $\Delta = 0$.

$$(10 + i2) + (5 + i3) = 15 + i5 = 15,811388e^{i0,321730}, \Delta = 10.$$



Рис. 10.37. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.24) и (10.3.25) при $\Delta = 10$.

$$(10 + 2i) + (5 + 3i) = 15 + 5i = 15,811388e^{i0,321730}, \Delta = 100.$$



Рис. 10.38. График суммы подходящих цепных дробей (10.3.24) и (10.3.25) при $\Delta = 100$.

10.4. Произведение комплексных чисел**Пример 8.**

Установим произведение двух комплексных чисел $z_3 = z_1 \cdot z_2$, где $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$, которые представлены цепными дробями:

$$6+i=12-\frac{37}{12}-\frac{37}{12}-\dots-\frac{37}{12}-\dots, \quad (10.4.1)$$

$$2+4i=4-\frac{20}{4}-\frac{20}{4}-\dots-\frac{20}{4}-\dots. \quad (10.4.2)$$

методом умножения подходящих цепных дробей сомножителей с одинаковыми номерами:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Pi)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Pi)} \quad (10.4.3)$$

В табл. 10.40 приведены результаты умножения комплексных чисел $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$ методом умножения подходящих цепных дробей сомножителей (10.4.1) и (10.4.2) без сдвига подходящих, то есть по правилам (10.4.3).

Таблица 10.40

Определение произведения комплексных чисел умноженных подходящих без сдвига

$$(6+i)(2+4i)=8+i26=27,202941e^{i1,272297}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(\Sigma)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	7.28690476190476	3.16666666666667	23.0751984126984	14.0318095478685	0.7853981633974
8	6.25492324126690	-4.2738095238095	-26.732350519224	19.5966243241741	1.1780972450962
16	4.16608690440466	0.13823755308575	0.57590965960749	17.9587620321651	0.9817477042468
32	5.35568450656902	4.36612241052393	28.7392586543958	25.2842742336053	1.1780972450962
64	6.45385960052771	1.30643937624333	8.43157631087547	25.8625061572127	1.2271846303085
128	5.12526752536949	13.1878998962743	67.5915150661984	26.6941303905662	1.2517283229147
256	6.13423709799158	6.87889170895287	42.1967527141254	26.9933795180171	1.2640001692178
512	2.34236579822220	2.79972919806452	6.55798991783041	26.9528283828294	1.2640001692178
1024	4.30788328313447	-7.6035215713881	-32.755083470335	27.1127680925684	1.2701360923693
...	...	...	...	...	...
2097152	13.1669101956588	-1.3319515860263	-17.537686918174	27.2028808852767	1.2722977469366
4194304	9.51369002664065	2.73501947761167	26.0201275268220	27.2029195444042	1.2722969979226
8388608	7.61454446995954	-8.5165555733040	-64.849691143805	27.2029320638399	1.2722973724296

В колонке 2 табл. 10.40 приведены подходящие цепной дроби (10.4.1), которой представляется первый сомножитель – комплексное число $z_1 = 6 + i$. В третьей колонке табл. 10.40 даны подходящие цепной дроби (10.4.2), то есть подходящие цепной дроби, представляющей второй комплексный сомножитель $z_2 = 2 + 4i$. Данные четвертой колонки табл. 10.40 формируются как произведение подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2), представляющих комплексные числа $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$ и имеющие одни и те же номера:

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Pi)}. \quad (10.4.4)$$

По значениям подходящих дробей (10.4.4), приведённых в колонке 4 табл. 10.40, при помощи r/φ -алгоритма находится комплексное число, являющееся произведением комплексных чисел:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (6 + i) \cdot (2 + 4i) = 8 + i26 = 27,202941e^{i1,272297}.$$

В табл. 10.41 показаны погрешности в определении произведения двух комплексных чисел через произведения подходящих цепных дробей, представляющих комплексные сомножители.

Таблица 10.41

Погрешности произведения, установленного умножением подходящим без сдвига

$$r_0 = 27.2029410174708 \dots, \varphi_0 = 1.2722973952087 \dots, \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	14.0318095478685	13.1711314696023	0.7853981633974	0.4868992318113
8	19.5966243241741	7.6063166932967	1.1780972450962	0.0942001501125
16	17.9587620321651	9.2441789853057	0.9117477042468	0.2905496909619
32	25.2842742336053	1.9186667838655	1.1780972450962	0.0942001501125
64	25.8625061572127	1.3404348602581	1.2271846303085	0.0451127649002
128	26.6941303905662	0.5088106269046	1.2517283229147	0.0205690722940
256	26.9933795180171	0.2095614994537	1.2640001692178	0.0082972259909
512	26.9528283828294	0.2501126346414	1.2640001692178	0.0082972259909
1024	27.1127680925684	0.0901729249024	1.2701360923693	0.0021613028394
...	...	...	...	...
2097152	27.2028808852767	0.0000601321941	1.2722977469366	0.0000003517279
4194304	27.2029195444042	0.0000214730666	1.2722969979226	0.0000003972861
8388608	27.2029320638399	0.0000089536309	1.2722973724296	0.0000000227791

Пример 9.

Установим произведение двух комплексных чисел $z_3 = z_1 \cdot z_2$, где $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$, которые представлены цепными дробями (10.4.1) и (10.4.2), соответственно, методом умножения подходящих дробей, причём, умножения со сдвигом подходящих друг относительно друга на 100 номеров ($\Delta = 100$):

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{(1)} \times \left(\frac{p_{101}}{q_{101}}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{(\Pi)}, \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{(1)} \times \left(\frac{p_{102}}{q_{102}}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{(1)} \times \left(\frac{p_{n+100}}{q_{n+100}}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{(\Pi)} \quad (10.4.5)$$

Результаты определения произведения комплексных чисел со сдвигом подходящих ($\Delta = 100$) приведены в табл. 10.42.

Таблица 10.42

Определение произведения комплексных чисел, умножением подходящих со сдвигом

$$(6 + i)(2 + 4i) = 8 + 26i = 27,202941e^{i1,272297}, \Delta = 100.$$

$$r_0 = 27.2029410174708 \quad \varphi_0 = 1.2722973952087$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(\frac{p_n}{q_n})^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(\frac{p_n}{q_n})^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(\frac{p_n}{q_n})^{(\Pi)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	7.28690476190476	3.16666666666667	-0.4283395850771	7.51275141138079	0.7853981633974
8	6.25492324126690	-4.2738095238095	141.531882444704	25.7766375791205	1.1780972450962
16	4.16608690440466	0.13823755308575	-33.873473571437	24.1437168459555	0.9817477042468
32	5.35568450656902	4.36612241052393	9.43365418060423	25.8566551003204	1.1780972450962
64	6.45385960052771	1.30643937624333	-21.766251232907	26.6884869503687	1.2271846303085
128	5.12526752536949	13.1878998962743	20.6205973301224	26.9775724019047	1.2517283229147
256	6.13423709799158	6.87889170895287	15.3500350359438	27.0991355274807	1.2640001692178
512	2.34236579822220	2.79972919806452	-1.2129492755522	26.9385903560587	1.2640001692178
1024	4.30788328313447	-7.6035215713881	53.7821350804170	27.1653640170574	1.2701360923693
...	...	...	...	...	...
2097152	13.1669101956588	-1.3319515860263	-421.24739368242	27.2029179836002	1.2722977469366
4194304	9.51369002664065	2.73501947761167	-5.7637974568210	27.2029188753035	1.2722969979226
8388608	7.61454446995954	-8.5165555733040	88.1473669311631	27.2029383942993	1.2722973724296

В колонках 2 и 3 табл. 10.42 приведены значения подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2), представляющих, соответственно, комплексные числа $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + i4$. В колонке 4 показаны значения произведений подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2), причём, подходящие дроби умножились со сдвигом $\Delta = 100$, то есть подходящие произведения формировались по правилу (10.4.5). По полученным таким образом произведениям подходящих, приведённых в колонке 4, при помощи r/φ -алгоритма восстанавливалось комплексное число z_3 , являющееся произведением комплексных чисел $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + i4$. Значения модуля r_n и аргумента φ_n этого комплексного числа приведены в 5-й и 6-й колонках табл. 10.42.

В табл. 10.43 показаны погрешности в определении произведения комплексных чисел, полученного из перемножения со сдвигом $\Delta = 100$ подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2).

Сравнивая погрешности произведения, определённого по подходящим без сдвига (табл. 10.41), и определённого по подходящим со сдвигом (табл. 10.43), можно заключить, что использование подходящих, которыми представлены операнды со сдвигом друг относительно друга, не сказывается на результате. Это существенный вывод, так как при реализации операций с комплексными числами «по подходящим» не требуется синхронизации подходящих.

Таблица 10.43

Погрешности произведения, установленного умножением подходящих со сдвигом

$r_0 = 27.2029410174708\dots$, $\varphi_0 = 1.2722973952087\dots$, $\Delta = 100$.

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	7.51275141138079	19.6901896060900	0.7853981633974	0.4868992318113
8	25.7766375791205	1.4263034313503	1.1780972450962	0.0942001501125
16	24.1437168459555	3.0592241715153	0.9117477042468	0.2905496909619
32	25.8566551003204	1.3462859171504	1.1780972450962	0.0942001501125
64	26.6884869503687	0.5144540671021	1.2271846303085	0.0451127649002
128	26.9775724019047	0.2253686155661	1.2517283229147	0.0205690722940
256	27.0991355274807	0.1038054899901	1.2640001692178	0.0082972259909
512	26.9385903560587	0.2643506614121	1.2640001692178	0.0082972259909
1024	27.1653640170574	0.0375770004134	1.2701360923693	0.0021613028394
...	...	...	...	...
2097152	27.2029179836002	0.000023034706	1.2722977469366	0.0000003517279
4194304	27.2029188753035	0.0000221421673	1.2722969979226	0.0000003972861
8388608	27.2029383942993	0.0000026231715	1.2722973724296	0.0000000227791

Пример 3.

Определим произведение комплексных чисел $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + i4$, заданных цепными дробями (10.4.1) и (10.4.2). Произведение комплексных чисел $z_3 = z_1 \cdot z_2$ будет установлено через произведение подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2), причём, произведения подходящих дробей берутся со сдвигом $\Delta = 1000$:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_{1001}}{Q_{1010}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(\Pi)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_{1002}}{Q_{1002}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(\Pi)}, \dots,$$

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} \times \left(\frac{P_{n+1000}}{Q_{n+1000}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(\Pi)}. \quad (10.4.6)$$

Результаты определения произведения комплексных чисел при сдвиге подходящих сомножителей на 1000 номеров приведены в табл. 10.44.

Таблица 10.44

Произведение комплексных чисел, установленное умножением подходящих

$$(6 + i)(2 + i4) = 8 + i26 = 27,202941e^{i1,272297}, \Delta = 1000$$

$$r_0 = 27.2029410174708..., \varphi_0 = 1.2722973952087...$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(11)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	7.28690476190476	3.16666666666667	-33.344155966387	15.9839114744520	0.7853981633974
8	6.25492324126690	-4.2738095238095	39.3826331192198	23.3262478623091	1.1780972450962
16	4.16608690440466	0.13823755308575	103.735888235844	23.4936405271032	0.9817477042468
32	5.35568450656902	4.36612241052393	-4.2151069822748	24.4427702098111	1.1780972450962
64	6.45385960052771	1.30643937624333	-269.96564912896	26.6209168904364	1.2271846303085
128	5.12526752536949	13.1878998962743	8.59303701292909	26.6502669601000	1.2517283229147
256	6.13423709799158	6.87889170895287	1.19182287682131	26.7376021327553	1.2640001692178
512	2.34236579822220	2.79972919806452	-14 225235885868	26.9922615978880	1.2640001692178
1024	4.30788328313447	7.6035215713881	21.9163224127185	27.1415619814214	1.2701360923693
...	...	...	...	...	...
2097152	13.1669101956588	-1.3319515860263	140.616999664297	20.2029099518096	1.2722977469366
4194304	9.51369002664065	2.73501947761167	-60.887418776856	27.2029246631817	1.2722969979226
8388608	7.61454446995954	8.5165555733040	37.2573896433990	27.2029354241969	1.2722973724296

В колонке 4 табл. 10.44 показаны значения произведений подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2). Подходящие дроби брались со сдвигом $\Delta = 1000$, то есть подходящие произведения формировались по правилу (10.4.6).

По полученным таким образом произведениям подходящих, приведённым в колонке 4 табл. 10.44, при помощи r/φ -алгоритма определялось комплексное число, являвшееся произведением комплексных чисел $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$. Результаты вычисления модуля r_n и аргумента φ_n этого комплексного числа приведены в 5-й и 6-й колонках табл. 10.44.

В табл. 10.45 показаны погрешности в определении произведения комплексных чисел, полученного из перемножения со сдвигом $\Delta = 1000$ подходящих цепных дробей (10.4.1) и (10.4.2).

Таблица 10.45

Определение погрешности произведения

$$r_0 = 27.2029410174708..., \varphi_0 = 1.2722973952087..., \Delta = 1000.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	15.9839114744520	11.2190295430188	0.7153911633974	0.4868992318113
8	23.3262479623091	3.8766931551617	1.1730972450962	0.0942001501125
16	23.4936405271032	3.7093004903676	0.9817477042468	0.2905496909619
32	24.4427702098111	2.7601708076597	1.1780972450962	0.0942001501125
64	26.6208168904364	0.5821241270344	1.2271846303095	0.0451127649002
128	26.6502669601000	0.5526740573708	1.2517283229147	0.0205690722940
256	26.7376021327553	0.4653388847155	1.2640001692178	0.0082972259909
512	26.9922615978880	0.2106794195828	1.2640001692178	0.0082972259909
1024	27.1415619814214	0.0613790140494	1.2701360923693	0.0021613028394
...	...	...	...	...
2097152	27.2029099518096	0.0000310656612	1.2722977469366	0.0000003517279
4194304	27.2029246631817	0.0000163542891	1.2722969979226	0.0000003972861
8388608	27.2029354241969	0.0000055932739	1.2722973724296	0.0000000227791

На рис 10.39 и 10.40 показаны графики подходящих дробей (10.4.7) и (10.4.8), которые представляют комплексные числа $z_1 = 6 + i$ и $z_2 = 2 + 4i$. На рис. 10.41 – 10.43 показаны графики произведения подходящих цепных дробей (10.4.7) и (10.4.8), соответственно, без сдвига подходящих, т.е. при $\Delta = 0$, и при сдвигах подходящих $\Delta = 100$ и $\Delta = 1000$.

$$6 + i = 12 - \frac{37}{12 - \frac{37}{12 - \frac{37}{12 - \dots}}} \quad (10.4.7)$$



Рис. 10.39. График подходящих дробей цепной дроби (10.4.7).

$$2 + 4i = 4 - \frac{20}{4 - \frac{20}{4 - \frac{20}{4 - \dots}}} \quad (10.4.8)$$

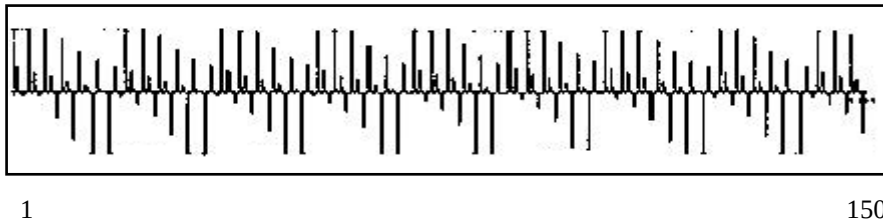


Рис. 10.40. График подходящих дробей цепной дроби (10.4.8).

$$(6 + i)(2 + 4i) = 8 + 26i = 27,202941e^{i1279297} \quad (10.4.9)$$



Рис. 10.41. График произведения подходящих цепных дробей (10.4.7) и (10.4.8) при $\Delta = 0$.

$$(6 + i)(2 + 4i) = 8 + 26i = 27,202941e^{i1279297} \quad (10.4.10)$$



Рис. 10.42. График произведения подходящих цепных дробей (10.4.7) и (10.4.8) при $\Delta = 100$.

$$(6 + i)(2 + 4i) = 8 + 26i = 27,202941e^{i1279297} \quad (10.4.11)$$



Рис. 10.43. График произведения подходящих цепных дробей (10.4.7) и (10.4.8) при $\Delta = 1000$.

10.5. Деление комплексных чисел

Пример 1.

Определим частное двух комплексных чисел через подходящие цепных дробей, представляющих делимое и делитель:

$$5 + i3 = 10 - \frac{34}{10 - \frac{34}{10 - \dots - \frac{34}{10 - \dots}}}, \quad (10.5.1)$$

$$7 + i2 = 14 - \frac{53}{14 - \frac{53}{14 - \dots - \frac{53}{14 - \dots}}}, \quad (10.5.2)$$

В табл. 10.46 показаны результаты определения частного комплексных чисел, через деление подходящих цепных дробей, представляющих делимое и делитель. Частное устанавливалось с использованием r/φ -алгоритма.

Таблица 10.46

Определение частного комплексных чисел делением подходящих без сдвига

$$(5 + 3i) : (7 + 2i) = \frac{41}{53} + \frac{11}{53}i = 0,800942e^{i0,262119}, \quad \Delta = 0 \quad (10.5.3)$$

$$r_0 = 0.8009428406336 \quad \varphi_0 = 0.2621198412655 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(Д)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	-1.380753138075	7.3624888182089	-0.187538911388	0.4468704392823	0.7853981633974
8	4.542338729990	4.2963101345648	1.0572651253584	0.8151652282746	0.1926990816987
16	-7.385248340927	6.9625851908625	-1.060701916130	0.7207794730009	0.3926990816987
32	3.1396337223603	-1.141354317257	1.2586547539063	0.8478160523148	0.1963495408494
64	96830106024951	4.8960658588662	-2.7507967288411	0.8013343030960	0.2945243112740
128	9.3937832267221	7.4633518028418	1.2586547539063	0.7964713742494	0.2699806186679
256	8.8835872606973	4.7813658226175	1.8579601708522	0.8013263274307	0.2699806186679
512	8.0627397	7.3530823821367	1.0965115139325	0.7999208230936	0.2638446955163
1024	6.8855111041944	4.2441221471424	1.6223647353860	0.8012899388487	0.2638446955163
...	...	...	...	...	...
2097152	16.272843375511	7.5415214425488	2.1577666389306	0.8009424743905	0.2621204651581
4194304	-143.3194682872	5.0851341819639	-28.18400914485	0.8009427180103	0.2621204651581
8388608	0.4296759825470	7.6667444940824	0.0560441244493	0.8009124745603	0.2621197161440

В колонках 2 и 3 табл. 10.46 приведены значения подходящих цепных дробей (10.5.1) и (10.5.2), представляющих делимое и делитель. В колонке 4 даны значения результатов деления значений подходящих, приведённых в колонках 2 и 3, имеющих одни и те же номера:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(Д)}, \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(Д)}, \dots, \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(Д)}$$

По данным, помещённым в колонке 4, которые получены “синхронным” делением подходящих цепных дробей (10.5.1) и (10.5.2), представляющих делимое $z_1 = 5 + i3$ и делитель $z_2 = 7 + i2$, при помощи r/φ -алгоритма восстановлено комплексное число z_3 , которое является частным $(5 + i3) : (7 + i2)$. В колонках 5 и 6

табл. 10.46 приведены значения модуля r_n и аргумента φ_n комплексного числа $z_3 = z_1/z_2$.

В табл. 10.47 показаны погрешности в определении частного от деления комплексных чисел $z_1 = 5 + i3$ и $z_2 = 7 + i2$. Из колонок 3 и 5 табл. 10.47, следует, что частное методом деления подходящих цепных дробей, представляющих делимое и делитель, установлено с очень высокой точностью.

Таблица 10.47

Определение погрешности деления комплексных чисел

$$r_0 = 0.8009428406336..., \quad \varphi_0 = 0.2621198412655..., \quad \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	0.4468704392823	0.3540724013513	0.7853981633974	0.5232783221319
8	0.8151652282746	0.0142223876410	0.3926090816987	0.13057924M332
16	0.7207794730009	0.0801633676327	0.3926990816987	0.1305792401332
32	0.8478160523148	0.0468732116812	0.1963495408494	0.0657703004161
64	0.8013343030960	0.0003914624624	0.2945243112740	0.0324014700085
128	0.7961713742494	0.0044714663843	0.2699806186679	0.0078607774024
256	0.8013263274307	0.0003834867971	0.2649806186679	0.0078607774024
512	0.7999208230936	0.0010220175400	0.2638446955163	0.0017248542508
1024	0.8012899388487	0.0003470982151	0.2618446955163	0.0017248512508
...	...	...	...	...
2097152	0.8009424743905	0.0000003662431	0.2621204651581	0.0000006238926
4194304	0.8009427180103	0.0000001226233	0.2621201651581	0.0000006218926
8388608	0.8009424745603	0.0000003660733	0.2621197161440	0.0000001251215

Пример 2.

Продолжим рассмотрение определения частного комплексных чисел методом деления подходящих цепных дробей, представляющих эти числа. Будем выполнять операцию деления подходящих “со сдвигом”. (Табл. 10.48).

В четвёртой колонке табл. 10.48 помещены результаты деления подходящих цепных дробей (10.5.1) и (10.5.2) при $\Delta = 10$:

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{(1)} \bigg/ \left(\frac{p_{11}}{q_{11}}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{(D)}, \left(\frac{p_{12}}{q_{12}}\right)^{(1)} \bigg/ \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{(D)}, \dots, \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{(1)} \bigg/ \left(\frac{p_{n+10}}{q_{n+10}}\right)^{(2)} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{(D)} \quad (10.5.3)$$

Таблица 10.48

Определение частного комплексных чисел делением подходящих “со сдвигом”

$$(5 + 3i) \div (7 + 2i) = \frac{41}{53} + \frac{11}{53}i = 0,800942e^{i0,262119}, \quad \Delta = 10 \quad (10.5.4)$$

$$r_0 = 0.8009428406336 \quad \varphi_0 = 0.2621198412655$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(D)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	-1.380753138075	7.3624888182089	-0.168525488755	0.3688970241171	0.7853981633974
8	4.542338729990	4.2963101345648	0.7961762150331	0.6812'49885735	0.1926990816987
16	-7.385248340927	6.9625851908625	-0.958223659298	0.6783'34679545	0.3926990816987
32	3.1396337223603	-1.141354317257	0.7707692920142	0.7713086653204	0.1963495408494
64	96830106024951	4.8960658588662	1.6061657265049	0.7835035286336	0.2945243112740
128	9.3937832267221	7.4633518028418	1.1279363153472	0.7906824562332	0.2699806186679
256	8.8835872606973	4.7813658226175	1.4899394644575	0.7966920131106	0.2699806186679
512	8.0627397154999	7.3530823821367	0.9855666771160	0.7981246440007	0.2638446955163
1024	6.8855111041944	4.2441221471424	1.2128803065866	0.8000171221985	0.2638446955163
...	...	...	...	...	...
2097152	16.272843375511	7.5415214425488	1.9287598368522	0.8009421202016	0.2621204651581
4194304	-143.3194682872	5.0851341819639	-23.33258118935	0.8009424472784	0.2621204651581
8388608	0.4296759825470	7.6667444940824	0.0498545822708	0.8009423880785	0.2621197161440

Модуль r_n и аргумент φ_n этого частного (10.5.4) приведены в 5-й и 6-й колонках табл. 10.48.

В табл. 10.49 показаны погрешности в определении частного комплексных чисел $z_1 = 5 + i3$ и $z_2 = 7 + i2$ делением подходящих цепных дробей (10.5.1) и (10.5.2), представляющих комплексные делимое и делитель со сдвигом, определяемом правилом (10.5.3).

Сравнивая 3-ю и 5-ю колонки табл. 10.47 и 10.49, в которых приведены значения погрешностей в определении частного комплексных чисел, установленного делением подходящих цепных дробей, представляющих делимое и делитель, можно заключить, что сдвиг подходящих не вносит заметных изменений в значение частного, определяемого r/φ -алгоритмом “по подходящим”.

Таблица 10.49

Определение погрешности деления комплексных чисел

$$r_0 = 0.8009428406336\dots, \quad \varphi_0 = 0.2621198412655\dots, \quad \Delta = 0.$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	0.3688970241171	0.4320458165165	0.7853981633974	0.5232783221319
8	0.6812349885735	0.1197078520601	0.3926090816987	0.13057924M332
16	0.6783731679545	0.1225693726791	0.3926990816987	0.1305792401332
32	0.7713096653204	0.0296341753132	0.1963495408494	0.0657703004161
64	0.7885085286336	0.0174393120000	0.2945243112740	0.0324014700085
128	0.7906824562332	0.0102603844004	0.2699806186679	0.0078607774024
256	0.7966920131106	0.0042508275230	0.2649806186679	0.0078607774024
512	0.7984246440007	0.0025181966329	0.2638446955163	0.0017248542508
1024	0.8000171224985	0.0009257181351	0.2618446955163	0.0017248512508
...	...	...	...	...
2097152	0.8009421202016	0.0000007204320	0.2621204651581	0.0000006238926
4194304	0.8009424472784	0.0000003933552	0.2621201651581	0.0000006218926
8388608	0.8009423880785	0.0000004525551	0.2621197161440	0.0000001251215

Пример 3.

Определим частное двух комплексных чисел через подходящие цепные дроби (10.5.1) и (10.5.2), представляющих делимое $z_1 = 5 + i3$ и делитель $z_2 = 7 + i2$, причём, подходящие цепные дроби делимого и делителя сдвинуты друг относительно друга, то есть имеют место соотношения:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_{101}}{Q_{101}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{(L)} \cdot \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_{102}}{Q_{102}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{(L)} \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(1)} / \left(\frac{P_{n+100}}{Q_{n+100}}\right)^{(2)} = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(L)} \cdot \dots \quad (10.5.5)$$

По подходящим дробям, определяющим частное т.е. по отсчётам $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{(L)}$, которые помещены в колонке 4 табл. 10.50, при помощи r/φ -алгоритма устанавливается комплексное число z_3 , равное частному $(5 + i3)/(7 + i2)$. Значения модуля r_n и аргумент φ_n частного z_3 приведены в колонках 5 и 6 табл. 10.50.

Таблица 10.50

Определение частного комплексных чисел делением подходящих “со сдвигом”

$$(5 + i3) : (7 + i2) = \frac{41}{53} + i \frac{11}{53} = 0,800942e^{i0,262119}, \Delta = 100 \quad (10.5.6)$$

$$r_0 = 0.8009428406336 \dots, \varphi_0 = 0.2621198412655 \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(1)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(2)}$	Значения подходящих дробей, $(P_n/Q_n)^{(A)}$	Модуль комплексного числа, r_n	Аргумент комплексного числа, φ_n
4	-1.380753138075	7.3624888182089	-0.163617357322	0.3313643559549	0.7853981633974
8	4.542338729990	4.2963101345648	0.7654220180435	0.6335141595997	0.1926990816987
16	-7.385248340927	6.9625851908625	-0.934041855564	0.6566120259300	0.3926990816987
32	3.1396337223603	-1.141354317257	0.6895446702097	0.7530754809805	0.1963495408494
64	96830106024951	4.8960658588662	1.5535921206465	0.7759010163752	0.2945243112740
128	9.3937832267221	7.4633518028418	1.0934295164469	0.7874291913150	0.2699806186679
256	8.8835872606973	4.7813658226175	1.4394969465731	0.7947176757286	0.2699806186679
512	8.0627397154999	7.3530823821367	0.9569871568316	0.7975894221291	0.2638446955163
1024	6.8855111041944	4.2441221471424	1.1648832057122	0.7995058275533	0.2638446955163
...	...	...	...	...	...
2097152	16.272843375511	7.5415214425488	1.8672546932121	0.8009419184581	0.2621204651581
4194304	-143.3194682872	5.0851341819639	-22.60986341206	0.8009423274961	0.2621204651581
8388608	0.4296759825470	7.6667444940824	0.0481458485485	0.8009123382050	0.2621197161440

В колонках 3 и 5 табл. 10.51 приведены погрешности в определении частного при делении подходящих со сдвигом ($\Delta = 100$).

Таблица 10.51

Погрешности частного комплексных чисел, установленного делением подходящих “со сдвигом”

$$r_0 = 0.8009428406336 \dots, \varphi_0 = 0.2621198412655 \dots, \Delta = 100$$

Номер звена дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
4	0.3313643559549	0.4695784846787	0.7853981633974	0.5232783221319
8	0.6115141595997	0.1674286810339	0.3926990816987	0.13057924M332
16	0.6566120259300	0.1443308147086	0.3926990816987	0.1305792401332
32	0.7530751809805	0.0478673596531	0.1963495408494	0.0657703004161
64	0.7759010463752	0.0250117942584	0.2945243112740	0.0324014700085
128	0.7874291913150	0.0135136193186	0.2699806186679	0.0078607774024
256	0.7987176757286	0.0062251649050	0.2649806186679	0.0078607774024
512	0.7975894221291	0.0033534185045	0.2638446955163	0.0017248542508
1024	0.7995058275533	0.0014370130803	0.2618446955163	0.0017248512508
...	...	...	...	...
2097152	0.8009419184581	0.0000009221755	0.2621204651581	0.0000006238926
4194304	0.8009423274964	0.0000005131372	0.2621201651581	0.0000006218926
8388608	0.8009423382050	0.0000005024286	0.2621197161440	0.0000001251215

Из колонок 3 и 5 табл. 10.51 следует, что погрешности в определении частного комплексных чисел через подходящие цепных дробей, представляющих эти числа, если брать подходящие со сдвигом друг относительно друга, столь же малы, как и при определении частного через деление подходящих «без сдвига».

На рис. 10.44 и 10.45 показаны графики подходящих цепных дробей (10.5.7) и (10.5.8), представляющих, соответственно, комплексные числа $z_1 = 5 + i3$ и $z_2 = 7 + i2$.

Из графиков можно заключить, что эти комплексные числа, представленные в показательной форме как $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, имеют положительные аргументы φ . Этот вывод следует из того, что на графиках преобладают «ниспадающие» пары подходящих дробей. Так как большинство подходящих дробей на графиках 10.44 и 10.45 положительны, то аргументы $\varphi < \pi/2$. Это следует из формулы для определения модуля аргумента.

Также из графиков подходящих, показанных на рис. 10.44 и 10.45, можно заключить, что аргумент φ комплексного числа $5 + i3$ больше, чем аргумент комплексного числа $7 + i2$, так как на периоде графика показанного на рис. 10.45 размещается большее число подходящих, чем на периоде графика представленного на рис. 10.44.

На рис. 10.46 – 10.48 представлены графики подходящих, представляющих частное двух комплексных чисел при различных сдвигах подходящих дробей операндов.

$$5 + i3 = 10 - \frac{34}{10} - \frac{34}{10} - \dots - \frac{34}{10} - \dots \quad (10.5.7)$$



Рис. 10.44. График подходящих дробей цепной дроби (10.5.7).

$$7 + i2 = 14 - \frac{53}{14} - \frac{53}{14} - \dots - \frac{53}{14} - \dots \quad (10.5.8)$$

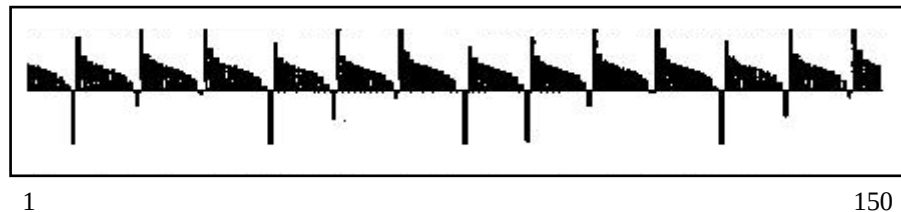


Рис. 10.45. График подходящих дробей цепной дроби (10.5.8).

$$(5 + i3) : (7 + i2) = \frac{41}{53} + i \frac{11}{53} = 0,800942 e^{i0,262119}, \Delta = 0 \quad (10.5.9)$$

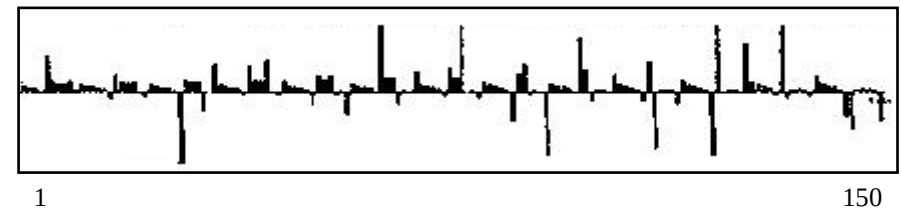


Рис. 10.46. График подходящих дробей, представляющих частное при $\Delta = 0$.

$$(5 + i3) : (7 + i2) = \frac{41}{53} + i \frac{11}{53} = 0,800942 e^{i0,262119}, \Delta = 10 \quad (10.5.10)$$



1

150

Рис. 10.47. График подходящих дробей, представляющих частное при $\Delta = 10$.

$$(5 + i3) : (7 + i2) = \frac{41}{53} + i \frac{11}{53} = 0,800942e^{i0,262119}, \Delta = 100 \quad (10.5.11)$$



1

150

Рис. 10.48. График подходящих дробей, представляющих частное при $\Delta = 100$.

ГЛАВА 11

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ФОРМУЛ ЭЙЛЕРА В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

11.1. Обобщение формул Эйлера

Формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad (11.1.1)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \quad (11.1.2)$$

с кинематической стороны связаны с движением двух точек по окружности, одна точка движется по часовой стрелке, другая – против часовой (рис. 11.1).

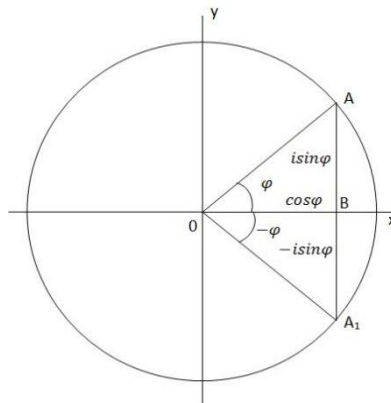


Рис. 11.1. Представление формул Эйлера на комплексной плоскости.

Окружность есть частный случай эллипса, поэтому при деформировании окружности известным образом последняя переходит в эллипс, вернее, в два взаимно сопряжённых эллипса. В этом случае формулы Эйлера также претерпевают некоторого рода изменения, они оказываются связаны с движением точек не по окружности, а по этим сопряжённым эллипсам. В обобщённом виде формулы Эйлера дают возможность установить некоторые новые соотношения между известными элементарными функциями. Переходя непосредственно к выводу этих обобщённых формул, воспользуемся бинарными квадратичными формами

$$\delta_1 = a\cos^2\beta + 2b\sin\alpha\cos\beta + c\sin^2\beta, \quad (11.1.3)$$

$$\delta_1 = a\sin^2\beta - 2b\sin\beta\cos\beta + c\cos^2\beta. \quad (11.1.4)$$

Будем различать три случая в зависимости от дискриминанта квадратичных форм, или от коэффициента “b”. Все три случая рассмотрим для каждой бинарной квадратичной формы отдельно.

1 случай. $b = \sqrt{ac}\cos\varphi$

Делая очевидные преобразования первой квадратичной формы, получим:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= a\cos^2\alpha + 2b\sin\alpha\cos\alpha + c\sin^2\alpha = a\sin^2\alpha \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right) = \\
&= a\sin^2\alpha \left[\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right] = \frac{\sin^2\alpha}{a} [(a\operatorname{ctg}\alpha + b)^2 + (ac - b^2)] = \\
&= \frac{ac - b^2}{a} \sin^2\alpha \left[\left(\frac{a\operatorname{ctg}\alpha + b}{\sqrt{ac - b^2}} \right)^2 + 1 \right] = c\sin^2\varphi \sin^2\alpha (\operatorname{ctg}^2\theta + 1) = c\sin^2\varphi \sin^2\alpha \sec^2\theta.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta_1 = c\sin^2\varphi \sin^2\alpha \sec^2\theta, \quad (11.1.5)$$

или извлекая корень,

$$\sqrt{\delta_1} = \sqrt{c}\sin\varphi \sin\alpha \sec\theta, \quad (11.1.6)$$

где

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha + b}{\sqrt{ac - b^2}}. \quad (11.1.7)$$

Из формулы (11.1.5) непосредственно имеем:

$$\sqrt{\delta_1}\sin\theta = \sqrt{c}\sin\varphi \sin\alpha. \quad (11.1.8)$$

Перемножая формулы (11.1.5) и (11.1.6) и используя формулу (11.1.3), получим:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\delta_1}\cos\theta &= \frac{\sqrt{c}\sin\varphi (a\cos\alpha + b\sin\alpha)}{\sqrt{ac - b^2}} = \frac{a\cos\alpha + \sqrt{ac}\cos\varphi \sin\alpha}{\sqrt{a}} = \\
&= \sqrt{a}\cos\alpha + \sqrt{c}\cos\varphi \sin\alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_1}\cos\theta = \sqrt{a}\cos\alpha + \sqrt{c}\cos\varphi \sin\alpha. \quad (11.1.9)$$

Комбинируя (11.1.8) и (11.1.9) и вводя мнимую единицу, получим:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\delta_1}(\cos\theta + i\sin\theta) &= \sqrt{a}\cos\alpha + \sqrt{c}\cos\varphi \sin\alpha + i\sqrt{c}\sin\varphi \sin\alpha = \\
&= \sqrt{a}\cos\alpha + \sqrt{c}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\sqrt{\delta_1}e^{i\theta} = \sqrt{\delta_1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{a}\cos\alpha + e^{i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha. \quad (11.1.10)$$

Меняя знак перед $i = \sqrt{-1}$ на обратный, получим ещё одну формулу:

$$\sqrt{\delta_1}e^{-i\theta} = \sqrt{\delta_1}(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{a}\cos\alpha + e^{-i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha. \quad (11.1.11)$$

Формулы (11.1.10) и (11.1.11) представляют обобщение формулы Эйлера для бинарной квадратичной формы (11.1.3).

$$\delta_1 = a\sin^2\beta - 2b\sin\beta\cos\beta + c\cos^2\beta.$$

Для квадратичной формы (11.1.4) формулы Эйлера получим аналогичным образом:

$$\delta_2 = c\cos^2\alpha - 2b\sin\alpha\cos\alpha + a\sin^2\alpha = c\sin^2\alpha \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\frac{b}{c}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{a}{c} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ac - b^2}{c} \sin^2 \alpha \left[\left(\frac{actg\alpha - b}{\sqrt{ac - b^2}} \right)^2 + 1 \right] = a \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha (ctg^2 \theta + 1) = \\
&= a \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha \sec^2 \theta.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_2} = \sqrt{a} \sin \varphi \sin \alpha \sec \theta, \quad (11.1.12)$$

где

$$ctg \theta = \frac{cctg\alpha - b}{\sqrt{ac - b^2}}. \quad (11.1.13)$$

Следует обратить внимание на то, что угол θ в формулах (11.1.7) и (11.1.13) имеет различные значения. Формулу (11.1.12) переписываем следующим образом:

$$\sqrt{\delta_2} \sin \theta = \sqrt{a} \sin \varphi \sin \alpha. \quad (11.1.14)$$

Перемножая формулы (11.1.12) и (11.1.14), получим:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\delta_2} \cos \theta &= \frac{\sqrt{a} \sin \varphi (c \cos \alpha - b \sin \alpha)}{\sqrt{ac} \sin \varphi} = \frac{c \cos \alpha - \sqrt{ac} \cos \varphi \sin \alpha}{\sqrt{c}} = \\
&= \sqrt{c} \cos \alpha - \sqrt{a} \cos \varphi \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_2} \cos \theta = \sqrt{c} \cos \alpha - \sqrt{a} \cos \varphi \sin \alpha. \quad (11.1.15)$$

Комбинируя (11.1.14) и (11.1.15), получим:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\delta_2} (\cos \theta + i \sin \theta) &= \sqrt{c} \cos \alpha - \sqrt{a} \cos \varphi \sin \alpha + i \sqrt{a} \sin \varphi \sin \alpha = \\
&= \sqrt{c} \cos \alpha - \sqrt{a} \sin \alpha (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \sqrt{c} \cos \alpha - e^{-i\varphi} \sqrt{a} \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_2} e^{i\theta} = \sqrt{\delta_2} (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{c} \cos \alpha - e^{-i\varphi} \sqrt{a} \sin \alpha. \quad (11.1.16)$$

Меняя знак перед i , получим также:

$$\sqrt{\delta_2} e^{-i\theta} = \sqrt{\delta_2} (\cos \theta - i \sin \theta) = \sqrt{c} \cos \alpha - e^{i\varphi} \sqrt{a} \sin \alpha. \quad (11.1.17)$$

Формулы (11.1.16) и (11.1.17) представляют обобщение формулы Эйлера для бинарной квадратичных формы (11.1.4).

Выведенное выше обобщение формулы Эйлера (11.1.10) можно записать в следующем виде:

$$e^{i\theta} = \sqrt{a} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\delta_1}} + e^{i\varphi} \frac{\sqrt{c} \sin \alpha}{\sqrt{\delta_1}} = x \sqrt{a} + y e^{i\varphi} \sqrt{c}, \quad (11.1.19)$$

где

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\delta_1}}, \quad y = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\delta_1}}.$$

Также можем переписать и остальные формулы. Окончательно имеем:

$$e^{i\theta} = x \sqrt{a} + y e^{i\varphi} \sqrt{c}, \quad e^{-i\theta} = x \sqrt{a} + y e^{-i\varphi} \sqrt{c}, \quad (11.1.20)$$

$$e^{i\theta} = x'\sqrt{c} - y'e^{-i\varphi}\sqrt{a}, \quad e^{-i\theta} = x'\sqrt{c} - y'e^{i\varphi}\sqrt{a}. \quad (11.1.21)$$

Угол θ в формулах (11.1.20) и (11.1.21) имеет различные значения. Формулы (11.1.20) и (11.1.21) – обобщенные формулы Эйлера.

На обобщённые формулы Эйлера (11.1.10), (11.1.11), (11.1.16) и (11.1.17) можно смотреть, как на *обобщённые комплексные числа*, причём, обобщённые комплексные числа (11.1.10), (11.1.11), (11.1.16) и (11.1.17) – взаимно-сопряженные. Перемножая между собой (11.1.10) и (11.1.11), получим бинарную форму (11.1.3):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\sqrt{a}\cos\alpha + e^{i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha)(\sqrt{a}\cos\alpha + e^{-i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha) = \\ &= a\cos^2\alpha + 2b\sin\alpha\cos\alpha + c\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Перемножая (11.1.16) и (11.1.17), получим другую бинарную форму (11.1.4). Отсюда следует, что квадратичные бинарные формы (11.1.3) и (11.1.4) являются *квадратами модулей обобщённых комплексных чисел*, то есть обобщённых формул Эйлера.

Перемножая формулы (11.1.20) получим уравнение эллипса:

$$\begin{aligned} 1 &= (x\sqrt{a} + ye^{i\varphi}\sqrt{c})(x\sqrt{a} + ye^{-i\varphi}\sqrt{c}) = ax^2 + 2\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\sqrt{ac}xy + cy^2 = \\ &= ax^2 + 2\sqrt{ac}\cos\varphi xy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

Перемножая формулы (11.1.21), получим уравнение сопряжённого эллипса. Приравняв δ_1 нулю в формуле (11.1.9), получим

$$ctg\alpha = -\sqrt{c/a}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это один из корней квадратного уравнения, выражающий угловой коэффициент асимптоты к данному эллипсу. Подобным образом можно найти и другие коэффициенты асимптот.

Складывая и вычитая формулы (11.1.20), определим текущие координаты точки, лежащей на эллипсе:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}y\sqrt{c}, \\ \sin\theta &= y\sqrt{c}\sin\varphi. \end{aligned}$$

Откуда

$$y = \frac{\sin\theta}{\sqrt{c}\sin\varphi}, \quad (11.1.22)$$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = x\sqrt{a} + \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}y\sqrt{c},$$

или

$$\begin{aligned} \cos\theta &= x\sqrt{a} + y\sqrt{c}\cos\varphi = x\sqrt{a} + \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi}, \\ x\sqrt{a} &= \cos\theta - \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sqrt{a}\sin\varphi}. \quad (11.1.23)$$

Формулы (11.1.22) и (11.1.23) выражают текущие координаты точки эллипса

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

Подставляя (11.1.22) и (11.1.23) в уравнение (11.1.20), получим:

$$e^{i\theta} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi} + e^{i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad (11.1.24)$$

$$e^{-i\theta} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi} + e^{-i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}. \quad (11.1.25)$$

Аналогично можно записать для формулы (11.1.21):

$$e^{i\theta} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} - e^{i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad (11.1.26)$$

$$e^{-i\theta} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} - e^{-i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}. \quad (11.1.27)$$

Формулы (11.1.24), (11.1.25), (11.1.26) и (11.1.27) представляют *обобщения формул Эйлера, выраженные в тригонометрической форме*. Они также связаны с движением точек по двум взаимно сопряженным эллипсам. Когда угол φ станет равным 90° , то оба эллипса превратятся в окружность, а все указанные четыре обобщенные формулы Эйлера обратятся в две известные формулы Эйлера, которые, следовательно, являются частным случаем обобщенных.

Положив в (11.1.22) и (11.1.23) $a = c = 1$, что соответствует повороту осей эллипса на 45° , то есть $\alpha_0 = 45^\circ$, запишем формулы в следующем виде:

$$\sqrt{\delta_1} e^{i\theta} = \cos\alpha + e^{i\varphi} \sin\alpha, \quad (11.1.28)$$

$$\sqrt{\delta_1} e^{i\theta} = \cos\alpha + e^{-i\varphi} \sin\alpha. \quad (11.1.29)$$

Аналогично для второй квадратичной формы:

$$\sqrt{\delta_2} e^{i\theta} = \cos\alpha - e^{i\varphi} \sin\alpha, \quad (11.1.30)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^{-i\theta} = \cos\alpha - e^{-i\varphi} \sin\alpha. \quad (11.1.31)$$

Последние четыре формулы и являются *обобщенными формулами Эйлера*, тогда как формулы (11.1.10), (11.1.11) и (11.1.16), (11.1.17) представляют *обобщенные комплексные числа*.

Заменяя $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta_1}}$ и $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta_1}}$, соответственно, через x и y , а $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta_2}}$ и $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta_2}}$ через x' и y' , получим:

$$e^{i\theta} = x + ye^{i\varphi}, \quad (11.1.32)$$

$$e^{-i\theta} = x + ye^{-i\varphi}, \quad (11.1.33)$$

$$e^{i\theta} = x' + y'e^{-i\varphi}, \quad (11.1.34)$$

$$e^{-i\theta} = x' + y'e^{i\varphi}. \quad (11.1.35)$$

Перемножая, соответственно, (11.1.32) и (11.1.33), (11.1.34) и (11.1.35), получим частные случаи бинарных квадратичных форм (11.1.3) и (11.1.4), которые запишутся следующим образом:

$$\delta_1 = \cos^2 \alpha + \cos \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha = 1 + \cos \varphi \sin 2\alpha, \quad (11.1.36)$$

$$\delta_2 = \cos^2 \alpha - \cos \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha = 1 - \cos \varphi \sin 2\alpha. \quad (11.1.37)$$

Положим в формулах (11.1.28) и (11.1.29), (11.1.30) и (11.1.31) $\varphi = 90^\circ$. Тогда $\delta_1 = \delta_2 = 1$, что видно из формул (11.1.36) и (11.1.37). Формулы (11.1.28) и (11.1.29), (11.1.30) и (11.1.31) обратятся в классические формулы Эйлера. Таким образом, как уже отмечалось, формулы Эйлера являются частным случаем обобщённых, причём, обобщённых формул Эйлера не две, а четыре, по две на каждый из сопряжённых эллипсов.

Перемножая соответственно формулы (11.1.32) и (11.1.33), (11.1.34) и (11.1.35), получим два взаимно сопряжённых эллипса в следующем виде:

$$x^2 + 2xy \cos \varphi + y^2 = 1, \quad (11.1.38)$$

$$x'^2 - 2x'y' \cos \varphi + y'^2 = 1. \quad (11.1.39)$$

Переходим теперь к выводу обобщённых формул Эйлера для случая отрицательного дискриминанта.

2 случай. $b = \sqrt{ac \sec \varphi}$

Используя первую квадратичную форму, имеем:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha = a \sin^2 \alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2 - ac}{a^2}) = \\ &= \frac{b^2 - ac}{a} \sin^2 \alpha \left[\left(\frac{\operatorname{actg} \alpha + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right)^2 - 1 \right] = \operatorname{ctg}^2 \varphi (c \sec^2 \theta - 1) \sin^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \theta, \end{aligned}$$

или

$$\delta_1 = \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \theta. \quad (11.1.40)$$

Извлекая корень

$$\sqrt{\delta_1} = \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta}, \quad (11.1.41)$$

где

$$c \sec \theta = \frac{\operatorname{actg} \alpha + b}{\sqrt{b^2 - ac}}. \quad (11.1.42)$$

Формулу (11.1.40) перепишем следующим образом:

$$\sqrt{\delta_1} \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi \sin \alpha}. \quad (11.1.43)$$

Перемножая (11.1.41) и (11.1.42), получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta_1} \sec \theta &= \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \varphi \sin \alpha} (\operatorname{actg} \alpha + b)}{\sqrt{b^2 - ac}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \varphi} (a \cos \alpha + \sqrt{ac \sec \varphi} \sin \alpha)}{\sqrt{ac \operatorname{tg} \varphi}} = \\ &= \sqrt{a \cos \alpha} + \sqrt{c \sec \varphi} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_1} \sec \theta = \sqrt{a \cos \alpha} + \sqrt{c \sec \varphi} \sin \alpha. \quad (11.1.44)$$

Складывая (11.1.43) и (11.1.44), получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta_1} (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) &= \sqrt{a \cos \alpha} + \sqrt{c \sec \varphi} \sin \alpha + \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi} \sin \alpha = \\ &= \sqrt{a \cos \alpha} + \sqrt{c} (\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11.1.45)$$

Считая углы θ и φ гудерманианами, можем записать:

$$e^v = chv + shv = \sec\theta + tg\theta, \quad (11.1.46)$$

$$e^u = chu + shu = \sec\varphi + tg\varphi. \quad (11.1.47)$$

Запишем формулы для отрицательных аргументов:

$$\sqrt{\delta_1}e^v = \sqrt{\delta_1}(\sec\theta + tg\theta) = \sqrt{a}\cos\alpha + e^u\sqrt{c}\sin\alpha. \quad (11.1.48)$$

Меняя знак перед v и u , получим:

$$\sqrt{\delta_1}e^{-v} = \sqrt{\delta_1}(\sec\theta - tg\theta) = \sqrt{a}\cos\alpha + e^{-u}\sin\alpha. \quad (11.1.49)$$

Формулы (11.1.48) и (11.1.49) представляют обобщённые формулы Эйлера для первой квадратичной формы отрицательного дискриминанта.

Аналогичный вывод сделаем и для второй бинарной формы:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= c\cos^2\alpha - 2b\sin\alpha\cos\alpha + a\sin^2\alpha = \\ &= c\sin^2\alpha(ctg^2\alpha - 2\frac{b}{c}ctg\alpha + \frac{b^2}{c^2} - \frac{b^2 - ac}{c^2}) = \frac{b^2 - ac}{c}\sin^2\alpha \left[\left(\frac{cctg\alpha - b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= atg^2\varphi\sin^2\alpha ctg^2\theta. \end{aligned} \quad (11.1.50)$$

Извлекая корень, получим

$$\sqrt{\delta_2}tg\theta = \sqrt{a}tg\varphi\sin\alpha. \quad (11.1.51)$$

Также запишем следующую формулу:

$$c\sec\theta = \frac{cctg\alpha - b}{\sqrt{b^2 - ac}}. \quad (11.1.52)$$

Перемножим (11.1.50) и (11.1.51)

$$\sqrt{\delta_2}\sec\theta = \frac{\sqrt{a}tg\varphi(cc\cos\alpha - \sqrt{ac}\sec\varphi\sin\alpha)}{\sqrt{b^2 - ac}} = \sqrt{c}\cos\alpha - \sqrt{a}\sec\varphi\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\delta_2}\sec\theta = \sqrt{c}\cos\alpha - \sqrt{a}\sec\varphi\sin\alpha. \quad (11.1.53)$$

Складывая (11.1.51) и (11.1.52), получим:

$$\sqrt{\delta}(\sec\theta + tg\theta) = \sqrt{c}\cos\alpha - \sqrt{a}\sec\varphi\sin\alpha + \sqrt{a}tg\varphi\sin\alpha.$$

$$\sqrt{c}\cos\alpha - \sqrt{a}(\sec\varphi - tg\varphi)\sin\alpha = \sqrt{c}\cos\alpha - e^{-u}\sqrt{a}\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\delta_2}e^{-v} = \sqrt{\delta_2}(\sec\theta + tg\theta) = \sqrt{c}\cos\alpha - e^{-u}\sqrt{a}\sin\alpha. \quad (11.1.54)$$

Меняя знак перед v и u , получим ещё одну формулу:

$$\sqrt{\delta_2}e^{-v} = \sqrt{\delta_2}(\sec\theta - tg\theta) = \sqrt{c}\cos\alpha - e^u\sqrt{a}\sin\alpha. \quad (11.1.55)$$

Формулы (11.1.54) и (11.1.55) представляют обобщение формулы Эйлера для второй квадратичной формы отрицательного дискриминанта.

Вводя обозначения:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta_1}}, \quad y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta_1}}, \quad x' = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta_2}}, \quad y' = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta_2}},$$

где x, y, x', y' – текущие координаты двух сопряжённых гипербол, перепишем последние четыре обобщённые формулы Эйлера в следующем виде:

$$e^v = x\sqrt{a} + ye^u\sqrt{c}, \quad (11.1.56)$$

$$e^{-v} = x\sqrt{a} + ye^{-u}\sqrt{c}, \quad (11.1.57)$$

$$e^v = x'\sqrt{c} - y'e^{-u}\sqrt{a}, \quad (11.1.58)$$

$$e^{-v} = x'\sqrt{c} - y'e^u\sqrt{a}. \quad (11.1.59)$$

Это также обобщённые формулы Эйлера, связанные с координатами точек, лежащих на двух взаимно-сопряжённых гиперболах. Здесь надо иметь в виду, что величина “ v ” в первых двух формулах имеет одно значение, а во второй паре – другое.

Вычитая и складывая (11.1.56) и (11.1.57), будем иметь:

$$\frac{e^v - e^{-u}}{2} = shv = tg\theta = y\sqrt{c}\frac{e^u - e^{-u}}{2} = y\sqrt{c}tg\varphi.$$

Откуда

$$y = \frac{tg\theta}{\sqrt{c}tg\varphi} = \frac{shv}{\sqrt{c}shu}, \quad (11.1.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^v + e^{-u}}{2} &= chv = sec\theta = x\sqrt{a} + y\sqrt{c}\frac{e^u + e^{-u}}{2} = x\sqrt{a} + y\sqrt{c}sec\varphi, \\ x\sqrt{a} &= sec\theta - y\sqrt{c}sec\varphi = sec\theta - \frac{sec\theta tg\theta}{tg\varphi} = \frac{shuchv - chushv}{shu} = \frac{sh(u-v)}{shu}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x = \frac{sh(u-v)}{\sqrt{a}shu}. \quad (11.1.61)$$

Подставим значения x и y в (11.5.48) и (11.5.49):

$$e^v = \frac{sh(u-v)}{shu} + e^u \frac{shv}{shu}, \quad (11.1.62)$$

$$e^{-v} = \frac{sh(u-v)}{shu} + e^{-u} \frac{shv}{shu}. \quad (11.1.63)$$

Формулы (11.1.62) и (11.1.63) аналогичны формулам (11.1.26) и (11.1.27).

Подобные же формулы можно вывести для (11.1.58) и (11.1.59). Положив в формулах (11.1.48), (11.1.49), (11.1.54) и (11.1.55) $a=c=1$, что соответствует повороту осей гиперболы на угол $\alpha_0 = 45^\circ$, получим простейшую форму обобщённых формул Эйлера для данного случая:

$$\sqrt{\delta_1}e^v = \cos\alpha + e^u \sin\alpha, \quad (11.1.64)$$

$$\sqrt{\delta_1}e^{-v} = \cos\alpha + e^{-u} \sin\alpha, \quad (11.1.65)$$

$$\sqrt{\delta_2}e^v = \cos\alpha - e^{-u} \sin\alpha, \quad (11.1.66)$$

$$\sqrt{\delta_2}e^{-v} = \cos\alpha - e^u \sin\alpha. \quad (11.1.67)$$

Эти же формулы можно записать в виде формул (11.1.56), (11.1.57); (11.1.58) и (11.1.59).

Перемножая между собой формулы (11.1.48) и (11.1.49), а также (11.1.54) и (11.1.55), получим бинарные квадратичные формы (11.1.3) и (11.1.4).

Перемножая между собой формулы (11.1.56), (11.1.57), (11.1.58) и (11.1.59), получим две взаимно сопряжённые гиперболы.

3 случай. $b = \sqrt{ac}$

В том случае, когда дискриминант основных квадратичных форм (11.1.3) и (11.1.4) обращается в нуль, что имеет место при $b = \sqrt{ac}$, обобщённые формулы Эйлера примут следующий вид:

$$\sqrt{\delta_1} = \sqrt{ac}\cos\alpha + \sqrt{c}\sin\alpha, \quad (11.1.68)$$

$$\sqrt{\delta_2} = \sqrt{cc}\cos\alpha - \sqrt{a}\sin\alpha. \quad (11.1.69)$$

В этом случае $\varphi = 0$ и, следовательно, корень квадратный из правых частей для δ_1 и δ_2 извлекается алгебраически. Этот частный случай соответствует тому случаю, когда эллипсы и, соответственно, гиперболы вырождаются в прямые линии. Поэтому формулы (11.1.68) и (11.1.69) связаны с движением точек по двум взаимно перпендикулярным прямым.

В этом частном случае при $a=c=1$, получим:

$$\sqrt{\delta_1} = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha), \quad (11.1.70)$$

$$\sqrt{\delta_2} = \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha). \quad (11.1.71)$$

Для большей наглядности, выпишем обобщённые формулы Эйлера для всех трёх случаев.

1 случай. $b = \sqrt{accos\varphi}$ или $ac - b^2 > 0$.

а) Обобщённые комплексные (эллиптические) числа:

$$\sqrt{\delta_1}e^{i\theta} = \sqrt{ac}\cos\alpha + e^{i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha, \quad (11.1.72)$$

$$\sqrt{\delta_1}e^{-i\theta} = \sqrt{ac}\cos\alpha + e^{-i\varphi}\sqrt{c}\sin\alpha, \quad (11.1.73)$$

$$\sqrt{\delta_2}e^{i\theta} = \sqrt{cc}\cos\alpha - e^{i\varphi}\sqrt{a}\sin\alpha, \quad (11.1.74)$$

$$\sqrt{\delta_2}e^{-i\theta} = \sqrt{cc}\cos\alpha - e^{-i\varphi}\sqrt{a}\sin\alpha. \quad (11.1.75)$$

б) Тригонометрическая форма комплексных чисел:

$$e^{i\theta} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi} + e^{i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad (11.1.76)$$

$$e^{-i\theta} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi} + e^{-i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad (11.1.77)$$

$$e^{i\theta} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} - e^{-i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad (11.1.78)$$

$$e^{-i\theta} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} - e^{i\varphi} \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}. \quad (11.1.79)$$

е) Обобщённые формулы Эйлера:

$$\sqrt{\delta_1} e^{i\theta} = \cos\alpha + e^{i\varphi} \sin\alpha, \quad (11.1.80)$$

$$\sqrt{\delta_1} e^{-i\theta} = \cos\alpha + e^{-i\varphi} \sin\alpha, \quad (11.1.81)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^{i\theta} = \cos\alpha - e^{i\varphi} \sin\alpha, \quad (11.1.82)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^{-i\theta} = \cos\alpha - e^{-i\varphi} \sin\alpha. \quad (11.1.83)$$

2 случай. $b = \sqrt{ac} \operatorname{sech}\varphi = \sqrt{ac} \operatorname{ch}u$ или $ac - b^2 < 0$.

а) Обобщённые комплексные (гиперболические) числа:

$$\sqrt{\delta_1} e^v = \sqrt{ac} \cos\alpha + e^u \sqrt{c} \sin\alpha, \quad (11.1.84)$$

$$\sqrt{\delta_1} e^{-v} = \sqrt{ac} \cos\alpha + e^{-u} \sqrt{c} \sin\alpha, \quad (11.1.85)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^v = \sqrt{c} \cos\alpha - e^{-u} \sqrt{c} \sin\alpha, \quad (11.1.86)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^{-v} = \sqrt{c} \cos\alpha - e^u \sqrt{a} \sin\alpha. \quad (11.1.87)$$

б) Гиперболическая форма обобщённых чисел:

$$e^v = \frac{\operatorname{sh}(u-v)}{\operatorname{sh}u} + e^u \frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{sh}u}, \quad (11.1.88)$$

$$e^{-v} = \frac{\operatorname{sh}(u-v)}{\operatorname{sh}u} + e^{-u} \frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{sh}u}, \quad (11.1.89)$$

$$e^v = \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{sh}u} - e^{-u} \frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{sh}u}, \quad (11.1.90)$$

$$e^{-v} = \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{sh}u} - e^u \frac{\operatorname{sh}v}{\operatorname{sh}u}. \quad (11.1.91)$$

в) Обобщённые формулы Эйлера:

$$\sqrt{\delta_1} e^v = \cos\alpha + e^u \sin\alpha, \quad (11.1.92)$$

$$\sqrt{\delta_1} e^{-v} = \cos\alpha + e^{-u} \sin\alpha, \quad (11.1.93)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^v = \cos\alpha - e^{-u} \sin\alpha, \quad (11.1.94)$$

$$\sqrt{\delta_2} e^{-v} = \cos\alpha - e^u \sin\alpha. \quad (11.1.95)$$

3 случай. $b = \sqrt{ac}$ или $ac - b^2 = 0$.

а) Обобщённые параболические числа:

$$\sqrt{\delta_1} = \sqrt{ac} \cos\alpha + \sqrt{c} \sin\alpha, \quad (11.1.96)$$

$$\sqrt{\delta_2} = \sqrt{c} \cos\alpha - \sqrt{a} \sin\alpha. \quad (11.1.97)$$

б) Частный случай

$$\sqrt{\delta_1} = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha), \quad (11.1.98)$$

$$\sqrt{\delta_2} = \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha). \quad (11.1.99)$$

Пользуясь этими формулами можно изучать с большим эффектом, чем при помощи обыкновенных формул Эйлера, тот или другой вопрос, связанный с

движением точек не только по окружности, но и по всевозможным эллипсам, гиперболам и прямым линиям.

Таблица биномов

Заменим в формулах (11.1.10), (11.1.11), (11.1.16), (11.1.17) и (11.1.48), (11.1.49), (11.1.54), (11.1.55), (11.1.68), (11.5.69) $\sqrt{a}\cos\alpha$ и $\sqrt{c}\cos\alpha$ через “ a ”, $\sqrt{a}\sin\alpha$ и $\sqrt{c}\sin\alpha$ через “ c ”. Тогда обобщённые комплексные числа – эллиптические, гиперболические и параболические – можно представить в виде следующих биномов:

Эллиптические биномы:

$$a + e^{i\varphi} c, \quad a + e^{-i\varphi} c, \quad (11.1.100)$$

$$a - e^{-i\varphi} c, \quad a - e^{i\varphi} c. \quad (11.1.101)$$

Гиперболические биномы:

$$a + e^u c, \quad a + e^{-u} c, \quad (11.1.102)$$

$$a - e^{-u} c, \quad a - e^u c. \quad (11.1.103)$$

Параболические биномы:

$$a + c, \quad a - c. \quad (11.1.104)$$

Из каждого вида этих биномов составим произведения по два сомножителя, по три и т.д.

Все эти произведения биномов размещены в трёх зонах таблицы 11.1.

1 зона – зона эллиптических или колебательных процессов

2 зона – зона гиперболических или аperiodических процессов

3 зона – промежуточная параболическая зона.

Изменяя угол φ , мы можем перемещаться по всем трём зонам и легко ориентироваться при изучении различных вопросов, связанных с изменением угла φ , то есть с деформацией эллипсов, гипербол и прямых. Можно брать произведение конечного и бесконечно большого числа биномов, одинаковых и неодинаковых, причём, если возьмём одинаковые биномы, то тогда это произведение обращается в обобщённую формулу Муавра для эллиптической и гиперболической зон. В параболической зоне обобщённая формула Муавра обращается в бином Ньютона.

11.2. Обобщение формул Муавра

От обобщения формул Эйлера легко перейти к обобщению формул Муавра.

В случае положительного дискриминанта и первой квадратичной формы, имеем:

$$\rho_1^m = (\cos m\theta \pm i \sin m\theta) = (\sqrt{a}\cos\alpha + e^{\pm i\varphi} \sqrt{c}\sin\alpha)^m. \quad (11.2.1)$$

Для второй квадратичной формы:

$$\rho_2^m = (\cos m\theta \pm i \sin m\theta) = (\sqrt{c}\cos\alpha - e^{\pm i\varphi} \sqrt{a}\sin\alpha)^m, \quad (11.2.2)$$

$$\rho_1 = \sqrt{\delta_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \sqrt{\delta_2}.$$

В частном случае при $a=c=1$, имеем

$$\rho_1^m (\cos m\theta \pm i \sin m\theta) = (\cos\alpha + e^{\pm i\varphi} \sin\alpha)^m, \quad (11.2.3)$$

Произведения эллиптических параболических и гиперболических биномов

Таблица 11.1

Зона эллиптических (периодических) процессов		Зона параболической зона		Зона гиперболических аperiodических процессов	
I	$(a + e^{i\varphi_1}c)(a + e^{-i\varphi_1}c) = a^2 + 2ac \cos \varphi_1 + c^2$	Ia	$(a - e^{i\varphi_1}c)(a - e^{-i\varphi_1}c) = a^2 - 2ac \cos \varphi_1 + c^2$	II	$(a + e^{i\varphi_1}c)(a + e^{-i\varphi_1}c) = (a - c)(a - e^{i\varphi_1}c)(a - e^{-i\varphi_1}c) = (a - c)(a^2 - 2ac \cos \varphi_1 + c^2)$
III	$(a + e^{i\varphi_2}c)(a + e^{-i\varphi_2}c)(a + e^{i\varphi_2}c)(a + e^{-i\varphi_2}c) = (a^2 + 2ac \cos \varphi_1 + c^2)(a^2 + 2ac \cos \varphi_2 + c^2)$	IIIa	$(a - e^{i\varphi_2}c)(a - e^{-i\varphi_2}c)(a - e^{i\varphi_2}c)(a - e^{-i\varphi_2}c) = (a^2 - 2ac \cos \varphi_1 + c^2)(a^2 - 2ac \cos \varphi_2 + c^2)$	IV	$(a + e^{i\varphi_1}c)(a + e^{-i\varphi_1}c)(a + e^{i\varphi_2}c)(a + e^{-i\varphi_2}c) \dots (a - e^{i\varphi_1}c)(a - e^{-i\varphi_1}c)(a - e^{i\varphi_2}c)(a - e^{-i\varphi_2}c) \dots$
I	$(a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$	Ia	$(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$	II	$(a + c)^3 = a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$
III	$(a + c)^4 = a^4 + 4a^3c + 6a^2c^2 + 4ac^3 + c^4$	IIIa	$(a - c)^4 = a^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4ac^3 + c^4$	IV	$(a + c)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}c^2 + \dots$
I	$(a + e^u c)(a + e^{-u}c) = a^2 + 2ac \cosh u + c^2$	Ia	$(a - e^u c)(a - e^{-u}c) = a^2 - 2ac \cosh u + c^2$	II	$(a + c)(a + e^u c)(a + e^{-u}c) = (a - c)(a - e^u c)(a - e^{-u}c) = (a - c)(a^2 - 2ac \cosh u + c^2)$
III	$(a + e^{u_1}c)(a + e^{-u_1}c) \cdot (a + e^{u_2}c)(a + e^{-u_2}c) = (a^2 + 2ac \cosh u_1 + c^2) \cdot (a^2 + 2ac \cosh u_2 + c^2)$	IIIa	$(a - e^{u_1}c)(a - e^{-u_1}c)(a - e^{u_2}c)(a - e^{-u_2}c) = (a^2 - 2ac \cosh u_1 + c^2)(a^2 - 2ac \cosh u_2 + c^2)$	IV	$(a + e^{u_1}c)(a + e^{-u_1}c)(a + e^{u_2}c)(a + e^{-u_2}c) \dots (a - e^{u_1}c)(a - e^{-u_1}c)(a - e^{u_2}c)(a - e^{-u_2}c) \dots$

$$\rho_2^m (\cos m\theta \pm i \sin m\theta) = (\cos \alpha - e^{\pm i\varphi} \sin \alpha)^m. \quad (11.2.4)$$

Для отрицательного дискриминанта и, соответственно, первой и второй квадратичных форм:

$$\rho_1^m (chmv \pm shmv) = (\sqrt{a} \cos \alpha + e^{\pm u} \sqrt{c} \sin \alpha)^m, \quad (11.2.5)$$

$$\rho_2^m (chmv \pm shmv) = (\sqrt{c} \cos \alpha - e^{\pm u} \sqrt{a} \sin \alpha)^m. \quad (11.2.6)$$

Для частного случая:

$$\rho_1^m = (chmv \pm shmv) = (\cos \alpha + e^{\pm u} \sin \alpha)^m, \quad (11.2.7)$$

$$\rho_2^m = (chmv \pm shmv) = (\cos \alpha - e^{\pm u} \sin \alpha)^m. \quad (11.2.8)$$

Возьмём обобщённую формулу Муавра в виде формулы (11.9.1):

$$\rho_1^m e^{im\theta} = (\sqrt{a} \cos \alpha + e^{\pm i\varphi} \sqrt{c} \sin \alpha)^m.$$

Изменяя в ней угол φ , будем перемещаться по таблице 11.2 через все её зоны, рассматривая произведение одинаковых биномов. При $a=c=1$ и $\varphi = 90^\circ$ получим обычную формулу Муавра. При $\varphi = 0^\circ$ и замене $\sqrt{a} \cos \alpha$ через “ a ”, и $\sqrt{c} \sin \alpha$ через “ c ”, получим бином Ньютона. Таким образом, формула (11.2.1) содержит в себе, как частные случаи, обычную формулу Муавра и бином Ньютона.

Следовательно, обобщённая формула Муавра может трансформировать обычную формулу Муавра в бином Ньютона. Эту трансформацию легко представить геометрически, именно, при помощи системы эллипсов окружность обращается в прямые линии и этим самым обычная формула Муавра переходит в бином Ньютона.

С обобщёнными формулами Муавра тесно связаны обобщённые формулы кратных аргументов для тригонометрических и гиперболических функций. Чтобы вывести эти формулы для тригонометрических функций, воспользуемся обобщённой формулой Муавра (11.2.5) и правую часть её разложим по биному Ньютона.

$$\begin{aligned} \rho^m e^{im\theta} &= (\cos \alpha + e^{\pm i\varphi} \sin \alpha)^m = \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} e^{i\varphi} \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} e^{2i\varphi} \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} e^{3i\varphi} \cos^{m-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} e^{ni\varphi} \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots, \end{aligned} \quad (11.2.9)$$

где $\rho = \sqrt{\delta} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha}$ – модуль обобщённого числа.

В разложение (11.2.9) подставим:

$$e^{ni\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

$$\begin{aligned} \rho^m e^{im\theta} &= \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} \cos \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{im}{1!} \sin \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} \cos 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{im(m-1)}{2} \sin 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \cos n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \end{aligned}$$

$$+ \frac{im(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \sin n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots$$

Разделяя вещественную и мнимую части, запишем:

$$\begin{aligned} & \rho^m \cos m\theta + i\rho^m \sin m\theta = \\ & = \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} \cos \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} \cos 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ & \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \cos n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots \\ & \dots + i \left\{ \frac{m}{1!} \sin \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} \sin 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \right. \\ & \quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \sin 3\varphi \cos^{m-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \sin n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

Приравнявая вещественные части и коэффициенты при мнимой единице справа и слева, получим:

$$\begin{aligned} \rho^m \cos m\theta &= \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} \cos \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} \cos 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ & \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \cos n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots, \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

$$\begin{aligned} \rho^m \sin m\theta &= \frac{m}{1!} \sin \varphi \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} \sin 2\varphi \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ & \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} \sin n\varphi \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \end{aligned} \quad (11.2.12)$$

Формулы (11.2.11) и (11.2.12) представляют *обобщённые формулы кратных аргументов для тригонометрических функций*. В частном случае при $\varphi = 90^\circ$ эти формулы обращаются в обычные формулы кратных углов. При $\varphi = 0^\circ$, что соответствует параболической зоне табл.11.1, формула (11.2.11) обращается в бином Ньютона, а (11.2.12) обращается в нуль. Отсюда следует, что в бинOME Ньютона синус не участвует.

Чтобы получить обобщение формулы кратных аргументов для гиперболических функций, воспользуемся формулой (11.2.1) и также развернём правую часть её по биному Ньютона.

$$\begin{aligned} \rho^m e^{mv} &= (\cos \alpha + e^u \sin \alpha)^m = \\ &= \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} e^u \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} e^{2u} \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ & \quad + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} e^{nu} \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{\delta} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sec \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha}$ – модуль обобщённой формулы Эйлера.

Сделаем также следующие замены:

$$e^u = chu + shu, e^{2u} = ch2u + sh2u, \dots, e^{nu} = chnu + shnu.$$

$$\begin{aligned} \rho^m e^{mv} &= \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} chucos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m}{1!} shucos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} ch2ucos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} sh2ucos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} chnucos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} shnucos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \end{aligned}$$

После преобразований имеем окончательно:

$$\begin{aligned} \rho^m chmv &= \cos^m \alpha + \frac{m}{1!} chucos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} ch2ucos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} chnucos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots \quad (11.2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^m shmv &= mshucos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} sh2ucos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} sh2ucos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \quad (11.2.14) \end{aligned}$$

Формулы (11.2.13) и (11.2.14) представляют *обобщённые формулы кратных аргументов для гиперболических функций*. В частном случае при $u = 0$ формула (11.2.13) обращается в бином Ньютона.

11.3. Разложение обобщённых формул Эйлера в ряды

Для разложения обобщённой формулы Эйлера в ряд воспользуемся формулой (11.2.3). Правую часть этой формулы разложим по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} p^m e^{im\theta} &= (\cos \alpha + e^{i\varphi} \sin \alpha)^m = \\ &= \cos^m \alpha + m e^{i\varphi} \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} e^{2i\varphi} \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} e^{ni\varphi} \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \quad (11.3.1) \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$p^m e^{im\theta} = \cos^m \alpha [1 + e^{i\varphi} (mtg \alpha) + \frac{1 - \frac{1}{m}}{2!} e^{2i\varphi} (mtg \alpha)^2 + \frac{(1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m})}{3!} \dots]$$

$$\cdot e^{3i\varphi} (mtg\alpha)^3 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{n!} e^{ni\varphi} (mtg\alpha)^n + \dots]. \quad (11.3.2)$$

Заменим α через x/m и θ через θ/m . Заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m \frac{x}{m} = 1.$$

Кроме того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Подставим эти значения в формулу (11.3.2), предварительно взяв предел от обеих частей при $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^m e^{i\theta} = 1 + x e^{i\varphi} + \frac{x^2}{2!} e^{i2\varphi} + \dots + \frac{x^n e^{ni\varphi}}{n!} + \dots. \quad (11.3.3)$$

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \cos\varphi \sin 2x/m} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \cos\varphi \sin 2x/m)^{m/2} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \cos\varphi \frac{x}{m/2} \frac{\sin \frac{x}{m/2}}{\frac{x}{m/2}} \right)^{m/2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x \cos\varphi}{m/2} \right)^{m/2} = e^{x \cos\varphi}. \end{aligned}$$

Чтобы определить θ в зависимости от x , воспользуемся формулой (11.1.6), положив в ней $c=l$:

$$\sqrt{\delta_1} \sin \theta = \sin \varphi \sin \alpha.$$

Заменив θ на θ/m и α на x/m , запишем:

$$\sqrt{\delta_1} \sin \theta/m = \sin \varphi \sin x/m.$$

Возьмём предел от обеих частей при $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\delta_1} \sin \theta/m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sin \varphi \sin x/m,$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \cos\varphi \sin 2x/m} \sin \theta/m = \sin \varphi \lim_{m \rightarrow \infty} x/m.$$

$\theta/m = \sin \varphi x/m$, откуда $\theta = x \sin \varphi$, т.е. получили формулу (11.1.18), где x есть часть площади эллипса. Подставив эти значения в формулу (11.3.3), окончательно получим:

$$e^{x(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = 1 + x e^{i\varphi} + \frac{x^2}{2!} e^{i2\varphi} + \dots + \frac{x^n}{n!} e^{ni\varphi} + \dots. \quad (11.3.4)$$

Заменив знак перед i на обратный, получим ещё одну формулу:

$$e^{x(\cos\varphi - i \sin\varphi)} = 1 + x e^{-i\varphi} + \frac{x^2}{2!} e^{-i2\varphi} + \dots + \frac{x^n}{n!} e^{-ni\varphi} + \dots. \quad (11.3.5)$$

Формулы (11.3.4) и (11.3.5) представляют разложение в ряд обобщённой формулы Эйлера для первой квадратичной формы. Складывая и вычитая их, получим ещё две формулы:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + e^{x(\cos\varphi - i\sin\varphi)}}{2} &= e^{x\cos\varphi} \cos(x\sin\varphi) = \\ &= 1 + x\cos\varphi + \frac{x^2}{2!}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3!}\cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \quad (11.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - e^{x(\cos\varphi - i\sin\varphi)}}{2i} &= e^{x\cos\varphi} \sin(x\sin\varphi) = \\ &= x\sin\varphi + \frac{x^2}{2!}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3!}\sin 3\varphi + \dots \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

В частном случае при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ формула (11.3.6) представляет разложение в ряд e^x и e^{-x} . Формула (11.3.6) при $\varphi = 90^\circ$ представляет разложение косинуса в ряд. При $\varphi = 90^\circ$ формула (11.3.7) представляет разложение синуса в ряд.

Для разложения в ряд обобщённой формулы Эйлера, полученной из второй квадратичной формы, воспользуемся формулой (11.2.4).

$$\rho^m e^{im\theta} = (\cos\alpha - e^{i\varphi} \sin\alpha)^m,$$

где $\rho = \sqrt{\delta_2} = \sqrt{1 - \cos\varphi \sin 2\alpha}$ – модуль обобщённой формулы Эйлера.

Повторив тот же приём, который применялся в первом случае, получим:

$$e^{-x(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = 1 - xe^{-i\varphi} + \frac{x^2}{2!}e^{-2i\varphi} - \dots \pm \frac{x^n}{n!}e^{-ni\varphi} \pm \dots, \quad (11.3.8)$$

$$e^{-x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = 1 - xe^{i\varphi} + \frac{x^2}{2!}e^{2i\varphi} - \dots \pm \frac{x^n}{n!}e^{ni\varphi} \pm \dots. \quad (11.3.9)$$

Формулы (11.3.8) и (11.3.9) представляют разложения в ряды обобщённых формул Эйлера для второй квадратичной формы.

Складывая и вычитая (11.3.8) и (11.3.9), получим также ещё две формулы:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + e^{-x(\cos\varphi - i\sin\varphi)}}{2} &= e^{-x\cos\varphi} \cos(x\sin\varphi) = \\ &= 1 - x\cos\varphi + \frac{x^2}{2!}\cos 2\varphi - \frac{x^3}{3!}\cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - e^{-x(\cos\varphi - i\sin\varphi)}}{2i} &= e^{-x\cos\varphi} \sin(x\sin\varphi) = \\ &= x\sin\varphi - \frac{x^2}{2!}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3!}\sin 3\varphi - \dots \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

Умножая уравнение (11.3.11) на постоянное a , замечаем, что это уравнение затухающих колебаний без начальной фазы с частотой колебаний, равной $\sin\varphi$.

$$y = ae^{-x\cos\varphi} \sin(x\sin\varphi) = a \left(x\sin\varphi - \frac{x^2}{2!}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3!}\sin 3\varphi - \dots \right) \quad (11.3.12)$$

Такого рода вывод уравнения затухающих колебаний даёт возможность понять аналитический и геометрический смысл этих колебаний, а также глубже

понять интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго и высших порядков.

Закончив с разложением в ряды обобщённых формул Эйлера в тригонометрической форме, переходим к разложению в ряды тех же формул в гиперболической форме. Для этого воспользуемся формулами (11.2.5) и (11.2.6). Рассмотрим сначала формулу (11.2.5). Разложим правую часть её по биному Ньютона:

$$\begin{aligned}\rho^m e^{mv} &= (\cos \alpha + e^u \sin \alpha)^m = \\ &= \cos^m \alpha + m e^u \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha + \frac{m(m-1)}{2!} e^{2u} \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} e^{nu} \cos^{m-n} \alpha \sin^n \alpha + \dots. \\ \rho^m e^{mv} &= \cos^m \alpha \left[1 + e^u (m \operatorname{tg} \alpha) + \frac{1-1/m}{2!} e^{2u} (m \operatorname{tg} \alpha)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-1/m)(1-2/m)}{3!} e^{3u} (m \operatorname{tg} \alpha)^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) \dots \left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{n!} e^{nu} m \operatorname{tg} \alpha^n + \dots \right].\end{aligned}\quad (11.3.13)$$

Заменяя α на x/m , получим при $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m \frac{x}{m} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (m \operatorname{tg} \frac{x}{m}) = x, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) \dots \left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

После подстановки этих величин в (11.3.13) правая часть примет следующий вид:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^m e^{mv} = 1 + x e^u + \frac{x^2}{2!} e^{2u} + \frac{x^3}{3!} e^{3u} + \dots + \frac{x^n}{n!} e^{nu} + \dots. \quad (11.3.14)$$

Определим, чему равна левая часть при $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \sec \varphi \sin 2\alpha})^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \sec \varphi \frac{x}{m/2} \frac{\sin \frac{x}{m/2}}{\frac{x}{m/2}} \right)^{m/2} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x \sec \varphi}{m/2} \right)^{m/2} = e^{x \sec \varphi}.\end{aligned}$$

Определим, чему равно v при $m \rightarrow \infty$, предварительно v его через v/m . Для этого воспользуемся формулой (11.1.42), положив в ней $c=1$.

$$\sqrt{\delta_1} \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha,$$

здесь

$$\operatorname{tg} \theta = shv,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho shv/m = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi \sin x/m,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sec \varphi \sin 2x / m} \cdot sh/m = tg \varphi \lim_{m \rightarrow \infty} \sin x / m,$$

Следовательно, $v = xt g \varphi$. Подставляя эти значения в (11.3.14), получим:

$$e^{x(\sec \varphi + tg \varphi)} = 1 + x e^u + \frac{x^2}{2!} e^{2u} \pm \dots + \frac{x^n}{n!} e^{nu} + \dots \quad (11.3.15)$$

Меняя знак перед u , получим вторую формулу:

$$e^{x(\sec \varphi - tg \varphi)} = 1 + x e^{-u} + \frac{x^2}{2!} e^{-2u} + \dots \pm \frac{x^n}{n!} e^{-nu} \pm \dots \quad (11.3.16)$$

Формулы (11.3.15) и (11.3.16) представляют разложение в ряд обобщённых формул Эйлера для первой квадратичной формы гиперболических функций. Складывая и вычитая (11.3.15) и (11.3.16), получим ещё две формулы:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(\sec \varphi + tg \varphi)} + e^{x(\sec \varphi - tg \varphi)}}{2} &= e^{x \sec \varphi} ch(xtg \varphi) = \\ &= 1 + x chu + \frac{x^2}{2!} ch2u + \frac{x^3}{3!} ch3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(\sec \varphi + tg \varphi)} - e^{x(\sec \varphi - tg \varphi)}}{2} &= e^{x \sec \varphi} sh(xtg \varphi) = \\ &= 1 + xshu + \frac{x^2}{2!} sh2u + \frac{x^3}{3!} sh3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.3.18)$$

Этим же методом, используя формулу (11.2.8), получим разложение в ряд обобщённой формулы Эйлера для второй квадратичной формы.

$$e^{-x(\sec \varphi + tg \varphi)} = 1 - x e^u + \frac{x^2}{2!} e^{2u} - \dots \pm \frac{x^n}{n!} e^{nu} \pm \dots \quad (11.3.19)$$

$$e^{-x(\sec \varphi - tg \varphi)} = 1 - x e^{-u} + \frac{x^2}{2!} e^{-2u} - \dots \pm \frac{x^n}{n!} e^{-nu} \pm \dots \quad (11.3.20)$$

Складывая и вычитая (11.3.14) и (11.3.15), получим ещё две формулы:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x(\sec \varphi - tg \varphi)} + e^{-x(\sec \varphi + tg \varphi)}}{2} &= e^{-x \sec \varphi} ch(xtg \varphi) = \\ &= 1 - xchu + \frac{x^2}{2!} ch2u - \frac{x^3}{3!} ch3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x(\sec \varphi - tg \varphi)} - e^{-x(\sec \varphi + tg \varphi)}}{2} &= e^{-x \sec \varphi} sh(xtg \varphi) = \\ &= xshu - \frac{x^2}{2!} sh2u + \frac{x^3}{3!} sh3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.3.22)$$

Последнее уравнение, умноженное на постоянную a , представляет аperiодическое движение, известное из теории колебаний:

$$y = a e^{-x \sec \varphi} sh(xtg \varphi) = a \left(xshu - \frac{x^2}{2!} sh2u + \frac{x^3}{3!} sh3u - \dots \right). \quad (11.3.23)$$

Все ряды, которые рассматривались выше, являются сходящимися при любых значениях переменной, поэтому останавливаться на изучении их сходимости не будем.

11.4. Обобщение гетефункций

Гетефункции, которые применяются при интегрировании дифференциальных уравнений, могут быть также обобщены. Для выполнения этого обобщения воспользуемся формулами:

$$e^{xcos\varphi} \cos(xsin\varphi) = 1 + xcos\varphi + \frac{x^2}{2!} cos2\varphi + \frac{x^3}{3!} cos3\varphi + \dots + \frac{x^n cosn\varphi}{n!} + \dots \quad (11.4.1)$$

$$e^{xcos\varphi} \sin(xsin\varphi) = xsin\varphi + \frac{x^2}{2!} sin2\varphi + \frac{x^3}{3!} sin3\varphi + \dots + \frac{x^n sinn\varphi}{n!} + \dots \quad (11.4.2)$$

$$e^{-xcos\varphi} \cos(xsin\varphi) = 1 - xcos\varphi + \frac{x^2}{2!} cos2\varphi - \frac{x^3}{3!} cos3\varphi + \dots \pm \frac{x^n cosn\varphi}{n!} \pm \dots \quad (11.4.3)$$

$$e^{-xcos\varphi} \sin(xsin\varphi) = xsin\varphi - \frac{x^2}{2!} sin2\varphi + \frac{x^3}{3!} sin3\varphi - \dots \pm \frac{x^n sinn\varphi}{n!} \pm \dots \quad (11.4.4)$$

Левую часть каждой из этих формул можно записать следующим образом:

$$e^{xcos\varphi} \cos(xsin\varphi) = ch(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) + sh(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) \quad (11.4.5)$$

$$e^{xcos\varphi} \sin(xsin\varphi) = ch(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) + sh(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) \quad (11.4.6)$$

$$e^{-xcos\varphi} \cos(xsin\varphi) = ch(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) - sh(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) \quad (11.4.7)$$

$$e^{-xcos\varphi} \sin(xsin\varphi) = ch(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) - sh(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) \quad (11.4.8)$$

Складывая и вычитая соответственно (11.4.5) и (11.4.6), (11.4.7) и (11.4.8), получим:

$$ch(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) = 1 + \frac{x^2}{2!} cos2\varphi + \frac{x^4}{4!} cos4\varphi + \frac{x^6}{6!} cos6\varphi + \dots \quad (11.4.9)$$

$$sh(xcos\varphi) \cos(xsin\varphi) = xcos\varphi + \frac{x^3}{3!} cos3\varphi + \frac{x^5}{5!} cos5\varphi + \dots \quad (11.4.10)$$

$$ch(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) = xsin\varphi + \frac{x^3}{3!} sin3\varphi + \frac{x^5}{5!} sin5\varphi + \dots \quad (11.4.11)$$

$$sh(xcos\varphi) \sin(xsin\varphi) = \frac{x^2}{2!} sin2\varphi + \frac{x^4}{4!} sin4\varphi + \frac{x^6}{6!} sin6\varphi + \dots \quad (11.4.12)$$

Формулы (11.4.9) – (11.4.12) представляют обобщения гетефункций. Полагая $\varphi = 45^\circ$ и заменяя x на $x/\sqrt{2}$, получим обычные гетефункции:

$$chcx = chxcosx = 1 - \frac{2^2 x^4}{4!} + \frac{2^4 x^8}{8!} - \frac{2^6 x^{12}}{12!} + \dots \quad (11.4.13)$$

$$shcx = shxcosx = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2^2 x^5}{5!} - \frac{2^3 x^7}{7!} + \dots \quad (11.4.14)$$

$$chsx = chxsinx = x + \frac{2x^3}{3!} - \frac{2^2 x^5}{5!} + \frac{2^3 x^7}{7!} + \dots \quad (11.4.15)$$

$$shsx = shxsinx = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^6}{6!} + \frac{2^5x^{10}}{10!} + \dots \quad (11.4.16)$$

В таблице биномов гетефункциям соответствует графа, для которой $\varphi = 45^\circ$. Подобно обобщённым гетефункциям (11.4.9) – (11.4.12) можно также образовать обобщённые гетерофункции из одних гиперболических функций, которые можно назвать *гегефункциями*. Выведем эти функции.

$$\begin{aligned} ch(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) + sh(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) = \\ = 1 + xchu + \frac{x^2}{2!}ch2u + \frac{x^3}{3!}ch3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.4.17)$$

$$ch(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) + sh(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) = xshu + \frac{x^2}{2!}sh2u + \frac{x^3}{3!}sh3u + \dots \quad (11.4.18)$$

$$\begin{aligned} ch(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) - sh(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) = \\ = 1 - xchu + \frac{x^2}{2!}ch2u - \frac{x^3}{3!}ch3u + \dots. \end{aligned} \quad (11.4.19)$$

$$ch(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) - sh(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) = xchu - \frac{x^2}{2!}sh2u + \frac{x^3}{3!}sh3u - \dots \quad (11.4.20)$$

Складывая и вычитая, соответственно, (11.4.17) и – (11.4.20) получим:

$$ch(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) = 1 + \frac{x^2}{2!}ch2u + \frac{x^4}{4!}ch4u + \frac{x^6}{6!}ch6u + \dots \quad (11.4.21)$$

$$sh(xsec\varphi)ch(xtg\varphi) = xchu + \frac{x^3}{3!}ch3u + \frac{x^5}{5!}ch5u + \dots \quad (11.4.22)$$

$$ch(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) = xchu + \frac{x^3}{3!}ch3u + \frac{x^5}{5!}ch5u + \dots \quad (11.4.23)$$

$$sh(xsec\varphi)sh(xtg\varphi) = \frac{x^2}{2!}ch2u + \frac{x^4}{4!}ch4u + \frac{x^6}{6!}ch6u + \dots. \quad (11.4.24)$$

Формулы (11.4.21) – (11.4.24) есть *обобщенные гегефункции*, аналогично обобщённым гетефункциям. Во всех формулах (11.4.21) – (11.4.24) можно заменить *sec* φ и *tg* φ на *chu* и *shu*, потому что $e^u = chu + shu = sec\varphi + tg\varphi$, где угол φ – гудерманиан.

11.5. Обобщение интегральных синуса, косинуса, логарифма и экспоненциала

Для вывода обобщённого интегрального синуса возьмём формулу (11.4.11) и разделим обе части на x . Интегрируя, получим:

$$\int \frac{ch(xcos\varphi)\sin(xsin\varphi)dx}{x} = xsin\varphi + \frac{x^3}{3 \cdot 3!}sin3\varphi + \frac{x^5}{5 \cdot 5!}sin5\varphi + \dots. \quad (11.5.1)$$

Формула (11.5.1) представляет *обобщённый интегральный синус*. В частном случае при $\varphi = 90^\circ$ эта формула обращается в формулу обычного интегрального синуса:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots. \quad (11.5.2)$$

Для вывода обобщённого интегрального косинуса запишем

$$\int \frac{ch(x\cos\varphi) \cos(x\sin\varphi) dx}{x} = \ln\gamma x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} \cos 2\varphi + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} \cos 4\varphi + \dots \quad (11.5.3)$$

Формула (11.5.3) представляет обобщённые интегральные косинусы одновременно тригонометрический и гиперболический. При $\varphi = 90^\circ$ получим тригонометрический интегральный косинус:

$$cix = \int \frac{\cos x}{x} dx = \ln\gamma x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots \quad (11.5.4)$$

При $\varphi = 0^\circ$ получим гиперболический интегральный косинус:

$$cihx = \int \frac{chx}{x} dx = \ln\gamma x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots \quad (11.5.5)$$

В формулах (11.5.3) – (11.5.5) величина γ есть постоянная интегрирования.

Обобщённый интегральный гиперболический синус получим, пользуясь формулой (11.4.10):

$$\int \frac{sh(x\cos\varphi) \cos(x\sin\varphi) dx}{x} = x\cos\varphi + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \sin 3\varphi + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \sin 5\varphi + \dots \quad (11.5.6)$$

Формула (11.5.6) представляет обобщённый интегральный гиперболический синус. При $\varphi = 0^\circ$ имеем обычный интегральный синус:

$$sihx = \int \frac{shx}{x} dx = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (11.5.7)$$

Складывая (11.5.3) и (11.5.6), получим обобщённый интегральный экспоненциал:

$$\begin{aligned} \int \frac{ch(x\cos\varphi) \cos(x\sin\varphi) + sh(x\cos\varphi) \cos(x\sin\varphi)}{x} dx &= \int \frac{e^{x\cos\varphi} \cos(x\sin\varphi)}{x} dx, \\ \int \frac{e^{x\cos\varphi} \cos(x\sin\varphi)}{x} dx &= \ln\gamma x + x\cos\varphi + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} \cos 2\varphi + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \quad (11.5.8)$$

Формула (11.5.8) представляет обобщённый интегральный экспоненциал. При $\varphi = 0^\circ$ получаем формулу для обычного интегрального экспоненциала:

$$lix = \int \frac{e^x}{x} dx = \ln\gamma x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots \quad (11.5.9)$$

Интегральный экспоненциал представляет интегральный логарифм от e^x .

В формуле (11.5.8) делая замену $x\cos\varphi$ через u , имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{x\cos\varphi} \cos(x\sin\varphi)}{x} dx &= \int \frac{e^u \cos(utg\varphi)}{x\cos\varphi} d(x\cos\varphi) = \int \frac{e^u \cos(utg\varphi)}{u} du = \\ &= \ln \frac{\gamma u}{\cos\varphi} + u + \frac{u^2}{2 \cdot 2!} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi} + \dots \end{aligned}$$

Далее, заменяя $z = e^u = e^{x\cos\varphi}$, $dz = e^u du = z du$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^u \cos(utg\varphi)}{u} du &= \int \frac{z \cos(tg\varphi \ln z)}{\ln z \cdot z} dz = \int \frac{\cos(tg\varphi \ln z)}{\ln z} dz = \\ &= \ln \left(\frac{\gamma z \ln z}{\cos\varphi} \right) + \frac{\ln^2 z}{2 \cdot 2!} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\ln^3 z}{3 \cdot 3!} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{\ln^4 z}{4 \cdot 4!} \frac{\cos 4\varphi}{\cos^4\varphi} + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{\cos(tg\phi \ln z)}{\ln z} dz = \ln \left(\frac{\gamma z \ln z}{\cos \phi} \right) + \frac{\ln^2 z}{2 \cdot 2!} \frac{\cos 2\phi}{\cos^2 \phi} + \frac{\ln^3 z}{3 \cdot 3!} \frac{\cos 3\phi}{\cos^3 \phi} + \dots \quad (11.5.10)$$

Формула (11.5.10) представляет *обобщённый интегральный логарифм*. При $\phi = 0^\circ$ эта формула обращается в обычный интегральный логарифм:

$$\int \frac{dz}{\ln z} = \ln(\gamma z \ln z) + \frac{\ln^2 z}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 z}{3 \cdot 3!} + \frac{\ln^4 z}{4 \cdot 4!} + \dots \quad (11.5.11)$$

Известно, что интегральный логарифм представляет асимптотическую формулу распределения простых чисел в натуральном ряду. Кроме того, известно, что при конечных значениях переменной интегральный логарифм всегда даёт несколько завышенное число простых чисел в натуральном ряду и лишь в пределе он обращается в точную формулу, т.е. точно выражает число простых чисел в натуральном ряду. Формула (11.5.10), т.е. обобщённый интегральный логарифм, содержит в числителе $\cos(tg\phi \ln z)$, значение которого всегда меньше единицы по абсолютной величине, если угол, т.е. $tg\phi \ln z$, больше нуля. Поэтому, если для подсчёта количества абсолютно простых чисел пользоваться этой формулой, то при надлежащем значении аргумента ($tg\phi \ln z$) можно достигнуть точного количества простых чисел.

11.6. О связи рядов Фурье с обобщёнными формулами Эйлера

Ряды Фурье тесно связаны с обобщёнными формулами Эйлера и Муавра. Преобразуем формулу:

$$\sqrt{\delta} e^{i\theta} = \cos \alpha - e^{-i\phi} \sin \alpha$$

следующим образом:

$$e^{i\theta} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\delta}} - e^{-i\phi} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\delta}} = x - y e^{-i\phi},$$

где $x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\delta}}$ и $y = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\delta}}$ — координаты точки на эллипсе.

Далее, имеем:

$$e^{i\theta} = x - y e^{-i\phi} = \frac{(x - y e^{-i\phi})(x - y e^{i\phi})}{x - y e^{i\phi}} = \frac{1}{x - y e^{i\phi}} = \frac{1}{x(1 - \frac{y}{x} e^{i\phi})} = \frac{1}{x(1 - z e^{i\phi})},$$

$$x e^{i\theta} = \frac{1}{1 - z e^{i\phi}}, \quad (11.6.1)$$

где

$$z = tg \alpha.$$

Выражение (11.6.1) — геометрическая прогрессия.

$$x e^{i\theta} = \frac{1}{1 - z e^{i\phi}} = 1 + z e^{i\phi} + z^2 e^{2i\phi} + z^3 e^{3i\phi} + \dots, \quad (11.6.2)$$

$$x \cos \theta + i x \sin \theta = 1 + z \cos \phi + z^2 \cos 2\phi + \dots + i(z \sin \phi + z^2 \sin 2\phi + \dots).$$

Приравниваем вещественные части и коэффициенты при мнимых частях:

$$x \cos \theta = 1 + z \cos \varphi + z^2 \cos 2\varphi + z^3 \cos 3\varphi + \dots, \quad (11.6.3)$$

$$x \sin \theta = z \sin \varphi + z^2 \sin 2\varphi + z^3 \sin 3\varphi + \dots. \quad (11.6.4)$$

Складывая и вычитая известные формулы

$$e^{i\theta} = x - ye^{-i\varphi} \quad \text{и} \quad e^{-i\theta} = x - ye^{i\varphi},$$

получим

$$x = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}. \quad (11.6.5)$$

Формула (11.6.5) – параметрические уравнения произвольного эллипса.

Подставляя в формулу (11.6.3) и (11.6.4) значения x , получим:

$$\frac{\cos \theta \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi} = 1 + z \cos \varphi + z^2 \cos 2\varphi + z^3 \cos 3\varphi + \dots, \quad (11.6.6)$$

$$\frac{\sin \theta \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi} = z \sin \varphi + z^2 \sin 2\varphi + z^3 \sin 3\varphi + \dots. \quad (11.6.7)$$

Разделим (11.6.6) на z и проинтегрируем, принимая за переменную z :

$$\int \frac{\cos \theta \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi} \frac{dz}{z} = \ln z + z \cos \varphi + \frac{z^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{z^3}{3} \cos 3\varphi + \dots.$$

Преобразуем левую часть полученного выражения, учитывая, что:

$$z = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\sin(\varphi + \theta)} \quad \text{и} \quad dz = \frac{\sin \varphi}{\sin^2(\varphi + \theta)} d\theta.$$

В результате получим:

$$\int \frac{\cos \theta \sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi} \frac{dz}{z} = \int \frac{\cos \theta \sin(\varphi + \theta) \sin(\varphi + \theta) \sin \varphi}{\sin \theta \sin \varphi \sin^2(\varphi + \theta)} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \ln \sin \theta.$$

Поэтому

$$\ln \frac{\sin \theta}{z} = \ln \sin(\varphi + \theta) = z \cos \varphi + \frac{z^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{z^3}{3} \cos 3\varphi + \dots. \quad (11.6.8)$$

В частном случае при $z=1$ получим неполный ряд Фурье. Вычислим, чему будет равна левая часть при $z=1$.

$$z = \frac{\sin \theta}{\sin(\varphi + \theta)} = 1; \quad \sin \theta = \sin(\varphi + \theta) = \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

Подставим это значение θ в левую часть (11.6.8):

$$\ln \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin \varphi} = \ln \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2})}{\sin \varphi} = \ln \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = -\ln 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, приходим к известному ряду:

$$-ln2\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi + \frac{\cos2\varphi}{2} + \frac{\cos3\varphi}{3} + \dots \quad (11.6.9)$$

Выполним аналогичные операции с соотношениями (11.6.7):

$$\int \frac{\sin\theta\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} \frac{dz}{z} = z\sin\varphi + \frac{z^2}{2}\sin2\varphi + \frac{z^3}{3}\sin3\varphi + \dots$$

$$z = \frac{\sin\theta}{\sin(\varphi+\theta)}, dz = \frac{\sin\varphi d\theta}{\sin^2(\varphi+\theta)}.$$

Поэтому,

$$\int \frac{\sin\theta\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} \frac{dz}{z} = \int \frac{\sin\theta\sin^2(\varphi+\theta)\sin\varphi d\theta}{\sin\varphi\sin\theta\sin^2(\varphi+\theta)} = \int d\theta = \theta,$$

откуда имеем:

$$\theta = \arctg \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = z\sin\varphi + \frac{z^2}{2}\sin2\varphi + \frac{z^3}{3}\sin3\varphi + \dots, \quad (11.6.10)$$

Здесь произвольная постоянная равна нулю, потому что при $\theta = 0, z = 0$.

В частном случае при $z = 1, \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ получаем известный ряд Фурье:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{\sin2\varphi}{2} + \frac{\sin3\varphi}{3} + \frac{\sin4\varphi}{4} + \dots \quad (11.6.11)$$

Положив в (11.6.11) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, будем иметь ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (11.6.12)$$

$$\int \frac{\theta}{z} dz = \int \frac{\arctg \frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi}}{z} dz = \sin\varphi \int \frac{\theta d\theta}{\sin\theta\sin(\varphi+\theta)}.$$

Следовательно,

$$\int \arctg \frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi} \frac{dz}{z} = \sin\varphi \int \frac{\theta d\theta}{\sin\theta\sin(\varphi+\theta)} = z\sin\varphi + \frac{z^2}{2}\sin2\varphi + \frac{z^3}{3}\sin3\varphi + \dots$$

При $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, z = 1$, имеем:

$$\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}} \frac{\theta d\theta}{\sin\theta\sin(\varphi+\theta)} = \sin\varphi + \frac{\sin2\varphi}{2^2} + \frac{\sin3\varphi}{3^3} + \dots \quad (11.6.13)$$

Второй частный случай, $\varphi = 90^\circ$.

$$2 \int \frac{\theta d\theta}{\sin2\theta} = \frac{1}{2} \int \frac{\theta d\theta}{\sin\theta} = z - \frac{z^3}{3^2} + \frac{z^5}{5^2} - \frac{z^7}{7^2} + \dots = \int_0^z \frac{\arctg z}{z} dz. \quad (11.6.14)$$

Таким образом, показано, что к рядам Фурье можно прийти из рассмотрения обобщенных формул Эйлера.

Приняв в (11.6.10) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, что будет, когда

$$z = \frac{\sin\theta}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{\sin\theta}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \operatorname{tg}\theta,$$

получим

$$\theta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots \quad (11.6.15)$$

При $\theta = \frac{\pi}{4}$, приходим к ряду Лейбница.

Разделив (11.6.8) на z и проинтегрировав, получим:

$$\int \ln \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} \frac{dz}{z} = z \cos\varphi + \frac{z^2}{2^2} \cos 2\varphi + \frac{z^3}{3^3} \cos 3\varphi + \dots$$

Так как $x = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi}$ и $x^2 - 2x \cos\varphi + y^2 = 1$, то

то

$$x = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2z \cos\varphi + 1}}$$

Следовательно,

$$\int \ln \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin\varphi} \frac{dz}{z} = \int \ln \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2z \cos\varphi + 1}} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \int \frac{\ln(z^2 - 2z \cos\varphi) dz}{z}.$$

Поэтому

$$-\frac{1}{2} \int \frac{\ln(z^2 - 2z \cos\varphi + 1)}{z} dz = z \cos\varphi + \frac{z^2 \cos 2\varphi}{2^2} + \dots \quad (11.6.16)$$

При $\varphi = 0$ имеем:

$$-\int \frac{\ln(z - 1) dz}{z} = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \frac{z^4}{4^2} + \dots \quad (11.6.17)$$

Далее, интегрируя:

$$-\int_0^1 \frac{\ln(z - 1)}{z} dz = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (11.6.18)$$

$$-\int_0^1 \frac{\ln(z^2 - 2z \cos\varphi + 1)}{z} dz = \cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \dots \quad (11.6.19)$$

Ряд (11.6.19) – ряд Фурье.

Разделим на z и проинтегрируем ряд (11.6.10).

$$\int \frac{\theta}{z} dz \int \left(\sin\varphi + \frac{z \sin 2\varphi}{2} + \frac{z^2 \sin 3\varphi}{3} + \dots \right) dz = z \sin\varphi + \frac{z^2}{2^2} \sin 2\varphi + \frac{z^3}{3^3} \sin 3\varphi + \dots,$$

$$z = \frac{\sin\theta}{\sin(\varphi + \theta)}, \quad dz = \frac{\sin\varphi}{\sin^2(\varphi + \theta)} d\theta.$$

11.7. Разложение тригонометрических функций в бесконечные произведения

Рассмотрим разложение синуса в бесконечное произведение. Возьмём конечное произведение биномов из эллиптической зоны табл. 11.1 для нечётного случая:

$$f(\delta) = (a+c)(a+e^{i\varphi_1}c)(a+e^{i\varphi_2}c)(a+e^{i\varphi_3}c)\dots(a+e^{i\varphi_\lambda}c) = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} (a+e^{i\varphi}c).$$

Если углам $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ дать частные значения $\varphi = \frac{2k\pi}{m}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, то можно записать:

$$\frac{a^m + c^m}{a+c} = \prod_0^{2\pi} (a + e^{\frac{2ik\pi}{m}}c), \quad m = 2n+1. \quad (11.7.1)$$

Соотношение (11.7.1) рассматривал Куммер. Это уравнение связано с делением круга на равные части. Как известно, в этом случае все углы будут попарно равны и противоположны по знаку. Поэтому уравнение (11.7.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{a^m + c^m}{a+c} = \left(a + e^{\frac{2i\pi}{m}}c\right) \left(a + e^{-\frac{2i\pi}{m}}c\right) \left(a + e^{\frac{4i\pi}{m}}c\right) \left(a + e^{-\frac{4i\pi}{m}}c\right). \quad (11.7.2)$$

Перемножая в (7.2) биномы попарно, получим:

$$\begin{aligned} \frac{a^m + c^m}{a+c} &= \left(a^2 + 2accos\frac{2\pi}{m} + c^2\right) \left(a^2 + 2accos\frac{4\pi}{m} + c^2\right) \dots \\ &\dots \left(a^2 + 2accos\frac{2n\pi}{m} + c^2\right). \end{aligned} \quad (11.7.3)$$

Делая подстановку $a = e^{i\theta}$, $c = e^{-i\theta}$ получим:

$$\frac{cosm\theta}{cos\theta} = 2^\pi \left(cos2\theta + cos\frac{2\pi}{m}\right) \left(cos2\theta + cos\frac{4\pi}{m}\right) \dots \left(cos2\theta + cos\frac{2n\pi}{m}\right). \quad (11.7.4)$$

Далее преобразуем общий множитель следующим образом:

$$\begin{aligned} cos2\theta + cos\frac{2n\pi}{m} &= 2cos^2\theta - 1 + cos\frac{2n\pi}{m} = 2\left(cos^2\theta - sin^2\frac{n\pi}{m}\right), \\ \frac{cosm\theta}{cos\theta} &= 2^{2\pi} \left(cos^2\theta - sin^2\frac{\pi}{m}\right) \left(cos^2\theta - sin^2\frac{2\pi}{m}\right) \dots \left(cos^2\theta - sin^2\frac{n\pi}{m}\right). \end{aligned} \quad (11.7.5)$$

Заменяя $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, получим:

$$cosm\theta = cos\left(\frac{m\pi}{2} - m\varphi\right) = cos\frac{m\pi}{2}cosm\varphi + sin\frac{m\pi}{2}sinm\varphi.$$

Так как $m = 2n+1$ – нечётное, поэтому

$$cos\frac{m\pi}{2} = 0, \quad sin\frac{m\pi}{2} = 1.$$

Следовательно,

$$cosm\theta = sinm\varphi.$$

Подставляя в (11.7.5), получим:

$$\frac{sinm\varphi}{sin\varphi} = 2^{2\pi} \left(sin^2\varphi - sin^2\frac{\pi}{m}\right) \left(sin^2\varphi - sin^2\frac{2\pi}{m}\right) \dots \left(sin^2\varphi - sin^2\frac{n\pi}{m}\right), \quad (11.7.6)$$

$$\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} = (-1)^{2^{2n}} \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{2\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{n\pi}{m} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}\right).$$

Произведение синусов относится к полуокружности. Распространив произведение на всю окружность, учитывая при этом, что синусы во второй половине окружности отрицательны, получим:

$$(-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{2\pi}{m} \sin^2 \frac{3\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{n\pi}{m} = \sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2\pi}{m} \sin \frac{3\pi}{m} \dots \sin \frac{2n\pi}{m} = \frac{2n+1}{2^{2n}} = \frac{m}{2^{2n}}.$$

Подставляя в (11.7.6), запишем:

$$\frac{\sin m\varphi}{m \sin \varphi} = \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}\right). \quad (11.7.7)$$

Заменим φ через $\frac{x}{m}$ и возьмём предел от обеих частей при $m \rightarrow \infty$:

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}\right).$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \frac{\sin x}{x},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{m}}{\sin \frac{n\pi}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \sin \frac{x}{m}}{m \sin \frac{n\pi}{m}} = \frac{x}{n\pi}.$$

Следовательно:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \dots \quad (11.7.8)$$

Заменяя x на πx , получим ту же формулу в другом виде:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \dots \quad (11.7.9)$$

Положив в формуле (11.7.8) $x = \pi/2$, получим известную формулу Валлиса, представляющую разложение числа π в бесконечное произведение.

Можно также разложить в бесконечное произведение тригонометрический косинус, гиперболические синус и косинус. Но важно отметить, что разложения в бесконечные произведения элементарных и других функций базируются, так же, как и многие другие вопросы, на теории бинарных квадратичных форм, т.е. форм вида (11.1.3) и (11.1.4). Например, гамма и бета-функции выражаются в виде бесконечных произведений при перемножении бинарных квадратичных форм.

Сделаем некоторые выводы из рассмотренных выше результатов. Рассмотрим цилиндр неограниченной длины и произвольного, но конечного радиуса. Сечение этого цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси даёт окружность. Другое сечение плоскостью этого цилиндра, наклонённой к его оси под острым углом, даёт

эллипс. Изменяя угол наклона секущей плоскости при изменении радиуса цилиндра, будем получать бесчисленное количество эллипсов всевозможных размеров. Если же секущая плоскость при изменении угла её наклона станет перпендикулярна к окружности или, что одно и то же, параллельна оси цилиндра, то тогда эллипс вырождается в две параллельные прямые. Следовательно, окружность и эти параллельные прямые являются предельными значениями деформирующегося эллипса. При всех этих сечениях угол наклона секущей плоскости к плоскости, перпендикулярной его оси, т.е. к плоскости окружности, изменяется в пределах от 0° до 90° (при угле 0° - будет окружность, при угле 90° - две параллельные прямые). Если же мы попытаемся увеличить угол наклона секущей плоскости и сделаем его больше 90° , т.е. тупым, то в нашем понимании мы получим мнимый эллипс или переходя в вещественную область, гиперболу. Считая это установленным, можем сказать, что в зависимости от угла наклона секущей плоскости будем получать эллиптическое пространство, если угол наклона менее 90° и гиперболическое, если угол наклона больше 90° , причём, эллиптическое, параболическое и гиперболическое пространства здесь понимаются в элементарном геометрическом смысле. Все эти трёх видов пространства отражены в табл. 11.1 этой главы.

Понятия об этих пространствах несколько расширим, если представить себе не один цилиндр, как это было сказано выше, а два одинаковых и расположенных так, чтобы при сечении их плоскостью получалось два взаимно-сопряжённых эллипса или две взаимно-сопряжённых гиперболы. Можно, конечно, представить себе три и более таких цилиндров. В таком случае мы получим систему взаимно-сопряжённых эллипсов, парабол, гипербол и прямых. Такое пространство изображает таблица 11.1 – таблица обобщённых биномов. В этой таблице определены все эти три зоны – эллиптическая, параболическая и гиперболическая.

С этим пространством, или более расширенным, связаны многие вопросы математики. Так как обобщённые формулы Эйлера связаны с движением точек по этим эллипсам, параболам, гиперболам и прямым, то они в большей степени могут пригодиться при изучении различных вопросов, связанных с этим пространством, чем обычные формулы Эйлера. Здесь естественно отметить также и то, что указанное выше пространство имеет физический смысл, так как оно создаётся тремя видами напряжённого состояния.

11.8. Элементарные полиномы

Разложение обобщённых формул Эйлера в непрерывную дробь произведём на частных примерах и затем сделаем обобщения. Будем придерживаться следующего порядка изложения: сначала рассмотрим гиперболическую зону табл. 11.1 отдельно для гиперболического синуса и косинуса, потом эллиптическую зону – для тригонометрического синуса и косинуса и, наконец, параболическую зону для бинома Ньютона.

Гиперболический синус

Для этого случая возьмём уравнение гиперболы в следующем виде:

$$y^2 - 2bxy - x^2 = 1. \quad (11.8.1)$$

Заменим здесь x и y выражениями

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\delta}}, y = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\delta}}.$$

Подставив их в (11.8.1), получим также известную бинарную квадратичную форму:

$$\delta = \sin^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha. \quad (11.8.2)$$

Приравняв в (11.8.2) δ нулю, что означает переход на асимптоту, образуем квадратное уравнение. Решив уравнение, определим угловые коэффициенты асимптот к данной гиперболе:

$$tg^2 \alpha - 2btg \alpha - 1 = 0, tg \alpha = b \pm \sqrt{b^2 + 1}.$$

В этом выражении положим $b = shu = tg \varphi$, что всегда возможно. После подстановки получим:

$$tg \alpha = e^u = shu + \sqrt{sh^2 u + 1} = tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1}. \quad (11.8.3)$$

Таким образом, угловой коэффициент асимптот к данной гиперболе выражается в виде формул Эйлера для гиперболического аргумента. В этом и заключается геометрический смысл этих формул.

Выражение (11.8.3) легко складывается в непрерывную дробь. В самом деле:

$$e^u = tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1} = 2tg \varphi + \frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_1} = \sqrt{tg^2 \varphi + 1} - tg \varphi.$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{tg^2 \varphi + 1} - tg \varphi} = \frac{tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1}}{tg^2 \varphi + 1 - tg^2 \varphi} = tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1}.$$

Следовательно, запишем:

$$tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1} = 2tg \varphi + \frac{1}{tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1}}.$$

Продолжая таким образом, получим:

$$e^u = tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1} = 2tg \varphi + \frac{1}{2tg \varphi + \frac{1}{2tg \varphi + \frac{1}{2tg \varphi + \dots}}}.$$

Полагая $2tg \varphi = z$, запишем:

$$e^u = shu + \sqrt{sh^2 u + 1} = tg \varphi + \sqrt{tg^2 \varphi + 1} = \frac{z + \sqrt{z^2 + 4}}{2} = z + \frac{1}{z + \frac{1}{z + \dots}} \quad (11.8.4)$$

Получена периодическая непрерывная дробь, где $z = 2shu = 2tg \varphi$.

Это разложение будем называть *разложением гиперболического синуса*, потому что звенья этой непрерывной дроби представляют удвоенный гиперболический синус.

Определим теперь подходящие данной цепной дроби. Обозначая их через x_i запишем

$$x_1 = \frac{z}{1}, \quad x_2 = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z}, \quad x_3 = z + \frac{1}{z + \frac{1}{z}} = \frac{z^3 + 2z}{z^2 + 1},$$

$$x_4 = z + \frac{1}{z + \frac{1}{z + \frac{1}{z + \frac{1}{z}}}} = \frac{z^4 + 3z^2 + 1}{z^3 + 2z}, x_5 = \frac{z^5 + 4z^3 + 3z}{z^4 + 3z^2 + 1}.$$

Продолжая, получим следующие подходящие дроби:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{z}{1}, & x_7 &= \frac{z^7 + 6z^5 + 10z^3 + 4z}{z^6 + 5z^4 + 6z^2 + 1}, \\ x_2 &= \frac{z^2 + 1}{z}, & x_8 &= \frac{z^8 + 7z^6 + 15z^4 + 10z^2 + 1}{z^7 + 6z^5 + 10z^3 + 4z}, \\ x_3 &= \frac{z^3 + 2z}{z^2 + 1}, & x_9 &= \frac{z^9 + 8z^7 + 21z^5 + 20z^3 + 5z}{z^8 + 7z^6 + 15z^4 + 10z^2 + 1}, \\ x_4 &= \frac{z^4 + 3z^2 + 1}{z^3 + 2z}, & x_{10} &= \frac{z^{10} + 9z^8 + 28z^6 + 35z^4 + 15z^2 + 1}{z^9 + 8z^7 + 21z^5 + 20z^3 + 5z}, \\ x_5 &= \frac{z^5 + 4z^3 + 3z}{z^4 + 3z^2 + 1}, & x_{11} &= \frac{z^{11} + 10z^9 + 36z^7 + 56z^5 + 35z^3 + 6z}{z^{10} + 9z^8 + 28z^6 + 35z^4 + 15z^2 + 1}, \\ x_6 &= \frac{z^6 + 5z^4 + 6z^2 + 1}{z^5 + 4z^3 + 3z}. \end{aligned}$$

Числители и знаменатели этих подходящих дробей, представляют полиномы относительно z . Эти полиномы будем называть *элементарными полиномами*. Для изучения свойств этих полиномов удобнее всего выписать их в отдельную таблицу

Таблица 11.2

Элементарные полиномы $H(z)$

$H_1(z) = 1$
$H_2(z) = z$
$H_3(z) = z^2 + 1$
$H_4(z) = z^3 + 2z$
$H_5(z) = z^4 + 3z^2 + 1$
$H_6(z) = z^5 + 4z^3 + 3z$
$H_7(z) = z^6 + 5z^4 + 6z^2 + 1$
$H_8(z) = z^7 + 6z^5 + 10z^3 + 4z$
$H_9(z) = z^8 + 7z^6 + 15z^4 + 10z^2 + 1$
$H_{10}(z) = z^9 + 8z^7 + 21z^5 + 20z^3 + 5z$
$H_{11}(z) = z^{10} + 9z^8 + 28z^6 + 35z^4 + 15z^2 + 1$
$H_{12}(z) = z^{11} + 10z^9 + 36z^7 + 56z^5 + 35z^3 + 6z$
$H_{13}(z) = z^{12} + 11z^{10} + 45z^8 + 84z^6 + 70z^4 + 21z^2 + 1$
$H_{14}(z) = z^{13} + 12z^{11} + 55z^9 + 120z^7 + 126z^5 + 56z^3 + 7z$
$H_{15}(z) = z^{14} + 13z^{12} + 66z^{10} + 165z^8 + 210z^6 + 126z^4 + 28z^2 + 1$
$H_{16}(z) = z^{15} + 14z^{13} + 78z^{11} + 220z^9 + 330z^7 + 252z^5 + 84z^3 + 8z$
.....

Любой полином этой таблицы может быть вычислен по следующей рекуррентной формуле:

$$H_{n+1}(z) = zH_n(z) + H_{n-1}(z). \quad (11.8.5)$$

Сумма степеней полинома, стоящего на чётном месте равна точному квадрату, основание которого равно половине его порядкового номера. Все коэффициенты полинома представляют целые числа, которые являются коэффициентами при разложении бинома Ньютона – биномиальными коэффициентами. Так как полиномы табл. 11.2 при $z=1$ представляют числа ряда Фибоначчи, то эти полиномы будем называть *полиномами Фибоначчи*. При $z = 1$ все полиномы дают последовательность чисел Фибоначчи, а при других значениях z образуются целочисленные ряды, аналогично ряду Фибоначчи. Все эти ряды помещены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Частные значения полиномов $H(z)$.

z	1	2	3	4	5	6
$H_1(z)$	1	1	1	1	1	1
$H_2(z)$	1	2	3	4	5	6
$H_3(z)$	2	5	10	17	26	37
$H_4(z)$	3	12	33	72	135	228
$H_5(z)$	5	29	109	305	701	1405
$H_6(z)$	8	70	360	1292	3640	8658
$H_7(z)$	13	169	1189	5473	18901	53353
$H_8(z)$	21	408	3927	23184	98145	328776
$H_9(z)$	34	985	12970	98209	509626	2026009
$H_{10}(z)$	55	2378	42837	416020	2646275	12484830
$H_{11}(z)$	89	5741	141481			
$H_{12}(z)$	144	13360	467280			

Гиперболический косинус

В этом частном случае будем исходить из следующего уравнения гиперболы.

$$x^2 - 2bxy + y^2 = 1, \quad (11.8.6)$$

$$b = chu = \sec\varphi.$$

Заменяя в (11.8.6) $x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta}}$, $y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta}}$, получим

$$\delta = \sin^2\alpha - 2b\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha.$$

Положив $\delta = 0$, и решая полученное квадратное уравнение, определим угловой коэффициент асимптоты к данной гиперболе:

$$\delta = 0; \quad tg^2\alpha - 2btg\alpha + 1 = 0; \quad tg\alpha = b \pm \sqrt{b^2 - 1},$$

$$tg\alpha = b + \sqrt{b^2 - 1} = chu + \sqrt{sh^2u - 1} = \sec\varphi + \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = e^u. \quad (11.8.7)$$

Разлагая (11.8.7) в непрерывную дробь, получим:

$$e^u = \sec\varphi + \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = 2\sec\varphi - \frac{1}{x_1},$$

$$\frac{1}{x_1} = \sec\varphi - \sqrt{\sec^2\varphi - 1}, \quad x_1 = \frac{1}{\sec\varphi - \sqrt{\sec^2\varphi - 1}} = \sec\varphi + \sqrt{\sec^2\varphi - 1}.$$

Следовательно,

$$e^u = \sec\varphi + \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = 2\sec\varphi - \frac{1}{2\sec\varphi - \frac{1}{2\sec\varphi - \frac{1}{2\sec\varphi - \dots}}}.$$

Положив $2\sec\varphi = t$, получим:

$$e^u = \sec\varphi + \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} = t - \frac{1}{t - \frac{1}{t - \frac{1}{t - \dots}}} \quad (11.8.8)$$

Определим теперь подходящие дроби данной непрерывной дроби. Обозначая подходящие через x_i , имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t}{1}, & x_2 &= t - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - 1}{t}, & x_3 &= t - \frac{1}{t - \frac{1}{t}} = \frac{t^3 - 2t}{t^2 - 1}, \\ x_4 &= t - \frac{1}{t - \frac{1}{t - \frac{1}{t}}} = \frac{t^4 - 3t^2 + 1}{t^3 - 2t}. \end{aligned} \quad (11.8.9)$$

Выпишем эти подходящие дроби:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t}{1}, & x_6 &= \frac{t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1}{t^5 - 4t^3 + 3t}, \\ x_2 &= \frac{t^2 - 1}{t}, & x_7 &= \frac{t^7 - 6t^5 + 10t^3 - 4t}{t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1}, \\ x_3 &= \frac{t^3 + 2t}{t^2 - 1}, & x_8 &= \frac{t^8 - 7t^6 + 15t^4 - 10t^2 + 1}{t^7 - 6t^5 + 10t^3 - 4t}, \\ x_4 &= \frac{t^4 - 3t^2 + 1}{t^3 - 2t}, & x_9 &= \frac{t^9 - 8t^7 + 21t^5 - 20t^3 + 5t}{t^8 - 7t^6 + 15t^4 - 10t^2 + 1}, \\ x_5 &= \frac{t^5 - 4t^3 + 3t}{t^4 - 3t^2 + 1}, & x_{10} &= \frac{t^{10} - 9t^8 + 28t^6 - 35t^4 + 15t^2 - 1}{t^9 - 8t^7 + 21t^5 - 20t^3 + 5t}. \end{aligned} \quad (11.8.10)$$

Числители и знаменатели этих подходящих дробей также представляют элементарные полиномы относительно t . Чтобы изучить их свойства запишем их в табл. 11.4. Как видно, эти полиномы по виду отличаются от полиномов табл. 11.2 только знаком перед членами, стоящими на чётных местах. Что касается их свойств, то они аналогичны свойствам полиномов табл. 11.2, а именно, любой полином табл. 11.4 можно определить по следующей рекуррентной формуле:

$$H_{n+1}(t) = H_n(t) - H_{n-1}(t). \quad (11.8.11)$$

Сумма степеней полинома, стоящего на чётном месте равна точному квадрату, основание которого равно половине порядкового номера полинома. Коэффициенты

этих полиномов также являются биномиальными коэффициентами. При $t = 2$ все эти полиномы обращаются в натуральный ряд чисел, поэтому эти полиномы можно назвать *обобщённым натуральным рядом чисел*. При других значениях t эти полиномы обращаются в целочисленные рекуррентные ряды, которые помещены в табл. 11.5.

Таблица 11.4

Элементарные полиномы $H(t)$

$H_1(t) = 1$
$H_2(t) = t$
$H_3(t) = t^2 - 1$
$H_4(t) = t^3 - 2t$
$H_5(t) = t^4 - 3t^2 + 1$
$H_6(t) = t^5 - 4t^3 + 3t$
$H_7(t) = t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1$
$H_8(t) = t^7 - 6t^5 + 10t^3 - 4t$
$H_9(t) = t^8 - 7t^6 + 15t^4 - 10t^2 + 1$
$H_{10}(t) = t^9 - 8t^7 + 21t^5 - 20t^3 + 5t$
$H_{11}(t) = t^{10} - 9t^8 + 28t^6 - 35t^4 + 15t^2 - 1$
$H_{12}(t) = t^{11} - 10t^9 + 36t^7 - 56t^5 + 35t^3 - 6t$
$H_{13}(t) = t^{12} - 11t^{10} + 45t^8 - 84t^6 + 70t^4 - 21t^2 + 1$
$H_{14}(t) = t^{13} - 12t^{11} + 55t^9 - 120t^7 + 126t^5 - 56t^3 + 7t$
$H_{15}(t) = t^{14} - 13t^{12} + 66t^{10} - 165t^8 + 210t^6 - 126t^4 + 28t^2 - 1$
$H_{16}(t) = t^{15} - 14t^{13} + 78t^{11} - 220t^9 + 330t^7 - 252t^5 + 84t^3 - 8t$
$H_{17}(t) = t^{16} - 15t^{14} + 91t^{12} - 286t^{10} + 495t^8 - 462t^6 + 210t^4 + 36t^2 + 1$
.....

Таким образом, $H(t)$ представляют обобщённый натуральный ряд чисел, а при $t = 2 \text{ chu} = 2 \text{ sec} \varphi = 2$ они обращаются в обычный натуральный ряд чисел. В этом случае $\varphi = 0$, что соответствует параболической зоне табл. 11.1. Следовательно, обычный натуральный ряд чисел можно назвать *параболическим*, в отличие от обобщённого, который, как увидим ниже, может быть *гиперболическим*, и *эллиптическим*.

Как отмечалось, при $t = 2$ полиномы табл. 11.4 обращаются в натуральный ряд чисел, а непрерывная дробь (11.8.8) принимает вид:

$$e^0 = 1 = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots}}}} \quad (11.8.12)$$

В табл. 11.5 приведены значения полиномов $H(t)$ при различных величинах t .

Таблица 11.5

Частные значения полиномов $H(t)$

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$H_1(t)$	+1	1	1	1	1	1	1	1
$H_2(t)$	+1	2	3	4	5	6	7	8
$H_3(t)$	0	3	8	15	24	35	48	63
$H_4(t)$	-1	4	21	56	115	204	329	496
$H_5(t)$	-1	5	55	209	551	1189	2255	3905
$H_6(t)$	0	6	144	780	2640	6930	15456	30744
$H_7(t)$	+1	7	377	2911	12649	40391	105937	242047
$H_8(t)$	+1	8	987	10864	60605	235416	726103	
$H_9(t)$	0	9	2584	40545	290376			
$H_{10}(t)$	-1	10	6765	151316				
$H_{11}(t)$	-1	11	17711	564719				
$H_{12}(t)$	0	12	43368					

Возвратимся к цепной дроби (11.8.4).

При $z = 1$ непрерывная дробь (11.8.4) обращается в следующую:

$$e^{u_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (11.8.13)$$

Числители и знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби (11.8.12) образуют натуральный ряд чисел. Числители и знаменатели подходящих дробей (11.8.13) образуют ряд Фибоначчи. Дробь (11.8.12) образует гиперболический косинус, а дробь (11.8.13) – гиперболический синус. Существует как бы два натуральных ряда чисел: косинусоидальный, это обычный натуральный ряд чисел, и синусоидальный – ряд Фибоначчи. Эти ряды, как и рассмотренные выше полиномы, ортогональны друг к другу.

В табл. 11.5 помещены частные значения элементарных полиномов $H(t)$. Каждое число любого столбца этой таблицы можно определить по следующей формуле:

$$N_{n+1} = tN_n - N_{n-1}(t). \quad (11.8.14)$$

Следует отметить, что графа 3 таблицы 5 представляет половинный ряд Фибоначчи.

Уже упоминалось выше, что коэффициенты полиномов таблиц 11.2 и 11.4 представляют биномиальные коэффициенты. Эти коэффициенты помещены в табл. 11.6. Эта таблица представляет известный треугольник Паскаля. По диагоналям, расположены коэффициенты бинома Ньютона для соответствующей степени z .

Таблица 11.6

Коэффициенты элементарных полиномов $H(z)$ и $H(t)$

z^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
z^1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z^2	1	3	6	10	15	21	28	36	45
z^3	1	4	10	20	30	56	84	120	165
z^4	1	5	15	35	70	126	210	330	495
z^5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
z^6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
z^7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
z^8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870
z^9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310
z^{10}	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758
z^{11}	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	
z^{12}	1	13	91	455	1820	6188	18584		
z^{13}	1	14	105	560	2380	8568			
z^{14}	1	15	120	680	3060	11628			
z^{15}	1	16		136	816	3876			

Переходим к третьему частному случаю – тригонометрическому косинусу.

Тригонометрический косинус

Для разложения тригонометрического косинуса в непрерывную дробь воспользуемся уравнением эллипса в следующем виде:

$$x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2 = 1. \quad (11.8.15)$$

Положим здесь $x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta}}$, $y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta}}$. Подставляя в (11.8.15) получим:

$$\delta = \cos^2\alpha - 2\cos\varphi\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha, \quad (11.8.16)$$

$$\delta = 0; \quad \operatorname{ctg}^2\alpha - 2\cos\varphi\operatorname{ctg}\alpha + 1 = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi. \quad (11.8.17)$$

Формула (11.8.17) представляет угловой коэффициент асимптот к данному эллипсу. Удерживая верхний знак в формуле (11.8.17), разложим $e^{i\varphi}$ в непрерывную дробь:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = 2\cos\varphi - \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1}} = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1}.$$

Следовательно,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = 2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi - \dots}} \quad (11.8.18)$$

Заменяя $2\cos\varphi$ через z , получим:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} = z - \frac{1}{z - \frac{1}{z - \dots}} \quad (11.8.19)$$

Эта непрерывная дробь аналогична дроби (11.8.8). Подходящие её будут:

$$x_1 = \frac{z}{1}, \quad x_2 = \frac{z^2 - 1}{z}, \quad x_3 = \frac{z^3 - 2z}{z^2 - 1}, \quad \dots$$

Числители и знаменатели этих подходящих образуют полиномы, $T_n(z)$, которые приведены в табл. 11.7. Мнемоника $T_n(z)$ — означает тригонометрические полиномы, в отличие от гиперболических полиномов, обозначаемых через $H_n(z)$.

Таблица 11.7

Тригонометрические полиномы $T_n(z)$

$$\begin{aligned} T_1(z) &= 1 \\ T_2(z) &= z \\ T_3(z) &= z^2 - 1 \\ T_4(z) &= z^3 - 2z \\ T_5(z) &= z^4 - 3z^2 + 1 \\ T_6(z) &= z^5 - 4z^3 + 3z \\ T_7(z) &= z^6 - 5z^4 + 6z^2 - 1 \\ T_8(z) &= z^7 - 6z^5 + 10z^3 - 4z \\ T_9(z) &= z^8 - 7z^6 + 15z^4 - 10z^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

При $z = 2\cos\varphi = 2$ полиномы $T(z)$ обращаются в натуральный ряд чисел. В этом случае $\varphi = 0$, а это означает, что натуральный ряд чисел, как уже об этом говорилось, совпадает с параболической зоной табл. 11.1. Отсюда следует, что полиномы, помещённые в табл. 11.7, также представляют обобщённый натуральный ряд чисел для гиперболической зоны этой таблицы. На основании этих соображений заключим, что обобщённый натуральный ряд чисел можно рассматривать во всех трёх зонах табл. 11.7 и только в параболической зоне он обращается в обычный натуральный ряд чисел.

Выше были рассмотрены три частных случая разложения в непрерывную дробь формул Эйлера.

11.9. Обобщение формулы Бине

Как выяснилось, ряд Фибоначчи связан со следующими двумя взаимно-сопряжёнными гиперболами:

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1. \quad (11.9.1)$$

Члены ряда Фибоначчи представляют координаты точек гипербола (11.9.1), поочерёдно, то первой, то второй. Ф.Клейн в своей книге «Элементарная математика с точки зрения высшей»[10] упоминает о китайском бильярде с натянутыми ниткам.

Для вычисления любого члена ряда Фибоначчи существует, кроме рекуррентной формулы $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, так называемая, *формула Бине*, которая имеет следующий вид:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{z_1^n - z_2^n}{\sqrt{5}}, \quad (11.9.2)$$

где z_1 и z_2 - представляют угловые коэффициенты асимптот к гиперболе (11.9.1). Действительно, заменив в верхней гиперболе (11.9.1) $x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta}}$ и $y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta}}$, получим:

$$\delta = \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha.$$

Положив $\delta = 0$, имеем:

$$ctg^2\alpha - ctg\alpha - 1 = 0 \quad \text{или} \quad ctg\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (11.9.3)$$

Формулы (11.9.3) представляют частный случай угловых коэффициентов асимптот к гиперболе. Для обобщения формулы Бине надо вместо z_1 и z_2 подставить общие значения угловых коэффициентов.

$$H_{n-1}(z) = \frac{\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n}{\sqrt{z^2+4}}, \quad (11.9.4)$$

где $z = 2shu = 2tg\varphi$.

Это и есть *обобщённая формула Бине*, по которой можно вычислить любой полином табл. 11.2. В частном случае при $z = 1$ она обращается в классическую формулу Бине.

Обобщённую формулу Бине можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{n-1}(z) &= \frac{\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n}{\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2} - \frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}} = \\ &= \frac{\left(\frac{2shu+\sqrt{4sh^2u+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{2shu-\sqrt{4sh^2u+4}}{2}\right)^n}{\frac{2shu+\sqrt{4sh^2u+4}}{2} - \frac{2shu-\sqrt{4sh^2u+4}}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(shu + chu)^n - (shu - chu)^n}{2chu} = \frac{e^{nu} \pm e^{-nu}}{e^u + e^{-u}}.$$

Здесь придётся различать два случая в зависимости от чётности или нечётности числа n , а именно:

n – чётное. Тогда обобщённая формула Бине будет иметь следующий вид:

$$H_{n-1}(z) = \frac{\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n}{\sqrt{z^2+4}} = \frac{(chu + shu)^n - (chu - shu)^n}{2chu} = \frac{shnu}{chu}. \quad (11.9.5)$$

n – нечётное. Тогда запишем:

$$H_{n-1}(z) = \frac{\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^n}{\sqrt{z^2+4}} = \frac{(chu + shu)^n + (chu - shu)^n}{\sqrt{z^2+4}} = \frac{chnu}{chu}. \quad (11.9.6)$$

По формулам (11.9.5) и (11.9.6) можно вычислить любой член обобщённого ряда Фибоначчи, т.е. любой полином табл. 2. Отсюда следует, что эти полиномы представляют видоизменённые формулы кратных аргументов для гиперболических функций, которые были изучены выше и которыми пользовались при разложении обобщённых формул Эйлера в ряды. Формулы, (11.9.5) и (11.9.6) можно использовать при вычислении полиномов табл. 11.2, т.е. для обобщённого ряда Фибоначчи.

Аналогично, можно доказать, что для обобщённого натурального ряда существует только одна обобщённая формула Бине в гиперболической зоне табл. 11.1 для чётного и нечётного значения n . Формула имеет вид:

$$H_n(t) = \frac{\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n}{\sqrt{t^2-4}}, \quad (11.9.7)$$

где $t = 2chu = 2sec\varphi$.

Формулу можно записать и в следующем виде:

$$H_n(t) = \frac{\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n}{\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2} - \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}} = \frac{(chu + shu)^n - (chu - shu)^n}{2shu} = \frac{shnu}{shu}. \quad (11.9.8)$$

По этой формуле можно вычислить любой полином табл. 11.4, т.е. любой член обобщённого натурального ряда чисел для гиперболической зоны табл. 11.1. Отсюда также следует, что полиномы табл. 11.4 представляют видоизменение формулы кратных аргументов для гиперболического синуса. Обычный ряд Фибоначчи представляет частный случай формул кратных аргументов для гиперболического синуса и косинуса. Здесь также устанавливается, что полиномы таблиц 11.2 и 11.4 ортогональны между собой.

Формулы (11.9.4) – (11.9.7) представляют геометрические прогрессии, поэтому полиномы табл. 11.2, 11.4 и 11.7 тоже представляют некоторым образом видоизменённую геометрическую прогрессию. Формула (11.9.7) пригодна только для вычисления любого члена обобщённого натурального ряда чисел в гиперболической

зоне табл. 11.1. Чтобы сделать её пригодной для эллиптической зоны, надо вместо t подставить $z = 2\cos\varphi$, тогда формула (11.9.7) примет следующий вид:

$$T_n(z) = \frac{\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^n}{\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2} - \frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2i\sin\varphi} = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.$$

Следовательно,

$$T_n(z) = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{2i\sin\varphi} = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}. \quad (11.9.9)$$

По формуле (11.9.9) можно вычислить любой полином табл. 11.7, т.е. любой член обобщённого натурального ряда чисел в эллиптической зоне табл. 11.1. Отсюда следует, что полином табл. 11.7 представляет видоизменение формулы кратных углов для тригонометрического синуса.

Отношение двух рядом стоящих полиномов для всех трёх частных случаев, рассмотренных выше, равно подходящей дроби данной непрерывной дроби, а предел этого отношения, когда n стремится к бесконечности, равен той функции, которая разложена в непрерывную дробь. Чтобы не доказывать этого предложения для каждого частного случая в отдельности, ниже будет это доказано в более общем случае.

Рассмотрим связь между геометрической прогрессией и непрерывными дробями.

11.10. Цепные дроби и геометрическая прогрессия

Возьмём кривую второго порядка в следующем виде:

$$x^2 - (a+b)xy + aby^2 = 1. \quad (11.10.1)$$

В зависимости от знака дискриминанта формула (11.10.1) может выражать эллипс, гиперболу и вырождаться в две параллельные прямые.

Подставляя $x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\delta}}$, $y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\delta}}$, получим:

$$\delta = \cos^2\alpha - (a+b)\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin^2\alpha. \quad (11.10.2)$$

При $\delta = 0$, имеем:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - (a+b)\operatorname{ctg}\alpha + ab = 0.$$

Решая это уравнение, получим угловые коэффициенты асимптот к данной кривой:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}. \quad (11.10.3)$$

Разложим корень уравнения в непрерывную дробь:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = a + b - \frac{ab}{a + b - \frac{ab}{a+b-\dots}} \quad (11.10.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{a^6 - b^6}{a - b} &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5, \\ \frac{a^7 - b^7}{a - b} &= a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{a^n - b^n}{a - b} &= a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}.\end{aligned}$$

Положив здесь $a = e^u$ и $b = -e^u$, получим *обобщённый ряд Фибоначчи*, а положив $a = e^u$, и $b = e^{-u}$, получим *обобщённый ряд натуральных чисел для гиперболической зоны табл. 11.1*. При $a = e^{i\varphi}$, и $b = e^{-i\varphi}$, получим *обобщённый ряд натуральных чисел для эллиптической зоны*. Отсюда следует, что более общая формула Бине может быть записана следующим образом:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b}. \quad (11.10.5)$$

Эта формула содержит в себе, как частные случаи, все рассмотренные выше формулы Бине. Если в полиномах табл. 11.8 положить $\frac{b}{a} = q$ или $a = 1$ и $b = q$, то получим геометрическую прогрессию:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}. \quad (11.10.6)$$

Отсюда непосредственно следует, что все рассмотренные выше полиномы, в том числе и все формулы Бине, а также все формулы кратных аргументов для гиперболических и тригонометрических функций, которые были рассмотрены выше, или представляют геометрическую прогрессию, или в основе их лежит геометрическая прогрессия.

Необходимо отметить, что простейшим примером связи геометрической прогрессии с непрерывными дробями является разложение в непрерывную дробь выражений (11.10.3), из которого видно, что числители и знаменатели подходящих дробей представляют геометрические прогрессии.

Предел отношения двух рядом стоящих полиномов табл. 11.8 при $n \rightarrow \infty$, равен той функции, которая разлагается в непрерывную дробь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = \frac{a + b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - ab}. \quad (11.10.7)$$

Положив в формуле (11.10.7) $a = e^u$ и $b = e^{-u}$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sh(n+1)u}{shnu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1}(t)}{H_n(t)} = chu + \sqrt{ch^2u - 1} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}. \quad (11.10.8)$$

Получено выражение, которое было разложено в непрерывную дробь, причём, числители и знаменатели этой непрерывной дроби представляют обобщённый натуральный ряд чисел. Далее, положив $a = e^{i\varphi}$ и $b = e^{-i\varphi}$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}(z)}{T_n(z)} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1}. \quad (11.10.9)$$

Выше отмечалось, что числители и знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби (11.8.12) образуют натуральный ряд чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

Можем записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 = e^0. \quad (11.10.10)$$

Отношение двух рядом стоящих чисел натурального ряда при $n \rightarrow \infty$ равно единице. Формула (11.10.8) представляет предел отношения двух рядом стоящих обобщённых натуральных чисел в гиперболической зоне табл. 11.1 при $n \rightarrow \infty$. Этот предел равен $chu + shu = e^u$. Формула (11.10.9) представляет предел отношения тоже двух рядом стоящих чисел обобщённого натурального ряда для эллиптической зоны табл. 11.1. При $n \rightarrow \infty$ этот предел равен $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Учитывая формулу (11.10.10), можем сделать следующий вывод:

Формулы Эйлера представляют предел отношения двух рядом стоящих чисел обобщённого натурального ряда для эллиптической и гиперболической зон табл. 11.1, то есть представляют обобщённую эллиптическую и гиперболическую единицы.

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad (11.10.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 = e^0, \quad (11.10.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sh(n+1)u}{shnu} = chu + shu = e^u. \quad (11.10.13)$$

Формулы (11.10.11) и (11.10.13) представляют *обобщённые единицы для эллиптической и гиперболической зон табл. 11.1*. Формула (11.10.12) представляет обычную единицу, в которую обращаются в параболической зоне обобщённые единицы (11.10.11) и (11.10.13).

С геометрической стороны формулы Эйлера представляют, как уже об этом говорилось выше, угловые коэффициенты асимптот к кривым второго порядка. Поэтому физический смысл эллиптической, параболической и гиперболической единиц состоит в том, что они являются угловыми коэффициентами к кривым второго порядка – к эллипсу, параболе и гиперболе. Это устанавливают три рода напряжённых состояний.

Заключение об эллиптической, параболической и гиперболической единицах для математики не является сколько-нибудь новым. Возьмём хотя бы теорию целых алгебраических чисел, где подобного рода единицы давно применяются при изучении целых алгебраических чисел. Существенно новым здесь является метод, при помощи которого удалось подойти к этим обобщённым единицам.

11.11. Геометрическая прогрессия и ряд Тейлора

Исследование, проведённые выше, показывают, что на выражение.

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \quad (11.11.1)$$

можно смотреть как на прогрессию, выраженную в однородных величинах или в однородных переменных. Тогда левая часть (11.11.1) представляет формулу Бине в более общем виде, чем в случаях, рассмотренных выше. Имеется в виду, что “ b ” может быть положительным и отрицательным, а правая часть – элементарные полиномы.

Положив в (11.11.1) $a = 1$ или $\frac{b}{a} = q$, получим обычную геометрическую прогрессию. Тогда на формулы

$$\begin{aligned} \frac{shnu}{shu} &= \frac{e^{nu} - e^{-nu}}{e^u - e^{-u}}, & \frac{sinn\varphi}{sin\varphi} &= \frac{e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}, \\ \frac{chnu}{chu} &= \frac{e^{nu} + e^{-nu}}{e^u + e^{-u}}, & \frac{cosn\varphi}{cos\varphi} &= \frac{e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}, \end{aligned}$$

можно смотреть, как на геометрические прогрессии в однородных величинах. Они же представляют формулы Бине. Учитывая то, что большинство элементарных и высших трансцендентных функций $f(x)$ могут быть представлены в виде степенного ряда, на выражение

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \quad (11.11.2)$$

можно смотреть как на обобщённую в каком-то смысле геометрическую прогрессию, или, что одно и то же, как на обобщённую формулу Бине.

Если в выражении (11.11.1) возьмём предел от левой части, т.е. $(a - b) \rightarrow 0$, то правая часть этого выражения обращается в производную степенной функции.

Действительно:

$$\lim_{(a-b) \rightarrow 0} \frac{a^n - b^n}{a - b} = nb^{n-1}. \quad (11.11.3)$$

Положив в (11.11.3) $a = x + \Delta x$ и $b = x$, можем это выражение переписать следующим образом:

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{a^n - b^n}{a - b} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} = nx^{n-1}. \quad (11.11.4)$$

Таким образом, в основе дифференцирования всякой степенной функции лежит геометрическая прогрессия. Положив в (11.11.2) $a = x + \Delta x$, $b = x$ можно представить это выражение следующим образом при $a \rightarrow b$:

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = f'(x). \quad (11.11.5)$$

Следовательно, в основе дифференцирования любой функции лежит геометрическая прогрессия в однородных переменных или формула Бине.

Приведём конкретный пример. Пусть $f(x)$ будет $\sin x$, т.е.

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (11.11.6)$$

Даём x приращение Δx , тогда:

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x) = (x + \Delta x) - \frac{(x + \Delta x)^3}{3!} + \frac{(x + \Delta x)^5}{5!} - \dots \quad (11.11.7)$$

Далее, как обычно, вычитаем (11.11.6) из (11.11.7) и делим на $(x + \Delta x) - x$, т.е. на Δx :

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} &= \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \frac{(x + \Delta x) - x}{(x + \Delta x) - x} - \frac{1}{3!} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{(x + \Delta x) - x} + \frac{1}{5!} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{(x + \Delta x) - x} - \dots \end{aligned} \quad (11.11.8)$$

Взяв предел от обеих частей при $\Delta x \rightarrow 0$, получим производную функции $\sin x$.

С рассмотренными выше вопросами тесно связана формула Тейлора и ряд Тейлора. Формула Тейлора может быть записана следующим образом.

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(x), \quad |b < x < a| \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(x_2), \quad |b < x_2 < a| \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b) + \frac{(a - b)^2}{3!} f'''(x_3), \quad |b < x_3 < a| \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b) + \frac{(a - b)^2}{3!} f'''(b) + \dots + \frac{(a - b)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_n) \end{aligned}$$

Если в эти формулы вместо $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ подставим “ b ”, что означает, что мы оборвали формулы Тейлора на члене, содержащем $f'(b), f''(b), \dots, f^{(n)}(b)$. В таком случае получим:

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b), \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b), \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b) + \frac{(a - b)^2}{3!} f'''(b), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b) + \frac{(a - b)^2}{3!} f'''(b) + \dots + \frac{(a - b)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(b). \end{aligned}$$

Обратимся к полиномам табл. 11.8, которые непосредственно приводят к геометрической прогрессии. Если в этих полиномах положить $(a - b) \rightarrow 0$, то они обращаются в производные от степенной функции. Дифференцируя n раз последний полином табл. 11.8 и подставляя в формулу Тейлора, получим данный полином.

Проделаем это на частном примере:

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

Производные для этого случая будут равны:

$$f'(b) = 4b^3; f''(b) = 12b^2; f'''(b) = 24b; f^{(4)}(b) = 24;$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &= f'(b) + \frac{a - b}{2} f''(b) + \frac{(a - b)^2}{3!} f'''(b) + \frac{(a - b)^3}{4!} f^{(4)}(b) = \\ &= 4b^3 + \frac{a - b}{2} 12b^2 + \frac{(a - b)^2}{6} 24b + \frac{(a - b)^3}{24} 24 = a^3b + ab^2 + a^3 + b^3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что полиномы, полученные по формулам Тейлора, имеют ту же структуру, т.е. в их основе лежит также геометрическая прогрессия.

Когда остаточный член в формуле Тейлора обращается в пределе в нуль, тогда полином Тейлора обращается в бесконечный ряд. Этот ряд называется рядом Тейлора, но в этом случае элементарные полиномы также обращаются в бесконечные ряды.

11.12. Геометрическая прогрессия и некоторые вопросы теории чисел

Рассмотрим две вопроса, которые связаны с геометрической прогрессией: числа Бернулли, и решение уравнения Пелля.

Числа Бернулли

Числа Бернулли могут быть получены из некоторой символической непрерывной дроби. Для этой цели возьмём следующее уравнение, которое может быть преобразовано в кривую второго порядка:

$$\delta = \cos^2 \alpha - (1 - 2B) \sin \alpha \cos \alpha + (1 + B) b \sin^2 \alpha. \quad (11.12.1)$$

Приравняв $\delta = 0$, получим:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - (1 + 2B) \operatorname{ctg} \alpha + (1 + B)B = 0,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + 2B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + 2B}{2}\right)^2 - (1 + B)B}.$$

Разлагая корень в непрерывную дробь, запишем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + 2B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + 2B}{2}\right)^2 - (1 + B)B} = 1 + 2B - \frac{B(1 + B)}{1 + 2B - \frac{B(1 + B)}{1 + 2B - \dots}} \quad (11.12.2)$$

Составив подходящие дроби, вычислим элементарные полиномы:

$$\frac{(1+B)^2 - B^2}{(1+B) - B} = (1+B) + B = 1 + 2B$$

$$\frac{(1+B)^3 - B^3}{(1+B) - B} = (1+B)^2 + (1+B)B + B^2 = 1 + 3B + 3B^2$$

$$\frac{(1+B)^4 - B^4}{(1+B) - B} = (1+B)^3 + (1+B)^2B + (1+B)B^2 + B^3 = 1 + 4B + 6B^2 + 4B^3$$

.....

$$\frac{(1+B)^n - B^n}{(1+B) - B} = 1 + nB + \frac{n(n-1)}{2!}B^2 + \frac{n(n-2)(n-3)}{3!}B^3 + \dots + nB^{n-1}.$$

Легко заметить, что полученные таким образом полиномы аналогичны полиномам, помещённым в табл. 11.8. В полученных выше полиномах обратим степени в значки и, приравняв их нулю, получим формулы, по которым определяются числа Бернулли. Решая эти уравнения, получим значения чисел Бернулли:

$$1 + 2b_1 = 0, \quad b_1 = -\frac{1}{2},$$

$$1 + 3b_1 + 3b_2 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{6},$$

$$1 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0, \quad b_3 = 0,$$

$$1 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 6b_4 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{30}.$$

.....

Отсюда следует, что числа Бернулли связаны с геометрической прогрессией. Так как геометрическая прогрессия связана с делением круга на равные части, то и числа Бернулли связаны с делением круга на равные части. Известно также, что числа Бернулли связаны с мнимыми корнями из единицы. Эта связь вполне понятна, потому что мнимые корни из единицы также связаны с делением круга на равные части.

Уравнение Пелля

Во многих вопросах теории чисел часто встречается уравнение второго порядка с двумя неизвестными, имеющее следующий вид:

$$T^2 - DU^2 = \delta^2. \quad (11.12.3)$$

Это уравнение обычно называют *уравнением Пелля*. Неизвестными являются величины T и U . Если известно одно решение этого уравнения, например t и u , то общее решение его составляется следующим образом:

$$T = \frac{\delta}{2} \left[\left(\frac{t + u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n + \left(\frac{t - u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n \right], \quad (11.12.4)$$

$$U = \frac{\delta}{2\sqrt{D}} \left[\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n - \left(\frac{t-u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n \right]. \quad (11.12.4)$$

Положив здесь

$$e^u = \frac{t+u\sqrt{D}}{\delta}, \quad e^{-u} = \frac{t-u\sqrt{D}}{\delta},$$

что всегда возможно, мы можем представить это решение следующим образом:

$$\frac{T}{t} = \frac{\left[\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n + \left(\frac{t-u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n \right]}{\frac{t+u\sqrt{D}}{\delta} + \frac{t-u\sqrt{D}}{\delta}} = \frac{e^{nu} + e^{-nu}}{e^u + e^{-u}} = \frac{chnu}{chu}, \quad (11.12.5)$$

$$\frac{U}{u} = \frac{\left[\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n - \left(\frac{t-u\sqrt{D}}{\delta} \right)^n \right]}{\frac{t+u\sqrt{D}}{\delta} - \frac{t-u\sqrt{D}}{\delta}} = \frac{e^{nu} - e^{-nu}}{e^u - e^{-u}} = \frac{shnu}{shu}. \quad (11.12.6)$$

Это значит, что решения уравнения Пелля представляют элементарные полиномы таблиц 11.2 и 11.4.

11.13. Суммирование одинаковых степеней чисел обобщённого ряда

Уже отмечалось, что полиномы в табл. 11.4 и табл. 11.7 могут быть названы обобщённым натуральным рядом чисел для гиперболической и эллиптической зон табл. 11.1, которые в пределе при стремлении к нулю u и φ обращаются в обычный натуральный ряд чисел, соответствующий параболической зоне той же таблицы. На основании обобщённых формул Бине (11.9.8) и (11.9.9) эти обобщённые числа для всех трёх зон табл. 11.1 могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi}, & \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, & \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}, & \dots, & \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, & \dots \\ 1, & 2, & 3, \dots, & n, & \dots \\ \frac{shu}{shu}, & \frac{sh2u}{shu}, & \frac{sh3u}{shu}, & \dots, & \frac{shnu}{shu}, & \dots \end{array}$$

Первая строка представляет эллиптический натуральный ряд чисел, вторая – параболический и третья – гиперболический. При стремлении к нулю u и φ они обращаются в обыкновенные целые числа. То, что сказано о целых числах, может быть распространено на дробные и иррациональные, которые можно также представить как эллиптические и гиперболические. Переходя непосредственно к вычислению суммы одинаковых степеней обобщённого натурального ряда, сначала выполним суммирование для гиперболической зоны таблицы для нечётных и чётных степеней.

Суммирование нечётных степеней чисел обобщённого натурального ряда гиперболической зоны

Определим формулу суммы n первых чисел обобщённого натурального ряда. Обозначая обобщенные гиперболические числа через H , имеем:

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n &= \frac{shu + sh2u + sh3u + \dots + shnu}{shu} = \\ &= \frac{e^u + e^{2u} + e^{3u} + \dots + e^{nu}}{2shu} - \frac{e^{-u} + e^{-2u} + e^{-3u} + \dots + e^{-nu}}{2shu} = \\ &= \frac{(1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \dots + e^{nu}) - (1 + e^{-u} + e^{-2u} + e^{-3u} + \dots + e^{-nu})}{2shu}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} 1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \dots + e^{nu} &= \frac{e^{(n+1)u} - 1}{e^u - 1}, \\ 1 + e^{-u} + e^{-2u} + e^{-3u} + \dots + e^{-nu} &= \frac{1 - e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}}, \end{aligned}$$

то можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k &= \frac{\frac{e^{(n+1)u} - 1}{e^u - 1} - \frac{1 - e^{-(n+1)u}}{1 - e^{-u}}}{2shu} = \frac{[e^{(n+1)u} - 1][1 - e^{-u}] - [1 - e^{-(n+1)u}][e^u - 1]}{2shu(e^u - 1)(1 - e^{-u})} \\ &= \frac{e^{(n+1)u} - 1 - e^{nu} + e^{-u} - e^u + e^{-nu} - e^{-(n+1)u}}{4shu(chu - 1)} = \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{2shu(chu - 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула суммы n первых чисел обобщённого натурального ряда имеет вид:

$$\frac{shu}{shu} + \frac{sh2u}{shu} + \frac{sh3u}{shu} + \dots + \frac{shnu}{shu} = \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{2shu(chu - 1)}. \quad (11.13.1)$$

Докажем, что при $u \rightarrow 0$ эта формула превращается в обычную формулу суммы чисел натурального ряда. Для этой цели разложим в ряд Маклорена все величины числителя и знаменателя и возьмём предел при $u \rightarrow 0$. При $u \rightarrow 0$ формула превратится в формулу суммы n первых чисел натурального ряда:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{2shu(chu - 1)} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (11.13.2)$$

Аналогично определим формулы n первых нечётных чисел обобщённого натурального ряда.

$$H_1 + H_3 + H_5 + \dots + H_{2k-1} = \frac{shu}{shu} + \frac{sh3u}{shu} + \frac{sh5u}{shu} + \dots + \frac{sh(2k-1)u}{shu} = \frac{sh^2 ku}{sh^2 u}. \quad (11.13.3)$$

Формула (11.13.3) представляет сумму обобщённых гиперболических нечётных чисел. При $u \rightarrow 0$ получаем обычную формулу суммы нечётных чисел: $S=k^2$.

Определим формулу суммы кубов n первых чисел обобщённого натурального ряда для гиперболической зоны.

$$\begin{aligned} H_1^3 + H_2^3 + H_3^3 + \dots H_n^3 &= \frac{sh^3 u}{sh^3 u} + \frac{sh^3 2u}{sh^3 u} + \frac{sh^3 3u}{sh^3 u} + \dots + \frac{sh^3 nu}{sh^3 u} = \\ &= \frac{sh3(n+1)u - sh3nu - sh3u}{8sh^3 u(ch3u - 1)} - 3 \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{8sh^3 u(chu - 1)}. \end{aligned} \quad (11.13.4)$$

Такова формула суммы кубов n первых обобщённых чисел натурального ряда для гиперболической зоны. При $u \rightarrow 0$, т.е. в параболической зоне табл. 11.1, формула (11.13.4) обращается в обычную формулу суммы кубов натурального ряда чисел.

$$\lim_{u \rightarrow 0} (H_1^3 + H_2^3 + H_3^3 + \dots H_n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (11.13.5)$$

Приведём формулу суммы 5-ых степеней n первых чисел обобщённого ряда:

$$\begin{aligned} H_1^5 + H_2^5 + H_3^5 + \dots H_n^5 &= \frac{sh^5 u}{shu} + \frac{sh^5 2u}{shu} + \frac{sh^5 3u}{shu} + \dots + \frac{sh^5 nu}{shu} = \\ &= \frac{sh5(n+1)u - sh5nu - sh5u}{16sh^5 u(ch5u - 1)} - 5 \frac{sh3(n+1)u - sh3nu - sh3u}{16sh^5 u(ch3u - 1)} + \\ &\quad + 10 \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{16sh^5 u(chu - 1)}. \end{aligned} \quad (11.13.6)$$

Таким же образом получим формулу суммы для седьмых степеней чисел обобщённого ряда:

$$\begin{aligned} H_1^7 + H_2^7 + H_3^7 + \dots H_n^7 &= \frac{sh^7 u}{shu} + \frac{sh^7 2u}{shu} + \frac{sh^7 3u}{shu} + \dots + \frac{sh^7 nu}{shu} = \\ &= \frac{sh7(n+1)u - sh7nu - sh7u}{64sh^7 u(ch7u - 1)} - 7 \frac{sh5(n+1)u - sh5nu - sh5u}{64sh^7 u(ch5u - 1)} + \\ &\quad + 21 \frac{sh3(n+1)u - sh3nu - sh3u}{64sh^7 u(ch3u - 1)} - 35 \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{64sh^7 u(chu - 1)}, \end{aligned}$$

Можно вывести индуктивным образом формулу, выражающую сумму m -х степеней чисел обобщённого натурального ряда:

$$\begin{aligned} H_1^m + H_2^m + H_3^m + \dots H_n^m &= \frac{sh^m u}{shu} + \frac{sh^m 2u}{shu} + \frac{sh^m 3u}{shu} + \dots + \frac{sh^m nu}{shu} = \\ &= \frac{shm(n+1)u - shmnu - shmu}{2^{m-1} sh^m u(chmu - 1)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m \operatorname{sh}(m-2)(n+1)n - \operatorname{sh}(m-2)nu - \operatorname{sh}(m-2)u}{1 \cdot 2^{m-1} \operatorname{sh}^m u (\operatorname{ch}(m-2)u - 1)} + \\
& + \frac{m(m-1) \operatorname{sh}(m-4)(n+1)u - \operatorname{sh}(m-4)nu - \operatorname{sh}(m-4)u}{2! \cdot 2^{m-1} \operatorname{sh}^m u (\operatorname{ch}(m-n)u - 1)} - \dots \\
& \dots - \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m - \frac{m-1}{2}] \operatorname{sh}(n+1)u - \operatorname{sh}nu - \operatorname{sh}u}{\frac{m-1}{2}! \cdot 2^{m-1} \operatorname{sh}^m u (\operatorname{ch}u - 1)} + \dots. \quad (11.13.7)
\end{aligned}$$

Это общая формула суммирования одинаковых нечётных степеней чисел обобщённого натурального ряда для гиперболической зоны табл. 11.1.

Суммирование чётных степеней чисел обобщённого натурального ряда

В случае показателя степени равным двум имеем:

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dots H_n^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 2u + \operatorname{sh}^2 3u + \dots + \operatorname{sh}^2 nu}{\operatorname{sh}^2 u} = \frac{\operatorname{sh}(2n+1)u - 2(2n+1)\operatorname{sh}u}{4\operatorname{sh}^3 u}.$$

Запишем сумму квадратов H_n^2 первых чисел обобщённого натурального ряда при $u \rightarrow 0$.

$$\lim_{u \rightarrow 0} (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dots H_n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (11.13.8)$$

Формула суммы четвёртых степеней первых чисел обобщённого натурального ряда:

$$\begin{aligned}
H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + \dots H_n^4 &= \frac{\operatorname{sh}^4 u + \operatorname{sh}^4 2u + \operatorname{sh}^4 3u + \dots + \operatorname{sh}^4 nu}{\operatorname{sh}^4 u} = \\
&= \frac{\operatorname{sh}2(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}2u}{16\operatorname{sh}^4 u \operatorname{sh}2u} - 4 \frac{\operatorname{sh}(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}u}{16\operatorname{sh}^5 u}. \quad (11.13.9)
\end{aligned}$$

В пределе при $u \rightarrow 0$ формула (11.13.9) обращается в следующую:

$$\lim_{u \rightarrow 0} (H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + \dots H_n^4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Формула суммы шестых степеней обобщённого натурального ряда имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_1^6 + H_2^6 + H_3^6 + \dots H_n^6 &= \frac{\operatorname{sh}3(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}3u}{2^6 \operatorname{sh}^6 u \operatorname{sh}3u} - \\
&- 6 \frac{\operatorname{sh}2(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}2u}{2^6 \operatorname{sh}^6 u \operatorname{sh}2u} + 15 \frac{\operatorname{sh}(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}u}{2^6 \operatorname{sh}^6 u \operatorname{sh}u}. \quad (11.13.10)
\end{aligned}$$

Общая формула суммирования m -х чётных степеней обобщённого натурального ряда, имеет вид:

$$H_1^m + H_2^m + H_3^m + \dots H_n^m = \frac{\operatorname{sh}k(2n+1)u - (2n+1)\operatorname{sh}ku}{2^m \operatorname{sh}^m u \operatorname{sh}ku} -$$

$$\begin{aligned}
& -m \frac{sh(k-1)(2n+1)u - (2n+1)sh(k-1)u}{2^m sh^m ush(k-1)u} + \\
& + \frac{m(m-1)sh(k-2)(2n+1)u - (2n+1)sh(k-2)u}{2! 2^m sh^m ush(k-2)u} \pm \dots \\
& \dots \pm \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(k-2)]sh(2n+1)n - (2n+1)shu}{(k-1)! 2^m sh^m ushu}. \quad (11.13.11)
\end{aligned}$$

где $m = 2k$.

По формуле (11.13.11) можно вычислить сумму одинаковых чётных степеней чисел обобщённого натурального ряда при любом значении m . Очевидно, сумма m -ых степеней, вычисленная по формуле (11.13.11) при $n \rightarrow \infty$ не существует.

Отношение обобщённого числа к обычному при $n \rightarrow \infty$ имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{shnu}{nshu} = \frac{shu}{u}. \quad (11.13.12)$$

Отношение суммы n первых обобщённых чисел натурального ряда к сумме n первых чисел обычного натурального ряда также имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Вычислим его. Обозначая этот предел через $S^{(1)}$, будем иметь:

$$S^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sh(n+1)u - shnu - shu}{\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2shu(chu - 1)}. \quad (11.13.13)$$

Преобразуем числитель следующим образом:

$$\begin{aligned}
& sh(n+1)u - shnu - shu = shnuchu + chnushu - shnu - shu = \\
& = shnu(chu - 1) + shu(chnu - 1) = 4 \left(sh \frac{nu}{2} ch \frac{nu}{2} sh^2 \frac{u}{2} + sh \frac{u}{2} ch \frac{u}{2} sh^2 \frac{nu}{2} \right) = \\
& = 4sh \frac{u}{2} sh \frac{nu}{2} \left(sh \frac{u}{2} ch \frac{nu}{2} + ch \frac{u}{2} sh \frac{nu}{2} \right) = 4sh \frac{u}{2} sh \frac{nu}{2} sh \frac{(n+1)u}{2}.
\end{aligned}$$

Подставим в (11.13.13), получим

$$S^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4sh \frac{u}{2} sh \frac{nu}{2} sh \frac{(n+1)u}{2}}{\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2} 4shush^2 \frac{u}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2sh \frac{nu}{2n} sh \frac{n(1+\frac{1}{n})u}{2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(nsh \frac{u}{n}\right) \left(nsh \frac{u}{2n}\right)} = \frac{4sh^2 \frac{u}{2}}{u^2}.$$

Следовательно,

$$S^{(1)} = \left(\frac{2sh \frac{u}{2}}{u} \right)^2. \quad (11.13.14)$$

Формула (11.13.14) представляет предел отношения суммы n первых чисел обобщённого натурального ряда к сумме обычного натурального ряда при $n \rightarrow \infty$. Предел отношения суммы кубов, пятых степеней и т.д. обобщённых чисел натурального ряда к сумме кубов, пятых и т.д. степеней обычного натурального ряда

также существует. Не приводя вычислений, запишем эти пределы, обозначив их соответственно через $S^{(3)}$, $S^{(5)}$, $S^{(7)}$, ...

$$S^{(3)} = \frac{2}{u^4} \left(\frac{sh^2 \frac{3u}{2}}{3} - 3 \frac{sh^2 \frac{u}{2}}{1} \right), \quad (11.13.15)$$

$$S^{(5)} = \frac{3}{2u^6} \left(\frac{sh^2 \frac{5u}{2}}{5} - 5 \frac{sh^2 \frac{3u}{2}}{3} + 10 \frac{sh^2 \frac{u}{2}}{1} \right), \quad (11.13.16)$$

$$S^{(7)} = \frac{1}{2u^8} \left(\frac{sh^2 \frac{7u}{2}}{7} - 7 \frac{sh^2 \frac{5u}{2}}{5} + 21 \frac{sh^2 \frac{3u}{2}}{3} - 35 \frac{sh^2 \frac{u}{2}}{1} \right), \quad (11.13.17)$$

.....

$$S^{(m)} = \frac{m+1}{2^{m-3}u^{m+1}} \left(\frac{sh^2 \frac{mu}{2}}{m} - \frac{m sh^2(m-2) \frac{u}{2}}{1!} + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1) sh^2(m-4) \frac{u}{2}}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2) \dots \left[m - \frac{m-1}{2} \right] sh^2 \frac{u}{2}}{\frac{m-1}{2}!} \right). \quad (11.13.18)$$

Предел отношения суммы чётных степеней чисел обобщённого натурального ряда к сумме тех же степеней обычного натурального ряда при $n \rightarrow \infty$ тоже существует. Не приводя вычислений и обозначая эти пределы, соответственно, через $S^{(2)}$, $S^{(4)}$, ... $S^{(m)}$, запишем их:

$$S^{(2)} = \frac{3}{2^2 u^3} (sh2u - 2u), \quad (11.13.19)$$

$$S^{(4)} = \frac{5}{2^4 u^5} \left(\frac{sh4u - 4u}{2} - 4 \frac{sh2u - 2u}{1} \right), \quad (11.13.20)$$

$$S^{(6)} = \frac{7}{2^6 u^7} \left(\frac{sh6u - 6u}{3} - 6 \frac{sh4u - 4u}{2} + 15 \frac{sh2u - 2u}{1} \right), \quad (11.13.21)$$

$$S^{(8)} = \frac{9}{2^8 u^9} \left(\frac{sh8u - 8u}{4} - 8 \frac{sh6u - 6u}{3} + 28 \frac{sh4u - 4u}{2} - 56 \frac{sh2u - 2u}{1} \right), \quad (11.13.22)$$

.....

$$S^{(m)} = \frac{m+1}{2^m u^{m+1}} \left[\frac{shmu - mu}{k} - \frac{m sh(m-2)u - (m-2)u}{1!} + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1) sh(m-4)u - (m-4)u}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2) sh(m-6)u - (m-6)u}{3!} + \dots \right. \\ \left. \dots \pm \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m - (k-1)] sh2u - 2u}{(k-1)!} \right], \quad (11.13.25)$$

где $m = 2k$. Формула (11.13.25) представляет предел отношения сумм m -х степеней чисел обобщённого натурального ряда и такой же сумме степеней обычного натурального ряда при $n \rightarrow \infty$.

11.14. О тройственном принципе

Всю математику пронизывает принцип тройственности. Самым ярким примером тому – неевклидовы геометрии, когда обнажаются истоки этого принципа. Но рассмотрение других, самых разнородных математических вопросов убеждает в их единстве именно на платформе тройственности. Рассматривая неевклидовы геометрии немецкий математик Ф. Клейн пишет [32]: «На первый взгляд это кажется парадоксальным, но математик сразу подметит здесь аналогию с обыкновенной теорией квадратных уравнений, что указывает на путь к пониманию этих вещей. А именно, квадратное уравнение имеет либо два различных вещественных корня, либо не имеет ни одного такого корня, но имеет два мнимых корня, либо, наконец, в качестве переходного случая имеет один двойной вещественный корень. Это вполне аналогично с двумя различными вещественными параллелями, т.е. случай гиперболической геометрии, с отсутствием действительных параллелей, т.е. случай эллиптической геометрии, и, наконец, с переходным случаем одной параллели, определяемой двояким образом, как некое предельное положение в евклидовой геометрии».

Натуральный ряд чисел также существует в трёх модификациях. Прогрессии, непрерывные дроби, различные ряды также подчинены тройственному принципу.

Возникает вопрос, почему принцип тройственности имеет место в математике? «Математика и математические понятия суть абстракции от реальных вещей» - писал Энгельс. И далее: «Но как и во всех областях мышления, при отвлечении от действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему, как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, применяется чистая математика к миру, хотя она и заимствована из этого мира и представляет только часть его составных форм и, собственно, только поэтому она вообще и применима к миру».

Естественно, что тройственный принцип, которому подчинена вся математика, диктуется математике материальным миром. Следовательно, материальный мир должен быть сам построен по принципу тройственности. И этот принцип устанавливают силы взаимодействия между телами. В первом приближении можно сказать, что действие этих сил может выражаться в виде растяжения или сжатия (если не считать вихревых движений, которые происходят в результате действия пар сил). Тогда для плоского напряжённого состояния действие этих сил может проявляться в виде трёх комбинаций: 1) сжатие по всем направлениям; 2) по двум направлениям сжатие, по двум – растяжение; 3) по всем направлениям – растяжение. Для пространственного напряжённого состояния добавляются силы, действующие вдоль от оси z . Действие этих комбинированных сил на математику состоит в том, что они создают две бинарные формы

$$\delta_1 = a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha$$

$$\delta_2 = c \cos^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha + a \sin^2 \alpha,$$

которые в зависимости от среднего коэффициента, т.е. от напряжения сдвига или, что одно и то же, в зависимости от дискриминанта этих форм, могут принимать три различных значения. Три разновидности бинарных квадратичных форм устанавливают фактически тройственный принцип в математике, так как вся математика представляет различные комбинации этих трёх квадратичных форм.

Деление всей геометрии на три системы – параболическую, эллиптическую и гиперболическую полностью порождается этими тремя квадратичными формами. Геометрия Лобачевского в трудах А.Пуанкаре была проинтерпретирована на кругах Мора, то есть Пуанкаре было показано, что эта геометрия связана с напряжениями и силами.

Запишем обобщённые числа:

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad n, \quad \frac{shnu}{shu}.$$

Что заставило число n одеть тригонометрическую рубашку в эллиптической зоне и гиперболическую – в гиперболической зоне. Это произошло под влиянием сил. Силы растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям создают колебательные процессы или тригонометрические элементы, а силы одновременного растяжения и сжатия по тем же направлениям создают аperiodические процессы или гиперболические элементы.

Рассмотрим длину окружности в трёх геометрических системах:

$$2\pi R \sin \frac{r}{R}, \quad 2\pi r, \quad 2\pi R \operatorname{sh} \frac{r}{R}.$$

Эти формулы могут быть легко получены из трёх обобщённых чисел, приведённых выше. Таким образом, будем считать, что тройственный принцип, которому подчинена вся математика, создаётся внешним миром при помощи сил взаимодействия между телами.

Выше было отмечено, что тройственный принцип, которому подчинена вся математика, диктуется математике материальным миром, т.е. материальный мир сам построен по принципу тройственности.

Попытаемся сформулировать этот принцип. Сделаем это в таком виде: *«Все процессы в природе подчинены эллиптическим (периодическим) и гиперболическим (аperiodическим) закономерностям, причём между этими закономерностями должна быть промежуточная зона, которая является предельной зоной двух указанных выше первичных закономерностей.»*

Установленный принцип обладает большими эвристическими возможностями. Например, если нам удалось установить какую-либо геометрическую систему, например, параболическую, то для полноты изучения данного вопроса необходимо ещё установить и изучить две другие геометрические системы эллиптическую и гиперболическую. Если мы установим и пользуемся натуральным (параболическим) рядом чисел, то также естественно и необходимо привлечение эллиптического и гиперболического ряда чисел. Таких примеров можно провести сколь угодно много.

ГЛАВА 12

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА

12.1. Дзета-функции Римана

Дзета-функции Римана, которые входят в обойму специальных функций современной математики и имеют фундаментальное значение в аналитической теории чисел, определяются выражением [21]:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1). \quad (12.1.1)$$

Часто используется более простая конструкция:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (12.1.2)$$

При n – четном Эйлером были найдены формулы суммирования таких рядов:

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}, \quad (12.1.3)$$

где B_{2n} – числа Бернулли.

Запишем некоторые частные случаи функции Римана:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934066\dots, \quad (12.1.4)$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} = 1,082323233\dots, \quad (12.1.5)$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945} = 1,017343062\dots, \quad (12.1.6)$$

$$\zeta(8) = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450} = 1,004077356\dots \quad (12.1.7)$$

Эйлер определил значения функции $\zeta(2n)$ вплоть до значения $\zeta(12)$ с точностью в двадцать десятичных разрядов.

Для функций $\zeta(2n+1)$ формулы суммирования не установлены. Можно записать значения этих функций:

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = 1,202056903\dots, \quad (12.1.8)$$

$$\zeta(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \dots = 1,036927755\dots, \quad (12.1.9)$$

$$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \dots = 1,008349277\dots \quad (12.1.10)$$

Кроме классических дзета-функций $\zeta(n)$, рассматриваются иные суммы обратных степеней чисел натурального ряда [110]:

$$\eta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-n} = (1 - 2^{1-n}) \zeta(n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.1.11)$$

Например,

$$\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2, \quad (12.1.12)$$

$$\eta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}, \quad (12.1.13)$$

$$\eta(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720}. \quad (12.1.14)$$

$$\lambda(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-n} = (1 - 2^{-n}) \zeta(n) \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (12.1.15)$$

Например,

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}, \quad (12.1.16)$$

$$\lambda(4) = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}. \quad (12.1.17)$$

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.1.18)$$

Имеют место соотношения [10]:

$$\beta(2n+1) = \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!} |E_{2n}| \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (12.1.19)$$

где E_{2n} — числа Эйлера,

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4(2n-1)!} \int_0^1 E_{2n-1}(x) \sec(\pi x) dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12.1.20)$$

$E_{2n-1}(x)$ — многочлены Эйлера.

$$\beta(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}, \quad (12.1.21)$$

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G = 0,915965594\dots, \quad (12.1.22)$$

G — постоянная Каталана.

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}. \quad (12.1.23)$$

12.2. Дзета-функции Никипорца

Можно ввести функции, аналогичные дзета-функции Римана, и для цепных дробей. Здесь однако вариантов значительно больше. Степени обратных величин могут занимать позиции как частных числителей, так и частных знаменателей. Назовем эти функции *дзета-функциями Никипорца* и введем соответствующие обозначения.

$$\zeta^p(n) = 1 + K \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} + \dots, \quad (12.2.1)$$

$$\zeta_q(n) = 1 + K \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^n + \dots} \quad (12.2.2)$$

Здесь следует заметить, что если ряд

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots + \frac{1}{m^n} + \dots \quad (12.2.3)$$

сходится при $n = 2, 3, \dots$, и расходится при $n = \dots -2, -1, 0, 1$, то цепные дроби (12.2.1) и (12.2.2), представляющие дзета-функцию Никипорца, можно рассматривать как при положительных, так и отрицательных значениях показателей степени n , в том числе и при $n = 0$ и $n = 1$.

И еще одно принципиальное отличие ряда (12.2.3) от цепных дробей (12.2.1) и (12.2.2). Рассматривать сходящиеся ряды при всех отрицательных элементах не имеет смысла, ибо знак “-” можно вынести за скобки. Иное дело в цепных дробях: если частные числители цепной дроби отрицательны

$$\frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 - \frac{a_3}{1 - \dots - \frac{a_n}{1 - \dots}}}}, \quad (12.2.4)$$

то знак минус вынести за скобки нельзя. Цепная дробь (12.2.4) имеет самостоятельный интерес. Как показано в [78], цепные дроби (12.2.4) часто имеют комплексное значение при действительных элементах a_n .

Введем в рассмотрение дзета-функции Никипорца вида:

$$\zeta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} - \dots}, \quad (12.2.5)$$

$$\zeta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} - \dots}. \quad (12.2.6)$$

По аналогии с тем, как были введены суммы обратных степеней $\eta(n)$, $\lambda(n)$ и $\beta(n)$ для рядов, введем функции $\eta^p(n)$, $\lambda^p(n)$, $\beta^p(n)$, $\eta_q(n)$, $\lambda_q(n)$, $\beta_q(n)$, а также функции $\lambda^{-p}(n)$, $\lambda_{-q}(n)$, $\delta^p(n)$, $\delta_q(n)$, $\delta^{-p}(n)$, $\delta_{-q}(n)$, $\gamma^p(n)$ и $\gamma_q(n)$:

$$\eta^p(n) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} + \dots}, \quad (12.2.7)$$

$$\eta_q(n) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} + \dots}, \quad (12.2.8)$$

$$\lambda^p(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} + \dots}, \quad (12.2.9)$$

$$\lambda_q(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} + \dots}, \quad (12.2.10)$$

$$\lambda^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} - \dots}, \quad (12.2.11)$$

$$\lambda_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} - \dots}, \quad (12.2.12)$$

$$\beta^p(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} - \dots - \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} + \dots}, \quad (12.2.13)$$

$$\beta_q(n) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} + \dots}, \quad (12.2.14)$$

$$\delta^p(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^n}{1} + \dots}, \quad (12.2.15)$$

$$\delta_q(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} + \dots}, \quad (12.2.16)$$

$$\delta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} - \dots}, \quad (12.2.17)$$

$$\delta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} - \dots}, \quad (12.2.18)$$

$$\gamma^p(n) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} - \dots - \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2m}\right)^n}{1} + \dots}, \quad (12.2.19)$$

$$\gamma_q(n) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} - \dots - \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} + \dots}. \quad (12.2.20)$$

Хотя в цепных дробях (12.2.1), (12.2.2), (12.2.5) – (12.2.20) n – целые числа или

ноль, в общем случае следует брать, как и в дзета-функциях Римана, комплексную переменную z .

Например,

$$\zeta^p(z) = 1 + K \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^z}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^z}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^z}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^z}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^z}{1} + \dots.$$

Запишем частные случаи дзета-функций Никпорца, особо обращая внимание на сходимость цепных дробей, которые определяют эти функции при различных значениях n .

$$\zeta^p(-12) = 1 + K \frac{m^{12}}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^{12}}{1} + \frac{3^{12}}{1} + \frac{4^{12}}{1} + \dots + \frac{m^{12}}{1} + \dots}. \quad (12.2.21)$$

Цепная дробь (12.2.21) – расходящаяся в классическом смысле, так как пределы, к которым стремятся подходящие с четными и нечетными номерами, различны:

$$\Pi_{2k} = 1,99171742368665\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,00025293330067\dots$$

При $n \rightarrow \infty$ пределы имеют значения 1 и 2.

Расходящимися в классическом смысле будут цепные дроби (12.2.1) при $n = -4$ и $n = -3$:

$$\zeta^p(-4) = 1 + K \frac{m^4}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^4}{1} + \frac{3^4}{1} + \frac{4^4}{1} + \dots}, \quad (12.2.22)$$

$$\zeta^p(-3) = 1 + K \frac{m^3}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^3}{1} + \frac{3^3}{1} + \frac{4^3}{1} + \dots}. \quad (12.2.23)$$

В самом деле, для цепной дроби (12.2.22) четные и нечетные подходящие стремятся, соответственно, к различным пределам:

$$\Pi_{2k} = 1,68908104195188\dots$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,10541458687361\dots,$$

Для цепной дроби (12.2.23) четные и нечетные подходящие стремятся к пределам:

$$\Pi_{2k} = 1,50526453611397\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,26252374539044\dots$$

Однако цепная дробь $\zeta^p(-2)$ является уже сходящейся цепной дробью:

$$\zeta^p(-2) = 1 + K \frac{m^2}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \frac{4^2}{1} + \dots + \frac{m^2}{1} + \dots}. \quad (12.2.24)$$

Установим значение цепной дроби (12.2.24). Запишем для ряда Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

равноценную цепную дробь:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \frac{4^2}{1} + \dots}}. \quad (12.2.25)$$

Значение ряда Лейбница а, следовательно, и равноценной цепной дроби (12.2.25), равно $\ln 2$. Поэтому, можно записать:

$$\zeta^P(-2) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{1} = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2^2}{1+1} \frac{3^2}{1+1} \frac{4^2}{1+1} \dots = \frac{1}{\ln 2} = 1,442695044\mathbf{3}981\dots$$

Цепная дробь (12.2.24) сходится столь же медленно, как и ряд Лейбница. Сходится, при том со значительно большей скоростью, цепная дробь

$$\zeta^P(-1) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m}{1} = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \quad (12.2.26)$$

$$\frac{P_{443}}{Q_{443}} = 1,525135276\mathbf{6}098121\dots$$

Остановимся на суммировании цепной дроби (12.2.26). Имеет место цепная дробь для неполной гамма-функции [72]:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a \left(\frac{1}{x+1} \frac{1-a}{1} \frac{1}{x+1} \frac{2-a}{1} \dots \frac{n}{x+1} \frac{n+1-a}{1} \dots \right).$$

При параметрах $a=1/2$ и $x=1/2$ получим после преобразований:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} \left(\frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \dots \frac{n}{1+1} \dots \right).$$

Таким образом

$$\frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \frac{m}{1+1} \dots = \sqrt{\frac{e}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Известно [110], что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} x.$$

Полагая, что $x=1/\sqrt{2}$, получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, можно записать

$$\zeta^P(-1) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \frac{m}{1+1} \dots = \frac{\sqrt{2/e}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2/\pi e}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1,525135276\mathbf{6}098121\dots$$

Цепная дробь $\zeta^P(0)$ является цепной дробью Фибоначчи, а ее значение – “отношение золотого сечения”.

$$\zeta^P(0) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \dots \frac{1}{1+1} \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988\mathbf{7}9894\dots$$

Продолжим запись цепных дробей, связанных с дзета-функциями Никипорца.

$$\zeta^P(1) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \frac{m}{1+1} \dots \quad (12.2.27)$$

Цепная дробь (12.2.27) является сходящейся цепной дробью. Скорость сходимости

сти цепной дроби весьма высока: пятнадцатая подходящая дробь дает 14 верных десятичных знаков

$$\frac{P_{15}}{Q_{15}} = 1,71828182845905 \dots$$

Несложно заметить, что цепная дробь (12.2.27) связана с числом e :

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \quad (12.2.28)$$

Еще большей скоростью сходимости обладают цепные дроби $\zeta^p(2)$, $\zeta^p(3)$, ..., $\zeta^p(12)$.

$$\zeta^p(2) = 1 + K_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \quad (12.2.29)$$

$$\xi^p(2) = 1,8154717660401 \dots$$

Цепную дробь (12.2.29) запишем в эквивалентном виде:

$$\zeta^p(2) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{4^2} + \dots + \frac{(m-1)^2}{m^2} + \dots} \quad (12.2.30)$$

$$\zeta^p(3) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^3}{1} + \dots} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1^3}{2^3} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{3^3}{4^3} + \dots + \frac{(m-1)^3}{m^3} + \dots},$$

$$\xi^p(3) = 1,89237791734629 \dots$$

$$\zeta^p(12) = 1 + K_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}}{1} + \dots},$$

$$\xi^p(12) = 1,9997559192426 \dots$$

Уже отмечалось, что в отличие от дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{k^s} + \dots$$

дзета-функция Никипорца, связанная с цепными дробями, имеет значительно большее число вариантов построения. Выше были рассмотрены примеры дзета-функций Никипорца с элементами в частных числителях цепной дроби. Запишем несколько примеров функции $\zeta_q(n)$.

$$\zeta_q(-12) = 1 + K_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{12}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \dots + \frac{1}{m^{12}} + \dots} = 1,9997559180521 \dots \quad (12.2.31)$$

Цепная дробь (12.2.31), очевидно, сходящаяся. Третья подходящая дает значение цепной дроби (12.2.31) с 14-ю верными десятичными разрядами.

$$\zeta_q(-2) = 1 + K_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{m^2} + \dots} = 1,8043185611716 \dots \quad (12.2.32)$$

Цепная дробь (12.2.32) также имеет высокую скорость сходимости. Седьмая под-

ходящая дробь обеспечивает вычисление значения дроби (12.2.32) с 14-ю верными десятичными разрядами.

$$\zeta_q(-1) = 1 + K \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = 1,69777465796401\dots \quad (12.2.33)$$

Известен ряд, являющийся частным случаем гипергеометрического ряда:

$$\psi(c, x) = 1 + \frac{x}{1!c} + \frac{x^2}{2!c(c+1)} + \dots + \frac{x^n}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} + \dots$$

В монографии [14] приведена цепная дробь, в которую раскладывается отношение:

$$\frac{\psi(c, x)}{\psi(c+1, x)} = 1 + \frac{x/c}{c+1} + \frac{x}{c+2} + \dots + \frac{x}{c+n} + \dots \quad (12.2.34)$$

Полагая, что $c=1$, $x=1$, получим цепную дробь:

$$\frac{\psi(1,1)}{\psi(2,1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots \quad (12.2.35)$$

Следовательно, функция Никпорца $\zeta_q(-1)$ представляется отношением гипергеометрических рядов частного вида:

$$\zeta_q(-1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = 1 + \frac{{}_0F_1(2,1)}{{}_0F_1(1,1)} \quad (12.2.36)$$

Очевидно, цепная дробь $\zeta_q(0)$ совпадает с цепной дробью $\zeta^p(0)$:

$$\zeta_q(0) = \zeta^p(0) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894\dots \quad (12.2.37)$$

Весьма примечательна цепная дробь $\zeta_q(1)$:

$$\zeta_q(1) = 1 + K \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots \quad (12.2.38)$$

Эта цепная дробь является сходящейся, однако сходимость дроби (12.2.38) чрезвычайно медленная, – необходимо вычислить цепную дробь (12.2.38) с более чем миллионом звеньев, чтобы установить ее значение с пятью верными десятичными знаками.

$$\frac{P_{1048576}}{Q_{1048576}} = 1,570797\dots$$

Цепная дробь (12.2.38) связана с числом π :

$$\zeta_q(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = \frac{\pi}{2} \quad (12.2.39)$$

Здесь можно напомнить, что дзета-функция Никпорца $\zeta^p(1)$ связана с другой фундаментальной константой – числом e :

$$\zeta^p(1) = 1 + K \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = e - 1. \quad (12.2.40)$$

Продолжим запись дзета-функций Никпорца.

$$\zeta_q(2) = 1 + K \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \dots \quad (12.2.41)$$

Цепная дробь $\zeta_2(2)$ – расходящаяся, так как значение пределов, к которым стремятся дроби, содержащие четное и нечетное число звеньев, различно:

$$\Pi_{2k} = 1,8198737290 \dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,2896957782 \dots$$

Естественно, являются расходящимися цепные дроби $\zeta_q(n)$, $n = 3, 4, \dots$

$$\zeta_q(3) = 1 + K \frac{1}{m^3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^3} + \dots \quad (12.2.42)$$

$$\Pi_{2k} = 1,95105586940976879 \dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,13061068444082950 \dots,$$

$$\zeta_q(12) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}} + \dots \quad (12.2.43)$$

$$\Pi_{2k} = 1,99999811415497 \dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,00024414108530 \dots$$

Запишем цепную дробь с отрицательными частными числителями a_i ($n \geq 2$):

$$\frac{a_1}{b_1 - \frac{a_2}{b_2 - \frac{a_3}{b_3 - \dots - \frac{a_n}{b_n - \dots}}}} \quad (12.2.44)$$

Цепные дроби вида (12.2.44) весьма распространены в теории цепных дробей. Цепными дробями этой структуры представляются многие элементарные и специальные функции. Например,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots - \frac{x^2}{2n+1 - \dots}}}}} \quad (12.2.45)$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{x}{1 - \frac{1^2 x^2}{3 - \frac{2^2 x^2}{5 - \frac{3^2 x^2}{7 - \dots - \frac{n^2 x^2}{2n+1 - \dots}}}}} \quad (12.2.46)$$

$$\operatorname{Ei}(x) = e^x \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \dots - \frac{n}{1-x} + \dots \right). \quad (12.2.47)$$

Расходящиеся цепные дроби вида (12.2.44), как правило, имеют комплексные значения и могут быть просуммированы при помощи r/φ -алгоритма, как это показано в [77].

$$e^i = 2 \cos 1 - \frac{1}{2 \cos 1} - \frac{1}{2 \cos 1} - \dots - \frac{1}{2 \cos 1} - \dots \quad (12.2.48)$$

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1-2} - \frac{3}{2-3} - \frac{6}{2-5} - \dots - \frac{3n}{2-2n+1} - \dots \quad (12.2.49)$$

Рассмотрим дзета-функции Никпорца вида $\zeta^{-p}(n)$ и $\zeta_{-q}(n)$. Эти функции представляются цепными дробями с отрицательными частными числителями и знаменателями:

$$\zeta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} - \dots}, \quad (12.2.50)$$

$$\zeta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} - \dots}. \quad (12.2.51)$$

Определим значения дзета-функций Никпорца $\zeta^{-p}(n)$ и $\zeta_{-q}(n)$ при различных значениях n .

$$\zeta^{-p}(12) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}}{1} - \dots} = -0,000244200703819163... \quad (12.2.52)$$

Сходящейся является дробь

$$\zeta^{-p}((2)) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1} - \dots} = -0,39610783448811... \quad (12.2.53)$$

Цепная дробь

$$\zeta^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m} - \dots} \quad (12.2.53)$$

является расходящейся цепной дробью, так как значение ее неограниченно растет.

Легко понять причины расходимости цепной дроби (12.2.53). Известно [78], что цепные дроби

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5} - \dots - \frac{n}{n+1} - \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{n+1} - \dots$$

имеют своими значениями единицу. Поэтому значение цепной дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots} \quad (12.2.54)$$

будет неограниченно расти с увеличением числа звеньев.

Чтобы просуммировать цепную дробь (12.2.54), которая равноценна ряду

$$1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n! + \dots, \quad (12.2.55)$$

надо построить через равноценный расходящийся ряд (12.2.55), так называемую, соответствующую цепную дробь. Можно записать такую последовательность выражений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}}} &= 1+1!+2!+3!+4!+\dots+n!+\dots= \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{2}{1-\frac{2}{1-\frac{3}{1-\frac{3}{1-\dots-\frac{n}{1-\frac{n}{1-\dots}}}}}}} \end{aligned} \quad (12.2.56)$$

Расходящаяся в классическом смысле цепная дробь (12.2.56) может быть просуммирована при помощи r/φ -алгоритма. Как показано в [78], цепная дробь (12.2.56) имеет комплексное значение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{2}{1-\frac{2}{1-\frac{3}{1-\frac{3}{1-\dots-\frac{n}{1-\frac{n}{1-\dots}}}}} = 1,34972e^{i1,02800}, \quad (12.2.57)$$

которое связано с интегральной показательной функцией:

$$1,34972e^{i1,02800} = \frac{1}{e} \text{Ei}(1).$$

Таким образом, установлено значение расходящейся в классическом смысле цепной дроби

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}}} = 1,34972e^{i1,02800} = \frac{1}{e} \text{Ei}(1). \quad (12.2.58)$$

Можно записать

$$\zeta^{-p}(1) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}} = 1 - \frac{1}{e} \text{Ei}(1). \quad (12.2.59)$$

Любопытна следующая цепная дробь:

$$\zeta^{-p}(0) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}}. \quad (12.2.60)$$

Разумеется, цепная дробь (12.2.60) – расходящаяся в классическом смысле. В [77] приведена цепная дробь Никипорца:

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots. \quad (12.2.61)$$

Если $\varphi = \pi/3$, то из (12.2.61) получим

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}.$$

Следовательно, можно записать

$$\zeta^{-p}(0) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots-\frac{1}{1-\dots}}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Значение цепной дроби (12.2.60) непосредственно установить нельзя, так как имеется «деление на ноль». Поэтому будем определять при помощи r/φ – алгоритма значение «близкой» к (12.2.60) цепной дроби (табл. 12.1).

Таблица 12.1

Определение значения цепной дроби

$$1+10^{-7} - \frac{1}{1+10^{-7}} - \frac{1}{1+10^{-7}} - \dots - \frac{1}{1+10^{-7}} - \dots$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
2	1,99999990066E-07	0,0004472135	0,9995527864	0,0000000000	1,0471974934
4	1,00000029989E+00	1,0000000249	0,0000000249	0,7853981633	0,2617993300
8	5,99914472987E-07	0,1668253300	0,8331746699	0,7853981633	0,2617993300
16	1,00000109966E+00	0,9999930061	0,0000069938	0,9817477042	0,0654497892
32	2,19993070971E-06	0,6655679837	0,3344320162	0,9817477042	0,0654497892
64	1,00000429968E+00	0,9999842231	0,0000157768	1,0308350894	0,0163624040
128	8,59982064771E-06	0,9128948239	0,0871051760	1,0308350894	0,0163624040
256	1,00001709980E+00	0,9999924525	0,0000075474	1,0431069357	0,0040905576
512	3,41993152517E-05	0,9801113303	0,0198886696	1,0431069357	0,0040905576
1024	1,00006830203E+00	0,9999974627	0,0000025372	1,0461748973	0,0010225961
2048	1,36590623063E-04	0,9956630842	0,0043369157	1,0461748973	0,0010225961
4096	1,00027313700E+00	0,999992812	0,0000007187	1,0469418877	0,0002556057
8192	5,46050890365E-04	0,9990829644	0,0009170355	1,0469418877	0,0002556057
16384	1,00109289688E+00	0,999998217	0,0000001782	1,0471336353	0,0000638581
32768	2,18221901022E-03	0,9998129445	0,0001870554	1,0471336353	0,0000638581
65536	1,00437868586E+00	0,999999733	0,0000000266	1,0471815722	0,0000159212
131072	8,70035373342E-03	0,9999638050	0,0000361949	1,0471815722	0,0000159212
262144	1,01763171370E+00	1,0000000158	0,0000000158	1,0471935564	0,0000039370
524288	3,43625667672E-02	0,9999935939	0,0000064060	1,0471935564	0,0000039370
1048576	1,07252879101E+00	1,0000000261	0,0000000261	1,0471965525	0,0000009409
2097152	1,31275512686E-01	0,9999990580	0,0000009419	1,0471965525	0,0000009409
4194304	1,33265709261E+00	1,0000000232	0,0000000232	1,0471973015	0,0000001919
8388608	4,65963107920E-01	0,9999999251	0,0000000748	1,0471973015	0,0000001919

Запишем дзета-функции Никипорца $\zeta^{-p}(n)$ при других значениях n .

$$\zeta^{-p}(-1) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \dots \quad (12.2.62)$$

Цепная дробь (12.2.62), то есть дзета-функция Никипорца $\zeta^{-p}(-1)$, имеет, как показано в [18], комплексное значение:

$$\begin{aligned} \zeta^{-p}(-1) &= 1 - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \dots = \\ &= -\frac{i\sqrt{2e}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = -\frac{i\sqrt{2e/\pi}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = 0,9520927819525559e^{-i0,809229433902698} \end{aligned}$$

Также комплексное значение имеет дзета-функция Никипорца $\zeta^{-p}(-2)$ [88]:

$$\zeta^{-p}(-2) = 1 - \frac{1^2}{1} - \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{1} - \dots - \frac{n^2}{1} - \dots \quad (12.2.63)$$

Имеют места соотношения [78]:

$$i \int_0^\infty \frac{e^{-it} dt}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{1} - \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{1} - \dots - \frac{n^2}{1} - \dots = 1 + 1 + 5 + 61 + 1365 + 50521 + \dots + E_n + \dots, \quad (12.2.64)$$

где E_n – числа Эйлера.

Если построить для расходящегося знакопеременного ряда, состоящего из чисел Эйлера, соответствующую цепную дробь, то получим цепную дробь представляющую $\ln 2$:

$$1 - 1 + 5161 + 1365 - 50521 + \dots + (-1)^n E_n + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{1} + \dots + \frac{n^2}{1} + \dots = \ln 2.$$

Запишем знакопеременную цепную дробь, которая имеет комплексное значение

$$i \int \frac{e^{it} dt}{ch^2 t} = \frac{1}{1 - \frac{1 \cdot 1}{1} - \frac{1 \cdot 2}{1} - \frac{2 \cdot 3}{1} - \dots - \frac{(n-1) \cdot n}{1} - \dots$$

Знакоположительная цепная дробь представляет $\pi/2$:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1} + \frac{2 \cdot 3}{1} + \frac{3 \cdot 4}{1} + \frac{4 \cdot 5}{1} + \dots + \frac{(n-1) \cdot n}{1} + \dots} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots} = \frac{\pi}{2}.$$

Запишем цепную дробь:

$$\zeta^{-p}(-3) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2^3}{1} - \frac{3^3}{1} - \frac{4^3}{1} - \dots - \frac{m^3}{1} - \dots}. \quad (12.2.65)$$

Подходящие дроби разложения (12.2.65) с четными и нечетными номерами стремятся к различным пределам:

$$\Pi_{2k} = 0,6127260 \dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,7788193 \dots.$$

Также имеют различные пределы чётных и нечётных подходящих цепных дробей:

$$\zeta^{-p}(-4) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2^4}{1} - \frac{3^4}{1} - \frac{4^4}{1} - \dots - \frac{m^4}{1} - \dots}, \quad (12.2.66)$$

$$\Pi_{2k} = 0,3254989292 \dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,1356346633 \dots.$$

$$\zeta^{-p}(-12) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2^{12}}{1} - \frac{3^{12}}{1} - \frac{4^{12}}{1} - \dots - \frac{m^{12}}{1} - \dots}, \quad (12.2.67)$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,00025306131715 \dots,$$

$$\Pi_{2k} = 0,00828260981643 \dots.$$

Если цепные дроби имеют различные пределы четных и нечетных подходящих, то значение этих расходящихся в классическом смысле цепных дробей также может быть установлено при помощи r/ϕ -алгоритма:

Цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}$$

сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left| \frac{P_i}{Q_i} \right|} = r_0, \quad (12.2.68)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|. \quad (12.2.69)$$

Для цепных дробей, имеющих для четных и нечетных подходящих два различных предела, формула для определения модуля r_0 может быть записана следующим образом:

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left| \frac{P_i}{Q_i} \right|} = \sqrt{P_{2k} \cdot P_{2k+1}}, \quad (12.2.70)$$

Если цепная дробь (12.2.68) имеет оба положительных предела четных и нечетных подходящих, то аргумент φ_0 равен нулю и значение цепной дроби равно значению модуля r_0 :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0. \quad (12.2.71)$$

Если цепная дробь (12.2.68) имеет оба отрицательных предела четных и нечетных подходящих, то как следует из формулы (12.2.69), аргумент φ равен π и значение цепной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0. \quad (12.2.72)$$

Если цепная дробь (12.2.68) имеет пределы чётных и нечётных подходящих разных знаков, то значением такой цепной дроби будет мнимое число:

$$z = r_0 e^{i\pi/2} = ir_0. \quad (12.2.73)$$

ГЛАВА 13

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ФИБОНАЧЧИ

13.1. Дзета-функция Фибоначчи первого рода

Числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой второго порядка:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1. \quad (13.1.1)$$

Дзета-функция Римана определяется выражением:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}, \quad \text{Res} > 1. \quad (13.1.2)$$

Часто используется функция вида:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (13.1.3)$$

Введём аналогично дзета-функциям Римана (13.1.2) и (13.1.3) специальные функции, использующие числа Фибоначчи F_k :

$$\zeta_F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{-s}, \quad \text{Res} > 1, \quad (13.1.4)$$

$$\zeta_F(n) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.1.5)$$

Функции (13.1.4) и (13.1.5) будем называть дзета-функциями Фибоначчи первого рода.

В отличие от расходящегося гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

ряд, составленный из обратных чисел Фибоначчи, сходится. В табл. 13.1 приведены результаты суммирования ряда:

$$\zeta_F(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{F_n} + \dots \quad (13.1.6)$$

Таблица 13.1

Определение значения ряда

$$\zeta_F(2) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots$$

п	Частичные суммы ряда	п	Частичные суммы ряда
1	1,000000000000000	14	3,35559380565124
2	2,000000000000000	15	3,35723314991354
3	2,500000000000000	16	3,35824632113948
4	2,833333333333333	17	3,35887249521587
5	3,033333333333333	18	3,35925949211989
6	3,158333333333333	19	3,35949866935022

Окончание табл. 13.1

7	3,23525641025641	20	3,35964648901024
8	3,28287545787546	...	...
9	3,31228722258134	70	3,35988566624317
10	3,33046904076316	71	3,35988566624317
11	3,34170499581934	72	3,35988566624317
12	3,34864944026378	73	3,35988566624318
13	3,35294128575734	74	3,35988566624318

Таким образом, можно записать значения ряда $\zeta_F(1)$:

$$\zeta_F = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{F_n} + \dots = 3,35988566624318\dots$$

Значение ряда (13.1.6) близко к значению произведения, включающего константы e и $\sqrt{5}$:

$$e(\sqrt{5} - 1) = 2,7182818284 \cdot 1,2360679774 = 3,3599811216.$$

В табл. 13.2 приведены результаты суммирования ряда, составленного из квадратов обратных чисел Фибоначчи:

$$\zeta_F(2) = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{F_n^2} + \dots \quad (13.1.7)$$

Таблица 13.2

Определение значения ряда

$$\zeta_F(2) = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

п	Частичные суммы ряда	п	Частичные суммы ряда
1	1,00000000000000	14	2,42631640278028
2	2,00000000000000	15	2,42631909022989
3	2,25000000000000	16	2,42632011674582
4	2,36111111111111	17	2,42632050883979
5	2,40111111111111	18	2,42632065860640
6	2,41673611111111	19	2,42632071581214
7	2,42265327087442	20	2,42632073766280
8	2,42492084457057	...	...
9	2,42578589647368	33	2,42632075116719
10	2,42611647498608	34	2,42632075116722
11	2,42624272167211	35	2,42632075116723
12	2,42629094698075	36	2,42632075116724
13	2,42630936691849	37	2,42632075116724

Запишем значение функции $\zeta_F(2)$:

$$\zeta_F(2) = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{F_n^2} + \dots = 2,4263207511672\dots \quad (13.1.8)$$

Для сравнения запишем:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340661\dots \quad (13.1.9)$$

Произведение значений функций $\zeta_F(2)$ и $\zeta(2)$ составляет величину:

$$\zeta_F(2)\zeta(2) = 3,99113765\dots$$

В табл. 13.3 приведены результаты суммирования рядов, составленных из кубов обратных чисел Фибоначчи:

$$\zeta_F(3) = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{1}{F_n^3} + \dots \quad (13.1.10)$$

Таблица 13.3

Определение значения ряда

$$\zeta_F(3) = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда	n	Частичные суммы ряда
1	1,0000000000000000	13	2,17258659354953
2	2,0000000000000000	14	2,17258661221229
3	2,1250000000000000	15	2,17258661661795
4	2,16203703703704	16	2,17258661765798
5	2,17003703703704	17	2,17258661790350
6	2,17199016203704	18	2,17258661796146
7	2,17244532817268	19	2,17258661797514
8	2,17255330787249	20	2,17258661797837
9	2,17257875057553	21	2,17258661797913
10	2,17258476109393	22	2,17258661797931
11	2,17258617959602	23	2,17258661797936
12	2,17258651449400	24	2,17258661797937

Следовательно,

$$\zeta_F(3) = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{1}{F_n^3} + \dots = 2,172586611797937\dots \quad (13.1.11)$$

При четном n Эйлером была установлена формула суммирования дзета-функции:

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \dots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}. \quad (13.1.12)$$

Используя формулу (13.1.12) можно записать

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406\dots$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} = 1.0823232323\dots$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945} = 1.017343062\dots$$

Для функций $\zeta(2n+1)$ формулы суммирования не установлены. Можно лишь записать значение этих функций:

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots = 1,202056903\dots$$

$$\zeta(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{6^5} + \dots = 1,036927753\dots$$

$$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{6^7} + \dots = 1,008349277\dots$$

Для дзета-функции Фибоначчи первого рода формулы суммирования не найдены. Запишем значения этих функций при различных n :

$$\zeta_F(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{F_n} + \dots = 3,35988566624318\dots \quad (13.1.13)$$

$$\zeta_F(2) = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{F_n^2} + \dots = 2,42632075116724\dots \quad (13.1.14)$$

$$\zeta_F(3) = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{1}{F_n^3} + \dots = 2,172586611797937\dots \quad (13.1.15)$$

$$\zeta_F(4) = 1 + \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{8^4} + \dots + \frac{1}{F_n^4} + \dots = 2,07673085056559\dots \quad (13.1.16)$$

$$\zeta_F(5) = 1 + \frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{8^5} + \dots + \frac{1}{F_n^5} + \dots = 2,03571870625128\dots \quad (13.1.17)$$

$$\zeta_F(6) = 1 + \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{8^6} + \dots + \frac{1}{F_n^6} + \dots = 2,01706477633116\dots \quad (13.1.18)$$

В табл. 13.4 приведены результаты суммирования знакопеременного ряда, составленного из обратных чисел Фибоначчи:

$$\eta_F(1) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{F_n} + \dots \quad (13.1.19)$$

Таблица 13.4

Определение значения ряда

$$\zeta_F(3) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда
1	1,0000000000000000
2	0,0000000000000000
3	0,5000000000000000
4	0,1666666666666667
5	0,3666666666666667
6	0,2416666666666667
7	0,318589743589744
8	0,270970695970696
9	0,300382460676578
10	0,282200642494760
11	0,293436597550940
12	0,286492153106496
13	0,290783998600058

n	Частичные суммы ряда
14	0,288131478706159
15	0,289770822968454
16	0,288757651742516
17	0,289383825818910
18	0,288996828914885
19	0,289236006145213
20	0,289088186485198
...	...
70	0,289144648570670
71	0,289144648570673
72	0,289144648570671
73	0,289144648570672
74	0,289144648570672

Таким образом,

$$\eta_F(1) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{F_n} + \dots = 0,289144648570672\dots \quad (13.1.20)$$

Для сравнения можно записать знакопеременный ряд, представляющий $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = 0,693147\dots$$

В табл. 13.5 приведены результаты суммирования знакопеременного ряда, составленного из квадратов обратных чисел Фибоначчи:

$$\zeta_F(2) = 1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} + \dots \quad (13.1.21)$$

Таблица 13.5

Определение значения ряда

$$\zeta_F(2) = 1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда	n	Частичные суммы ряда
1	1,0000000000000000	14	0,167537353800110
2	0,0000000000000000	15	0,167540041249721
3	0,2500000000000000	16	0,167539014733788
4	0,1388888888888889	17	0,167539406827762
5	0,1788888888888889	18	0,167539257061158
6	0,1632638888888889	19	0,167539314266905
7	0,169181048652203	20	0,167539292416254
8	0,166913474956057	...	...
9	0,167778526859172	35	0,167539298455628
10	0,167447948346775	36	0,167539298455624
11	0,167574195032799	37	0,167539298455626
12	0,167525969724157	38	0,167539298455625
13	0,167544389661898	39	0,167539298455625

Таким образом, можно записать значение ряда $\eta_F(2)$:

$$\eta_F(2) = 1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} + \dots = 0.167539298455625 \dots \quad (13.1.22)$$

Для сравнения:

$$\eta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{2} B_1 = \frac{\pi^2}{12} = 0.82217033 \dots$$

В табл. 13.6. приведены результаты суммирования знакопеременного ряда, составленного из кубов обратных чисел Фибоначчи:

Таблица 13.6

Определение значения ряда

$$\eta(3) = 1 - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{8^3} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда	n	Частичные суммы ряда
1	1,0000000000000000	14	0,0943776005802885
2	0,0000000000000000	15	0,0943776049859436
3	0,1250000000000000	16	0,0943776039459072
4	0,0879629629629630	17	0,0943776041914263
5	0,0959629629629630	18	0,0943776041334671
6	0,0940098379629630	19	0,0943776041471494
7	0,0944650040986025	20	0,0943776041439194
8	0,0943570243987860	...	...
9	0,0943824671018188	24	0,0943776041445344
10	0,0943764565834116	25	0,0943776041445367
11	0,0943778750855018	26	0,0943776041445362
12	0,0943775401875251	27	0,0943776041445363
13	0,0943776192430519	28	0,0943776041445363

Запишем значение ряда $\zeta_F(3)$:

$$\eta_F(3) = 1 - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{8^3} + \dots = 0.0943776041445363\dots \quad (13.1.23)$$

$$\eta(3) = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \zeta(3) = 0.9015426\dots$$

Имеются общие формулы

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \dots = \frac{(2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n$$

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \dots = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p),$$

Для функций $\zeta_F(n)$ не установлены формулы суммирования, поэтому запишем значение функций при $n = 4, 5, 6$:

$$\zeta_F(4) = 1 - \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{8^4} + \dots = 0,0515407041931326\dots \quad (13.1.24)$$

$$\zeta_F(5) = 1 - \frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{8^5} + \dots = 0,0274267247098197\dots \quad (13.1.25)$$

$$\zeta_F(6) = 1 - \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{8^6} + \dots = 0,0143136393199577\dots \quad (13.1.26)$$

Продолжим определение значений дзета-функций Фибоначчи. В табл. 13.7 приведены результаты суммирования ряда, составленного из обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера:

Таблица 13.7

Определение значения ряда

$$\lambda_F(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{34} + \frac{1}{89} + \dots$$

п	Частичные суммы ряда	п	Частичные суммы ряда
1	1,000000000000000	14	1,82451201088273
2	1,500000000000000	15	1,82451395554163
3	1,700000000000000	16	1,82451469833523
4	1,77692307692308	17	1,82451498205714
5	1,80633484162896	18	1,82451509042927
6	1,81757079668514	19	1,82451513182374
7	1,82186264217870	20	1,82451514763502
8	1,82350198644100	...	...
9	1,82412816051739	32	1,82451515740683
10	1,82436733774772	33	1,82451515740689
11	1,82445869532126	34	1,82451515740691
12	1,82449359080927	35	1,82451515740692
13	1,82450691969964	36	1,82451515740692

Запишем значение ряда, составленного из обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера:

$$\lambda_F(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{34} + \frac{1}{89} + \dots = 1,82451515740692\dots \quad (13.1.27)$$

Ряд, составленный из обратных нечётных чисел, имеет бесконечно большое значение, то есть является расходящимся:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots = \infty.$$

В табл. 13.8 приведены результаты суммирования ряда, составленного из квадратов обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера.

Таблица 13.8

Определение значения ряда

$$\lambda_F(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \dots$$

п	Частичные суммы ряда	п	Частичные суммы ряда
1	1,000000000000000	11	1,29693002338573
2	1,250000000000000	12	1,29693002460343
3	1,290000000000000	13	1,29693002478109
4	1,29591715976331	14	1,29693002480701
5	1,29678221166643	15	1,29693002481079
6	1,29690845835245	16	1,29693002481134
7	1,29692687829019	17	1,29693002481142
8	1,29692956573980	18	1,29693002481143
9	1,29692995783378	19	1,29693002481143
10	1,29693001503952	20	1,29693002481143

Таким образом, ряд $\lambda_F(2)$ имеет значение:

$$\lambda_F(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \dots = 1,29693002481143\dots \quad (13.1.29)$$

Ряд, составленный из обратных значений квадратов нечетных чисел, имеет значение:

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{3\pi^2}{4} B_1 = \frac{\pi^2}{8} = 1,23370055\dots \quad (13.1.30)$$

Известны формулы суммирования и для других рядов $\eta(n)$:

$$\lambda(3) = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{7}{8} \zeta(3) = 1,0517997903\dots \quad (13.1.31)$$

$$\lambda(4) = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \dots = \frac{5\pi^4}{16} B_2 = \frac{\pi^4}{96} = \frac{15}{16} \zeta(4) = 1,0146780316\dots \quad (13.1.32)$$

$$\lambda(2n) = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \dots = \frac{(2^{2n} - 1)\pi^{2n}}{2(2n)!} B_n. \quad (13.1.33)$$

Для функции $\lambda_F(n)$ формулы суммирования не установлены. Запишем значения функций $\lambda_F(n)$:

$$\lambda_F(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{34^3} + \dots = 1,13348211106195\dots \quad (13.1.35)$$

$$\lambda_F(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{13^4} + \frac{1}{34^4} + \dots = 1,06413577737936\dots \quad (13.1.36)$$

$$\lambda_F(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{34^5} + \dots = 1,03157271548055\dots \quad (13.1.37)$$

$$\lambda_F(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{13^6} + \frac{1}{34^6} + \dots = 1,01568920782556\dots \quad (13.1.38)$$

В табл. 13.9 приведены результаты суммирования знакопеременного ряда, составленного из обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера.

Таблица 13.9

Определение значения ряда

$$\beta_F(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \frac{1}{34} - \frac{1}{89} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда	n	Частичные суммы ряда
1	1,000000000000000	14	0,644356930596769
2	0,500000000000000	15	0,644358875255666
3	0,700000000000000	16	0,644358132462064
4	0,623076923076923	17	0,644358416183973
5	0,652488687782805	18	0,644358307811847
6	0,641252732726626	19	0,644358349206316
7	0,645544578220188	20	0,64435833395035
8	0,643905233957893	...	...
9	0,644531408034286	34	0,644358337765160
10	0,644292230803958	35	0,644358337765168
11	0,644383588377501	36	0,644358337765165
12	0,644348692889488	37	0,644358337765166
13	0,644362021779858	38	0,644358337765166

Запишем значение знакопеременного ряда, составленного из обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера:

$$\beta_F(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \frac{1}{34} - \frac{1}{89} + \dots = 0,644358337765166\dots \quad (13.1.38)$$

Для сравнения запишем знакопеременный ряд:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = 0,785398\dots$$

В табл. 13.10 приведены результаты суммирования знакопеременного ряда, составленного из квадратов обратных чисел Фибоначчи, имеющих нечетные порядковые номера.

Таблица 13.10

Определение значения ряда

$$\beta_F(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} - \frac{1}{89^2} + \dots$$

n	Частичные суммы ряда	n	Частичные суммы ряда
1	1,000000000000000	12	0,784837719958644
2	0,750000000000000	13	0,784837720136303
3	0,790000000000000	14	0,784837720110383
4	0,784082840236686	15	0,784837720114165
5	0,784947892139801	16	0,784837720113613
6	0,784821645453776	17	0,784837720113694
7	0,784840065391517	18	0,784837720113682
8	0,784837377941906	19	0,784837720113684
9	0,78483770035880	20	0,784837720113683
10	0,784837712830133	21	0,784837720113683
11	0,784837721176339	22	0,784837720113683

Запишем значение функции $\beta_F(2)$:

$$\beta_F(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} - \frac{1}{89^2} + \dots = 0,784837720113683\dots \quad (13.1.39)$$

Функция $\beta(2)$ имеет значение:

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G = 0,9159655942\dots \quad (13.1.40)$$

Константа G известна как число Каталана.

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{\pi^2}{32} E_1 = \frac{\pi^3}{32} = 0,9689461462\dots \quad (13.1.41)$$

Для функции $\beta(2n+1)$ известна формула суммирования:

$$\beta(2n+1) = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \dots = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2} (2n!)} E_n. \quad (13.1.42)$$

Для функции $\beta_F(n)$ формулы суммирования не установлены. Запишем значения функции $\beta_F(n)$:

$$\beta_F(3) = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{34^3} - \dots = 0,882568932947734\dots \quad (13.1.43)$$

$$\beta_F(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{13^4} + \frac{1}{34^4} - \dots = 0,939065719929127\dots \quad (13.1.44)$$

$$\beta_F(5) = 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{13^5} + \frac{1}{34^5} - \dots = 0,96067328540879\dots \quad (13.1.45)$$

$$\beta_F(6) = 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{13^6} + \frac{1}{34^6} - \dots = 0,984438793469114\dots \quad (13.1.45)$$

13.2. Дзета-функция Фибоначчи второго рода

Обычно под цепной дробью Фибоначчи понимают цепную дробь с единичными элементами:

$$F = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (13.2.1)$$

Подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ цепной дроби (13.2.1) равны отношению соседних чисел Фибоначчи, то есть

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Числа Фибоначчи – это последовательность чисел, которую можно получить, используя рекуррентное соотношение второго порядка

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

Запишем первые числа Фибоначчи:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \\ F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55, \dots$$

Например, шестая подходящая цепной дроби Фибоначчи равна:

$$\frac{P_6}{Q_6} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8}. \quad (13.2.2)$$

Введем функции, аналогичные функциям Никипорца, рассмотренные в предыдущей главе. Если в дзета-функциях Никипорца рассматривалась цепные дроби элементами которых были отрицательные и положительные степени натуральных чисел, то в дзета-функциях Фибоначчи второго рода рассматриваются цепные дроби, элементы которых есть положительные и отрицательные степени чисел Фибоначчи.

Дзета-функции Фибоначчи второго рода – это цепные дроби вида:

$$\zeta^p(F^{(n)}) = 1 + K \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^n}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^n}{1} + \dots \quad (13.2.3)$$

$$\zeta_q(F^{(n)}) = 1 + K \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^n} = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n + \dots + \left(\frac{1}{F_m}\right)^n + \dots \quad (13.2.4)$$

$$\zeta^{-p}(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^n}{1} - \dots \quad (13.2.5)$$

$$\zeta_{-q}(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n - \dots - \left(\frac{1}{F_m}\right)^n - \dots \quad (13.2.6)$$

Цепные дроби (13.2.3) – (13.2.6) следует рассматривать как при положительных, так и при отрицательных значениях показателей степени n , в том числе и при $n = 0$.

По аналогии с тем, как были введены суммы обратных степеней $\eta(n)$, $\lambda(n)$, и $\beta(n)$ для рядов, введём функции $\eta^p(F_n)$, $\lambda^p(F_n)$, $\beta^p(F_n)$, $\eta_q(F_n)$, $\lambda_q(F_n)$, $\beta_q(F_n)$, а также функции $\eta^{-p}(F_n)$, $\lambda^{-p}(F_n)$, $\beta^{-p}(F_n)$ и $\eta_{-q}(F_n)$, $\lambda_{-q}(F_n)$, $\beta_{-q}(F_n)$.

$$\eta^p(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1} + \dots + \frac{(-1)^{m+1} \left(\frac{1}{F_m}\right)^n}{1} - \dots \quad (13.2.7)$$

$$\eta_q(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n + \dots + \left(\frac{1}{F_m}\right)^n - \dots \quad (13.2.8)$$

$$\lambda^p(F^{(n)}) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{F_{m+1}}\right)^n}{1} + \dots \quad (13.2.9)$$

$$\lambda_q(F^{(n)}) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{13}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{34}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^n} + \dots \quad (13.2.10)$$

$$\lambda^{-p}(F^{(n)}) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^n}{1} - \dots \quad (13.2.11)$$

$$\lambda_q(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{13}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{34}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^n} - \dots \quad (13.2.12)$$

$$\beta^p(F^{(n)}) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^n}{1} - \dots + \frac{(-1)^{m+1} \left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^n}{1} - \dots \quad (13.2.13)$$

$$\beta^p(F^{(n)}) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{13}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{34}\right)^n} - \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^n} - \dots \quad (13.2.14)$$

Хотя в данных дробях (13.2.3) – (13.2.11), определяющих дзета-функции Фибоначчи второго рода, n – целое число или ноль, в общем случае следует брать, как в дзета-функциях Римана, комплексную переменную z .

Например,

$$\zeta^p(F^{(z)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^z}{1}} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^z}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^z}{1} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^z}{1} + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^z}{1} + \dots \quad (13.2.15)$$

В табл. 13.11 приведены результаты суммирования знакоположительной цепной дроби, частные числители которой – "обратные" числа Фибоначчи.

Таблица 13.11

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^p(F_1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{F_m}} + \dots$$

n	Значения подходящих дробей
1	2
2	1,6666666666666666
3	1,7272727272727273
4	1,7187500000000000
5	1,7195767195322
6	1,7195230241848

n	Значения подходящих дробей
7	1,7195253131170
8	1,7195252504303
9	1,7195252515196
10	1,7195252515077
11	1,7195252515078
12	1,7195252515078

Таким образом,

$$\zeta^p(F^{(1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{8 + \frac{1}{F_m}}}}}} = 1,7195252515078.... \quad (13.2.16)$$

Цепная дробь (13.2.16) сходится и имеет своим значением величину, близкую к константе $e - 1$. Это объясняется тем, что цепная дробь (13.2.16) близка к цепной дроби

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{n}}}}} = 1,7182818284.... \quad (13.2.17)$$

Цепные дроби (13.2.16) и (13.2.17) запишем в эквивалентном виде:

$$\zeta^p(F^{(1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{5 + \frac{5}{8 + \frac{8}{F_{m-1}}}}}}} = \frac{F_{m-1}}{F_m} + ... \quad (13.2.18)$$

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \frac{5}{n}}}}} = \frac{n-1}{n} + ... \quad (13.2.19)$$

В табл. 13.12 и табл. 13.13 приведены результаты определения значений цепных дробей, частные числители которых представляют, соответственно, обратные квадраты и кубы чисел Фибоначчи.

Таблица 13.12

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^p(F^{(2)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2}}}}} = ...$$

n	Значения подходящих дробей
1	2
2	1,8
3	1,81632653061224
4	1,81574803149606

n	Значения подходящих дробей
	1,81575662081086
	1,81575657103131
	1,81575657114328
	1,81575657114319

Следовательно,

$$\begin{aligned} \zeta^p(F^{(2)}) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{1 + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2}}}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2 + \frac{2^2}{3^2 + \frac{3^2}{5^2 + \frac{5^2}{8^2 + \frac{(F_{m-1})^2}{F_m^2}}}}} = 1,81575657114319... \quad (13.2.20) \end{aligned}$$

Таблица 13.13

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^p(F^{(3)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1 + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{1 + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3}}}}} = ...$$

n	Значения подходящих дробей
1	2
2	1,88888888888888
3	1,89243027888103

n	Значения подходящих дробей
5	1,89240306154382
6	1,89240311419209
7	1,89240311416818

Запишем значение цепной дроби $\varsigma^p(F^{(3)})$:

$$\begin{aligned}\varsigma^p(F^{(3)}) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3}{1} + \dots} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^3}{5^3} + \frac{3^3}{8^3} + \dots + \frac{(F_{m-1})^3}{F_m^3} + \dots} = 1,89240311416818\dots \quad (13.2.21)\end{aligned}$$

В таблице 13.14 – 13.16 приведены результаты определения значений цепных дробей, частные числители которых представляют, соответственно, обратные числа Фибоначчи, а также обратные квадраты и кубы этих чисел, причём, имеющих, нечетные порядковые номера.

Таблица 13.14

Определение значения цепной дроби

$$\lambda^p(F_{2m+1}^{(1)}) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{\frac{1}{13}}{1 + \frac{\frac{1}{34}}{1 + \dots + \frac{\frac{1}{F_{2n+1}}}{1 + \dots}}}}}$$

n	Значения подходящих дробей
1	1.5
2	1.4166666666666666
3	1,42168674699267
4	1,42155172414122

n	Значения подходящих дробей
5	1,42155318447988
6	1,42155317830633
7	1,42155317831639
8	1,42155317831638

$$\begin{aligned}\lambda^p(F_{2m+1}^{(1)}) &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{\frac{1}{13}}{1 + \frac{\frac{1}{34}}{1 + \dots + \frac{\frac{1}{F_{2m+1}}}{1 + \dots}}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5} + \frac{5}{13} + \frac{13}{34} + \dots + \frac{F_{2m-1}}{F_{2m+1}} + \dots} = 1,42155317831638\dots \quad (13.2.22)\end{aligned}$$

Таблица 13.15

Определение значения цепной дроби

$$\lambda^p(F_{2m+1}^{(2)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^2}{1} + \dots}$$

n	Значения подходящих дробей
1	1.25
2	1,24038461538461
3	1,2404390133536

n	Значения подходящих дробей
4	1,24043896660296
5	1,24043896660886
6	1,24043896660886

$$\begin{aligned}\lambda^p(F_{2m+1}^{(2)}) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^2}{1} + \dots} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^2 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{5^2}{13^2} + \frac{13^2}{34^2} + \dots + \frac{F_{2m-1}^2}{F_{2m+1}^2} + \dots} = 1,24043896660886\dots \quad (13.2.23)\end{aligned}$$

Таблица 13.16

Определение значения цепной дроби

$$\lambda^p(F^{(3)}) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^3}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^3}{1} + \dots$$

n	Значения подходящих дробей
1	1.125
2	1,12400793650793

n	Значения подходящих дробей
3	1,12400838427556
4	1,12400838426417

$$\lambda^p(F^{(3)}) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{34}\right)^3}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{F_{2m+1}}\right)^3}{1} + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{2^3}{5^3} + \frac{5^3}{13^3} + \frac{13^3}{34^3} + \dots + \frac{F_{2m-1}^3}{F_{2m+1}^3} + \dots = 1,12400838426\dots \quad (13.2.24)$$

В табл. 13.17 – 13.19 приведены результаты определения значений цепных дробей, с отрицательными частными числителями. Цепные дроби содержит, соответственно, обратные числа Фибоначчи, а также обратные квадраты и кубы этих чисел.

Таблица 13.17

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma^{-p}(F_m^{(1)}) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{F_m} - \dots$$

n	Значения подходящих дробей
1	0
2	-1
3	-2,999999999999999
4	-5,999999970000000
5	-7,36363631677686
6	-7,53543302181227

n	Значения подходящих дробей
7	-7,54516635343927
8	-7,54547854956585
9	-7,54548451996027
10	-7,54548458911815
11	-7,54548458960741
12	-7,54548458960954

$$\lambda^{-p}(F^{(1)}) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{13} - \dots - \frac{1}{F_m} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{5} - \frac{5}{8} - \frac{8}{13} - \dots - \frac{F_{m-1}}{F_m} - \dots = -7,54548458960954\dots \quad (13.2.25)$$

Цепная дробь (13.2.25) является сходящейся, так как значения частных числителей стремится к нулю. Цепная дробь с отрицательными частными знаменателями q_n расходится и имеет комплексное значение, если частные числители $q_n > \frac{1}{4}$.

Рассмотрим квадратное уравнение:

$$x^2 - px + q = 0. \quad (13.2.26)$$

Корень квадратного уравнения может быть представлен цепной дробью:

$$x = p - \frac{q}{p - \frac{q}{p - \frac{q}{\dots - p - \dots}}} \quad (13.2.27)$$

Если в (13.2.27) $p = 1$, то для корня квадратного уравнения

$$x^2 - x + q = 0 \quad (13.2.28)$$

имеем в цепную дробь:

$$x = 1 - \frac{q}{1 - \frac{q}{1 - \frac{q}{\dots - 1 - \dots}}} \quad (13.2.29)$$

Корень квадратного уравнения (13.2.28) будет комплексным, если $q > 1/4$:

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - q}. \quad (13.2.30)$$

Например, если $q = 1/5$, то цепная дробь

$$1 - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \dots - \frac{1}{5} - \dots}}$$

сходится в классическом смысле к корню квадратного уравнения $x^2 - x + 1/5 = 0$, то есть к величине $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{20}}$.

Если $q = 1/3$, то есть больше $1/4$, то цепная дробь представляет комплексный корень квадратного уравнения

$$x^2 - x + 1/3 = 0. \quad (13.2.31)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + i \frac{1}{\sqrt{12}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \dots - \frac{1}{3} - \dots}}$$

Этот комплексный корень в показательной форме может быть установлен из цепной дроби (13.2.21) при помощи r/φ -алгоритма, который рассматривался ранее.

Таблица 13.18

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-p}(F_m^{(2)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\dots - \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2}{\dots}}}}}$$

n	Значения подходящих дробей
1	0
2	-0,3333333333333333
3	-0,391304347758034
4	-0,394160583869679

n	Значения подходящих дробей
5	-0,394208191944705
6	-0,394208480078137
7	-0,394208480736958
8	-0,394208480737530

$$\zeta^{-p}(F_m^{(2)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\dots - \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2}{\dots}}}} = \quad (13.2.32)$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2} - \frac{2^2}{3^2} - \frac{3^2}{5^2} - \frac{5^2}{8^2} - \frac{8^2}{13^2} - \dots - \frac{F_{m-1}^2}{F_m^2} - \dots} = -0,394208480737530...$$

Таблица 13.19

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-p}(F_m^{(3)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3}{1} - \dots}$$

n	Значения подходящих дробей
1	0
2	-0,142857142857142
3	-0,149171270711639
4	-0,149224460681529

n	Значения подходящих дробей
5	-0,149224565650070
6	-0,149224565697964
7	-0,149224565697969
8	-0,149224565697969

Таким образом, можно записать значение функции $\zeta^{-p}(F^{(3)})$

$$\begin{aligned} \zeta^{-p}(F^{(3)}) &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{13}\right)^3}{1} - \frac{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3}{1} - \dots} = \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{2^3}{5^3} - \frac{3^3}{8^3} - \frac{5^3}{13^3} - \dots - \frac{F_{m-1}^3}{F_m^3} - \dots} = -0,149224565697969... \quad (13.2.33) \end{aligned}$$

В [78] рассматривались тестовые примеры цепных дробей с отрицательными частными числителями. В частности, цепные дроби:

$$\zeta^{-p}(-1) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \frac{4}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \dots}, \quad (13.2.34)$$

$$\zeta^{-p}(-3) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2^3}{1} - \frac{3^3}{1} - \frac{4^3}{1} - \dots - \frac{n^3}{1} - \dots}. \quad (13.2.35)$$

Оказалось, что цепная дробь (13.2.34), представляющая функцию $\zeta^{-p}(-1)$, имеет комплексное значение

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1} - \frac{3}{1} - \frac{4}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \dots} = 0.952092e^{i0.809229}.$$

Цепная дробь (13.2.35) сходится к двум разным пределом. Подходящие с четными номерами стремятся к числу 0,612726..., а подходящая с нечетными номерами к числу 1,7788193...

То есть,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 0,6127260...$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,7788193...$$

Следовательно, отрицательность частных числителей цепных дробей, это необходимый, но не достаточный признак сходимости цепной дроби с вещественными отрицательными частными числителями к комплексным значением.

Определим значение цепной дроби с отрицательными частными числителями, которые по модулю совпадают с числами Фибоначчи (Табл. 13.20).

Таблица 13.20

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma^{-p}(F_n^{(-1)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{5}{1 - \frac{8}{1 - \frac{13}{1 - \dots - \frac{F_n}{1 - \dots}}}}}}}$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0	17	1,103954188983080
2	2	18	-0,524149855731991
3	0,5	19	1,114171510850810
4	8	20	-0,500642053659355
5	0,727272727272727	21	1,120550894084120
6	-4,000000000000000	...	...
7	0,867756315007429	71	1,130981134348770
8	-1,578713968957870	72	-0,463997863156785
9	0,960574280747014	73	1,130981149121970
10	-0,998519980266404	74	-0,463997832005768
11	1,021983837321650	75	1,130981158252300
12	-0,755191113668628	76	-0,463997812753382
13	1,062008466762010	77	1,130981163895160
14	-0,631891745546204	78	-0,463997800854753
15	1,087685588266110	79	1,130981134348770
16	-0,563676887162916	80	-0,463997863156785

Из табл. 13.20 следует, что подходящие цепной дроби с четными номерами, имеют предел, равный отрицательному числу $-0,4639978\dots$, а подходящие с нечетными номерами стремятся к положительному числу $1,1309811\dots$.

Можно записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = -0,4639978\dots, \quad (13.2.36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,1309811\dots. \quad (13.2.37)$$

Введем такую запись для обозначений значений цепных дробей, имеющих различные пределы для чётных и нечётных подходящих:

$$\varsigma^{-p}(F_n^{(-1)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{5}{1 - \frac{8}{1 - \frac{13}{1 - \dots - \frac{F_n}{1 - \dots}}}}}}} = \begin{cases} P_{2n}/Q_{2n} = -0,4639978\dots \\ P_{2n+1}/Q_{2n+1} = 1,1309811\dots \end{cases} \quad (13.2.38)$$

В предыдущей главе, в которой рассматривалась дзета-функция Никипорца, было предложено определять значения цепных дробей, имеющих различные пределы для подходящих с чётными и нечетными номерами по "общей схеме", которую описывает r/φ -алгоритм. Значение цепной дроби в общем случае есть комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, где

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left| \frac{P_i}{Q_i} \right|} \quad (13.2.39)$$

$$|\varphi_0| = \pi \frac{k_n}{n}. \quad (13.2.40)$$

Если пределы четных и нечетных подходящих различны, то формулу (13.2.39) можно записать в виде

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|}, \quad (13.2.41)$$

где

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \quad (13.2.42)$$

Если два предела подходящих имеют положительные значения, то из формулы (13.2.40) следует, что аргумент комплексного числа равен нулю, то есть значение цепной дроби с двумя положительными пределами подходящих дробей вещественное.

Если пределы подходящих с четными и нечетными номерами оба отрицательный, то из формулы (13.2.40) следует, что значение цепной дроби равно отрицательному числу:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0. \quad (13.2.43)$$

Если пределы четных и нечетных подходящих дробей разного знака, то значение такой цепной дроби мнимое число:

$$z = r_0 e^{i\pi/2} = ir_0. \quad (13.2.44)$$

При помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (13.2.40) и (13.2.41) установим значение цепной дроби (13.2.38):

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{0,4639978 \cdot 1,309811} = 0,7244119...,$$

$$|\varphi| = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, цепная дробь (13.2.38) имеет мнимое значение:

$$z = 0,7244119e^{i\pi/2} = i0,7244119... \quad (13.2.45)$$

Определим значение цепной дроби с отрицательными частными числителями, которые по модулю совпадают с квадратами чисел Фибоначчи.

Таблица 13.21

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-P}(F_m^{(-2)}) = 1 - \frac{1^2}{1} - \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{1} - \frac{5^2}{1} - \frac{8^2}{1} - \frac{13^2}{1} - \dots - \frac{F_n^2}{1} - \dots \quad (13.2.46)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0	14	1,681367764432850
2	1,33333333333333	15	0,472789745106322
3	0,33333333333333	16	1,682282512419560
4	1,523809523809520	17	0,473029024643000
5	0,423586040914561	18	1,682632280624890
6	1,616951915240420	19	0,473120396312063
7	0,454716745462905	20	1,682765933599510
8	1,656814610214980	...	...
9	0,466192360527798	70	1,682848550450400
10	1,672771180071650	71	0,473176860207974
11	0,470518546742242	75	1,682848550450410
12	1,678979459475120	73	0,473176860207975
13	0,472162854325488	74	1,682848550450410

Цепная дробь (13.2.46) имеет различные пределы для четных и нечетных подходящих:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = 0,47317686020797...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,68284855045041... .$$

Таким образом,

$$\zeta^{-p}(F^{(-2)}) = 1 - \frac{1^2}{1} - \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{1} - \frac{5^2}{1} - \frac{8^2}{1} - \frac{13^2}{1} - \dots - \frac{F_n^2}{1} - \dots = \begin{vmatrix} 1,6828485... \\ 0,4731768... \end{vmatrix}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.47) используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{0,4731768 \cdot 1,6828485} = 0,8923479, \quad (13.2.47)$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.47) положительные, то аргумент φ комплексного числа равен нулю, то есть цепная дробь (13.2.47) имеет вещественное значение:

$$z = 0,8923479e^{i0} = 0,8923479... . \quad (13.2.48)$$

Определим значение цепной дроби с отрицательными частными числителями, которые по модулю совпадают с кубами чисел Фибоначчи

Таблица 13.22

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-p}(F^{(-3)}) = 1 - \frac{1^3}{1} - \frac{2^3}{1} - \frac{3^3}{1} - \frac{5^3}{1} - \frac{8^3}{1} - \frac{13^3}{1} - \dots - \frac{F_m^3}{1} - \dots \quad (13.2.49)$$

n	Значения подходящих дробей
1	0
2	1,142857142857142
3	0,235294117647059
4	1,179548156956000
5	0,278809797797140
6	1,188533246457360
7	0,288551882094590
8	1,190676567964170
9	0,290822949340810
10	1,191183889383980
11	0,291357464387006
12	1,191303730412450
13	0,291483555619846

n	Значения подходящих дробей
14	1,191332025534130
15	0,291513316633634
16	1,191338705360220
17	0,291520341971040
18	1,191340282267520
19	0,291522000412306
20	1,191340654525640
...	...
42	1,191340769559780
43	0,291522512897594
44	1,191340769559790
45	0,291522512897605
46	1,191340769559790

Цепная дробь (13.2.49) имеет различные пределы для четных и нечетных подходящих дробей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,191340769559...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 0,291522512897... .$$

Значение цепной дроби (13.2.49) можно записать следующим образом:

$$\zeta^{-p}(F_m^{(-3)}) = 1 - \frac{1^3}{1} - \frac{2^3}{1} - \frac{3^3}{1} - \frac{5^3}{1} - \frac{8^3}{1} - \frac{13^3}{1} - \dots - \frac{F_m^3}{1} - \dots = \begin{vmatrix} 1,191340769559... \\ 0,291522512897... \end{vmatrix}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.49) используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{0,2915225 \cdot 1,1913407} = 0,5893238... \quad (13.2.50)$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.49) положительные, то запишем значение дроби:

$$z = 0,5893238e^{io} = 0,5893238...$$

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными числителями из чисел Фибоначчи.

Таблица 13.23

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma^{-p}(F^{(-1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{5}{1 + \frac{8}{1 + \frac{13}{1 + \dots + \frac{F_m}{1}}}}}}} \quad (13.2.51)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0	16	1,49033405071307
2	1,33333333333333	17	1,54643254100547
3	1,66666666666667	18	1,49107027379073
4	1,42857142857143	19	1,54581591267449
5	1,59420289855072	20	1,49151566003433
6	1,46198830409357	...	...
7	1,56895589056393	42	1,49222107703258
8	1,47626499739176	43	1,54484694971439
9	1,55784282191487	44	1,49222107703264
10	1,48325505372393	45	1,54484694971434
11	1,55225100958368	46	1,49222107703268
12	1,48699104568553	47	1,54484694971431
13	1,54920344242241	48	1,49222107703271
14	1,48910091916935	49	1,54484694971428
15	1,54745998362889	50	1,49222107703272

Цепная дробь (13.2.51) расходится в классическом смысле, так как пределы значений четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,4922210770327...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,5448469497142... .$$

Можно записать:

$$\varsigma^p(F^{(-1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{5}{1 + \frac{8}{1 + \frac{13}{1 + \dots + \frac{F_m}{1}}}}}}} = \left| \begin{array}{l} 1,5448469... \\ 1,4922210... \end{array} \right.$$

Установим значение цепной дроби (13.2.51), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{1,4922210 \cdot 1,5448469} = 1,5183059....$$

Так как все подходящие положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.51) равно вещественному числу:

$$z = 1,5183059e^{io} = 1,5183059....$$

Известна теорема Коха: *Цепная дробь*

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}}$$

с комплексными элементами b_i расходится, если ряд, составленный из элементов b_i сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

В этом случае существуют конечные пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1} = F_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = F_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n+1} = G_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n} = G_2, \quad (13.2.52)$$

и выполняется условие

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = 1.$$

Из соотношений (13.2.52) следует, что пределы четных и нечетных подходящих существуют:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{F_1}{G_1} = \Pi_{2n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{F_2}{G_2} = \Pi_{2n} \quad (13.2.53)$$

Однако существование пределов для четных и нечетных подходящих дробей возможно, если значение числителей P_{2n} , P_{2n+1} и знаменателей Q_{2n} , Q_{2n+1} возрастают ограничено. В цепных дробях, частными числителями которых являются числа Фибоначчи, числители и знаменатели подходящих дробей очевидно неограниченно возрастают и, тем не менее, существуют разные пределы чётных и нечётных подходящих.

Для цепной дроби 13.2.51 можно записать рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + F_{n-2} P_{n-2}, \quad P_1 = 1, \quad P_2 = 2, \\ Q_n &= Q_{n-1} + F_{n-2} Q_{n-2}, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 1, \\ F_1 &= 1; \quad F_2 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \end{aligned}$$

Сходимость знакопостоянной цепной дроби

$$1 + \frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots + \frac{a_n}{1 + \dots}}}$$

определяется скоростью роста частных числителей, то есть отношением a_{n+1}/a_n .

В [78] были рассмотрены тестовые цепные дроби:

$$\zeta^p(-1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} = \frac{\sqrt{2/\pi e}}{\operatorname{erfc}(1/\sqrt{2})} = 1,5251352\dots \quad (13.2.54)$$

$$\zeta^p(-2) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{4^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}} = \frac{1}{\ln 2} = 1,4426950\dots \quad (13.2.55)$$

$$\zeta^p(-3) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^3}{1 + \frac{3^3}{1 + \frac{4^3}{1 + \dots + \frac{n^3}{1 + \dots}}}}} \quad (13.2.56)$$

Цепная дробь (13.2.56) является расходящейся в классическом смысле, так как имеет различные пределы, к которым стремятся четные и нечетные подходящие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,6890810\dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,1054145\dots \quad (13.2.57)$$

Установим скорость роста частных числителей цепной дроби (13.2.51), составленной из чисел Фибоначчи:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{5}{1 + \frac{8}{1 + \frac{13}{1 + \dots + \frac{F_n}{1 + \dots}}}}}}}$$

Отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к "отношению золотого сечения":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180339\dots \quad (13.2.58)$$

где F_n – n -е число Фибоначчи.

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными числителями из квадратов чисел Фибоначчи.

Таблица 13.24

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-p}(F^{(-2)}) = 1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{5^2}{1 + \frac{8^2}{1 + \frac{13^2}{1 + \dots + \frac{F_m^2}{1 + \dots}}}}}}} \quad (13.2.59)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0	16	1,27833825820257
2	1,2	17	1,62158814045291
3	1,71428571428571	18	1,27838578929251
4	1,25179856115108	19	1,62153399291034
5	1,65217391304348	20	1,27840394107887
6	1,26869444670961	...	...
7	1,63261886098873	58	1,27841515853946
8	1,27476503759561	59	1,62150053643089
9	1,62566480901107	60	1,27841515853954
10	1,27702998686365	61	1,62150053643080
11	1,62307934988423	62	1,27841515853957
12	1,27788738379315	63	1,62150053643076
13	1,62210188179463	64	1,27841515853958
14	1,27821375782688	65	1,62150053643075
15	1,62172998151325	66	1,27841515853958

Цепная дробь (13.2.59) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,27841515853958\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,62150053643075\dots$$

Можно записать:

$$\zeta^{-p}(F_m^{(-2)}) = 1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{5^2}{1 + \frac{8^2}{1 + \frac{13^2}{1 + \dots + \frac{F_m^2}{1 + \dots}}}}} = \begin{cases} 1,6215005\dots \\ 1,2784151\dots \end{cases}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.59), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{1,2784151 \cdot 1,6215005} = 1,4397745\dots$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.59) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.59) равно вещественному числу:

$$z = 1,4397745e^{i0} = 1,4397745\dots$$

Отношение соседних частных числителей в цепной дроби (13.2.59) равно квадрату "отношения золотого сечения":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^2 = 2,6180339... .$$

где F_n – n -е число Фибоначчи.

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными числителями из кубов чисел Фибоначчи (Табл. 13.25).

Таблица 13.25

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^{-p}(F_m^{(-3)}) = 1 + \frac{1^3}{1+1} + \frac{2^3}{1+1} + \frac{3^3}{1+1} + \frac{5^3}{1+1} + \frac{8^3}{1+1} + \frac{13^3}{1+1} + \dots + \frac{F_m^3}{1+1} + \dots \quad (13.2.60)$$

n	Значение подходящих дробей	n	Значение подходящих дробей
1	2	16	1,13782889374402
2	0,11111111111111	17	1,72851961189991
3	1,77777777777778	18	1,13782968385967
4	1,13178294573643	19	1,72851818555487
5	1,73949880059205	20	1,13782987038036
6	1,13641545183266	...	...
7	1,73107524858986	39	1,72851774479164
8	1,13749669537375	40	1,13782992801837
9	1,72911954998463	41	1,72851774479146
10	1,13775129880940	42	1,13782992801839
11	1,72865970296794	43	1,72851774479142
12	1,13781136815273	44	1,13782992801840
13	1,72855125047885	45	1,72851774479141
14	1,13782554673656	46	1,13782992801840
15	1,72852565407058	47	1,72851774479141

Цепная дробь (13.2.60) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,13782992801840...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,72851774479141... .$$

Можно записать:

$$\zeta^p(F_m^{(-3)}) = 1 + \frac{1^3}{1+1} + \frac{2^3}{1+1} + \frac{3^3}{1+1} + \frac{5^3}{1+1} + \frac{8^3}{1+1} + \frac{13^3}{1+1} + \dots + \frac{F_m^3}{1+1} + \dots = \begin{vmatrix} 1,7285171... \\ 1,1378299... \end{vmatrix}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.60), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|\Pi_1 \cdot \Pi_2|} = \sqrt{1,1378299 \cdot 1,7285177} = 1,4024118....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.60) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.60) равно вещественному числу:

$$z = 1,4024118e^{i0} = 1,44024118....$$

Отношение соседних частных числителей в цепной дроби (13.2.60) равно кубу "отношения золотого сечения":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^3 = 4,2360672... .$$

где F_n – n -е число Фибоначчи.

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными знаменателями из обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.26).

Таблица 13.26

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_q(F_m^{(-1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{F_m} + \dots} \quad (13.2.61)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	2	16	1,44161812136544
2	1,33333333333333	17	1,70571188892041
3	1,77777777777778	18	1,44167677017259
4	1,40740740740741	19	1,70566986045236
5	1,72946859903382	20	1,44169916514887
6	1,42951907131012	...	...
7	1,71427611463898	61	1,44171300410560
8	1,43718120489857	62	1,70564389212032
9	1,70887646951546	63	1,44171300410564
10	1,43999999950285	64	1,70564389212029
11	1,70686938851304	65	1,44171300410565
12	1,44106129831837	66	1,70564389212028
13	1,70611065273901	67	1,44171300410566
14	1,44146445337368	68	1,70564389212028
15	1,70582198427588	69	1,44171300410566

Цепная дробь (13.2.61) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,70564389212028...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,44171300410566....$$

Можно записать:

$$\varsigma_q(F_m^{(1)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{F_m} + \dots} \quad \left| \begin{array}{l} 1,7056438... \\ 1,4417130... \end{array} \right.$$

Установим значение цепной дроби (13.2.61), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{1,4417130 \cdot 1,7056438} = 1,5681354....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.61) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.61) равно вещественному числу:

$$z = 1,5681354e^{i0} = 1,5681354....$$

Цепная дробь $\varsigma_q(1)$ является сходящейся:

$$\varsigma_q(1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \dots + \frac{1}{n} + \dots}}} = \frac{\pi}{2} \quad (13.2.62)$$

Цепная дробь (13.2.62) сходится чрезвычайно медленно.

Запишем цепную дробь (13.2.61) в эквивалентном виде:

$$\varsigma_q(1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 5}{1 + \frac{5 \cdot 8}{1 + \frac{8 \cdot 13}{1 + \dots + \frac{F_{m-1} F_m}{1 + \dots}}}}}} \quad (13.2.63)$$

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными знаменателями из квадратов обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.27).

Таблица 13.27

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_q(F_m^{(2)}) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{F_m}\right)^2} + \dots \quad (13.2.64)$$

п	Значения подходящих дробей	п	Значения подходящих дробей
1	2,000000000000000	16	1,22880313494203
2	1,200000000000000	17	1,88863312877207
3	1,90243902439024	18	1,22880316860534
4	1,22469982847341	19	1,88863311260574
5	1,89060300152772	20	1,22880317351675
6	1,22820660499556	...	...
7	1,88891958905191	28	1,22880317435533
8	1,22871618075251	29	1,88863310984438
9	1,88867488698786	30	1,22880317435566
10	1,22879048311134	31	1,88863310984423
11	1,88863920463010	32	1,22880317435571
12	1,22880132274836	33	1,88863310984421
13	1,88863399905260	34	1,22880317435571
14	1,22880290421027	35	1,88863310984420
15	1,88863323957777	36	1,22880317435571

Цепная дробь (13.2.64) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,22880317435571...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,88863310984420....$$

Можно записать:

$$\varsigma_q(F^{(2)}) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{F_m}\right)^2} + \dots \quad \left| \begin{array}{l} 1,8886331... \\ 1,2288031... \end{array} \right.$$

Установим значение цепной дроби (13.2.64), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|II_1 \cdot II_2|} = \sqrt{1,2288031 \cdot 1,8886331} = 1,5234034....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.64) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.64) равно вещественному числу:

$$z = 1,5234034...e^{i0} = 1,5234034...$$

Запишем цепную дробь (18.2.64) в эквивалентном виде:

$$\varsigma_q(F^{(2)}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{(1 \cdot 2)^2}{1} + \frac{(2 \cdot 3)^2}{1} + \frac{(3 \cdot 5)^2}{1} + \frac{(5 \cdot 8)^2}{1} + \dots + \frac{(F_{m-1} \cdot F_m)^2}{1} + \dots} \quad (13.2.65)$$

Определим значение знакоположительной цепной дроби с частными знаменателями из кубов обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.28).

Таблица 13.28

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_q(F_m^{(3)}) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3} + \dots \quad (13.2.66)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	2,00000000000000	12	1,1177607966667
2	1,11111111111111	13	1,9625433415755
3	1,96444444444444	14	1,1177608000937
4	1,1173856209150	15	1,9625433406213
5	1,9626482613336	16	1,1177608002846
6	1,1177398405106	17	1,9625433405681
7	1,9625491804532	18	1,1177608002953
8	1,1177596317813	19	1,9625433405652
9	1,9625436659562	20	1,1177608002959
10	1,1177607351729	21	1,9625433405650
11	1,9625433586980	22	1,1177608002959

Цепная дробь (13.2.66) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,1177608002959...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,9625433405650....$$

Можно записать:

$$\varsigma_q(F_m^{(3)}) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3} = \begin{cases} 1,9625433... \\ 1,1177608... \end{cases}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.66), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{1,1177608... \cdot 1,9625433...} = 1,4810989....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.66) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.66) равно вещественному числу:

$$z = 1,4810989...e^{i0} = 1,4810989... \quad (13.2.67)$$

Определим значение знакоотрицательной цепной дроби с частными знаменателями из обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.29).

Таблица 13.29

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_q(F_m^{(1)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{5 - \frac{1}{8 - \frac{1}{13 - \dots}}}}}} \quad (13.2.68)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0,0000000000000000	16	7,462497524488810
2	2,0000000000000000	17	0,427761394004337
3	0,285714285714286	18	7,479932626604230
4	3,5000000000000000	19	0,427861992619356
5	0,3750000000000000	20	7,486615074678370
6	5,154411764705880	...	...
7	0,407841552142280	92	7,490747972663980
8	6,369541597682120	93	0,427916621234109
9	0,420268929716802	94	7,490747972657410
10	7,015934466227610	95	0,427914126384913
11	0,425002203951345	96	7,490747972649820
12	7,301527485873040	97	0,427912773169334
13	0,426808366976937	98	7,490747972644170
14	7,417257495950700	99	0,427911293381783
15	0,427498009786373	100	7,490747972639390

Цепная дробь (13.2.68) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 7,490747972639390...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 0,427911293381783....$$

Можно записать:

$$\varsigma_q(F^{(1)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{5 - \frac{1}{8 - \dots - \frac{1}{F_m}}}}} = \begin{cases} 7,4907479... \\ 0,4279112... \end{cases}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.68), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|II_1 \cdot II_2|} = \sqrt{0,4279112... \cdot 7,4907479...} = 1,7903560....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.68) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.68) равно вещественному числу:

$$z = 1,7903560... e^{i0} = 1,7903560... \quad (13.2.69)$$

Запишем цепную дробь (13.2.68) в эквивалентном виде:

$$\varsigma_q(F^{(1)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1 \cdot 2}{1} - \frac{2 \cdot 3}{1} - \frac{3 \cdot 5}{1} - \frac{5 \cdot 8}{1} - \dots - \frac{F_{m-1} \cdot F_m}{1} - \dots} \quad (13.2.70)$$

Для сравнения: цепная дробь, схожая по структуре с цепной дробью (13.2.70), имеет комплексное значение [78]:

$$\frac{1}{1} - \frac{1 \cdot 2}{1} - \frac{2 \cdot 3}{1} - \frac{3 \cdot 4}{1} - \dots - \frac{(n-1)n}{1} - \dots = i \int \frac{e^{-it} dt}{ch^2 t}. \quad (13.2.71)$$

Определим значение знакоотрицательной цепной дроби с частными знаменателями из квадратов обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.30).

Таблица 13.30

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_q(F_m^{(2)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2} - \dots \quad (13.2.72)$$

п	Значения подходящих дробей	п	Значения подходящих дробей
1	2,0000000000000000	16	0,577167232599968
2	0,6666666666666667	17	1,882043886919910
3	1,897435897435900	18	0,577167115546404
4	0,591194968553459	19	1,882043868737210
5	1,884256615267470	20	0,577167098468517
6	0,579236319568541	...	...
7	1,882366016111510	30	0,577167095551459
8	0,577469478597873	31	1,882043865631270
9	1,882090852211230	32	0,577167095551294
10	0,577211223037377	33	1,882043865631240
11	1,882050720571480	34	0,577167095551270
12	0,577173533886041	35	1,882043865631240
13	1,882044865746950	36	0,577167095551266
14	0,577168034896361	37	1,882043865631240
15	1,882044011546010	38	0,577167095551266

Цепная дробь (13.2.72) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 0,577167095551266...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,882043865631240....$$

Можно записать:

$$\varsigma_{-q}(F_m^{(2)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^2}} = \begin{cases} 1,8820138... \\ 0,5771670... \end{cases}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.72), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|II_1 \cdot II_2|} = \sqrt{0,5771670... \cdot 1,8820438...} = 1,0862535....$$

Так как все подходящие цепной дроби (13.2.72) положительны, то аргумент φ равен нулю. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.72) равно вещественному числу:

$$z = 1,0862535...e^{i0} = 1,0862535... .$$

Запишем цепную дробь (13.2.72) в эквивалентном виде:

$$\varsigma_{-q}(F_m^{(2)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{(1 \cdot 2)^2}{1} - \frac{(2 \cdot 3)^2}{1} - \frac{(3 \cdot 5)^2}{1} - \frac{(5 \cdot 8)^2}{1} - \dots - \frac{(F_{m-1} \cdot F_m)^2}{1} - \dots$$

Определим значение знакоотрицательной цепной дроби с частными знаменателями из кубов обратных чисел Фибоначчи (Табл. 13.31).

Таблица 13.31

Определение значения цепной дроби

$$\varsigma_{-q}(F_m^{(3)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3} - \dots \quad (13.2.73)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	2,000000000000000	14	0,845952185040723
2	0,857142857142857	15	1,962189210805670
3	1,964125560538120	16	0,845952184713528
4	0,846594308178788	17	1,962189210751480
5	1,962296128503420	18	0,845952184695294
6	0,845988092128017	19	1,962189210748460
7	1,962195161948380	20	0,845952184694278
8	0,845954186652616	21	1,962189210748290
9	1,962189542342150	22	0,845952184694222
10	0,845952296266597	23	1,962189210748280
11	1,962189229226930	24	0,845952184694218
12	0,845952190911990	25	1,962189210748280
13	1,962189211778060	26	0,845952184694218

Цепная дробь (13.2.73) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 0,845952184694218...,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = 1,962189210748280....$$

Можно записать:

$$\varsigma_{-q}(F_m^{(3)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{F_m}\right)^3}} = \begin{vmatrix} 1,9621892... \\ 0,8459521... \end{vmatrix}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.73), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|II_1 \cdot II_2|} = \sqrt{0,8459521... \cdot 1,9621892...} = 1,2883780....$$

Значение цепной дроби (13.2.73) установленное r/φ -алгоритму, равно вещественному числу:

$$z = 1,2883780...e^{io} = 1,2883780....$$

Запишем цепную дробь (13.2.73) в эквивалентном виде:

$$\varsigma_{-q}(F_m^{(3)}) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{(1 \cdot 2)^3}{1} - \frac{(2 \cdot 3)^3}{1} - \frac{(3 \cdot 5)^3}{1} - \frac{(5 \cdot 8)^3}{1} - \dots - \frac{(F_{m-1} \cdot F_m)^3}{1} - \dots \quad (13.2.74)$$

Определим значение знакоотрицательной цепной дроби с частными числителями из чисел Фибоначчи с нечётными порядковыми номерами (Табл. 13.32).

Таблица 13.32

Определение значения цепной дроби

$$\lambda^{-p}(F_{2m+1}^{(-1)}) = 1 - \frac{2}{1 - \frac{5}{1 - \frac{13}{1 - \frac{34}{1 - \frac{89}{1 - \dots - \frac{F_{2m+1}}{1 - \dots}}}}} \quad (13.2.75)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	-1,0000000000000000	16	1,985686285413950
2	1,5000000000000000	17	-0,165130853106079
3	-0,411764705882353	18	1,986139501042500
4	1,773109243697480	19	-0,164969443993586
5	-0,252450980392157	20	1,986312664424820
6	1,899789231653570	...	...
7	-0,197476544490831	82	1,986369263897540
8	1,952494951060340	83	-0,164869696257611
9	-0,177207443988927	84	1,986369746611820
10	1,973334615559430	85	-0,164869696252323
11	-0,169565578011754	86	1,986369258789260
12	1,981402813573680	87	-0,164869696251004
13	-0,166660944932426	88	1,986366644273980
14	1,984500655271660	89	-0,164869696251563
15	-0,165553542409374	90	1,986367733524640

Цепная дробь (13.2.77) расходится в классическом смысле, так как пределы чётных и нечётных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,986367733524\dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = -0,164869696251\dots$$

Можно записать:

$$\varsigma^{-p}(F_{2m+1}^{(-1)}) = 1 - \frac{2}{1 - \frac{5}{1 - \frac{13}{1 - \frac{34}{1 - \frac{89}{1 - \dots}}}}} = \left| \begin{array}{l} 1,9863677\dots \\ -0,1648696\dots \end{array} \right.$$

Установим значение цепной дроби (13.2.75), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{0,1648696\dots \cdot 1,9863677\dots} = 0,5722688\dots$$

Так как чётные и нечётные подходящие цепной дроби (13.2.75) разного знака и чередуются, то аргумент φ равен $\pi/2$, так как определяется по формуле r/φ -алгоритма.

$$|\varphi| = \pi \frac{k_n}{n},$$

где k_n – число трицателных подходящих из общего числа подходящих n . По r/φ -алгоритма значение цепной дроби (13.2.75) равно комплексному числу:

$$\varsigma^{-p}(F_{2m+1}^{(-1)}) = 1 - \frac{2}{1 - \frac{5}{1 - \frac{13}{1 - \frac{34}{1 - \frac{89}{1 - \dots - \frac{F_{2m+1}}{1 - \dots}}}}} i0,5722688\dots \quad (13.2.76)$$

Определим значение знакоотрицательной цепной дроби с частными числителями из квадратов чисел Фибоначчи с нечётными порядковыми номерами (Табл. 13.33).

Таблица 13.33

Определение значения цепной дроби

$$\lambda^{-p}(F_{2m+1}^{(-2)}) = 1 - \frac{2^2}{1} - \frac{5^2}{1} - \frac{13^2}{1} - \frac{34^2}{1} - \frac{89^2}{1} - \dots - \frac{F_{2m+1}^2}{1} - \dots \quad (13.2.77)$$

п	Значения подходящих дробей		п	Значения подходящих дробей
1	-3,000000000000000		16	1,19662736316167
2	1,166666666666667		17	-2,40594256893433
3	-2,48186528497409		18	1,19662739946899
4	1,19222532757432		19	-2,40594247956990
5	-2,41682344837512		20	1,19662740476616
6	1,19598448140694		...	...
7	-2,40752589329332		29	-2,40594246430564
8	1,19653358998908		30	1,19662740567096
9	-2,40617339678688		31	-2,40594246430478
10	1,19661371784306		32	1,19662740567101
11	-2,40597615505516		33	-2,40594246430466
12	1,19662540863736		34	1,19662740567102
13	-2,40594737967963		35	-2,40594246430464
14	1,19662711430760		36	1,19662740567102
15	-2,40594318144735		37	-2,40594246430464

Цепная дробь (13.2.77) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 1,19662740567102\dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = -2,40594246430464\dots$$

Можно записать:

$$\varsigma^{-p}(F_{2m+1}^{(-1)}) = 1 - \frac{2^2}{1} - \frac{5^2}{1} - \frac{13^2}{1} - \frac{34^2}{1} - \frac{89^2}{1} - \dots - \frac{F_{2m+1}^2}{1} - \dots = \left| \begin{array}{l} 1,1966274\dots \\ -2,4059424\dots \end{array} \right.$$

Установим значение цепной дроби (13.2.77), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|II_1 \cdot II_2|} = \sqrt{1,1966274\dots \cdot 2,4059424\dots} = 1,6967665\dots$$

Так как чётные и нечётные подходящие цепной дроби (13.2.77) разного знака и чередуются, то аргумент φ равен $\pi/2$. По r/φ -алгоритму значение цепной дроби (13.2.77) равно комплексному числу:

$$\varsigma^{-p}(F_{2m+1}^{(-2)}) = 1 - \frac{2^2}{1} - \frac{5^2}{1} - \frac{13^2}{1} - \frac{34^2}{1} - \frac{89^2}{1} - \dots - \frac{F_{2m+1}^2}{1} - \dots = 1,6967665e^{i\pi/2} = i1.6967665\dots \quad (13.2.78)$$

Определим значение знакопеременной цепной дроби с частными числителями из квадратов чисел Фибоначчи с нечётными порядковыми намерами (Табл. 13.34).

Таблица 13.34

Определение значения цепной дроби

$$\zeta^P(F_m^{(-2)}) = 1 - \frac{1^2}{1 +} \frac{2^2}{1 -} \frac{3^2}{1 +} \frac{5^2}{1 -} \frac{8^2}{1 +} \frac{13^2}{1 -} \dots \quad (13.2.79)$$

n	Значения подходящих дробей	n	Значения подходящих дробей
1	0,0000000000000000	16	0,842920681225874
2	0,8000000000000000	17	-0,526307450361576
3	-1,0000000000000000	18	0,842850482147758
4	0,859504132231405	19	-0,526891228037745
5	-0,403183023872679	20	0,842877294959436
6	0,836646499567848	...	...
7	-0,580729005507767	69	-0,526729826079335
8	0,845260594435512	70	0,842869883975602
9	-0,507165336303206	71	-0,526729826079343
10	0,841958990789526	72	0,842869883975602
11	-0,534353547561541	73	-0,526729826079340
12	0,843218129861999	74	0,842869883975602
13	-0,523840039316285	75	-0,526729826079341
14	0,842736912855184	76	0,842869883975602
15	-0,527836855149012	77	-0,526729826079341

Цепная дробь (13.2.79) расходится в классическом смысле, так как пределы четных и нечетных подходящих дробей различны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 0,842869883975602\dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = -0,526729826079341\dots$$

Можно записать:

$$\zeta^{-P}(F_m^{(-2)}) = 1 - \frac{1^2}{1 +} \frac{2^2}{1 -} \frac{3^2}{1 +} \frac{5^2}{1 -} \frac{8^2}{1 +} \dots - \frac{F_m^2}{1 +} \dots = \begin{vmatrix} 0,8428698\dots \\ -0,5267298\dots \end{vmatrix}$$

Установим значение цепной дроби (13.2.79), используя r/φ -алгоритм:

$$r_0 = \sqrt{|I_1 \cdot I_2|} = \sqrt{0,5267298\dots \cdot 0,8428698\dots} = 0,6663067\dots$$

Так как чётные и нечётные подходящие цепной дроби (13.2.79) разного знака и чередуются, то аргумент φ комплексного числа, которое есть значение цепной дроби равен $\pi/2$:

$$\zeta^P(F_m^{(-2)}) = 1 - \frac{1^2}{1 +} \frac{2^2}{1 -} \frac{3^2}{1 +} \frac{5^2}{1 -} \frac{8^2}{1 +} \dots - \frac{F_{2m+1}^2}{1 +} \dots = 0,6663067e^{i\pi/2} = i0,6663067\dots \quad (13.2.80)$$

ГЛАВА 14

ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

14.1. Ветвящиеся непрерывные дроби

В.Я. Скоробогатько начал предисловие к своей одной из последних книг “Дивлюсь на світ як математик” [59] такими словами: “Людина завжди прагнула пізнати світ у всій його повноті, відкрити загальні закономірності, а не блукати серед частковостей. Ця властивість характерна не тільки для філософії як загальної науки, а й для інших галузей знань і, в першу чергу, для математики”.

Не знаем, как в философии, но в математике дар открывать “загальні закономірності” чрезвычайно редок. Как показывает практика, многие специалисты прекрасно обходятся без этого дара, устраивая со временем свою научную карьеру наилучшим образом. Такое положение вещей иногда искренне возмущало В.Я. Скоробогатько, но он тут же осознавал абсурдность своих сетований и все кончалось острой шуткой.

Ветвящиеся цепные дроби, как математический аппарат, сформировались в работах львовского профессора Виталия Яковлевича Скоробогатько и его учеников во второй половине шестидесятых годов [9, 58]. Достаточно полный свод достижений в теории ветвящихся цепных дробей можно найти в обзорной статье [10].

В.Я. Скоробогатько охотно вспоминал, как он пришел к ветвящимся цепным дробям. Об этом он рассказывал на лекциях и семинарах, на страницах своих книг. В свое время довелось множество раз вести беседы с Виталием Яковлевичем Скоробогатько о ветвящихся цепных дробях. И всякий раз разговор вращался вокруг одних и тех же материй: ветвящиеся цепные дроби идеально приспособлены для адекватного описания в пространственно-временном отношении ветвящихся процессов, коими так богата природа. А посему – ветвящимся цепным дробям уготована на веки вечные завидная судьба, – они всегда будут востребованы. На наивный вопрос: как случилось, что, казалось бы, лежащие на поверхности ветвящиеся цепные дроби ускользали от внимания великих и даже величайших учёных XVIII-XX веков, В.Я. Скоробогатько обычно отвечал: “Раньше жизнь была размеренной и неторопливой. Это в двадцатом веке люди постоянно слышат о цепных ядерных реакциях”.

В этом параграфе мы коснёмся лишь двух аспектов теории ветвящихся цепных дробей – связи этой теории с теорией матриц и теорией графов. Причем, введем иной граф ветвящейся цепной дроби, нежели граф, который рассматривался В.Я. Скоробогатько и П.И. Боднарчуком [58]. Кроме того, исходя из представления ветвящихся непрерывных дробей общего вида отношением определителей, впервые предложенного нами в 1975 г. [74], дадим определение подходящей дроби, которое существенно отличается от ныне принятого в теории ветвящихся цепных дробей. Так как понятие подходящей дроби относится к немногим фундаментальным определениям, то проявим



должную осмотрительность и процитируем соответствующие тексты монографий, где даются определения подходящих для ветвящихся цепных дробей:

П.И. Боднарчук, В.Я. Скоробогатко (1974, [8, с. 43]):

Так, як і для звичайних ланцюгових дробів, вводиться поняття підхідних дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{a_1^{(1)}}{b_1^{(1)} + \dots + b_{1n}^{(1)}}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{a_1^{(1)}}{b_1^{(1)} + \dots + b_{1n}^{(1)} + \frac{a_1^{(2)}}{b_1^{(2)} + \dots + b_{1n}^{(2)}} + \dots + \frac{a_n^{(2)}}{b_{n1}^{(2)} + \dots + b_{nn}^{(2)}}}, \end{aligned} \quad (14.1)$$

.....

В.Я. Скоробогатко (1983, [58, с. 68]):

Конечные ветвящиеся дроби

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{m}{D}} \underset{i_k=1}{\overset{N}{\sum}} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{b_{i_1 i_2 \dots i_k}} = \frac{P_m}{Q_m}, \quad m=0, 1, \dots \quad (14.2)$$

называются подходящими дробями m -го порядка ветвящейся цепной дроби

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \underset{i_k=1}{\overset{N}{\sum}} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{b_{i_1 i_2 \dots i_k}}.$$

Д.И. Боднар (1986, [9, с. 17]):

Конечные ветвящиеся цепные дроби

$$f_n = b_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{D}} \underset{i_k=1}{\overset{N}{\sum}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad n=1, 2, \dots \quad (14.3)$$

называются n -ми подходящими дробями или n -ми аппроксимантами дроби

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \underset{i_k=1}{\overset{N}{\sum}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}.$$

И далее [9, с. 18]:

Характерной особенностью n -й подходящей дроби ветвящейся цепной дроби является то, что все её ветки имеют n этажей.

Итак, в литературе в качестве подходящих дробей ветвящейся цепной дроби приняты конечные ветвящиеся цепные дроби:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2}}}, \\ &\dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= b_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2} + \dots + \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{b_{i_1 i_2 \dots i_k}}}}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Любые компактные записи несут в себе много условностей, понятных лишь посвященным. Разгадывание математических ребусов требует от неискушенного читателя немало сил и зачастую отбивает охоту углубляться в предмет. Поэтому смысл об-

щепринятого определения подходящих дробей проиллюстрируем на примере ветвящейся цепной дроби с коэффициентом ветвления N , равным двум:

$$\begin{aligned}\frac{P_0}{Q_0} &= \frac{b_1}{1}, \\ \frac{P_1}{Q_1} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5} + \frac{a_6}{b_6}}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_7}{b_7} + \frac{a_8}{b_8}} + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_9}{b_9} + \frac{a_{10}}{b_{10}}}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \frac{a_{11}}{b_{11}} + \frac{a_{12}}{b_{12}}} + \frac{a_6}{b_6 + \frac{a_{13}}{b_{13}} + \frac{a_{14}}{b_{14}}}}. \quad (14.5)\end{aligned}$$

Таким образом, переход от подходящей дроби P_n/Q_n к подходящей дроби P_{n+1}/Q_{n+1} связан с заполнением всего $(n+1)$ -го этажа ветвящейся цепной дроби. Число элементов на этаже ветвящейся цепной дроби растёт, как известно, в геометрической прогрессии, то есть чрезвычайно быстро. Если коэффициент ветвления 2, то число звеньев s_n , которые включены в n -ю подходящую дробь, очевидно, определяется формулой

$$s_n = 2^n - 1,$$

то есть, имеем дело с последовательностью чисел:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, \dots$$

Несложно подсчитать, что даже с использованием самых мощных компьютеров ни сейчас, ни в отдалённом будущем, нельзя будет найти значения более, чем нескольких десятков подходящих дробей, если они определены так, как то сделано в цитированной выше литературе.

Здесь надо отметить, что помимо канонического определения подходящих дробей, задаваемых записями (14.1) или (14.2), предусматривались замысловатые вариации. Так, в [58] отмечалось: “Подходящие дроби для ветвящейся цепной дроби можно конструировать и так, чтобы на различных ветках было разное количество этажей. Такие подходящие дроби называются фигурными подходящими дробями”. И приводится простенький пример, как может выглядеть первая фигурная подходящая дробь:

$$\frac{\tilde{P}_1}{\tilde{Q}_1} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_{11}}{b_{11} + \frac{a_{112}}{b_{112}}} + \frac{a_{12}}{b_{12}} + \dots + \frac{a_{1N-1}}{b_{1N-1}}} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}.$$

В [9] так определяются фигурные дроби: “Подходящие дроби можно конструировать и так, чтобы ее различные ветки имели не обязательно одинаковую длину. Такие аппроксиманты называются фигурными подходящими дробями ветвящейся цепной дроби”.

Как видим, фигурные подходящие дроби – объект, расположенный во всяком случае не на столбовой дороге теории. Фундаментальное понятие теории ветвящихся цепных дробей – подходящие дроби, определены так, как то было сделано в монографиях [9, 58]. Эти определения были приведены выше: подходящая дробь – это конечная ветвящаяся цепная дробь, включающая n заполненных этажей. Как говорится, что

Когда было предложено ветвящиеся цепные дроби общего вида записывать отношением определителей, то из самой такой записи естественно вытекало, что подходящие дроби должны определяться иначе, чем принималось основоположниками теории ветвящихся цепных дробей. В [78] нами было дано отличное от вышеприведенных “канонических” определений подходящих дробей, то есть выражений вида (14.2). Подходящая дробь P_n/Q_n была определена отношением определителей $(n+1)$ -го и n -го порядка. Картина получалась аналогичная той, что имела место в обыкновенных цепных дробях: добавление любого нового звена в ветвящейся дроби означало переход от P_n/Q_n к P_{n+1}/Q_{n+1} . Размерность определителей при этом увеличивалась также на единицу. Лучше всего проиллюстрировать, как были введены подходящие дроби, примером. Пусть имеем ветвящуюся цепную дробь с ветвлением 2. Запишем несколько подходящих ветвящейся цепной дроби:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \vdots} + \frac{a_4}{b_4 + \vdots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \vdots} + \frac{a_6}{b_6 + \vdots}}. \quad (14.6)$$

$$\frac{P_0}{Q_0} = b_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 \\ -1 & b_1 \end{vmatrix}}{|b_1|} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & b_1 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & 0 \\ -1 & 0 & b_3 \end{vmatrix}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3}} + \frac{a_2}{b_2},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}} + \frac{a_2}{b_2},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 \end{vmatrix}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5}},$$

.....

Как видим, заполнение этажа никак не фиксируется в структуре определителей. Таким образом, определение подходящей дроби, как ветвящейся цепной дроби с очередным заполненным этажом, введенное в монографиях [9, 58], хотя и выглядит, на первый взгляд, естественным, но не является органичным, фундаментальным. Это определение подходящих следует рассматривать как рабочую версию, вполне приемлемую на начальном этапе развития теории.

В [78] было доказано, что произвольная ветвящаяся цепная дробь может быть записана отношением определителей. Определители, представляющие ветвящиеся непрерывные дроби, имеют “елочную” структуру. Ненулевые элементы a_i расположены симметрично относительно главной диагонали, на которой размещаются частные знаменатели b_i .

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_1^{(1)}}{b_1^{(1)}} + \frac{a_2^{(1)}}{b_2^{(1)}} + \dots + \frac{a_{m_1}^{(1)}}{b_{m_1}^{(1)}}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} + \frac{a_2^{(2)}}{b_2^{(2)}} + \dots + \frac{a_{m_2}^{(2)}}{b_{m_2}^{(2)}}} + \dots$$

$$\dots + \frac{a_k}{b_k + \frac{a_1^{(k)}}{b_1^{(k)}} + \frac{a_2^{(k)}}{b_2^{(k)}} + \dots + \frac{a_{m_k}^{(k)}}{b_{m_k}^{(k)}}}. \quad (14.7)$$

Ветвящаяся цепная дробь (14.7) представляется отношением определителей:

$$\omega = \frac{\Delta_1}{\Delta_2},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_{m_1}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_{m_2}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \dots & a_{m_k}^{(k)} & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m_1}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m_2}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_2^{(k)} & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{m_k}^{(k)} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{vmatrix},$$

Δ_2 – минор M_{b_0} , то есть определитель Δ_1 , из которого вычеркнута первая строка и первый столбец.

Если ветвящаяся цепная дробь бесконечная, то определители Δ_1 и Δ_2 , стоящие, соответственно, в числителе и знаменателе, бесконечно высокого порядка. Подходящие дроби P_n/Q_n определяются, как уже отмечалось выше, отношением определителей $(n+1)$ -го и n -го порядка. Переход от P_n/Q_n к P_{n+1}/Q_{n+1} обуславливается добавлением очередного звена a_i/b_i в ветвящейся цепной дроби.

Отметим, что традиционное, но явно устаревшее определение подходящих дробей, как дроби с заполненным очередным этажом, может использоваться при исследовании сходящихся в классическом смысле ветвящихся цепных дробей, ибо в сходящейся последовательности будет сходящейся и ее подпоследовательность. Ветвящиеся цепные дроби, для которых подходящие дроби определены по Скоробогатько, то есть формулами (14.4), можно рассматривать как сжатые ветвящиеся цепные дроби, подходящие дроби которых составляют весьма малую часть подходящих дробей исходного разложения. Традиционное определение подходящих дробей оказывается совершенно непригодным при суммировании “расходящихся” ветвящихся цепных дробей по Никпорцу. Такое определение, как уже отмечалось выше, дает возможность получить значения лишь нескольких десятков подходящих дробей, в то время, как для установления значений “расходящихся” ветвящихся непрерывных дробей нужно располагать значительно большим количеством подходящих.

В.Я. Скоробогатько опубликовал две монографии по ветвящимся цепным дробям. Первая монография – “Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування”, была написана в соавторстве с Петром Ивановичем Боднарчуком и опубликована в Киеве в 1974 г [8] Вторая книга – “Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике” вышла в 1983 г. в московском издательстве “Наука” [58]. К ветвящимся цепным дробям В.Я. Скоробогатько пришел, руководствуясь некоторыми геометрическими соображениями. Вот что говорилось по этому

поводу в монографии “Гіллясті ланцюгові дробі”: [58, с. 40]: “Есть разные способы открытия нового в математике. Одним из таких способов – геометризация математических фактов. Геометризация делает наглядным свойства математических объектов, которые скрыты за аналитическими выкладками и позволяет догадаться о новых математических закономерностях”.

Цепная дробь

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_5}{b_5 + \frac{a_6}{b_6 + \frac{a_7}{b_7 + \frac{a_8}{b_8 + \frac{a_9}{b_9 + \frac{a_{10}}{b_{10}}}}}}}}}}}} \quad (14.8)$$

складывается из звеньев

$$\frac{a_i}{b_i + r_i}, \quad i=1,2,\dots$$

и представляется по Скоробогатько в геометрической форме (рис. 14.1)

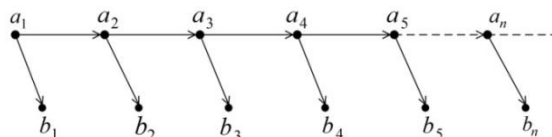
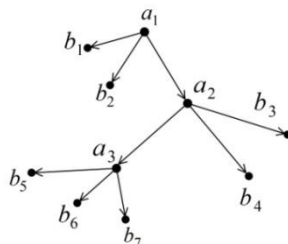


Рис. 14.1. Версия графического изображения обыкновенной цепной дроби.

Тогда, например, приведенному ниже графу



соответствует цепная дробь:

$$\frac{a_1}{b_1 + b_2 + \frac{a_2}{b_3 + b_4 + \frac{a_3}{b_5 + b_6 + b_7}}}$$

Если В.Я. Скоробогатько обыкновенную цепную дробь предлагал представлять графом, показанным на рис. 14.1, то нами в [77] для обыкновенной цепной дроби:

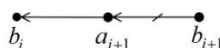
$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_5}{b_5 + \frac{a_6}{b_6 + \frac{a_7}{b_7 + \frac{a_8}{b_8 + \frac{a_9}{b_9 + \frac{a_{10}}{b_{10}}}}}}}}}}}$$

введен такой граф:



Рис. 14.2. Граф обыкновенной цепной дроби.

Такой линейный граф получается, если $b_i + a_{i+1}/b_{i+1}$ обозначить так:



Это позволило предложить более простой граф для описания ветвящейся непрерывной дроби. Например, ветвящаяся непрерывная дробь с ветвлением 2, т. е. дробь

(14.6), может быть представлена графом классически простой формы (рис. 14.3):

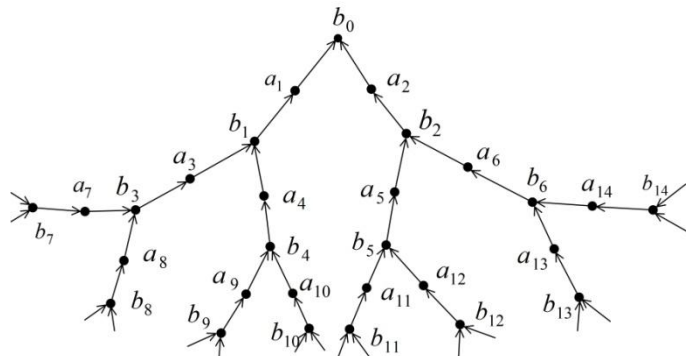


Рис. 14.3. Граф ветвящейся цепной дроби.

Сохранился семистраничный вариант рукописи первой статьи по ветвящимся цепным дробям. Даты в автографе нет, но можно считать, что статья готовилась не позже первой половины 1966 г. Приводим фрагмент первой страницы этой рукописи В.Я. Скоробогатко, несомненно, уже имеющей ценность для историков математики.

В.Я. Скоробогатко. М.С. Дроник. Е.

Гробик. Б.И. Пилипчук

"Ветвящиеся цепные дроби"

Пусть задано некоторое дерево A .

Предположим, что каждой
конечной вершине $V_i^{(k)}$ по-
ставлен в соответствие не-
который оператор $v_i^{(k)}$ и
каждой вершине $V_i^{(k)}$
соответствует оператор $v_i^{(k)}$.
Положим это могут быть числа, функ-
ции и т.д. Рассмотрим граф A
с помощью направленных ребер
которые выходят из корня дерева A_0
Тогда в каждую вершину $V_i^{(k)}$
входит одна линия, а из верши-
ны $V_i^{(k)}$ выходит $m_i^{(k)}$ линий в
соседние конечные вершины. Если
 $m_i^{(k)} = 2$, то тогда будем говорить, что верши-
на $V_i^{(k)}$ является точкой разветвления.
Нулевой этап дерева образует корень
 A_0 и соответствующий оператор v_0
и совокупность ребер, выходящих из
в корневой вершине $V_0^{(0)}$, $i=1, \dots, p$.
Первый этап образует вершину
 $V_1^{(1)}$, $i=1, \dots, p$ и соответствующие
линии во все конечные вершины
 $V_j^{(1)}$, $j=1, \dots, p$.

Сохранились копии писем В.Я. Скоробогатько академику Юрию Владимировичу Линнику (8.01.1915-30.06.1972), выдающемуся специалисту в теории чисел и теории вероятностей, лауреату Ленинской премии, Герою социалистического труда. В письмах имеются сведения о начальном этапе развития теории ветвящихся цепных дробей. Дадим без купюр заключительную часть первого письма, датированного 30 октября 1970 г.: *“Частично также интересуюсь теорией чисел. У нас во Львове сейчас стремительно и успешно развивается теория ветвящихся цепных дробей. Что это такое? Это дроби, когда в знаменателях обычной цепной дроби появляются несколько дробей. (Первая публикация – “Доповіді АН УССР”, 1967 г., №2) Убеждён, что диофантовы уравнения нужно решать именно ветвящимися цепными дробями. У нас получен интересный, как мне кажется, результат: решён вопрос о виде алгебраической иррациональности любой степени. А именно, для того, чтобы число a было алгебраической иррациональностью n -ой степени, необходимо и достаточно, чтобы оно разлагалось в ветвящуюся периодическую цепную дробь. Для уравнения 3-ей степени эта работа скоро выйдет в “Доповідях АН УССР”. Наш ученик Ф.О. Пасичняк оформляет этот результат как диссертационную работу. Разумеется, если Вы не против, то мы можем установить с Вами деловые контакты по этому вопросу. Марковские процессы (теория вероятностей) со счётным числом состояний, как оказалось, изображаются ветвящимися цепными дробями. Это самый естественный аппарат. Словом, ветвящаяся цепная дробь так относится к анализу с несколькими аргументами, как обычная цепная дробь к функциям с одним аргументом. Разумеется, уже есть многочисленные публикации. Как только строго обоснуем разложимость функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби, приступим к написанию суммирующей монографии в этом направлении”*.

Во втором письме В.Я. Скоробогатько к Ю.В. Линнику говорится и о других проводимых им исследованиях. Так как Ю.В. Линник был земляком, – родом из Белой Церкви Киевской области, В.Я. Скоробогатько писал ему на украинском. Приведём это письмо полностью.

Львів, 7. XII, 1970 р.

Вельмишановний Юрію Володимировичу!

Одержав від Вас два листи і відозву на автореферат І.П. Пустомельнікова. Дякую. Автореферат Ви оцінили, з моєї точки зору, точно. Дійсно, цей напрямок перспективний. Завжди хочеться говорити про ті результати, що тепер одержуються, а не про те, що вже одержано. Мій учень Р.В. Слоневський разом з іншими щойно розробив новий метод розв'язування математичних задач економіки на основі гіллястих ланцюгових дробів. Це задачі, які формулюються в термінах марковських процесів (Див. книгу Ховарда). Ми обов'язково цей напрямок доведемо до діла, тобто будуть розроблені стандартні програми і будуть втілені в практику принаймі 2-х обчислювальних центрів. Вже зараз видно переваги цього методу, коли розглядаються великі кількості рівнянь з великою кількістю невідомих (сам цим займатися не буду). Зрозуміло, що краще нам приїхати до Ленінграду в лютому місяці, на початку або в середині. Впевнений, що будуть встановлені наукові контакти, які будуть сприяти прогресу математики, незалежно від загальної орієнтації обох сторін. Дякую за запрошення на дачу, але скажу відверто, що я не дачна людина. Найкращий стан для мене – рибалка бродячого типу (зимою, літом, весною та восени), саме там приходять найкращі думки.

Звичайно, я децю можу розповісти про нашу “універсальну теорію відносності”, але повторю, що вона ще сирувата з точки зору втілення ідей у формули, хоча одномірний (самий важливий) випадок майже повністю зроблено. Зрозуміло, мене ціка-

вить використання одержаних результатів і в оптиці, якщо це можливо, бо промінь світла викривлюється в сфері з неоднорідними оптичними властивостями. Теоретично принаймі можна уявити собі середовище з такими оптичними властивостями, що промінь світла буде рухатися саме по n -точковій прямій, а довільне оптичне середовище можна мабуть апроксимувати з якою завгодно точністю середовищем, де промені світла будуть n -точковими прямими, тому як завгодно точно можна наблизити реальний шлях світла n -точковою моделлю (при досить великому n) і всі ефекти “універсальної теорії відносності” будуть у частинок, що рухаються у такому середовищі по n -точковим прямим. З Вашим батьком можна було би поговорити конкретно в цьому плані. Але чи не старий він для цього. Може йому вже важко мислити. Все ж таки 81 рік – це не 28 років. В усякому разі ми цей напрямок так чи інакше обов’язково доведемо до діла. Заздалегідь дякую за відбитки робіт про арифметичну теорію відносності. Мене завжди цікавили конструктивні математичні побудови, а це мабуть конструктивна річ.

Про книгу М.І. Гаврилова не пишу, вивчимо всі про і контра.

Звичайно, мене особисто цікавлять і інші проблеми математики, наприклад, побудова якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Мені присвоїли звання доктора саме за теорему про “внутрішній діаметр”. Суть її в тому, що перша гранична задача для сильно еліптичної системи однозначно розв’язана, якщо діаметр максимальної кулі, вписаної в дану область, досить малий. (Це буде не завжди). Якщо область опукла, то завжди при досить гладких коефіцієнтах системи. Це типова якісна теорема для рівнянь з частинними похідними; цей напрямок у нас розвивається. Виявилося, що тут є прямий зв’язок з питаннями стійкості плазменого шнура. Якщо би у вас були спеціалісти по плазмі, то корисно було би і з ними зв’язатися.

Ще раз дякую за відозву на автореферат Пустомельнікова.

Щиро бажаю успіхів в науці та організаційних питаннях, зв’язаних з наукою.

З повагою, В. Скоробогатько.

P.S. Дійсно, у нас відбувається швидка інфляція наукових ступенів та звань усіх рангів, але ніколи не буде інфляції справжніх вчених.

Твердые заверения В.Я. Скоробогатько, аналогичные фразе из письма: “Ми обов’язково цей напрямок доведемо до діла, тобто будуть розроблені стандартні програми і будуть втілені в практику”, как правило, не подкреплялись трудовым энтузиазмом его сотрудников и посему повисали в воздухе, производя некоторые его сотрясения и вводя в смятение слабонервных.

В этом письме выразительны слова: “... я не дачна людина. Найкращий стан для мене – рибалка бродячого типу”. У Виталия Яковлевича был годами отлаженный режим, – всем были известны “рыбные” дни – среда и суббота. Однажды весной в середине восьмидесятых подлёдный лов едва не окончился трагически, но обычное самообладание не оставило его, и он, потеряв всю рыбацкую амуницию и значительную часть вещей гардероба, выбрался из казалось бы безнадежной ситуации. Виталий Яковлевич вспоминал фразу, оброненную одним из институтских начальников: “Вы могли здорово подвести коллектив”. В самом деле, памятная история случилась в рабочее время.

В.Я. Скоробогатько любил и умел шутить, что называется, невзирая на лица. Шутки получались не всегда, надо сказать, благодетными. Чего стоит хотя бы телеграмма одному почтеннейшему ученому по случаю 8-го марта. Он трезво смотрел на миропорядок, повторяя пословицу: “Идешь постричь, не забывай, что можешь вернуться обритым”. И странно потому было слышать его сетования на действия товарищей, ответственных за передвижения по научной лестнице, особенно в верхней её части.

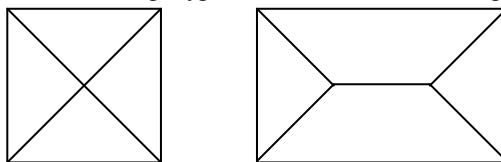
В.Я. Скоробогатько был прекрасным аналитиком. На семинарах он мог часа-

ми исписывать доску выкладками и формулами. И все же В.Я. Скоробогатько признавался, что ему ближе геометрические методы исследований. В одной из последних своих книг “Методы математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння” [51] В.Я. Скоробогатько писал: “В останні 50 років розгорнулася робота по створенню загальної теорії систем диференціальних рівнянь. Громіздкість аналітичного апарату, що при цьому використовується, зумовила розвиток геометричних методів, які роблять теорію більш прозорою і наочною. У цьому напрямку в математичну науку були введені нові поняття, на базі яких одержано нові результати, частину з яких ми тут наводимо”.

И далее идет речь о биссектрисе и внутреннем диаметре тела, – казалось бы простейших геометрических понятиях, которые явились центральным звеном в доказательстве основных теорем докторской диссертации В.Я. Скоробогатько “Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными”. В.Я. Скоробогатько так определяет биссектрису: “Грубіше кажучи, бісектриса фігури є її середньою лінією внаслідок того, що кожна точка $x \in B_D$ локально найбільш віддалена від межі S області D .”

Аналогічно вводиться поняття бісектриси і у випадку області D , розташованої у просторі вимірності $n \geq 3$ ”.

В книге приводятся несколько фигур с обозначением биссектрис:



Обычно В.Я. Скоробогатько прибегал к такому наглядному толкованию биссектрисы плоской фигуры: биссектрисы – это маршруты, по которым должна перемещаться девушка в озере, держась подальше от хулиганов на берегу.

И еще В.Я. Скоробогатько говорил: “Биссектриса угла известна более двух тысяч лет, но биссектриса фигуры введена мною”.

Как опытный педагог, В.Я. Скоробогатько на семинарах, лекциях и в публичных выступлениях часто обращался к притчам, историям, пословицам и поговоркам. Думается, привлечение художественных образов было не просто приемом, позволяющим удерживать внимание аудитории или способом точнее и эффективнее донести до слушателя мысль. Видимо, В.Я. Скоробогатько искренне разделял известный постулат Карла Вейерштрасса: математику требуется воображения не меньше, чем поэту. Дело не в буйстве фантазии, а в общности приемов, присущих как художественному, так и научному творчеству. Поэт, если, конечно, он не графоман от природы, как известно, “изводит единого слова ради тысячи тонн словесной руды”. Схожа технология добывания значимых результатов и у математика. Сейчас для перебора и отсеивания вариантов могут с успехом использоваться компьютеры, – но это уже другой вопрос, и мы его здесь касаться не будем. Следует признать, что деятели искусств ранее и с большим успехом, чем ученые, а тем более, науковеды, пытались, пусть стихийно, постичь законы творчества. Ведь именно Пушкин отчеканил: “И гений, парадоксов друг”. А спустя шесть десятилетий Чехов предложил замечательную формулу: “Краткость – сестра таланта”. В.Я. Скоробогатько на протяжении всей жизни не переставал восхищаться Чеховым. Смеем предположить, что в Чехове он видел не только великого писателя, но и учителя в творчестве. Любопытен такой эпизод. Одному из авторов этой книги довелось декабрьским вечером 1995 г. сопровождать В. Я. Скоробогатько из центра города к его дому на улице Козланюка. Возвращались с “книжковых именин”.

В.Я. Скоробогатько, только что выписавшийся из донецкой клиники, где ему уже не могли помочь, представлял свою последнюю книгу “Методы математики”. Обычно “книжкины именины” справлялись шумно. На этот раз было не до веселья. В.Я. Скоробогатько показал собравшимся в отделе книжку в темно-коричневом переплете, зачитал “Зміст”, несколько фраз, – и все стали мало-помалу расходиться. Мы продвигались по Пекарской, было темно и морозно. Разговор шел о гиблом положении науки, научных карликах, болтунах-демократах и прочих обыденных вещах. Неожиданно Виталий Яковлевич произнес: “С Чеховым мы бы подружились”.

Егор Булычев в пьесе Горького сокрушался перед смертью: “Жизнь прожил не на той улице”. Виталий Яковлевич жил математикой и, похоже, в конце пути был удовлетворен балансом. Здесь вспоминается другой случай, относящийся к декабрю уже 1994 г. Обычно после семинара, если сообщение было удачным, В.Я. Скоробогатько приглашал докладчика, прихватывая еще одного-двух наиболее активных участников семинара, в ближайшее кафе и обсуждение семинара продолжалось в другом интерьере. Была пора купонов, когда компот и копеечный салат из капусты тянули на десятки тысяч денежных единиц. Виталий Яковлевич уже был болен, но внешне это мало в чем проявлялось, семинары же следовали по заведенному порядку – один за другим. Посреди беседы В.Я. Скоробогатько сказал фразу, очень уж диссонировавшую с убогим застольем: “Ветвящиеся цепные дроби обесмертили меня”. В другой раз В.Я. Скоробогатько вспоминал, как навещая приятеля – университетского профессора, дышавшего, что называется, на ладан, услышал от того: “У Вас есть ветвящиеся цепные дроби. Вам можно позавидовать”.

В.Я. Скоробогатько не единожды отмечал, что его высокочтимый учитель академик Ярослав Борисович Лопатинский долгое время относился к его занятиям ветвящимися цепными дробями снисходительно. “В последние годы жизни Лопатинский стал понимать, что ветвящиеся дроби – это серьезно”, – добавлял Виталий Яковлевич.

В.Я. Скоробогатько множество раз подчеркивал, с каким превеликим трудом давались ему и его ученикам первые шаги в теории ветвящихся цепных дробей и такие привычные теперь обозначения и определения. “Это когда сделано, так вроде и думать тут нечего”, – говорил он и продолжал: “Был большой риск. Я испытывал ответственность перед моими первыми аспирантами П.И. Боднарчуком, И.П. Пустомельниковым и Р.В. Слоневским, пошедшими за мною в разработке нового математического аппарата. Но мы победили – направление получило признание”.

В.Я. Скоробогатько по-отечески относился к своим сотрудникам и ученикам. День в отделе он начинал с обхода, как врач своих палат. У каждого из присутствовавших спрашивал: “Успіхи є?” В ответ, как правило, слышалось невнятное бормотание. Виталий Яковлевич любил давать советы, особенно в организации здорового образа жизни. У него всегда наготове были рецепты из народной медицины от тех или иных напастей. Никогда не уклонялся хлопотать “за своих”, хотя чиновничество – обычное или научное, не любил, и кажется, жалел этот отряд человечества.

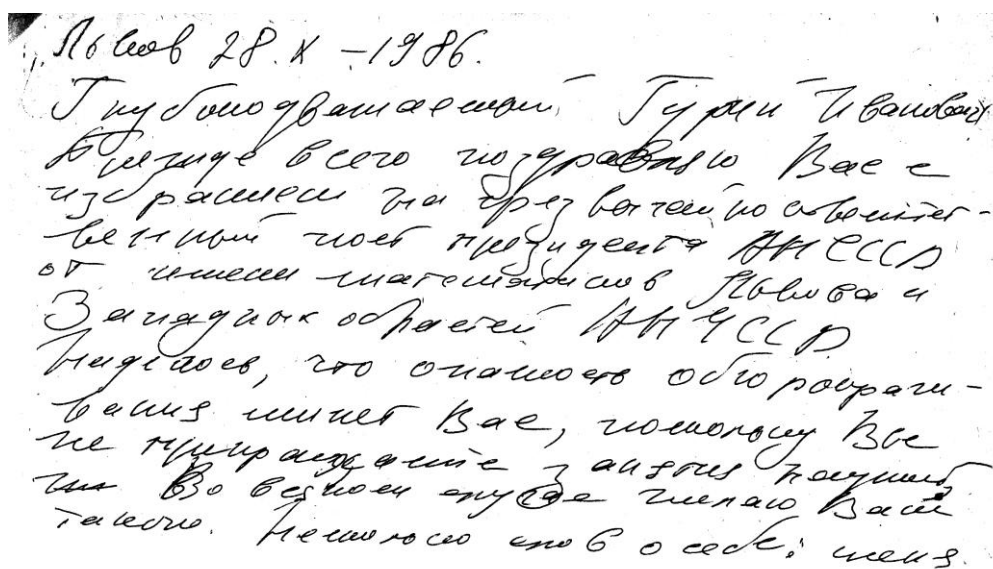
Несмотря на умудренность, В.Я. Скоробогатько проявлял порой откровенную наивность в ряде жизненных ситуаций. Так, ему представлялось, что вот-вот воздастся по заслугам и он будет избран в Академию. В 1978 году не хватило одного голоса, чтоб попасть туда. Виталий Яковлевич очень переживал неудачу, не избежал инфаркта, но считал, что справедливость восторжествует. Однако ситуация с выборами повторялась: всякий раз не хватало “чуть-чуть”.

При приближении 60-летнего юбилея Виталий Яковлевич почти по секрету рассказывал ближайшим сотрудникам, что в мэрии есть мнение отметить его, заслуженного деятеля науки Украины, имеющего десятки учеников и международ-

ное признание, улучшив ему жилищные условия. Известно, что В.Я. Скоробогатько жизнь прожил в небольшой квартире, полученной в начале пятидесятых годов при решающей финансовой поддержке тещи из костромской глухомани. С ростом семейства квартира была уже тесна. По словам Виталия Яковлевича в мэрии обещали не просто новую квартиру, а двухэтажный особняк. Он живо описывал, как на втором этаже особняка разместится его кабинет, в котором непременно расположится доска, чтобы можно было в любой час с мелом в руке вести с учениками обсуждение математических проблем.

Лучшая часть научной и педагогической деятельности В.Я. Скоробогатько прошла, как нам представляется, в доме 3 на тихой улице Кармелюка, где в небольшом зале на первом этаже долгие годы, с 1975 по 1987, шли бесконечные семинары Скоробогатько. Виталий Яковлевич непременно сидел в первом ряду, внимательно слушая докладчика, нередко комментируя с места или выходя к доске.

Семинарские занятия были для В.Я. Скоробогатько формой существования. У нас есть возможность привести фрагмент рукописной страницы из письма В.Я. Скоробогатько к президенту академии наук СССР Гурию Ивановичу Марчуку. Письмо датировано 28 октября 1986 г.



Письмо 28.10 - 1986.
 Глубокоуважаемый Гурий Иванович!
 Благодарю Вас за
 израсход на проведение семинара
 в честь 25-летия Академии наук СССР
 от имени математиков Львова и
 Загладок обещает АН СССР
 благодарю, что означено обнародован-
 бание имени Вас, помощи Вас
 не отрицающие заботы научных
 в во всем мире гласно Вас
 такого. Немало же о себе, меня.

Так как почерк В.Я. Скоробогатько в высшей степени неразборчив, дадим подстрочник завершающего фрагмента:

“... Я могу приехать в Москву вместе со своими учениками и проинформировать Вас более подробно о наших работах. Замечу, что имею 4 еженедельных семинара на протяжении 23 лет (теория ветвящихся цепных дробей, дифференциальные уравнения с частными производными, вычислительная математика, общая теория относительности).

Повторяю, что Ваша поддержка будет поддержкой того, что еще осталось живо от руководства шкурников и карьеристов”.

Действительно, на первой странице цитируемого письма В.Я. Скоробогатько к Г.И. Марчуку говорилось: “Кратко опишу научные достижения современных математиков Львова с тем, чтобы Вы были знакомы с ними, а также с целью установления научных контактов ученых, сгруппировавшихся около Вас и тем, что еще осталось в живых в математической науке на Украине после многолетнего бездарного “руководства” мате-

матикой на Украине со стороны...”. Далее идут конкретные фамилии.

“Истина – конкретна”, – этой краткой фразой В.Я. Скоробогатько часто прерывал туманные разглагольствования. Его раздражало, что, казалось бы, революционная и чрезвычайно перспективная для вычислительной математики теория ветвящихся цепных дробей не встречала не то что энтузиазма, но даже маломальского внимания со стороны научного начальства. “Ведь мы сидим на золоте!”, – возглашал он, и указывал, как на Западе всюю раскручивают куда менее значимые теории.

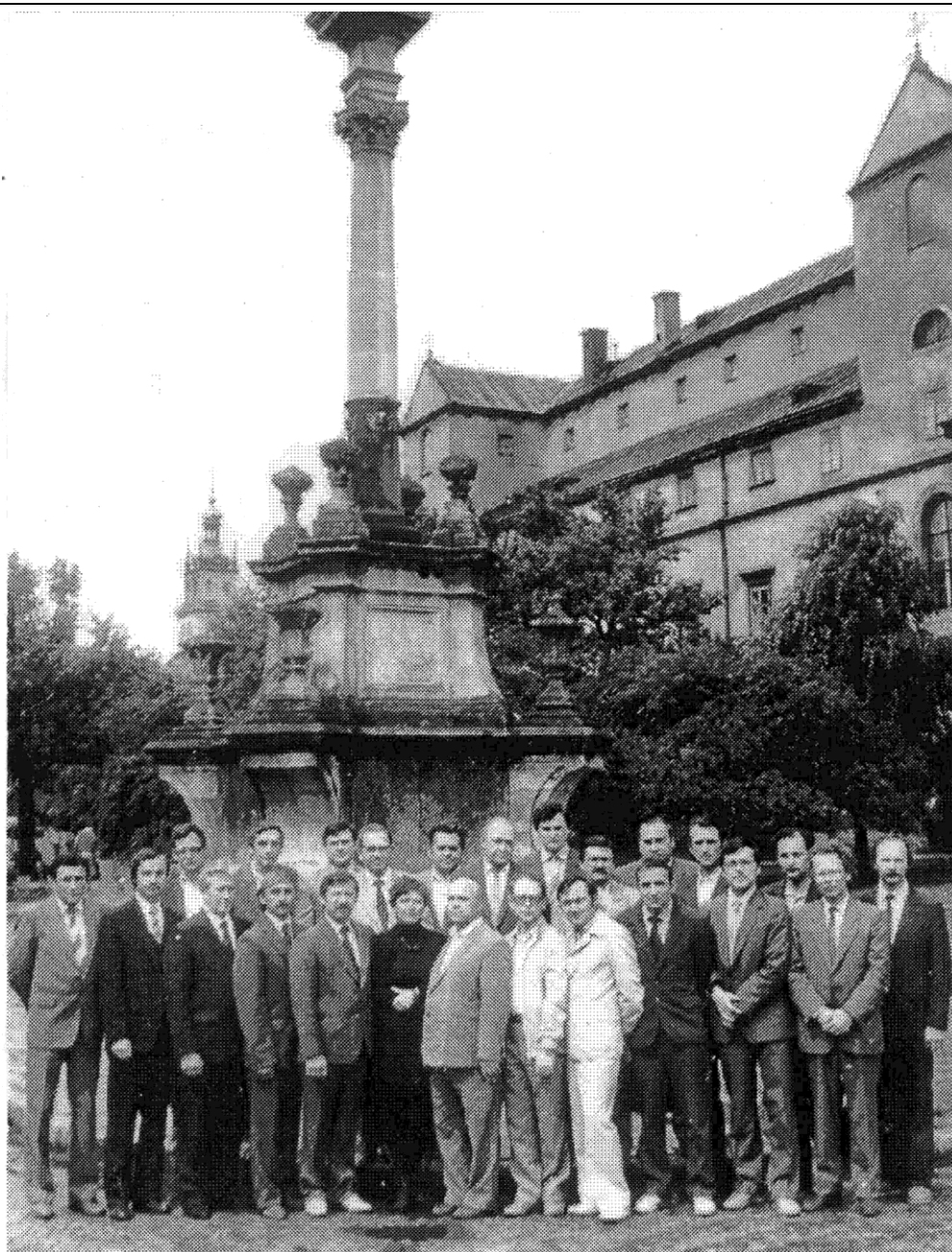
Так-то оно так, но не зря же говорили старые люди: “На Бога надейся, а сам не плошай”. Это меланхолическое замечание не имеет, разумеется, адресата. В книге по цепным дробям [78] уже констатировалось: “Многие специалисты отошли от математического аппарата, который оказался не в состоянии достойно прокормить своего исследователя”.

В.Я. Скоробогатько при случае напоминал, что он автор семи новых направлений в математике. Из семи он особо выделял два своих детища: теорию ветвящихся цепных дробей и многоточечную геометрию. В 1989 году, к двадцатипяти-летнему юбилею клуба творческих математиков, были подготовлены памятные медали, которые бы увековечивали оба творения. Медали были отлиты в незначительном количестве, ибо нашлось мало охотников приобрести их даже за весьма умеренную плату – 10 рублей, хотя качество медалей было отменным. Естественно, памятные медали создавались скульптором-медальером по эскизам Виталия Яковлевича. Основная идея медалей – самые глубокие математические теории рождаются из созерцания и осмысливания окружающего нас мира.

В.Я. Скоробогатько всю жизнь интересовался философией. Это особенно ярко запечатлелось в одной из последних его книг: “Дивлюсь на світ як математик”, которая вышла в 1994 году, и которую он писал, надо полагать, как свое научное завещание. Характерны заголовки параграфов этой небольшой книги: “Біблійні істини з точки зору математики”, “Імовірнісна інтерпретація розв’язків основних рівнянь математичної фізики”, “Розкриття причин імовірнісної природи світу”, “Філософія багаточкової геометрії”, “Простори дробових вимірів”, “Філософія теорії гіллястих ланцюгових дробів”.

И хотя В.Я. Скоробогатько в математике был суровым материалистом, в жизни он находился значительно ближе к идеализму, скептически относясь к откровению марксизма: бытие определяет сознание. Он не разделял кредо людей эпохи рыночных отношений: в начале надо создать прочный экономичный базис, а уж потом можно всерьез заняться делом, в том числе и наукой. Он не сомневался, что такая премудрость ведет в конце концов к жизненному краху. В.Я. Скоробогатько полагал, что жизнь ставит вопросы в ином порядке. Здесь он не был оригинален. Великий химик Д.И. Менделеев, кстати, в свое время проваленный на выборах в Императорскую Академию наук, был свято убежден, что только духовно одаренные люди и способны привести общество к материальному процветанию. Случалось, Виталий Яковлевич глухо роптал, видя, как его ученики, в том числе и талантливые, все более отдаляются от науки, встав на административную стезю.

На фотографии, которая была задумана к юбилею Виталия Яковлевича, отмечавшемуся в июле 1982 года, запечатлены многие его ученики. Как говорится в аннотации к книге “Методы математики”, “Скоробогатько В.Я. створив математичну школу, з якої вийшло вісім докторів наук і біля тридцяти кандидатів наук”. Не все из присутствующих на фотографии обрели с годами общенародную известность, поэтому приведем фамилии:



Первый ряд (слева направо): Крупка З.І., Пелех Я.М., Максимів Є.М., Боднар Д.І., Пташник Б.Й., Кучмінська Х.Й., Марко В.Ф., Кукс Л.М., Ключник І.Ф., Шмойлов В.І., Пелих В.О., Каленюк П.І.

Второй ряд: Комарницький Я.І., Штабальюк П.І., Обшта А.Ф., Боднарчук П.І., Сявавко М.С., Слоновьський Р.В., МIRONЮК П.Й., Мельничук Ю.В., Коробчук І.В., Мойсак П.П., Огирко О.В., Пасічник Т.В.

Во Львове, в центральной части города, на улице Лермонтова, 15 можно видеть мемориальную доску со скульптурным портретом В.Я. Скоробогатько: “У цьому будинку в 1988-1996 роках працював видатний математик, Заслужений діяч науки України, професор Віталій Скоробогатько”.



14.2. Выпускник рабфака

По разному сложились творческие судьбы у таганрогского математика Акима Захаровича Никипорца и львовского профессора Виталия Яковлевича Скоробогатько. А. З. Никипорцу не довелось при жизни увидеть напечатанной ни одной строчки из своих математических рукописей, выполненных карандашом на листах большого формата, покоившихся внушительной стопой на краю его рабочего стола. Но их объединяло стремление через математику продвинуться в понимании закономерностей окружающего мира.

Метод представления степенных рядов в соответствующие цепные дроби, изложенный в главе 2, был предложен таганрогским математиком Акимом Захаровичем Никипорцем. Алгоритм имеется в работе А. З. Никипорца “Практические приемы разложения функций в цепные дроби”, датированной 6 апреля 1957 г., которая была впервые опубликована в 1999 г. в монографии [78].

В этой работе А. З. Никипорцем были также получены многочисленные разложения элементарных функций и их суперпозиций в цепные дроби. А.З. Никипорцу в силу ряда причин не были доступны монографии Оскара Перрона и Хуберта Уолла, вышедшие на Западе, соответственно, в 1929 г. и 1948 г., и поэтому, когда осенью 1957 г. состоялось знакомство с только что вышедшей в свет книгой А. Н. Хованского “Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа” [72], оно принесло малоприятные сюрпризы: большинство из найденных разложений функций в цепные дроби были уже известны. Слабым утешением могло быть то обстоятельство, что найденные им несомненно самостоятельно цепные дроби были получены усилиями многих математиков на протяжении длительного периода времени. В [88] была опубликована другая работа А.З. Никипорца “К доказательству Великой теоремы Ферма”, в которой исследование знаменитой и небезопасной для репутации проблемы проводилось методами теории цепных дробей.

К цепным дробям А.З. Никипорец обращается и в своей, пожалуй, главной, но так и неопубликованной работе «Тройственный принцип в математике и естествознании». Третья глава этой рукописи имеет название: «Разложение обобщенных формул Эйлера в непрерывную дробь. Элементарные полиномы». Приведем три формулы из этой главы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sh(n+1)u}{shnu} = e^u, \quad (14.2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = e^0 = 1, \quad (14.2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = e^{i\varphi}. \quad (14.2.3)$$

Надо сказать, что из странного предела Никипорца (14.2.3), как из зерна, и развивается метод суммирования расходящихся непрерывных дробей. Этот предел на протяжении многих лет был путеводной звездой в смутных поисках новых горизонтов. К цели же приблизили численные эксперименты на компьютере, наблюдения, в терминологии великого Эйлера. Когда пришло понимание этого факта, что значения расходящихся непрерывных дробей закодированы в последовательности подходящих, — найти ключ к коду было, как говорят, дело техники, а скорее — терпения. Но и к пониманию сути проблемы «расходящихся» непрерывных дробей и к разгадке шифра опять-таки вёл предел Никипорца.

Таганрогский математик Аким Захарович Никипорец (22.09.1896-18.05.1972) был человек замечательный, который однако не видел ничего необычного в своей судьбе. Сохранилась написанная им «Автобиография» и «Список работ по математике с краткими пояснениями». Документы, если их публиковать, надо приводить, по возможности, полностью, без купюр и редактирования, — в противном случае публикации в значительной степени теряют свою ценность.



Автобиография

Я родился в 1896 году 22-го сентября н. с. в селе Радичеве Покорницкого района Черниговской области (по новому административному делению) в крестьянской бедной семье. Отец мой работал плотником, мать — домохозяйка. В детстве мне приходилось пасть стада, а когда мне исполнилось двенадцать лет, я работал по найму, — сначала в экономиях (в то время так назывались помещичьи владения), находившихся по соседству с нашим селом; потом работал в качестве чернорабочего на свеклосахарных заводах и также работал по сплаву леса по реке Десне.

Весною 1914 года я уехал на заработки в станицу Геленджик Краснодарского края (новое административное деление), где работал в качестве чернорабочего на цементном заводе французских капиталистов-концессионеров. Империалистическая война 1914 года застала меня работающим на этом заводе.

В августе 1915 года меня мобилизовали в старую армию, где я находился с августа 1915 года по ноябрь 1917 года. Великая Октябрьская Социалистическая революция застала меня в старой армии. За время пребывания в старой армии мне уда-

лось окончить ветеринарно-фельдшерские курсы, на которых я учился сначала в городе Киеве, а потом в небольшой деревушке, находящейся вблизи города Казатина, в которой находился ветеринарный лазарет старой армии.

После демобилизации из старой армии я жил в родном селе, плотничая со своим отцом и в свободное от работы время занимался самообразованием. В марте месяце 1919 года ушел в Красную Армию вместе со своими товарищами односельчанами. В Красной Армии я служил в знаменитом 1-м Богунском полку 44-й Украинской Советской дивизии, которой командовал легендарный полководец Николай Александрович Щорс. В начале 1920 года по болезни меня освободили и поэтому с 1920 года по 1922-й я жил в своем селе. В этот период моей жизни в селе я вступил в комитет неземных селян (в то время он назывался Комнезам), вел культурно-просветительную и политическую работу.

В сентябре 1922 года по разверстке от Комнезама был командирован на учебу в Шосткинский рабфак (город Шостка Сумской области; в этом городе находился рабфак и институт, которые я окончил). Так как я все время занимался самообразованием и был уже достаточно подготовленным, то я поступил на второй курс рабфака и окончил его весной 1924 года. Осенью этого же года я поступил в Шосткинский Химико-Технологический институт на механический факультет. В марте 1930 г. я окончил институт со званием инженера-механика. Одновременно с учебой в институте я также работал на заводе №9, сначала в качестве теплотехника, а потом по окончании института старшим инженером отдела рационализации завода.

Осенью 1930 года дирекция Шосткинского института пригласила меня читать лекции в институте, поэтому я с 1930 года читал техническую механику на химическом факультете. А в 1931 году, учитывая мои способности, мне присвоили звание доцента и поручили читать теоретическую механику на механическом факультете.

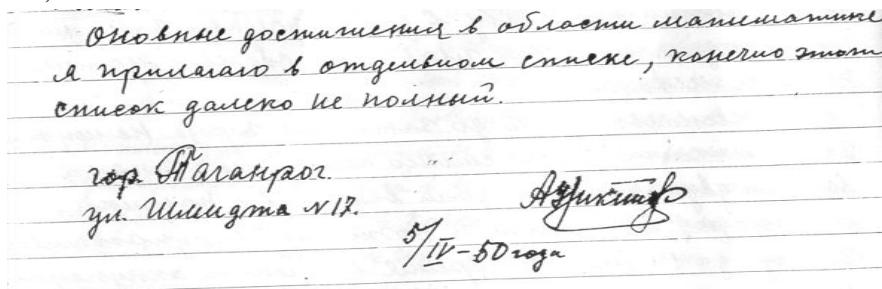
Осенью 1933 года по случаю свертывания работы в институте я переехал на работу в город Таганрог, где и живу по настоящее время. Вначале по приезде в город Таганрог я работал на заводе им. Молотова в качестве инженера-конструктора. Потом мне предложили читать лекции по теоретической механике в Таганрогском институте механизации социалистического сельского хозяйства. В Таганрогском институте механизации я читал лекции по теоретической механике с осени 1933 года по 1941 год, то есть вплоть до временной оккупации города немецкими захватчиками. В Таганрогском институте сначала я числился доцентом по кафедре технической механике, потом и. о. доцента. Так как у меня не было научных трудов и я не имел ученой степени, то меня перевели в старшие преподаватели по кафедре технической механики. Кроме работы в институте, я также работал по совместительству в других учебных заведениях города, где преподавал главным образом математику и механику.

За несколько дней до занятия города немецкими захватчиками я был сильно контужен (упал с высоты двухэтажного дома вследствие поломки лестницы), был болен и поэтому эвакуироваться из города не мог. Во время временной оккупации города немцами я ни одного дня не работал, и кроме того, за оглашение сведений Совинформбюро об успехах Советской Армии подвергался репрессиям со стороны немецких воинских частей, расположенных в нашем районе города; квартира моя была разграблена, а мне приходилось прятаться в течение четырех месяцев у знакомых преподавателей до тех пор, пока эти части не ушли навсегда из города.

В 1943 году после освобождения города Таганрога Советской Армией я еще был настолько болен, что умственной работы не мог нести и поэтому я поступил в Горместпром, где работал в качестве часового мастера с 1943 года по 1947-й. В 1944 году Таганрогский институт механизации приглашал меня на педагогическую работу

и заведывание кафедрой математики и теоретической механики. Но вследствие болезни я за эту работу не мог взяться. К 1947 году я уже полностью выздоровел и приступил к прерванной научно-исследовательской работе. В настоящее время я не работаю, так как у меня есть желание устроиться на педагогическую работу; даю уроки по математике и механике и веду научно-исследовательскую работу в этой же области.

Основные достижения в области математики я прилагаю в отдельном списке, конечно, этот список далеко не полный.



Научно-исследовательскую работу по математике и механике я введу с 1932 года с небольшим перерывом, вызванным Отечественной войной. В последние два-три года я вел научные исследования главным образом по математике и притом ближе к теории чисел. За этот последний период я добился некоторых результатов, – главные из них привожу ниже вкратце.

1) Обобщение формулы Эйлера

Известные формулы Эйлера ($e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$, $e^{\pm u} = \cosh u \pm \sinh u$) мне удалось обобщить некоторым образом. Надо сказать, что вопрос обобщения этих формул не является сколько-нибудь новым. Им еще в свое время занимались Гаусс, Куммер, Золотарев и другие. Но их обобщения преследовали главным образом целевую установку, то есть, говоря кратко, обобщая формулы Эйлера, они этим самым стремились доказать ту или другую теорему, разрешение которой не поддавалось обычным методам. Мои обобщения совершенно иного характера, – они представляют естественное развитие данного вопроса. Известно, что кинематическое значение обычных формул Эйлера состоит в том, что они связаны с движением точки по окружности (или по равносторонней гиперболе в вещественной области). Мои обобщенные формулы связаны с движением точек не по окружности, а по двум взаимно сопряженным эллипсам, причем обобщенных формул оказалось не четыре, как обычно, а восемь (четыре для комплексной области и четыре для вещественной). При деформации эллипсы превращаются в окружность, вследствие этого и обобщенные формулы в этом случае превращаются в обычные.

Обобщенные формулы оказались более гибкими, чем обычные формулы Эйлера. Пользуясь ими, мне удалось получить много новых, до сих пор неизвестных соотношений между известными нам элементарными функциями.

2) Обобщение формул Муавра

Формулы Муавра $(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$; $(\cosh u \pm \sinh u)^n = \cosh nu \pm \sinh nu$ допускают также обобщения, поэтому естественно перейти от обобщенных формул Эйлера к обобщенным формулам Муавра. Это мною также выполнено, причем обобщенные формулы содержат в себе, как частный случай, обычные формулы Муавра и бином Ньютона, то есть я получил формулы, связывающие между собою обычную формулу Муавра и бином Ньютона, чего, конечно, в математической литературе мне не приходилось встречать.

3) *Таблица биномов*

Обобщенные формулы Эйлера можно представить в виде комплексных (не одинаковых) биномов для комплексной области (эллиптическая или периодическая зона таблицы) и показательных биномов (не одинаковых) для вещественной плоскости (гиперболическая или аperiodическая зона таблицы). Между этими основными зонами таблицы, как оказалось, расположилась зона вещественных одинаковых биномов, то есть бином Ньютона, который образовал параболическую (промежуточную) зону. Все эти трех видов биномы, как видите, разместились в своеобразной таблице, имеющей три зоны – эллиптическую, параболическую и гиперболическую. В дальнейшем будем называть эту таблицу – таблицей биномов. Эта таблица имеет очень интересные свойства и в последнее время мне удалось установить, что эта, довольно абстрактная, таблица имеет существенную связь с таблицей Д. И. Менделеева, выражающей периодический закон химических элементов.

4) *Обобщение тригонометрических и гиперболических функций кратных аргументов*

Формулы тригонометрических и гиперболических функций кратных аргументов непосредственно можно получить из обобщения формулы Муавра, причем эти обобщенные формулы содержат в себе, как частный случай, обычные формулы кратных аргументов. Эти формулы мнегодились для разложения в ряды обобщенных формул Эйлера.

5) *Связь обобщенных формул Эйлера с великой теоремой Ферма*

В одном частном случае произведение биномов, выражающих обобщенные формулы Эйлера, представляет уравнение $x^n + y^n = z^n$. В этой области мне также удалось многое сделать, главным образом, мне удалось получить некоторые геометрические иллюстрации, но на этом я здесь останавливаться не буду.

6) *Разложение обобщенных формул Эйлера в ряды*

Пользуясь обобщенными формулами Эйлера и обобщенными формулами кратных аргументов для тригонометрических и гиперболических функций, я разложил обобщенные формулы Эйлера в ряды. Эти ряды интересны тем, что один ряд (обобщенный) содержит в себе, как частные случаи, несколько рядов известных нам элементарных функций; кроме того, комбинация обобщенных рядов представляет собою интегралы некоторых линейных дифференциальных уравнений высшего порядка. Другая комбинация этих рядов представляет некоторые ряды Фурье, поэтому тайна рядов Фурье постепенно раскрывается, то есть геометрический и аналитический смысл простейших рядов Фурье установлен мною в новом аспекте.

7) *Почти периодические функции*

Извлечение корня из обобщенных формул Эйлера приводит нас к так называемым почти периодическим функциям, которые ближе всего примыкают к рядам Фурье, поэтому смысл почти периодических функций выяснен в такой же степени, как и рядов Фурье.

8) *Обобщение геттефункций*

Известные геттефункции (см. Штаерман “Гиперболические функции”) мною также обобщены, то есть мне удалось получить более общие функции, которые содержат в себе, как частный случай, обычные геттефункции. При этом обобщении мне удалось вскрыть некоторые особенности этих функций.

9) *Обобщение интегрального синуса, косинуса, логарифма и интегрального экспоненциала*

Интегральные синус и косинус – тригонометрические и гиперболические, интегральный логарифм и интегральный экспоненциал я также обобщил некоторым образом. Известно, что интегральный логарифм представляет асимптотическую формулу распределения абсолютно простых чисел в натуральном ряду. В конечной области интегральный логарифм всегда дает несколько завышенное значение для числа простых чисел в натуральном ряду. Так как в числитель обобщенного интегрального логарифма входит косинус, значение которого всегда меньше единицы, то обобщенный интегральный логарифм будет давать несколько меньшее значение числа простых чисел и в пределе, когда косинус обратится в единицу, обобщенный интегральный логарифм обратится в обычный интегральный логарифм, то есть в асимптотическую формулу распределения простых чисел в натуральном ряду. У меня есть некоторые основания думать, что обобщенный интегральный логарифм есть точная формула, выражающая действительный закон распределения простых чисел в натуральном ряду, но я этого еще не доказал. Исследования в этой области продолжаются.

10) *Разложение обобщенной формулы Эйлера в непрерывную (цепную) дробь*

Обобщенные формулы Эйлера мне удалось разложить в непрерывную дробь, при этом я получил четырех видов полиномы, которые представляют собою числитель и знаменатель подходящих дробей данной непрерывной дроби. При детальном изучении этих, в сущности говоря, элементарных полиномов выяснилось, что один вид этих полиномов при частном значении переменной обращается в известный ряд Фибоначчи. Давая другие частные значения переменной, я получил бесчисленное множество рекуррентных рядов, аналогичных ряду Фибоначчи. Известно, что ряд Фибоначчи применяется в ботанике при изучении листорасположения на деревьях и растениях (листья на деревьях располагаются не произвольно, а по спиралям, подчиняясь закону ряда Фибоначчи). Быть может, мои ряды, аналогичные ряду Фибоначчи, связаны с некоторыми разновидностями листорасположения.

Этого вида полиномы я вынужден был назвать обобщенным рядом Фибоначчи. При вычислении любого члена ряда Фибоначчи пользуются известной формулой Бине (Ляме). Эту формулу мне так же удалось обобщить и применить ее для вычисления любого члена обобщенного ряда Фибоначчи. Оказалось, что эта обобщенная формула Бине представляет обобщенную формулу для гиперболических синуса и косинуса кратных углов в комплексной области, и что обобщенный ряд Фибоначчи можно исследовать не только в вещественной гиперболической зоне, но и в комплексной, и в промежуточной параболической зоне (вспомним таблицу обобщенных биномов).

Второго вида полиномы при некотором частном значении переменной обращаются в натуральный ряд чисел, поэтому этого вида полиномы я назвал обобщенным натуральным рядом чисел. Обобщенный натуральный ряд чисел можно рассматривать во всех зонах известной уже нам таблицы обобщенных биномов. Он как бы пробегает все зоны таблицы при изменении переменной и в параболической зоне обращается в обычный натуральный ряд чисел.

В математической литературе есть книжка профессора Кудрявцева, в которой излагаются методы суммирования степеней натурального ряда чисел и, кроме того, изучаются числа Бернулли. Я распространил эти методы суммирования и на обобщенный натуральный ряд чисел, то есть я получил формулы суммирования степеней обобщенного ряда чисел, годные для всех трех зон таблицы, и в параболической зоне при частном значении переменной они обращаются в формулы, изложенные в книжке профессора Кудрявцева.

Некоторые виды полиномов при определенном значении переменной обращаются в полиномы академика П. Л. Чебышева (полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля) и в известные полиномы Эрмита.

11) *Связь геометрической прогрессии с обобщенными формулами Эйлера*

В одном частном случае полиномы, о которых говорилось выше, превращаются в геометрическую прогрессию. То есть, мною установлено, что геометрическая прогрессия представляет собою числители и знаменатели подходящих дробей некоторой (конечно, известной) непрерывной дроби. В основе ряда Фибоначчи и натурального ряда чисел также лежит геометрическая прогрессия. В общем выяснилось, что все эти полиномы, в том числе и полиномы Чебышева и Эрмита, получаются из геометрической прогрессии. В дальнейшем исследовании также выяснилось, что многие формулы тригонометрии (циклометрической и гиперболической), в том числе и формулы кратных аргументов, представляют из себя некоторым образом видоизмененные геометрические прогрессии. Даже периодические дроби и многие бесконечные ряды (если не все), в том числе ряды Фурье, получаются из геометрической прогрессии. Наконец, бесконечные произведения для элементарных функций так же можно получить, отправляясь от геометрической прогрессии.

12) *Связь обобщенных полиномов с формулой и рядом Тейлора*

Если выводить формулу Тейлора из конечных приращений функции (см. Гренвилл и Лузин “Дифференциальное исчисление”), то для различных степеней приращения независимой переменной мы получим целый ряд полиномов. Оказалось, что полиномы, о которых мы говорили выше, представляют частный случай полиномов, полученных из формулы Тейлора для всех трех зон известной уже таблицы обобщенных биномов и лишь в одном частном случае вычисленные выше полиномы подчиняются формуле Маклорена. Отсюда, между прочим, выясняется, что в основе формул Тейлора и Маклорена также лежит геометрическая прогрессия. Но геометрическая прогрессия (конечная) имеет две разновидности, соответствующие положительному и отрицательному знаменателю, поэтому и формула Тейлора должна иметь такие же разновидности и это мною установлено. При повышении степени указанных выше полиномов до бесконечности мы из них легко получим бесконечные ряды. В этом случае и формула Тейлора также обращается в ряд. Эти ряды оказались рядами, совпадающими с рядами для обобщенных формул Эйлера.

13) *Бернуллиевы числа и символические непрерывные дроби*

Бернуллиевы числа можно получить из изученных выше полиномов, при том условии, что при разворачивании полинома степени надо обращать в значки. Отсюда следует, что бернуллиевы числа можно получить из некоторой непрерывной дроби. Эту непрерывную дробь можно назвать символической непрерывной дробью.

14) *Бином Ньютона и непрерывная дробь*

Оказывается, что бином Ньютона можно представить как предельный случай непрерывной дроби, когда числитель ее обращается в нуль. Непрерывные дроби, о которых шел разговор выше, являются периодическими, то есть здесь рассматриваются пока только элементарные случаи.

15) *Связь уравнения Пелля с рассмотренными выше полиномами*

Известное уравнение Пелля, встречающееся в теории чисел, также находится в тесной связи с рассмотренными выше полиномами и непрерывными дробями и именно его решения в конечном итоге представляют те же полиномы. Следовательно, уравнения Пелля и его решения основываются также на геометрической прогрессии.

16) *Бинарные квадратичные формы и обобщенные формулы Эйлера*

Исследование бинарных квадратичных форм и особенно определение числа классов

форм тесно связано с обобщенными формулами Эйлера и благодаря применению этих формул исследование бинарных квадратичных форм можно значительно систематизировать.

17) *Малая теорема Ферма и ее обобщение*

Удалось получить несколько более общую теорему или вернее, другую теорему, представляющую разновидность этой теоремы. Сущность ее заключается в следующем:

Если число членов геометрической прогрессии есть абсолютно простое и взаимно простое с знаменателем этой прогрессии, уменьшенным на единицу, то сумма ее членов, уменьшенная на единицу, делится на число членов.

Пользуясь сравнениями, эту теорему можно записать в виде следующей формулы:

$$\frac{q^p - 1}{q - 1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ или } s \equiv 1 \pmod{p},$$

где: p – число членов прогрессии, q – знаменатель и s – сумма.

Легко видеть, что эта теорема в частном случае обращается в теорему Ферма. Конечно, новая теорема, в сущности говоря, ничего нового в науку не приносит, но она раскрывает тайну строения малой теоремы Ферма, – что фундаментом для малой теоремы Ферма является также геометрическая прогрессия и что малую теорему Ферма можно распространить на все области таблицы обобщенных биномов.

18) *Геометрическая прогрессия и деление круга на равные части*

При изучении геометрической прогрессии выяснилось, что она свободно разлагается на множители; и эти множители можно представить в виде следующих бинарных квадратичных форм:

$$\sigma_1 = a^2 + 2ab\cos\varphi + b^2 \text{ и } \sigma_2 = a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2,$$

где угол φ связан с делением круга на равные части.

Сохранилось предание, что на вопрос, что такое дружба, Пифагор ответил, что дружба – это два числа и написал их 220 и 284. Если бы у меня спросили, что такое математика, то я бы с большой уверенностью ответил, что математика – это следующие две бинарные квадратичные формы:

$$\sigma_1 = a\cos^2\beta + 2b\sin\beta\cos\beta + c\sin^2\beta, \text{ где } b = \sqrt{ac}\cos\varphi, \text{ или}$$

$$\sigma_2 = a\sin^2\beta - 2b\sin\beta\cos\beta + c\cos^2\beta, \text{ } b = \sqrt{ac}\sec\varphi.$$

Так распространены эти формы в современной математике.

Мне удалось выяснить, что все соотношения между элементарными и некоторыми высшими трансцендентными функциями (эллиптическими, Гамма и Бета функциями) представляют различные комбинации указанных выше бинарных квадратичных форм.

То есть, эти бинарные квадратичные формы, а вместо с ними и геометрические прогрессии, связанные с делением круга на равные части, то есть связаны с равноугольным многоугольником или даже с многогранником. В конечном итоге они связаны с кристаллографией, то есть со строением вещества – материи. Отсюда может быть легко расшифрована крылатая фраза Фридриха Энгельса – математика есть абстракция от реальных вещей.

Дополнение к основному списку научно-исследовательских работ

1) *Геометрическая теория квадратного уравнения*

Мною разработана геометрическая теория квадратного уравнения, из которой непосредственно следует, что квадратные уравнения тесно связаны с кривыми второго

порядка, то есть, как оказалось, оба корня квадратного уравнения представляют угловые коэффициенты асимптот к данной кривой второго порядка. Также выяснилось, что комплексные корни представляют угловые коэффициенты мнимых асимптот эллипса, поэтому для изучения мнимых корней необходимо перейти в мнимую плоскость. Как выяснилось, *мнимая плоскость получается из вещественной путем поворота последней возле вещественной оси на угол 180°* .

Эти исследования я также распространил и на уравнения третьей степени.

2) *О связи элементов гиперболической геометрии с элементами геометрии Евклида*

Известно, что, пользуясь методом Анри Пуанкаре, можно изучать гиперболическую геометрию на евклидовой плоскости, причем, циклу гиперболической геометрии отвечает обыкновенная окружность эллиптической геометрии, орициклу отвечает окружность, касающаяся оси x -ов, гиперциклу, – окружность, пересекающая ось y -ов и, наконец, прямой гиперболической геометрии соответствует полуокружность.

Мною уставлено, что все эти элементы гиперболической геометрии (в истолковании Пуанкаре) представляют собою известные круги Мора, на которых геометрически интерпретируются нормальные и тангенциальные напряжения. Отсюда следует, что воображаемая геометрия Н. И. Лобачевского тесно связана с материальным миром. Все эти элементы гиперболической геометрии, то есть цикл, орицикл, гиперцикл и прямая, могут быть преобразованы в элементы евклидовой геометрии, причем, цикл преобразовывается в площадь эллипса, орицикл – в площадь, ограниченную некоторой прямой, гиперцикл – в площадь (сектор) гиперболы и, наконец, прямая гиперболической геометрии – в площадь равнобоочной гиперболы.

При этом преобразовании встречаются некоторые кривые четвертого порядка, а именно: 1) преобразование цикла в эллипс связано с так называемой кривой Бусса, 2) преобразование орицикла в прямую связано с обыкновенной окружностью (инверсия), 3) преобразование гиперцикла связано с особой кривой четвертого порядка (гиперболической лемнискатой), и 4) прямая гиперболической геометрии преобразовывается в равнобоочную гиперболу при помощи лемнискаты Бернулли.

Отсюда можно заключить, что в реальном пространстве приемлемы все три геометрические системы; надо только выработать соответствующий словарь для перехода от одной геометрической системы к другой.

Этот краткий список далеко не исчерпывает всех тех вопросов, над которыми я работаю в настоящее время, конечно, возможны и ошибки, в особенности в последнем вопросе, но в таганрогских условиях проверить это весьма трудно.

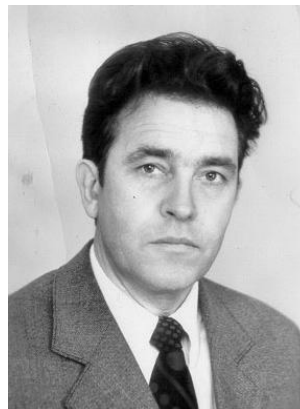
9/IV - 50 г.

А.З. Никипорец

Мы не станем комментировать этот “Список”, отметим лишь, что А.З. Никипорцу свойственен был природный такт и чувство собственного достоинства. Он не робел перед авторитетами и писал: “я получил”, “мне удалось”, “я обобщил” и т. д., а не прятался за художочными конструкциями типа: “мы получили”, “нами доказано” и т. п. Для него существовала одна инстанция, к которой можно было апеллировать, – это Природа, ибо, как считал А.З. Никипорец вслед за классиками марксизма, Природа и порождает математику. Слова Ф. Энгельса – “Математика есть абстракция от реальных вещей” А.З. Никипорец поставил эпиграфом к своей, пожалуй, главной подготовленной к печати работе: “Тройственный принцип в математике и естествознании”, датированной 1948 годом. Эта работа написана карандашом четким почерком на 129 листах большого формата, старательно разлинованных и сброшюрованных в четыре тетради. Пятая, последняя глава, содержит два параграфа: “Тройственный принцип в математике и его физическое обоснование” и “Тройственный принцип в естествознании”.

14.3. Доцент провинциального вуза

В книгах по цепным дробям часто встречается имя Станислава Серафимовича Хлопонина (6.12.1937-21. 05.1993). Специалисты имеют дело с формулами Хлопонина, методом Хлопонина, алгоритмом Хлопонина, с цепными дробями Хлопонина. Известны основное преобразование Хлопонина, интерполяционные формулы Хлопонина, теоремы сходимости Хлопонина, признаки сходимости Хлопонина, критерий Хлопонина, обозначения Хлопонина – всего и не перечислишь, – настолько велик вклад С. С. Хлопонина в теорию непрерывных дробей. Не ставя цели дать здесь сколько-нибудь обстоятельный анализ результатов С. С. Хлопонина, вспомним об этом, как уже позволяет сказать время, выдающемся математике.



В России уровень исследований по аналитической теории цепных дробей в 50-х - 60-х годах двадцатого столетия определялся работами Алексея Николаевича Хованского, с начала 70-х лидерство перешло к его ученику Станиславу Серафимовичу Хлопонину. В нашем распоряжении оказалась небольшая биографическая справка, любезно предоставленная вдовой С. С. Хлопонина Элеонорой Павловной Хлопониной. Ею также передан список работ Станислава Серафимовича Хлопонина, который включен в “Библиографический указатель”[104].

Вот строки биографии С. С. Хлопонина:

- 1961 г. – окончил Ставропольский государственный пединститут,
- 1968 г. – защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук,
- 1965-1993 – работа в Ставропольском государственном педагогическом институте. Заведовал кафедрой алгебры, руководил методическим и научным семинарами, возглавлял проводившиеся на кафедре хозяйственные работы, был ответственным редактором трех сборников научных трудов. С. С. Хлопониным опубликовано 47 научных работ.

Исследования С. С. Хлопонина в основном относились к аналитической теории цепных дробей. Первая работа С. С. Хлопонина называлась “Некоторые преобразования цепных дробей”. Она была напечатана в Ученых записках Марийского пединститута в 1965 году и занимала ни много ни мало – 40 страниц. Такое же название – “Некоторые преобразования цепных дробей” имела и кандидатская диссертация С. С. Хлопонина, которую он выполнил под руководством А.Н. Хованского. Кроме преобразований, С. С. Хлопонина интересовала сходимость цепных дробей. В том же 1965 году С. С. Хлопонин публикует две статьи, относящихся к этой тематике. В последующие годы исследования сходимости цепных дробей становятся, пожалуй, доминирующими в его творчестве. Он получает признание, его статьи регулярно печатают центральные журналы. Будучи блестящим теоретиком, С. С. Хлопонин разрабатывает несколько эффективных схем построения соответствующих и присоединенных цепных дробей. В 1975 году в центральных изданиях появляются две работы С. С. Хлопонина: “Преобразование отношения степенных рядов в правильную С-цепную дробь” и “Преобразование отношения степенных рядов в присоединенные цепные дроби”. Детально разработанные С. С. Хлопониным алгоритмы и по сей день остаются самыми эффективными среди алгоритмов, решающих аналогичные задачи и, несо-

мненно, будут с благодарностью востребованы еще не одним поколением специалистов, занимающихся вычислительной математикой. Становится все явственней: грядет эра дробно-рациональных аппроксимаций. Если последние четыре столетия можно с уверенностью обозначать в исторических хрониках эпохой рядов, то будущее – за непрерывными дробями, понимаемыми в широком смысле. Будущее – за непрерывными дробями различных структур, которые наиболее адекватно в пространственно-временном отношении способны описывать те или иные процессы. Аппроксимации Паде – один и, к слову сказать, далеко не самый перспективный алгоритм построения дробно-рациональных аппроксимаций.

Несколько работ С. С. Хлопонина связаны с решением дифференциальных уравнений при помощи цепных дробей. Это – классическая тематика, идущая от исследований Л. Эйлера.

С. С. Хлопонин с блеском разрабатывал вопросы интерполирования цепными дробями и приближения функций многих переменных так называемыми кратными цепными дробями. Надо сказать, что эти задачи – чрезвычайно сложны, помимо всего прочего, сложны в техническом отношении. Получение здесь обозримых решений – занятие, находящееся на грани человеческих возможностей. Но для С. С. Хлопонина, казалось, не существовало технических трудностей, настолько он свободно владел аппаратом цепных дробей.

С. С. Хлопонин, несомненно, был лучшим знатоком цепных дробей в Союзе. Уникальный математический талант и работоспособность тем не менее не гарантировали ему научной карьеры: докторскую диссертацию он так и не защитил, – не смог заручиться соразмерной событию поддержкой, в том числе, как ни странно, – и в львовской школе цепных дробей, в те годы уже вступавшей в пору зрелости. Думается, лично он не очень нуждался в докторском дипломе – он знал себе цену и цену своим опубликованным результатам. Но за ним были люди – аспиранты и соискатели провинциального вуза, которым самим пробиться было не просто, и регалии не помешали бы.

В 1979 году С. С. Хлопонин подготовил к печати обстоятельную монографию “Цепные дроби”, в которой подытоживал результаты своих многолетних исследований. Сложись все удачно, книга появилась бы раньше, чем “Непрерывные дроби” известных американских специалистов У. Джоунса и В. Трона [38]. Один из авторов настоящей книги оказался в те уже далекие времена соавтором С. С. Хлопонина, написав для монографии раздел по аппроксимации цепными дробями элементарных и специальных функций, а также небольшую главу, в которой цепные дроби различных классов, в том числе и ветвящиеся, представлялись отношениями определителей. Когда книга была полностью готова к печати, и буквы греческого алфавита, встречавшиеся в рукописи, обведены, как и требовала редакция, красным карандашом, соавтору С. С. Хлопонина пришла в голову счастливая мысль – отдать рукопись на рецензирование коллегам из ближнего круга. Рукопись попала в руки требовательной научной молодежи и читалась несколько месяцев, ровно столько, чтобы быть выброшенной из жестких производственных планов издательства “Наукова думка”. Возможно, уроки общения с научной общественностью сказались не самым благотворным образом. Во всяком случае, с начала 80-х годов, С. С. Хлопонин, как видно из списка его работ, редко публиковал новые результаты по теории цепных дробей, более занимаясь депонированием их в ВИНТИ. Если справедливо, что рукописи не горят, то с депонированными рукописями уж точно ничего скверного не случится, и они дождутся своего часа.

В истории цепных дробей Станислав Серафимович Хлопонин навсегда занял место в ряду истинных мастеров.

Как уже отмечалось выше, Станислав Серафимович Хлопонин был учеником замечательного математика А.Н. Хованского.

14.4. Математик из княжеского рода

А.Н. Хованский (1916 г. – 1996 г.) – автор широко известной монографии по цепным дробям [72], которая была переведена на ряд иностранных языков. Еще в 1935 г. вышла книга А.Я. Хинчина «Цепные дроби», которая в последующие годы неоднократно переиздавалась. В книге А.Я. Хинчина рассматривались правильные или, как часто их называли, арифметические цепные дроби, которые в основном используются в теории чисел и при аппроксимации действительных чисел. Первой же книгой по аналитической теории цепных дробей, изданной в СССР, была книга А.Н. Хованского «Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа», вышедшей в свет в 1956 г., которая по сию пору является весьма востребованной.



В 60-х – 70-х годах прошлого века А.Н. Хованский регулярно реферировал работы, выходявшие по теории непрерывных дробей. Один из авторов книги встречался в Калининграде в начале 70-х годов с Алексеем Николаевичем Хованским, от которого узнал, что во Львове профессор В.Я. Скоробогатко разворачивает исследования по ветвящимся цепным дробям. В 2000 г. в Калининграде стараниями вдовы А.Н. Хованского Татьяны Алексеевны Кокаревой вышла замечательная книга «Былое в воспоминаниях и стихах», в которой помещены воспоминания и стихи А.Н. Хованского, и его статьи «О роли языков в моей жизни» и «Как научиться читать на нескольких иностранных языках». Имеются в книге воспоминания коллег Алексея Николаевича. В книге приведена родословная князей Хованских. А.Н.Хованский – из рода князей Хованских, одного из самых знаменитых и древних в России. В общем Гербовнике дворянских родов Всероссийской Империи, издание которого было начато по указу Павла I в 1797 г., князья Хованские помещены на первом месте. А.Н. Хованский знал два десятка иностранных языков.

А.Н. Хованский окончил Казанский университет в 1941 г. и получил специальность математика-геометра. Под руководством профессора Б.М. Гагаева подготовил кандидатскую диссертацию «Некоторые методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений». Эта диссертация послужила, по-видимому, отправной точкой в написании через 10 лет монографии «Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа». Разложения многих элементарных функций в цепные дроби А.Н. Хованский получил как частные случаи цепной дроби, которой представляется решение одного уравнения Риккати по методу Лагранжа.

В соавторстве с профессором Г.С. Салеховым А.Н. Хованским была написана монография «Улучшение сходимости рядов». А.Н. Хованский участвовал в редактировании и составлении комментариев к полному собранию сочинений Н.И. Лобачевского. В 1965 г. А.Н. Хованский опубликовал монографию «Аналитическая геометрия треугольника» (Учёные записки МГПИ, 1965, т.26, с. 5-315). Им опубликовано свыше 50 научных и методических работ. Для реферативного журнала «Математика» А.Н. Хованским написано 90 рефератов, в основном по цепным дробям. Помимо монографии «Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа», опубликованной в 1956 г., им был написан раздел «Цепные дроби», вошедший в книгу «СМБ. Математический анализ» (М., 1961, с.266-327). Книги А.Н. Хованского [72, 26] сыграли важнейшую роль в возникновении интереса к цепным дробям среди российских математиков, занимающихся прежде всего численными методами. Под руководством А.Н.Хованского Г.В. Маурер, Л.П. Шутова и С.С. Хлопонин подготовили кандидатские диссертации по теории цепных дробей.

А.Н. Хованский интересовался историей непрерывных дробей. В 1957 г. в десятом выпуске “Историко-математических исследований” была напечатана его статья “Работы Эйлера по теории цепных дробей”. В 1962 г. вместе с Я.А. Габовичем опубликовал небольшую заметку “Миндинг Ф.Г. и его вклад в теорию цепных дробей”. Ниже публикуем письмо А.Н. Хованского львовскому профессору В.Я. Скоробогатко. Письмо напечатано на машинке и датировано 13 декабря 1970 г. Приводимая в книге фотография А.Н. Хованского относится к 1964 г.

Калининград, 13.XII.70

Многоуважаемый Виталий Яковлевич!

Из письма бывшей аспирантки Людмилы Петровны Шutowой и из автореферата И.П. Пустомельникова я узнал, что вы и ваши ученики успешно занимаетесь теорией цепных дробей и их обобщений и нашли важные новые применения этого алгоритма. Большое спасибо Вам за привет, переданный мне в письме Людмилы Петровны, и за предложение установить контакты для совместной работы.

К сожалению, в том письме не было Вашего адреса, и я послал 15. XI Вам письмо, адресовав его на математическую кафедру Львовского университета. Об этом я сообщил Л.П., и она ответила, что Вы там не работаете, так что моё письмо, вероятно, Вас не достигло. Она прислала Ваш домашний адрес, и я решаюсь им воспользоваться.

Вместе с этим письмом Л.П. прислала автореферат своей диссертации. Я Вам очень благодарен, что Вы любезно согласились стать оппонентом. У Л.П. сначала работа шла быстрыми темпами, и получились интересные результаты, но затем она заболела, перенесла тяжёлые операции, так что это явилось одной из причин задержки окончательного оформления ее диссертации.

Насколько я знаю, Вы переписывается с моим учеником Станиславом Серафимовичем Хлопониным, который успешно защитил кандидатскую диссертацию по теории цепных дробей. Вероятно, вы знаете, что недавно в Москве успешно защитил диссертацию на степень доктора технических наук Николай Александрович Беспалов, применив цепные дроби и их аналоги к решению задач геодезии. В Томске Владимир Евгеньевич Корнилов получил много новых разложений функций в цепные дроби. Всё это очень радует, так как я убеждён, что цепные дроби и их различные обобщения до сих пор ещё не получили в нашей стране, к сожалению, достойного признания и применения.

Из автореферата И.П. Пустомельникова я узнал о некоторых Ваших и его работах и сделал попытку некоторые из них выписать из Москвы – к сожалению, не все указанные там работы имеют точные библиографические координаты.

В прошлом и настоящем учебном году цепными дробями здесь занимается небольшая группа студентов. Ежегодно, уже четвёртый год, я читаю спецкурс по аналитической теории цепных дробей и для более широкой студенческой аудитории. Некоторые студенты получили интересные новые результаты по преобразованию цепных дробей, по условиям сходимости трёхмерных цепных дробей, по геометрической теории цепных дробей, по взаимосвязи алгоритма цепных дробей с алгоритмом матриц. Особенно успешно работает в этом направлении студент В. Шурыгин, очень способный и серьёзный – очень хотелось бы, чтобы он поступил в аспирантуру, но у нас есть аспирантура только по дифференциальной геометрии. Скоро выйдет в свет томик трудов нашей кафедры: там есть моя статья о разложении кубических иррациональностей в трёхмерные периодические дроби общего вида. С удовольствием вышлю Вам эту книжку, как только она появится.

Прошу передать искренний привет И.П. Пустомельникову (не знаю его полных имени и отчества) и другим Вашим ученикам и коллегам.

Теперь вот что. Вчера меня спрашивали, куда я хотел бы поехать в научную командировку в нынешнем учебном году. Я сказал, что хотел бы поехать во Львов, в апреле. Не будет ли у Вас возражений по этому поводу?

Желаю вам всего наилучшего.

Ваш А. Хованский.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление обыкновенных дробей цепными дробями

$$1/2 = 0,5$$

Таблица 1

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.5	0.5
2	0	

$$1/3 = 0,(3)$$

Таблица 2

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.3	0.3
2	0.1	0.3333333333333333
3	0	

$$1/4 = 0,25$$

Таблица 3

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.2	0.2
2	0.25	0.2666666666666667
3	0.25	0.25
4	0	

$$1/4 = 0,5$$

Таблица 4

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.2	0.2
2	0	0.2

$$1/6 = 0,1(6)$$

Таблица 5

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.1	0.1
2	0.6	0.25
3	0.5	0.1666666666666667
4	0	

$$1/7 = 0,(142857)$$

Таблица 6

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.1	0.1
2	0.4	0.1666666666666667
3	0.35	0.14210526315789473684
4	-0.05	0.14285714285714285714
5	-0.014285714285714285714	0.14286770140428677014
6	-0.91428571428571428571	0.14286262176881184322
7	-1.00546875	0.14285708020682124172
8	-0.00546875	0.14285714285714285714
9	0	

$$1/8 = 0,125$$

Таблица 7

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.1	0.1
2	0.2	0.125
3	-0.05	0.126666666666666667
4	-1.25	0.12571428571428571429
5	-1	0.125
6	0	

$$1/9 = 0,(1)$$

Таблица 8

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.1	0.1
2	0.1	0.111111111111111111
3	0	

$$1/10 = 0,1$$

Таблица 9

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.1	0.1
2	0	0.1

$$1/11 = 0,(09)$$

Таблица 10

Номер звена	w	Значения цепной дроби
1	0.09	0.09
2	0.01	0.0909090909090909091
3	0	

$$1/12 = 0,08(3)$$

Таблица 11

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.08	0.08
2	0.0375	0.083116883116883116883
3	-0.0625	0.08333333333333333333
4	0	

$$1/13 = 0,(076923)$$

Таблица 12

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.07	0.07
2	0.085714285714285714286	0.0765625
3	-0.064285714285714285714	0.077058823529411764706
4	-0.29814814814814814815	0.076938304190036291653
5	-0.14814814814814814815	0.076923076923076923077
6	-0.000195652173913043478	0.076923080278004752624
7	1.1998043478260869565	0.07692307844836304006
8	1.0362559112898842203	0.076923076818514360336
9	0.029258429124546410769	0.076923076903954001535
10	0.19300251783466219052	0.076923076923076923077
11	0	

Таблица 13

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.07	0.07
2	0.014285714285714285714	0.071014492753623188406
3	-0.38571428571428571429	0.07166666666666666667
4	-0.36296296296296296296	0.071423047177107501933
5	0.037037037037037037037	0.071428571428571428571
6	0.019285714285714285714	0.07142867755211196458
7	0.91928571428571428571	0.071428626217688118432
8	1	0.071428571428571428571
9	0	

Таблица 14

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.06	0.06
2	0.1	0.0666666666666666667
3	0	

Таблица 15

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.06	0.06
2	0.0333333333333333333333333333	0.06206896551724137931
3	-0.21666666666666666666666667	0.062666666666666666666667
4	-0.28846153846153846154	0.062504672897196261682
5	-0.038461538461538461538	0.0625
6	0	

Таблица 16

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.05	0.05
2	0.16	0.05952380952380952381
3	0.06	0.058888888888888888889
4	0.125	0.058805031446540880503
5	0.24166666666666666667	0.058823045267489711934
6	0.032183908045977011494	0.058823512284318349901
7	-0.018411330049261083744	0.058823521275467626894
8	0.93162326803631151457	0.058823690535700834743
9	0.98222780153961802401	0.058823529543006534869
10	0.015404054638968533312	0.05882352942178230789
11	-0.090721596590728555387	0.05882352940967736479
12	-0.17807289804113215058	0.058823529411659886653
13	-0.060781933366118926117	0.058823529411766048597
14	-0.018885817320322956406	0.058823529411763977488
15	0.3306490750043987555	0.058823529411764484549
16	0.4124755684926773005	0.058823529411764713951
17	0.022324451469026765442	0.058823529411764706746
18	0.11097272045333823346	0.058823529411764705879
19	0.0010330667930639046962	0.05882352941176470588

Продолжение табл. 16

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
20	4.1084061123029795352	0.058823529411764705878
21	4.4835435072087162539	0.058823529411764705883
22	0.027818518475832853953	0.058823529411764705882
23	-0.3086792706727013426	0.058823529411764705882
24	0.0046468566166765275678	0.058823529411764705882
25	0.098251742717013415247	0.058823529411764705882
26	-0.032446106793752940286	0.058823529411764705882
27	0.058150412600093363189	0.058823529411764705882
28	0.35950241416903350521	0.058823529411764705882
29	0.24802389200360576981	0.058823529411764705882
30	-0.011352113753193957442	0.058823529411764705882
31	0	

1/18 = 0,0(5)

Таблица 17

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.05	0.05
2	0.1	0.055555555555555555555555555556
3	0	

1/19 = 0,(05631578947368421)

Таблица 18

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.05	0.05
2	0.04	0.052083333333333333333333333333
3	-0.26	0.052857142857142857142857142
4	-0.2884615384615384615384	0.052637795275590551181
5	-0.0417948717948717948717	0.052631023566654941962
6	-0.0760327198364008179959	0.052631515755476446328
7	-0.1157063795100604916555	0.052631574912998819543
8	0.06605863546909153138296	0.052631579640379684516
9	0.13161841158548952877904	0.052631579052067856248
10	0.19340641335760726365753	0.052631578932135633166
11	0.14241819978462611431406	0.052631578949688678842
12	-0.1632937073066796677739	0.052631578947541226083
13	-0.0848582768431035088335	0.052631578947368421052
14	0	

1/20= 0,05

Таблица 19

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.05	0.05
2	0	

Таблица 20

[illegible]

Таблица 21

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.04	0.04
2	0.125	0.045714285714285714286
3	0.045	0.045434782608695652174
4	-0.08	0.045454545454545454545
5	0	

Таблица 22

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.04	0.04
2	0.075	0.04324324324324324324
3	-0.05833333333333333333	0.04346153846153846153
4	0.09523809523809523809	0.04348623853211009174
5	0.30857142857142857142	0.04347992351816443594
6	0.29944444444444444444	0.04347811229197279841
7	0.09217171717171717171	0.04347830433913217356
8	-0.2864116705212595623	0.04347826519052861986
9	-0.1243893904757237028	0.04347826088738238172
10	0.00414738352706031771	0.04347826086748228977
11	0.09381359319660171907	0.04347826086919628299
12	0.20728230935142346945	0.04347826086959684042
13	0.06967843332065891706	0.04347826086956513325
14	-0.00271267407308055961	0.04347826086956521226
15	0.018081916490811176189	0.04347826086956521086
16	-4.45181554021877002058	0.04347826086956521200
17	-4.50573050843503777859	0.04347826086956521792
18	-0.01572566830460042193	0.04347826086956521739
19	-0.006193225793683484415	0.04347826086956521739
20	0.192134350906675916217	0.04347826086956521739
21	0.296589855418676035999	0.04347826086956521739
22	0.037591770706686462463	0.04347826086956521739
23	0.047434700554702340318	0.04347826086956521739
24	0.059907444477246648530	0.04347826086956521739

Продолжение табл. 22

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
25	0.163063602394256306644	0.04347826086956521739
26	0.206110843549028673549	0.04347826086956521739
27	-0.003530118070216395817	0.04347826086956521739
28	0.2358089130984004904337	0.04347826086956521739
29	0.4781831503100570079050	0.04347826086956521739
30	0.0925506798728947548741	0.04347826086956521739
31	-0.119042866531374920600	0.04347826086956521739
32	0.0236723225318088231209	0.04347826086956521739
33	0.0702978306652267568123	0.04347826086956521739
34	0.0846917320632639535031	0.04347826086956521739
35	0.0822473685416766952019	0.04347826086956521739
36	-0.026219727200105168421	0.04347826086956521739
37	-0.192024974219950280290	0.04347826086956521739
38	-0.093181666812020118469	0.04347826086956521739
39	-0.078253003955434156554	0.04347826086956521739
40	-0.104877166816134695131	0.04347826086956521739
41	0	

 $1/24 = 0,041(6)$

Таблица 23

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.04	0.04
2	0.025	0.041025641025641025641
3	-0.575	0.0425
4	-0.5217391304347826087	0.041674641148325358852
5	-0.021739130434782608696	0.041666666666666666667
6	0	

 $1/25 = 0,04$

Таблица 24

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.04	0.04
2	0	

 $1/26 = 0,0(384615)$

Таблица 25

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.03	0.03
2	0.26666666666666666667	0.040909090909090909091
3	0.21666666666666666667	0.038421052631578947368
4	-0.023076923076923076923	0.038464598249801113763
5	0.076923076923076923077	0.038461538461538461538
6	0.01625	0.038461491524596365766
7	0.86625	0.038461513488945881895
8	1	0.038461538461538461538
9	0	

Таблица 26

Номер звена	Коэффициенты целной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.03	0.03
2	0.23333333333333333	0.0391304347826086956
3	0.2290476190476190476	0.0370301291248206599
4	-0.0042857142857142857	0.0370370370370370370
5	0	

Таблица 27

Номер звена	Коэффициенты цепной дроби	Значения подходящих дробей
1	0.03	0.03
2	0.16666666666666666667	0.036
3	0.02666666666666666667	0.035813953488372093023
4	0.66	
5	0.82954545454545454545	0.035713968465467466134
6	0.003518057285180572851	0.035714213930864908866
7	-0.26496545035761910535	0.035714302544769085768
8	-0.16737287946875932499	0.035714286104067260517
9	-0.0284382637141419225	0.035714285714285714286
10	0	

ЛИТЕРАТУРА

1. Аптекарев А.И., Буслаев В.И., Мартинес-Ф.А., Суетин С.П., Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены, УМН, 66:6(402) (2011), 37–122.
2. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
3. Арнольд В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов, МЦНМО, М., 2007, 120 с.
4. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде.- Пер. с англ.- М.: Мир, 1986.- 502 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.- Т. 1, Т. 2, Т. 3 М.: Наука, 1965-1967.
6. Белоглазов В.В., Бирюк Н.Д., Юргелас В.В. Проблема сходимости бесконечной системы алгебраических уравнений, описывающих вынужденные колебания параметрического контура. // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 175-180.
7. Бескин Н.М. Замечательные дроби. / Минск: “Высшая школа”, 1980. – 125 с.
8. Бондарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наукова думка, 1974. – 272 с.
9. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби.- Киев: Наук. думка, 1986.- 176 с.
10. Боднар Д.І. Кучмінська Х.І. Розвиток Теорії гіллястих ланцюгових дробів у 1996-2016 роках. – Математическі методи та фізико – механічні поля, 2017, 59, (2), 7-18.
11. Брюно А.Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби. – Чебышевский сб., 16:2 (2015), С. 35-65.
12. Буслаев В.И. Рекуррентные соотношения и рациональные аппроксимации. – Дис. д.ф-м.н., М.: МИАН, 2007. – 195 с.
13. Буслаев В.И. Введение в аналитическую теорию непрерывных дробей, М.: Изд-во МИАН, 2006.
14. Быковский В.А., Фроленков В.А. О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем. // Математика сб. 2008:5 (2017), 63-102.
15. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Применение полиномов Чебышева в численном анализе. – Рига: Зинстене, 1984. – 240 с.
16. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. – 304 с.
17. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 139 с.
18. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
19. Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде. Матем. Сб., 118 (160): 4(8)(1982), 535-550.
20. Гончар А.А. Рациональные аппроксимации аналитических функций. Совр. проб. матем., – МИАН, М., 2003, С. 83-106.
21. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100с.

22. Гузик В.Ф., Шмойлов В.И., Кириченко Г.А. Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. № 1 (150). С. 158-174.
23. Гузик В.Ф., Ляпунцова Е.В., Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и их применение. – М.: Физматлит, 2015. – 298 с.
24. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 704 с.
25. Гусев А.Н. Об итогах исследований Л. Эйлера по расходящимся рядам. – Уч. Зап. Костромск. гос. пед. инс-т., 1965.
26. Данилов В.Л., Иванова А.Н., Хованский А.Н. и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби).- Физматгиз, М., 1961. – 439 с.
27. Демьянов В.Ф. Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990. 431 с.
28. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
29. Ерофеева Л.Н. Фрактальная размерность недифференцированных функций. // Труды Нижегородского государственного технического университета, № 3 (90), 2011, С. 353-357.
30. Ильин В.Н., Кузнецов Ю.И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука. 1985. - 208 с.
31. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Физматлит, 1995. – 233 с.
32. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах Под ред. А.П. Юшкевича Т. 3. Математика XVIII столетия.- М.: Наука, 1972.- 495 с.
33. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Гос. изд. Украины, Одесса, 1922 – 521 с.
34. Каганов З.Г. Цепные дроби в электротехнике.- Новосибирск, 1986.
35. Карпенков О.Н. О многомерных цепных дробей модели Клейна: классификация двумерных граней, алгоритмы, примеры.: Дис. ... канд. физ. мат. наук, Москва, 2005. – 162 с.
36. Карташов В.Я., Гутова С.Г. Непрерывные дроби и их приложения к задачам технической кибернетики. – Кемерово: Изд-во КемГУ, 2013. – 138 с
37. Качмар В.С., Русын Б.П., Шмойлов В.И. Алгоритмы вычисления значений цепных дробей.- Ж. выч. матем. и мат. физики, 1998, Т. 38, № 9, 1436-1451.
38. Кириченко Г.А., Шмойлов В.И. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые его применения. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015, том 55, № 4, С. 558-573.
39. Кириченко Г.А., Коровин Я.С., Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей. Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2015. Т.4. № 1. С. 48-56.
40. Козлов В.В. О вещественных решениях систем алгебраических уравнений. // Функц. анализ и его прил., №6, 2017.
41. Козлов В.В. Об одной формуле суммирования расходящихся непрерывных дробей – Доклад на семинаре МИАН по теории функций действительного переменного, МГУ, 17 марта 2017, База данных Math Net Ru.
42. Козлов В.В. Об одной формуле суммирования расходящихся непрерывных дробей – Доклады РАН, Том 474, Номер 4, 2017, С. 410-412.
43. Козлов В.В. Теорема Коши о среднем и непрерывные дроби. // Успехи математи-

- ческих наук, 2017, Т. 72, выпуск 1 (433), С. 195-196.
44. Коровин Я.С., Шмойлов В.И., Хисамутдинов М.В. Классификация состояний нефтепромышленного оборудования с использованием методов линейной алгебры. Нефтяное хозяйство, 2014, №9, с. 37-41
 45. Левин В.И. Сриниваза Рамануджан.- Историко-математические исследования, Том XIII, М.: Физматгиз, 1960.
 46. Левин И.И., Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Функция Вейерштрасса и г/ф-характеристики. // Известия ЮФУ. Технические науки, 2014, №1, С. 144-158.
 47. Левин И.И., Селянкин В.В., Шмойлов В.И. Представление функции Вейерштрасса и ее производной цепными дробями. // Известия ЮФУ. Технические науки, 2016, № 4. – С. 60 – 72.
 48. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 534 с.
 49. Медведев Ф.А. О формировании понятия обобщённого предела.-Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1960, 34, 299-322.
 50. Мехелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1962. – 260 с.
 51. Новиков Л.О., Скоробогатык В.Я. Методы математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння. – Львів: Слово и коммерция, 1995. –219 с.
 52. Парфёнов И.И. Цепные дроби – ожерелье мехатроники. – М.: КамКнига, 2007. – 120 с.
 53. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ.- Киев, Наукова думка, 1984.- 599 с.
 54. Потапов А.А. Колебания, волны, структуры и системы на примерах глобального фрактально-скейлингового метода // Нелинейный мир, 2014, Т. 12, № 4. С. 3-34.
 55. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.
 56. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654.
 57. Селянкин В.В., Шмойлов В.И. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом суммирования расходящихся рядов. // Известия ЮФУ, Технические науки, 2015, №6, с.82-94.
 58. Скоробогатык В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.- М.: Наука, 1983.- 312 с.
 59. Скоробогатык В.Я. Дивлюсь на світ як мат. – Львів: Афіша, 1994. – 74 с.
 60. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовича и М. Стиган. Пер. с англ.- М.: Наука, 1979.- 830 с.
 61. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.
 62. Стахов А.П. Обобщённые золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. // Украинский математический журнал, 2004, Vol 56, №8, 1143 – 1150.
 63. Суетин С.П. Некоторые вопросы сходимости аппроксимации Паде и аналитического продолжения функций // Автореферат дис... д.ф.м.н. Москва, 2001, 28 с.
 64. Сявак М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук думка, 1994. – 205 с.
 65. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. 464 с.
 66. Устинов А.В. Трёхмерные цепные дроби и суммы Клостермана. // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, вып. 3 (423). С. 107-180.
 67. Харди Г. Расходящиеся ряды. // М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. – 504 с.
 68. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400с.
 69. Хинчин А. Я. Цепные дроби.- М.- Л. ОНТИ, 1935.- 104 с.
 70. Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Предельные г/ф-характеристики функции Вейерштрасса. // Нелинейный мир, № 3 Т. 13, 2015. С. 39-52.

71. Хлопонин С.С. Приближение функций цепными дробями. - В кн.: Цепные дроби. - Ставрополь, 1977, 3-102.
72. Хованский А.Н. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. - М.: Гостехиздат, 1956. - 203 с.
73. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII столетиях. - 2-е изд. - М.- Л.: ГОНТИ, 1938. - 456 с.
74. Шмойлов В.И. Соответствующие цепные дроби. - Препринт 75-19 Ин-та кибернетики, Киев, 1975. - 37 с.
75. Шмойлов В.И. Определение значений расходящихся цепных дробей и рядов. - Львов: ИППММ НАН Украины, 1997. - 70 с.
76. Шмойлов В.И. Суммирование расходящихся цепных дробей. - Львов: ИППММ НАН Украины, 1997. - 23 с.
77. Шмойлов В.И. Периодические цепные дроби. - Львов: Академический Экспресс, 1998. - 219 с.
78. Шмойлов В.И., Слобода З.И. Расходящиеся непрерывные дроби. // Нац. академия наук Украины, Институт прикладных проблем механики и математики. - Львов, 1999. - 820 с.
79. Шмойлов В.И., Чирун Л.В. Непрерывные дроби и комплексные числа. // Нац. академия наук Украины, Институт прикладных проблем механики и математики. - Львов, 2001. - 564 с.
80. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и две классические задачи алгебры. - Львов, Меркатор, 2003. - 862 с.
81. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. Библиографический указатель. - Львов: Меркатор, 2003. - 171 с.
82. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями. - Львов: Меркатор, 2003. - 599 с.
83. Шмойлов В.И., Марчук М.В., Тучапский Р.И. Непрерывные дроби и некоторые их применения. - Львов: Меркатор, 2003. - 784 с.
84. Шмойлов В.И., Тучапский Р.И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. - Львов: Меркатор, 2003. - 83 с.
85. Шмойлов В.И. Ультрапериодические непрерывные дроби. - Львов, Меркатор, 2004. - 338 с.
86. Шмойлов В.И., Марчук М.В., Тучапский Р.И. Суммирование непрерывных дробей по Никпорцу. - Львов: Меркатор, 2004. - 513 с.
87. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 1. Периодические непрерывные дроби. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. - Львов, 2004. - 645 с.
88. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 2. Расходящиеся непрерывные дроби. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. - Львов, 2004. - 558 с.
89. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 3. Из истории непрерывных дробей. // Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. - Львов: Меркатор, 2004. - 520 с.
90. Шмойлов В.И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. - Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. - 205 с.
91. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи г/ф - алгоритма. - Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. - 330 с.
92. Шмойлов В.И., Коваленко В.Б. Некоторые применения алгоритма суммирова-

- ния расходящиеся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН, Том 8, № 4, 2012, С. 3-13.
93. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и г/ф-алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. – 2012. – 608 с.
94. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А. Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов. // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 4 (129). С. 210-222.
95. Шмойлов В.И., Савченко Д.И. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. № 2, – 2013, С. 258-276.
96. Шмойлов В.И., Хисамутдинов М.В., Кириченко Г.А.. Интервальные и предельные г/ф-характеристики функции Вейерштрасса. // Вестник МИФИ, 2014, Т. 3, № 3, с. 301-310.
97. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А. Непрерывные дроби в вычислительной математике. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 228 с.
98. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А., Непрерывные дроби. Lap Lambert Academic Publising. – Saarbruken, Germany, 2015. – 336 с.
99. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Лукьянов В.А. О постоянной Эйлера. // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов, 2016, № 4 (118), С. 142-153.
100. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Никулин Н.А. Суммирование расходящихся рядов построением соответствующих цепных дробей. // Приволжский научный вестник, № 8 (60) – 2016. – С. 18 – 31.
101. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Плющенко С.В. О производной функции Вейерштрасса // Приволжский научный вестник. № 1 (53) – 2016. – С. 20-27.
102. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Плющенко С.В. Применение г/ф-алгоритма для определения производной функции Вейерштрасса. // Наука, техника и образование, 2016, № 3 (21), – С. 37-47.
103. Шмойлов В.И., Селянкин В.В., Кириченко Г.А. Об одном алгоритме представления рациональных чисел конечными цепными дробями. // Приволжский научный вестник, № 7 (59). – 2016. – С. 33-44.
104. Шмойлов В.И., Войтулевич В.Ю. Непрерывные дроби. Библиографический указатель. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – 351 с.
105. Шмойлов В.И., Коровин Я. С. Решение систем линейных алгеброических уравнений непрерывными дробями. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017, – 383 с.
106. Шмойлов В.И., Клово А.Г., Войтулевич В.И. Об одном подходе к определению предела функции. – Приволжский научный вестник, 2017, №2, с. 4-13.
107. Шмойлов В.И., Коровин Я. С., Войтулевич В.И. Непрерывные дроби. Библиографический указатель. Lap Lambert Academic Publishing, Saarbruken, Germany, 2017. – 560 с.
108. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных.- М.: Физматгиз, 1961, Т. 1 Перев. Е.Л. Пацановского, вступ. статья А. Шпайзера.
109. Юшкевич А.П. История математики в России. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
110. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.- М.: Наука, 1968.- 344 с.
111. Aitken A.C. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. – Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26), 289-305.
112. Atanassov K.T. Remark on the harmonic series, C. R. Acad. Bulgare Sci., v 40 (1987) n. 5, 25-28; MR 88m:40004.
113. Baxley J.V. Euler's constant, Taylor's formula, and slowly converging series, Math.

- Mag. 65 (1992) 302-313; MR 93j:40001.
114. Baker G.A., Gammel J.L. The Pade approximant in theoretical physics. New York: Academic Press, 1970. – 502 p.
 115. Brent R.P. Computation of the regular continued fraction for Euler's constant, Math. – Corp. 31 (1977) 771-777; MR 55 #9490.
 116. Brent R.P., McMillan E.M. Some new algorithms for high-precision computation of Euler's constant, Math. Comp. 34 (1980) 305-312; MR 82g: 10002.
 117. Brezinky C. History of continued fraction and Pade approximations. – Springer – Verlag, Berlin, 1991. – 547 p.
 118. Bushaw D., Saunders S.C. The third constant, Northwest Sci. 59 (1985) 147-158.
 119. Cuyt A., Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Springer Science. 2008. – 431pp.
 120. Euler L. De tractionibus continuis dissertatio. – Comm. Acad. Petropol., t.9, (1737), 1744, pp. 98-137.
 121. Euler L. De tractionibus continuis observationes. – Comment. Acad. Petropol. t. 11(1739), 1750 pp. 32-81.
 122. Evelyn F. Continued fractions.- University of California, Los Angeles, Calif., 80 p.
 123. Finch S.R. Mathematical constants. – Encyclopedia Math. Appl., 94, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. – 618 p.
 124. Glaisher J.W.L. On the history of Euler's constant, Messenger of Math. 1 (1872) 25-30.
 125. Guzik V.F., Shmoylov V.I., Lyapunsova E.V., Kirichenko G.A.. One of the approaches to the analysis of rapidly oscillating functions. // Transactions on Information and Communication Technologies, Vol. 58, – 2014, p. 405-413.
 126. Hardy D.H. Weierstrass's non differentiable function // Trans-Amer. Math. Soc. 17(1916). pp. 301-325.
 127. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 2. Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics and Continued Fractions.- New York: Wiley, 1977.- 662 p.
 128. Jones W. B., Thron W. I. Continued fractions: Analitic theory and applications. – Addison – Wesley, 1980, vol. 11, 428p.
 129. Karpenkov O. Gepmetry of continned fractions, Algoritms Comput. Math., 26, Springer, Heidelberg, 2013, XVIII – 405 pp.
 130. Lange L.J. An Elegunt Continued Fraction for π . – The American Mathematical Monthly, Voll, №5, 1999, p. 456-458.
 131. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Applications. London – New-York – Tokyo, 1992. – 606 p.
 132. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fraction. Second edition – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantic Press / Word Scientific, 2008. - 308p.
 133. Mellin H.I. Resolution de l'equation algebraique generale a l'aide de la fonction gamma. – C. R. Acad. Sci., Ser. I Math., vol. 172, 658-661, 1921.
 134. Nunemacher Y. On computing Enler's constant, Math. Mag. 65 (1992) 313-322; MR 93j:65042.
 135. Pade H. Sur la representation approchée d'une fonction, par des fractions rationnelles.- Ann. Sci., Ecole Normale Super. (3) 9(1892), 1-93.
 136. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruchen.- Leipzig und Berlin, Teubner, 1913, 520.
 137. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruchen.- 2 ed, Leipzig und Berlin, 1929, 524 p.
 138. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruchen. Bd.1. Elementare Kettenbruche.- Stuttgart, 3 te Aufl, B. G. Teubner Verlagssges, 1954, vi, 194 pp.

139. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Dritte, verbesserte und erweiterte Aufl. Bd. II. Analytisch-funktionen-theoretische Kettenbrüche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957.- 316 pp.
140. Ramanujan S. A series for Euler's constant, Messenger of Math. 46(1917) 73-80.
141. Ramanujan S. Collected papers.- New York, Chelsea, 1962.
142. Rutishauser H. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus.- Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zurich, 1957, № 7, 74 p.
143. Shmoylov V.I., Kirichenko G.A. Algorithm for Summation of Divergent Continued Fractions and Some Applications. // Computational Mathematic and Matematical Physics, 2015, vol.55, №4, pp.549-563.
144. Stieltjes T.J. Recherches sur les fractions continues. – Annales de la Faculte des Sciences Toulouse, 1894, 8, p. 1- 122 ; 1895, 9, p. 1-47.
145. Thron W. J., Waadeland H. On a certain transformation of continued fractions.- Lect. Notes Math., 1982, 932, 225-240.
146. Van Vleck E. B. On the convergence of continued fractions with complex elements.- Trans. Amer. Math., Soc. 2(1901), 205-233.
147. Viscovatov V. Essai d'une méthode générale pour réduire toutes sortes de séries en fractions continues.- Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1806, t.15, p. 181-192.
148. Waadeland H. Linear approximations to continued fractions $K(z_n/1)$.- J. Comp. Appl. Math.- 1987.- 20.- 403-415.
149. Wall H.S. Analytic Theory of continued fractions.- Bronks., N. Y., Chelsen Publ., 1967, XIII, 433 p.
150. Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 2. Berlin 1895. Abh. 6.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (Niels Hendrik Abel, 1802-1829) 127
Аптекарев Александр Иванович (р.1955) 508
Арнольд Владимир Игоревич (1937-2010) 17, 82
Бейкер (George A. Baker) (1937-2010) 508
Бейтмен (Harry Bateman, 1882-1946) 508
Бернулли Д. (Daniel Bernoulli, 1700-1782) 7, 147, 417
Бине (Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856) 409
Благовещенский Юрий Владимирович, 508
Боднар Дмитрий Ильич (р. 1947) 474, 487
Боднарчук Пётр Иванович (1935-1989) 473
Больцано (Bernard Bolzano, 1781-1848) 286
Бомбелли (Rafael Bombelli, 1526-1572) 20, 36
Борель (Emile Borel, 1871-1956) 60
Браудер (Felix E. Browder) 4
Брезински (Claude Brezinski, b. 1941) 513
Броункер (William Brouncker, 1620-1684) 27
Брюно Александр Дмитриевич (р. 1940) 508
Буслаев Виктор Иванович (р. 1950) 508
Быковский Виктор Алексеевич (р.1957) 508
Валлис (John Wallis, 1616-1703) 17, 39
Ван-дер-Варден (Bartel Van der Waerden, 1903-1996) 286
Ван Флек (Edward Burr Van Vleck, 1863-1943) 61
Вейерштрасс (Karl Teodor Weierstrass, 1815-1897) 286
Висковатов Василий Иванович (1780-1812) 70, 160
Воеводин Валентин Васильевич (1934-2007) 508
Воделанд (Haakon Waadeland) 68
Воробьёв Николай Николаевич (р. 1925) 508
Вороной Георгий Феодосьевич (1868-1908) 82
Ворпицкий (Julius Daniel Worpitzky, 1835-1895) 61
Гаврилов Николай Иванович (1927-2004) 482
Ганкель (Hermann Hankel, 1839-1873) 149
Гаусс (Carl Fridrich Gauss, 1777-1855) 17
Гейне (Henrich Edward Heine, 1821-1881) 320
Гершель (John Frederich William Herschel, 1792-1871) 37
Глейшер (James Whitbread Lee Glaisher, 1848-1928) 29, 49
Годунов Сергей Константинович (р. 1929) 12
Гончар Андрей Александрович (1931 – 2012) 508
Градштейн Израиль Соломонович (1899-1958) 508
Грегори (J. Gregory, 1638-1675) 30
Грейвс-Моррис (Peter P. Graves-Morris) 373
Гузик Вячеслав Филиппович (р. 1938) 509
Джонс (Willam Jones, 1675-1749) 27
Джоунс (Willam B. Jones, в 1931) 5, 20
Евклид (365-ок. 300 до н. э.) 81
Зейдель (Philipp Ludwig Seidel, 1821-1896) 59
Ильин В.Н., 509
Иванов Донат Яковлевич (1986) 2
Каган Вениамин Фёдорович (1869-1953) 509
Кантор (Georg Cantor, 1845-1918) 286
Кардано (Girolamo Cardano, 1501-1576) 306
Карпенков Олег Николаевич (1980) 509
Каталан (Engene Charles Catalan, 1814-1894) 428

- Катальди (Pietro Autonio Cataldi, 1548-1626) 20
 Качмар Виталий Семенович (р. 1972) 371
 Кириченко Геннадий Анатольевич (р. 1986) 509
 Кнут (Donald Erwin Knuth, в 1938) 509
 Козлов Валерий Васильевич (р. 1950) 509
 Коровин Яков Сергеевич (1979) 509
 Коутс (Roger Cotes, 1682-1716) 21
 Кох (Niels Fabian Helge von Koch, 1870-1924) 60
 Коши (Augustin Cauchy, 1789-1857) 320
 Кравчук Михаил Филиппович (1892-1942) 16
 Крамер (Gabriel Cramer, 1704-1752) 200
 Кудрявцев Лев Дмитриевич (1923-2012) 4
 Кузнецов Ю.И., 509
 Куммер (Ernst Edward Kummer, 1810-1893) 398
 Курант (Richard Courant, 1888-1972) 374
 Кымпан (Florica Cimpan) 27
 Лагерр (Edmond Nicolas Laguerre, 1834-1866) 374
 Лагранж (Joseph Louis de Lagrange, 1736-1813) 21, 23, 110
 Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728-1777) 23, 24, 28, 110
 Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827) 55
 Левин Виктор Иосифович, 510
 Левин Илья Израилевич (1962) 510
 Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716) 431
 Лейтон (Walter Leighton, b. 1907) 7
 Лежандр (Adrien Marie Legandre, 1752-1833) 17
 Лемер (Derrick Normann Lehmer, 1867-1938) 17
 Линник Юрий Владимирович (1915-1966) 481
 Лобачевский Николай Иванович (1792-1856) 496
 Лонатинский Ярослав Борисович (1906-1981) 484
 Лорентзен (Lisa Lorentzen) 513
 Лудольф (Ceulen Ludolf, 1540-1610) 27
 Люстерник Лазарь Аронович (1899-1981) 509
 Маклорен (C. Maclaurin, 1698-1746) 415
 Марчук Гурий Иванович (1925-2013) 485
 Маскерони (Lorenzo Mascheroni, 1750-1800) 109
 Меллин (H. L. Mellin) 513
 Меркатор (Nicolaus Mercator, 1620-1687) 32
 Милн-Томсон (Lous Melville Milne-Thomson) 54
 Мюир (Thomas Muir, 1848-1934) 43
 Никипорец Аким Захарович (1896-1972) 8, 71, 114, 428, 488
 Никольский Сергей Михайлович (1905-2012) 4
 Новиков Леонид Александрович (1938) 510
 Ньютон (Isaak Newton, 1642-1727) 21, 384
 Паде (Henri Eugène Padé, 1863-1953) 6, 323
 Пелль (John Pell, 1611-1685) 418
 Перрон (Oskar Perron, 1880-1975) 5, 29, 60, 82
 Попов Богдан Александрович (1945-2005) 510
 Прим (Fridrich Prim, 1841-1915) 118
 Прингсхейм (Alfred Pringsheim, 1850-1941) 37, 60
 Просвирина Анна Сергеевна (1907-1979) 83
 Пташник Богдан Иосифович (р. 1937) 487
 Пуассон (Simeon Poisson, 1781-1840) 188, 191
 Пуанкаре (Henri Poincare, 1854-1912) 286, 426
 Пустомельников Иван Павлович (р. 1933) 481
 Рамануджан (Srinivasa Iyengar Ramanujan, 1887-1920) 31
 Риман (Bernhard Riemann, 1826-1866) 147, 204, 286, 427
 Рудио (Ferdinand Rudio, 1856-1929) 29
 Русин Богдан Павлович (р. 1952) 509
 Рутисхаузер (Heinze Rutishauser, 1918-1970) 75, 160
 Рябенский Виктор Соломонович (р. 1923) 12
 Самарский Александр Андреевич (1919-2008) 510
 Серпинский (Waclaw Sierpinski, 1882-1969) 286

- Селянкин Владимир Васильевич (1947) 510
 Скоробогатько Виталий Яковлевич (1927-1996) 5, 64, 473
 Скотт (Walter T. Scott, 1913-1984) 373
 Слешинский Иван Владиславович (1854-1931) 61
 Слобода Маркиян Зиновьевич (р. 1981) 511
 Смирнов Владимир Иванович (1887-1974) 4
 Стилтьес (Thomas Jan Stieltjes, 1856-1894) 147
 Суетин Сергей Павлович (1955) 510
 Сявавко Марьян Степанович (р. 1939) 64, 487
 Тейкроу (D. Theichroew) 56
 Тейлор (Brock Taylor, 1685-1731) 323, 415
 Теплиц (Otto Toeplitz, 1881-1940) 16
 Теслер Геннадий Семенович (1935-2009) 508
 Тиле (Thorvald Nicolai Thiele, 1838-1910) 65
 Трон (Wolfgang Joseph Thron, b. 1918) 5, 68
 Уолл (Hubert Stanley Wall, 1902-1971) 5, 39, 40, 60
 Устинов Алексей Владимирович (1973) 510
 Фейер (Lipót Fejér, 1880-1959) 189
 Ферма (Pierre Fermat, 1601-1665) 488
 Фибоначчи (Leonardo Fibonacci, 1180-1240) 147, 442
 Фихтенгольц Григорий Михайлович (1888-1959) 4
 Флек (Edward Burr Van Vleck, 1863-1943) 61
 Фурье (Joseph Fourier, 1768-1830) 171
 Фюрстену (Eduard Fürstenau, b. 1826) 65
 Харди (Godfrey Harold Hardy, 1877-1947) 104, 314
 Хейлерманн (Johann Bernhard Hermann Heilermann, 1820-1899) 147
 Хемминг (Richard Hamming, 1915-1998) 510
 Хенричи (Peter Henrici) 63
 Хессенберг (Gerhard Wilhelm Hessenberg, 1874-1925) 35
 Хинчин Александр Яковлевич (1894-1959) 17, 82
 Хисамутдинов Максим Владимирович (1986) 510
 Хлопонин Станислав Серафимович (1937-1993) 68, 69, 497
 Хованский Алексей Николаевич (1916-1996) 5, 44, 499
 Цейтен (Hieronimus Georg Zeuthen, 1839-1920) 20
 Чаплыгин Сергей Алексеевич (1861-1942) 478
 Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894) 494
 Чезаро (Ernesto Cesaro, 1859-1906) 187
 Шварц (G. Schwarz, 1849-1921) 77
 Шмойлов Владимир Ильич (р. 1940) 511
 Штерн (Moritz Abraham Stern, 1807-1894) 49
 Штольц (Otto Stolz, 1842-1905) 59
 Эйлер (Leonard Euler, 1707-1783) 4, 17, 20, 23, 39, 108
 Эйткен (Alexander Craig Aitken, 1895-1967) 274
 Эрдейи (Artur Erdélyi, 1908-1977) 508
 Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851) 34
 Янке (E. Janke) 512
 Янпольский А.Р., 509

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм r/φ , 6
– Евклида, 41, 81
– Милн-Томсона, 54
– Рутисхаузера, 75
Алгоритмы вычисления цепных дробей, 50
– адаптивный, 52
– континуант, 55
– матричный алгоритм, 53
– прямой рекуррентный алгоритм, 52
– обратный рекуррентный алгоритм, 51
– Тейкроу, 56
– Δ -алгоритм, 57
– ψ/φ -алгоритм, 57
Алгоритмы построения соответствующих цепных дробей, 62
– Висковатова, 70
– Рутисхаузера, 75
– Никипорца, 71
– Хейлерманна-Стилтьеса, 65
– Хлопонина, 69
Аппроксимация Паде, 6
- Бернулли задача, 48
– тождество, 48
Бесконечное произведение, 28, 398
– Валлиса, 28
– цепная дробь, 29
Бинарные квадратичные формы, 373
Биссектриса фигуры, 483
- Вейерштрасса функция, 287
– обобщённая, 312
– производная, 314
- Граф непрерывной дроби, 35
– ветвящейся, 36
– восходящей, 36
– обыкновенной, 35
– Хессенберга, 36
Граф QD-алгоритма, 77
Графики подходящих дробей, 95
- Диагональные аппроксимации, 6
- Дзета-функция Римана, 427
– Никипорца, 428
– Фибоначи, 441
Дробно-линейные преобразования, 39
Детерминантная формула, 42
Диофантовы уравнения, 42
Единица гиперболическая, 8
– параболическая, 8
– эллиптическая, 8
- Запись цепной дроби, 37
– Гершеля, 37
– Прингсхейма, 37
Звено цепной дроби, 38
Знак φ -характеристики, 303
- Квадратические иррациональности, 21
– цепная дробь, 21
Континуанта, 55
- Лейбница ряд, 28, 142, 431
– цепная дробь, 29, 431
Логарифмическая функция, 94
– цепная дробь, 94, 109
Лудольфово число, 98
– цепная дробь, 98
- Матричная форма записи, 53
Меркатора ряд, 32
– цепная дробь, 32
- Наилучшие приближения, 42
Неопределённые уравнения, 42
Неперово число, 24
– цепные дроби, 24
Неполные гамма-функции, 30
– цепные дроби, 30
Неполные частные, 38
Непрерывные дроби, 17
– ветвящиеся, 34, 64
– восходящие, 34
– интегральные, 64
– Никипорца, 16
– обобщённые, 33
– Скоробогатко, 34

– – Хессенберга, 13, 64

Обобщенные формулы Муавра, 491

– – Эйлера, 491

Обобщенные комплексные числа, 375

– гетифункции, 391

– интегральный минус, 392

– интегральный логорифм, 394

– ряд натуральных чисел, 413

Обратные тригонометрические функции, 28

– – – цепные дроби, 28

Операции с комплексными числами, 347

– – – сложение, 347

– – – произведение, 361

– – – деление, 366

Определители, 33

– Ганкеля, 123

– Никипорца, 16

– Скоробогатыко, 34

– Теплица, 16

– Хессенберга, 35

– Якоби, 34

Определители бесконечного порядка, 33

Остаток цепной дроби, 37

Осцилляция значений подходящих, 10

Отношение ортогональных полиномов, 8

– золотой пропорции, 27

Отрезок цепной дроби, 37

Периодические цепные дроби, 40

– – – обыкновенные, 41

– – – смешанные, 41

– – – Хессенберга, 35

Подходящие дроби, 33, 38

Показательная функция, 22

– – цепная дробь, 22

Полиномы ортогональные, 8

– Чебышева, 8

– – цепная дробь, 8

Постоянная Эйлера-Маскерони, 108

– Каталана, 428

Правильная C -дробь, 63

Предел Никипорца, 8

Предел функции, 320

– – по Гейне, 320

– – по Коши, 321

– – по r/φ -алгоритму, 322

Преобразования цепных дробей, 45

– Бернулли, 48

– Глейшера, 49

– Штерна, 49

– Эйлера, 46

Производящая функция, 92, 138

Равноценные ряды, 46

Разностные схемы, 264

– – сходящиеся, 265

– – расходящиеся, 266

Рамануджана формула, 18

– – комплексная, 18

Растяжение цепных дробей, 49

Расходимость цепных дробей, 57

– – – несущественная, 59

– – – существенная, 59

Расходящиеся ряды, 104

Рекуррентные формулы, 39

– – Валлиса, 39

Ряд гармонический, 110

– – цепная дробь, 110

– Вейерштрасса, 287

– Грегори, 29

– Лейбница, 28, 142

– Меркатора, 32

– обобщённый, 420

– Тейлора, 415

– тригонометрический, 171, 204

– – цепная дробь, 172

– Фурье, 176

– – цепная дробь, 178

– Эйлера, 17

– – цепная дробь, 17

Свойство вилки, 44

Системы бесконечные, 13

Сжатие цепных дробей, 49

Соответствующие непрерывные дроби, 62

– – ряды, 78

Способ средних арифметических, 187

– степенных числителей, 187

Сопряжённые цепные дроби, 101

Суммы Фейера, 188

Суммирование по Никипорцу, 6

Суммирование рядов, 16

– – по Висковатову, 62

– – по Никипорцу, 16

Схема QD-алгоритма, 75

Сходимость непрерывных дробей, 39, 58

– – – условная сходимость, 59

– – – безусловная сходимость, 59

– – – в классическом смысле, 58

– – – в узком смысле, 59

– – – в широком смысле, 59

– – – несущественная расходимость, 59

– – – по Зейделю, 46

– – – по Никипорцу, 6

– – – с положительными элементами, 44

– – – существенная расходимость, 59

-
- Теорема Бореля, 40
 – Лагранжа, 42
 – Штольца, 49
 – Эйлера, 21
 Теоремы о сходимости цепных дробей, 58
 – Ван Флека, 61
 – Ворпицкого, 61
 – Зейделя, 59
 – Коха, 60
 – Прингсхейма, 60
 – Слешинского, 60
 – Уолла, 60
 – Штерна, 59
 Тождество Бернулли, 47
 – Глейшера, 49
 – Штерна, 49
 – Эйлера, 46
 Трёхдиагональный определитель, 34
 Тригонометрические функции, 94
 – цепные дроби, 94
 Тройственный принцип, 425
- Фибоначчи** числа, 442
 Формула Кардано, 201
 – Валлиса, 399
 – Крамера, 272
 – Лапласа, 55, 119
 – Никипорца, 8
 – Рамануджана, 18
 – Хейлсманна–Стилтьеса, 65
 – Хлопонина, 68
 – Эйлера, 7
 – Вейерштрасса, 287
 – цепная дробь, 290
 Функция Безинковича, 286
 – Больцана, 286
 – Никипорца, 17
 – Римана, 286
 – фрактальная, 287
- Характеристики функции $W(a, b, x)$, 130
 – интегральные, 290
 – предельные, 290
Цепные дроби, 39, 33, 37
 – арифметические, 21
 – бесконечные, 18
 – Броункера, 27
 – Гаусса, 31
 – Глейшера, 29
 – Евклида, 21
 – знакоположительные, 44
 – инверсные, 38
 – Каталди, 20
 – конечные, 38
- Коутса, 21
 – Лагерра, 31
 – Лагранжа, 23
 – Ламберта, 23, 28
 – Лапласа, 17
 – Никипорца, 437
 – общего вида, 33
 – обыкновенные, 32
 – периодические, 42
 – Перрона, 29
 – правильные, 40
 – предельно-периодические, 85
 – присоединённые, 63
 – простейшие, 21
 – равноценные, 26, 46
 – растянутые, 23
 – Рамануджана, 16
 – регулярные, 21
 – сжатые, 23
 – соответствующие, 62
 – Стилтьеса, 63
 – Тиле, 65
 – Трона, 64
 – ультрапериодические, 10
 – Фибоначчи, 432
 – функциональные, 22
 – Чебышева, 63
 – Эйлера, 28
 – Эйлера–Ламберта, 20
 – эквивалентные, 26
 – С-дробь, 63
 – J-дробь, 63
 – G-дробь, 63
 – P-дробь, 63
 – S-дробь, 63
 – T-дробь, 64
- Частный знаменатель дроби**, 38
 – числитель непрерывной дроби, 38
 Частных и разностей алгоритм, 66
 Числа Бернулли, 24, 417
 – Каталана, 82
 – Лудольфа, 27
 – Фибоначчи, 83
 – Эйлера, 135
- Эквивалентные преобразования, 46
 Элементарные полиномы, 400
- Ядро Пуассона**, 109

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ.....	20
ГЛАВА 1. НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	33
Обобщённые непрерывные дроби (33). Цепные дроби (36). Цепные дроби и дробно-линейные преобразования (39). Правильные цепные дроби и некоторые их применения (46). Некоторые формулы теории цепных дробей (42). Эквивалентные преобразования цепных дробей (45). Равноценные цепные дроби (46). Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей (49). Алгоритмы вычисления значений цепных дробей (50). Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей (58).	
ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ	62
Классификация непрерывных дробей (62). Формулы Хейлсберга-Стилтьеса (65). Формулы Хлопонина (68). Рекуррентный алгоритм Хлопонина (69). Алгоритм Висковатова (70). Метод Никитина (71). Рекуррентный алгоритм Рутисхаузера (75). Построение соответствующего ряда для цепной дроби (78).	
ГЛАВА 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ КОНЕЧНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ	81
Алгоритм Евклида (81). Разложение рациональных чисел в конечные цепные дроби алгоритмом Рутисхаузера (82). Представление простейших дробей конечными цепными дробями (89). Метод производящих функций (92).	
ГЛАВА 4. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ.....	94
О цепных дробях, представляющих $\ln(-1)$ (94). Расходящиеся ряды, имеющие комплексные значения (103). О постоянной Эйлера (108).	
ГЛАВА 5. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА	119
Определение значений расходящихся рядов построением соответствующих цепных дробей (119). О производящих функциях второго порядка (122). Примеры построения производящих функций (124). Суммирование рядов, связанных с функцией $\beta(n)$ (135). Суммирование цепными дробями некоторых расходящихся рядов (140). О некоторых аспектах метода соответствующих цепных дробей (143).	
ГЛАВА 6. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ.....	147
Определение производящих функций для рядов, включающих числа Фибоначчи (147). Определение производящих функций для рядов с числами Фибоначчи, имеющих нечётные порядковые номера (161).	

ГЛАВА 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ	171
Построение соответствующих цепных дробей для тригонометрических рядов (171). Ускорение сходимости рядов Фурье построением соответствующих цепных дробей (176).	
ГЛАВА 8. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ.	187
Суммирование рядов Фурье (187). Метод соответствующих цепных дробей (189). Производящие функции простейших тригонометрических рядов (204). Определение производящих функций для рядов, содержащих степени синусов нечётных кратных углов (224). Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов кратных углов (234). Определение производящих функций для рядов, содержащих степени косинусов нечётных кратных углов (242). Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических синусов (247). Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических синусов нечётных кратных углов (255). Определение производящих функций рядов, содержащих степени гиперболических косинусов (262). Определение производящих функций для рядов, содержащих степени гиперболических косинусов нечётных кратных углов (269). Построение производящих функций для рядов, коэффициенты которых являются эллиптические числа (276). Определение производящих функций для рядов, коэффициенты которых гиперболические числа (281).	
ГЛАВА 9. ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ.....	286
Функция Вейерштрасса (286). Интервальные и предельные r/φ -характеристики и функции Вейерштрасса (290). Алгоритм определения знака φ -характеристики (303). Предельные r/φ -характеристики функции Вейерштрасса (303). Значения r/φ -характеристик в зависимости от координаты x (304). Определение функции Вейерштрасса цепными дробями (307). Нахождение производной функции Вейерштрасса цепными дробями (314). Определение предела функции через непрерывные дроби (320). О некоторых особенностях представления функций и производных рядами (323).	
ГЛАВА 10. ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ	325
О записи комплексных чисел цепными дробями (325). Примеры записи комплексных чисел цепными дробями (330). Суммирование комплексных чисел, представленных цепными дробями (347). Произведение комплексных чисел (361). Деление комплексных чисел (366).	
ГЛАВА 11. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ФОРМУЛ ЭЙЛЕРА В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ.	372
Обобщение формул Эйлера (372). Обобщение формул Муавра (382). Разложение обобщённых формул Эйлера в ряды (386). Обобщение гетерофункций (391). Обобщение интегральных синуса, косинуса, логарифма и экспоненциала (392). О связи рядов Фурье с обобщёнными формулами Эйлера (394). Разложение тригонометрических функций в бесконечные произведения (397). Элементарные полиномы (400). Обобщение формулы Бине (409). Цепные дроби и геометрическая	

прогрессия (411). Геометрическая прогрессия и ряд Тейлора (415). Геометрическая прогрессия и некоторые вопросы теории чисел (417). Суммирование одинаковых степеней чисел обобщённого ряда (419). О тройственном принципе (425).	
ГЛАВА 12. ДЗЕТА-ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА.....	427
Дзета-функции Римана (427). Дзета-функции Никипорца (428).	
ГЛАВА 13. ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ФИБОНАЧЧИ.....	441
Дзета-функция Фибоначчи первого рода (441). Дзета-функция Фибоначчи второго рода (449).	
ГЛАВА 14. ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	473
Ветвящиеся непрерывные дроби (473). Выпускник рабфака (488). Доцент провинциального вуза (497). Математик из княжеского рода (500).	
ПРИЛОЖЕНИЕ	501
ЛИТЕРАТУРА.....	508
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	515
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	518

Научное издание

Шмойлов Владимир Ильич
Коровин Яков Сергеевич
Иванов Донат Яковлевич

**НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ
И СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ**

Ростов–на–Дону: Изд-во ЮФУ. – 2018. – 524 с.

Монография

Работа печатается в авторской редакции

Подписано в печать 25.02.2018
Формат 70×100 1/16. Усл. печ. л. 26,20 Уч.-изд л. 22,15
Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в Секторе обеспечения полиграфической продукции
кампуса в г. Таганроге отдела полиграфической, корпоративной
и сувенирной продукции ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТА ЮФУ.
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1. Тел. (8634) 37-17-17.