

**В.И. ШМОЙЛОВ, Я.С. КОРОВИН**

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ  
ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ**

---



ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
МНОГПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ  
СИСТЕМ *ИМ. АКАДЕМИКА А.В. КАЛЯЕВА*



В.И. ШМОЙЛОВ, Я.С. КОРОВИН

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ  
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ

Ростов-на-Дону  
Издательство Южного федерального университета  
2017

УДК 517.524

**Шмойлов В.И., Коровин Я.С.** Решение систем линейных алгебраических уравнений непрерывными дробями.– Ростов–на–Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – 383с.

В книге рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов, а также при решении алгебраических уравнений. Особое внимание уделено решению систем линейных алгебраических уравнений непрерывными дробями.

Книга предназначена для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

Илл. 224. Табл. 349. Библиогр. с. 369-374 (123 назв.)

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
Российского научного фонда, проект №15-19-00196*

**Рецензенты:**

докт. техн. наук, проф. П. П. Кравченко

докт. техн. наук, проф. В. Ф. Гузик

© Шмойлов В.И., Коровин Я.С.

Памати  
Виталия  
Яковлевича  
Скоробогаткина

*Таково уж свойство человеческого ума:  
не имея достаточных сил для решения важных  
проблем, он тратит себя на всякие пустяки.*

*Фрэнсис Бэкон, 1620 г.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Главу “О непрерывных дробях”, которая венчает первый том классического труда “Введение в анализ бесконечных” [82], Эйлер предваряет небольшим вступлением, в котором есть такие строки о непрерывных дробях: “Хотя этот род выражений до настоящего времени разработан мало, однако мы не сомневаемся, что когда-нибудь применение его весьма широко распространится в анализе бесконечных”.

И все сбылось, и не сбылось... Феликс Браудер – главный редактор серии “Анализ”, пишет [16]: “По иронии судьбы в двадцатом веке теория непрерывных дробей резко отделилась от большинства главных направлений развития математики. Специалисты по теории чисел продолжали использовать непрерывные дроби и изучали их свойства. С другой стороны, аналитики, даже работающие в классических областях, стали сравнительно редко интересоваться непрерывными дробями. За небольшими исключениями, трудно найти современный учебник по аналитическим функциям комплексного переменного, в котором этому кругу методов и задач уделялось бы сколько-нибудь заметное внимание.

В минувшем столетии цепные дроби действительно расположились на периферии математической жизни. Для работ по цепным дробям не находилось даже рубрики в реферативных журналах – нередко они получали пристанище в разделе “Ряды и последовательности”. Трагедия однако состояла не в том, что исчезли рубрики в реферативных журналах или крупные имена среди авторов работ по цепным дробям. Беда была в другом – цепные дроби не заняли достойного места в математическом образовании. Этот феномен сложно объяснить с рациональных позиций. Но факт остается фактом. Если, к примеру, в фундаментальном трехтомном Курсе дифференциального и интегрального исчисления Г.М. Фихтенгольца рядом в общей сложности отводился едва ли не целый том, то цепным дробям – “ни полслова”, если вспомнить знаменитые строчки Дениса Давыдова, в которых тот сокрушался, правда, по совсем иному поводу. Были проигнорированы цепные дроби и в монументальном пятитомном “Курсе высшей математики” В.И. Смирнова. Не упоминались они и в более поздних курсах математического анализа С.М. Никольского и Л.Д. Кудрявцева, равно как и в бесчисленном множестве других Курсов. Изучая численные методы по университетским и вузовским учебникам, а также обращаясь к специальной литературе по вычислительной математике, окончив курс наук, вполне можно остаться на всю жизнь в твердом убеждении, что никаких цепных дробей в природе не существует.

О цепных дробях заговорили, когда западные физики-теоретики с удивлением обнаружили, что таблицы Паде, то есть дробно-рациональные аппроксимации, могут с большим эффектом применяться при решении насущных задач, причем тех, для решения которых прекрасно знакомый аппарат рядов оказывался совершенно бесполезным.

На Западе в 70-е – 90-е годы, спустя не одно десятилетие после выхода в свет книг О. Перрона [111, 112], Х. Уолла [122] и А.Н. Хованского [49], появляются обстоятельные монографии по цепным дробям [16, 101, 104], одна из которых – У. Джоунса и В. Трона – в 1985 году была издана в переводе на русском языке [16]. В эти же годы выходят несколько книг по ветвящимся и интегральным цепным дробям [9, 40] – оригинальным направлениям, возникшем благодаря усилиям львовской математической школы профессора В.Я. Скоробогатко.

Как известно, один из подходов к проблеме восстановления функции по степенному ряду связан с аппроксимациями Паде. Аппроксимации Паде – это рациональные приближения функций, то есть приближения отношением полиномов. Аппроксимации Паде в последние десятилетия приобрели чрезвычайную популярность, стали, можно сказать, модными. По аппроксимациям Паде проводятся десятки международных научных конференций, публикуются тысячи работ.

Аппроксимации Паде приближают функцию отношением двух полиномов

$$\frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_Lz^L}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_Mz^M},$$

коэффициенты которых устанавливаются по алгоритму Паде [4] из представления этой функции рядом Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots.$$

Основной целью аппроксимаций Паде является получение информации о функции по коэффициентам её степенного разложения. Часто аппроксимации Паде используют для восстановления функции по расходящемуся ряду. Следует отметить, однако, что существуют дробно-рациональные аппроксимации, которые не являются аппроксимациями Паде. Примерами таких аппроксимаций могут служить подходящие дроби некоторых типов непрерывных дробей [1].

В практическом отношении, пожалуй, самым важным классом являются, так называемые, диагональные аппроксимации Паде, записываемые отношением полиномов, к которым приводит свертка классических функциональных цепных дробей:

$$w_0 + \frac{w_1z}{1} + \frac{w_2z}{1} + \dots + \frac{w_nz}{1} + \dots. \quad (1)$$

Поэтому словосочетание “диагональные аппроксимации Паде” следует рассматривать как иное обозначение функциональных цепных дробей (1), которые часто именуют как С-дроби.

Важнейшие вопросы аналитической теории непрерывных дробей – это вопросы сходимости. Приведём общепринятое определение сходимости непрерывных дробей:

*Непрерывная дробь того или иного вида называется сходящейся, если последовательность её подходящих дробей имеет предел:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = A. \quad (2)$$

*Непрерывная дробь расходится, если последовательность её подходящих предела не имеет [16].*

Для цепных дробей, то есть непрерывных дробей вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (3)$$

которые имеют подходящие дроби

$$\frac{P_0}{Q_0} = b_0; \quad \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}, \dots$$

определение сходимости традиционно определяется следующим образом:

Цепная дробь (3) называется сходящейся, если последовательность её подходящих дробей имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha. \quad (4)$$

В [53] предложено отличное от традиционного определение сходимости непрерывных дробей:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число  $z = r_0 e^{i\varphi_0}$ , если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i / Q_i|} = r_0, \quad (5)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (6)$$

где

$P_i / Q_i$  – значения  $i$ -й подходящей дроби;

$k_n$  – число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей  $n$  подходящих дробей.

Определенную так сходимость непрерывных дробей будем называть  $r/\varphi$ -сходимостью или «сходимостью по Никипорцу».

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо предполагает, что непрерывные дроби с вещественными элементами могут иметь как вещественные, так и комплексные значения. Признаком комплексности расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Параметры комплексного числа, т.е. его модуль  $r_0$  и аргумент  $\varphi_0$ , могут быть определены, так называемым,  $r/\varphi$ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6).

Если аргумент  $\varphi$  комплексного числа  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ , которое по определению принимается за значение непрерывной дроби, примет значения 0 или  $\pi$ , то такая непрерывная дробь сходится в классическом смысле. Если  $\varphi_0 = 0$ , то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля  $r_0$ :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0.$$

Если  $\varphi_0 = \pi$ , то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0.$$

Предложенный  $r/\varphi$ -алгоритм даёт возможность устанавливать значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, а также решать множество других задач из различных разделов вычислительной математики [74].

Сравнивая два определения сходимости непрерывных дробей – классическое определение, задаваемое формулами (2) или (4), и определение сходимости через  $r/\varphi$ -алгоритм, то есть при использовании формул (5) и (6), можно отметить следующее. Для удобства изложения будем полагать, что мы имеем дело не с непрерывными дробями произвольной структуры, а с обыкновенными непрерывными дробями, то есть цепными дробями (3).

Классическое определение сходимости цепной дроби (3) с действительными элементами  $a_i$  и  $b_i$  устанавливает её сходимость, если имеет место вещественный предел её подходящих дробей. Если такого предела подходящих дробей цепной дроби (3) нет,

то цепная дробь считается расходящейся. Разнообразные и всё более чувствительные признаки сходимости цепных дробей (3) при принятом классическом определении сходимости устанавливаются математиками уже без малого два с половиной столетия, если отсчёт вести от работ Д. Бернулли [91].

В отличие от классического определения сходимости непрерывных дробей, сходимость непрерывных дробей, устанавливаемая  $r/\varphi$ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6), допускает, что значения цепных дробей (3) с вещественными элементами могут быть как вещественными, так и комплексными. Поэтому о цепных дробях с вещественными элементами, не имеющими вещественного предела подходящих дробей, следует говорить как о цепных дробях расходящихся в классическом смысле. Признаки сходимости, которые устанавливаются для непрерывных дробей с вещественными элементами в случае “классической” сходимости, гарантируют вещественный предел значений их подходящих дробей. При определении сходимости с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма непрерывные дроби с вещественными элементами, как уже отмечалось, могут иметь пределами своих подходящих дробей как вещественные, так и комплексные числа.

Очевидно, что критерии сходимости непрерывных дробей с вещественными элементами при сходимости, определяемой  $r/\varphi$ -алгоритмом, то есть формулами (5) и (6), не столь жёсткие в сравнении с критериями сходимости, которые установлены в классическом случае, когда требуется существование вещественных пределов подходящих дробей (2) или (4). Существующие теоремы о сходимости непрерывных дробей следовало бы дополнять словами: “при определении сходимости в классическом смысле”.

Остановимся несколько подробнее на  $r/\varphi$ -алгоритме. Надо сразу заметить, что  $r/\varphi$ -алгоритм нельзя “вывести” или “доказать”, оставаясь в рамках классического анализа. Однако можно прояснить механизм возникновения этого алгоритма.

Из формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

можно записать дроби:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}} \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем подходящие дроби непрерывной дроби (7):

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= 2 \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \end{aligned}$$



$$\frac{P_n}{Q_n} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi}}}} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}. \quad (8)$$

При  $n \rightarrow \infty$  можно прийти к непрерывной дроби

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots}}}. \quad (9)$$

Значения подходящих цепных дробей (9) определяются формулой:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}.$$

В 1948 году таганрогский математик Аким Захарович Никипорец записал весьма странный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = e^{i\varphi}. \quad (10)$$

Надо сказать, что несмотря на парадоксальность предела (10), А.З. Никипорец никак не выделял его из «троицы» пределов, записывая следом за пределом (10) два других, «правильных» предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sh(n+1)u}{shnu} = e^u. \quad (12)$$

Предел (10) А.З. Никипорец называл «эллиптической единицей», предел (11) – «параболической единицей», а предел (12) – «гиперболической единицей» [55]. Эти три единицы были совершенно естественны в рамках его учения о тройственном принципе в математике и естествознании, которое он последовательно развивал многие годы [66].

Вернемся, однако, к необычному пределу Никипорца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} = e^{i\varphi}$$

и покажем, что он может быть установлен, если сходимость непрерывной дроби

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \dots}}}$$

определять через  $r/\varphi$ -алгоритм, то есть используя формулы (5) и (6). В табл. 1 показаны результаты определения при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма значения цепной дроби, представляющей комплексное число  $e^{i0,2}$ :

$$e^{i0,2} = 2 \cos 0,2 - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \dots - \frac{1}{2 \cos 0,2 - \dots}}} \quad (13)$$

Таблица 1

**Определение значения цепной дроби (13)**

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	1.44996373	1.20414440	0.20414440	0.00000000	0.20000000
10	0.88914406	1.07578670	0.07578670	0.00000000	0.20000000
100	1.06887080	1.00922857	0.00922857	0.18849556	0.01150444
1000	0.86923462	1.00066770	0.00066770	0.19792034	0.00207966
10000	0.90157212	1.00007670	0.00007670	0.19980529	0.00019471
100000	1.25766463	1.00000631	0.00000631	0.19999379	0.00000621
1000000	-1.79328941	0.99999889	0.00000111	0.20000007	0.00000007

В колонках 3 и 5 табл. 1 показаны значения модуля и аргумента комплексного числа  $e^{i0,2}$ , установленные из цепной дроби (13).

Некоторые осложнения возникают при определении значений  $e^{i\varphi}$ , когда  $\varphi = \pi/s$ , где  $s$  – рациональное число. Например,

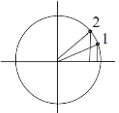
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i = 0 - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \dots \quad (0, -\infty, 0, \infty), \tag{14}$$

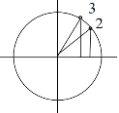
$$e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \dots \quad (1, 0, -\infty, 1, 0, \infty). \tag{15}$$

Значения подходящих дробей (14) и (15) периодически повторяются. Такие цепные дроби называют ультрапериодическими [55]. Так как определить значения ультрапериодических цепных дробей на компьютере нельзя, то эти цепные дроби заменяют «близкими». Например, устанавливают значение не цепной дроби (14), а цепной дроби

$$\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \dots \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

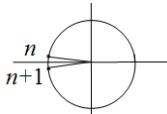
Используя непрерывную дробь (9), мы можем прояснить смысл формул  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (5) и (6). Восстановим комплексное число  $e^{i\varphi}$ , которое “представлено” бесконечной непрерывной дроби (9). Изобразим графически несколько значений первых подходящих дробей непрерывной дроби (9). Используя выражение (8) для подходящих дробей, запишем:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \quad \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{1} \end{array} \quad \frac{P_1}{Q_1} > 0,$$


$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \quad \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{2} \end{array} \quad \frac{P_2}{Q_2} > 0,$$


.....

Очевидно, с ростом номера  $n$  угол  $(n + 1)\varphi$  станет больше угла  $\pi$ :

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad \begin{array}{c} n \\ n+1 \end{array} \quad \frac{P_n}{Q_n} < 0.$$


Этот момент может быть зафиксирован, так как подходящая дробь  $P_n/Q_n$  примет отрицательное значение. Таким образом, перемещение радиуса – вектора от угла  $\varphi$  до угла  $(n+1)\varphi$ , несколько превышающего значение  $\pi$ , дает возможность, пусть и приближенно, определить аргумент комплексного числа  $e^{i\varphi}$ , представленного непрерывной дробью (9). Продолжая наблюдение за значениями подходящих дробей, запишем формулу, по которой можно определить аргумент  $\varphi_0$  комплексного числа  $e^{i\varphi_0}$ :

$$\varphi_0 = \frac{\pi k_n + \tilde{\varphi}}{n}, \quad (17)$$

где  $k_n$  – количество подходящих дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа  $n$  подходящих дробей разложения (9),  $\tilde{\varphi}$  – некоторый угол, причем,  $\tilde{\varphi} < \varphi_0$ .

Если  $n \rightarrow \infty$ , то формула (17) примет вид

$$\varphi_0 = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}.$$

Рассмотренная выше процедура позволяет установить однако не значение аргумента комплексного числа  $e^{i\varphi_0}$ , а модуль этого аргумента. Знак аргумента комплексного числа  $e^{i\varphi_0}$  определяется из динамики распределения значений подходящих дробей (10) на “периоде”. Эти правила определения знака установлены после “калибровки” на тестовых непрерывных дробях, имеющих комплексные значения [54].

На рис. 1 показано распределение значений подходящих дробей  $P_n/Q_n$  разложений (18) и (19) в зависимости от номера  $n$ .

$$2 \cos 0.2 - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin(n+1)0.2}{\sin n0.2}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2 \cos 0.2} - \frac{1}{2 \cos 0.2} - \dots - \frac{1}{2 \cos 0.2} = \frac{\sin n0.2}{\sin(n+1)0.2}. \quad (19)$$

Из непрерывной дроби (9), представляющей комплексное число  $e^{i\varphi_0}$ , можно получить, помимо аргумента, модуль этого комплексного числа, равный единице.

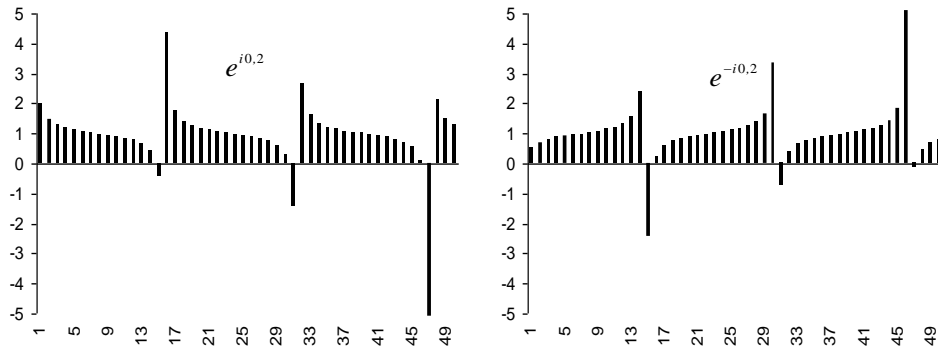


Рис. 1. Распределение значений подходящих непрерывных дробей (18) и (19).

В табл. 2 приведены результаты суммирования при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма расходящейся непрерывной дроби:

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{15}}{2} = 2e^{i \arctg \sqrt{15}} = 1 - \frac{4}{1-1} - \frac{4}{1-\dots} - \frac{4}{1-\dots}. \quad (20)$$

Таблица 2

**Определение значения расходящейся ценной дроби (20)**

$r_0 = 2.0, \varphi_0 = 1.318116071652 \dots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	-3.0000000000	1.732050807568	0.267949192431	1.570796326794	0.252680255142
4	-0.7142857142	1.495348781221	0.504651218778	1.570796326794	0.252680255142
8	1.4369747899	1.901623404084	0.098376595915	1.178097245096	0.140018826556
16	-1.0326336812	1.893923277888	0.106076722111	1.374446785945	0.056330714292
32	0.9570674702	1.954777493792	0.045222506207	1.276272015520	0.041844056131
64	-3.3737052603	1.992211007792	0.007788992207	1.325359400733	0.007243329080
128	-0.9528199343	1.985483211714	0.014516788285	1.325359400733	0.007243329080
256	1.0641835576	1.995010880870	0.004989119129	1.313087554430	0.005028517222
512	-2.5412946875	1.998634135542	0.001365864457	1.319223477581	0.001107405928
1024	-0.4041335913	1.996749737389	0.003250262610	1.319223477581	0.001107405928
2048	2.1217417851	1.999829743244	0.000170256755	1.317689496793	0.000426574859
4096	0.1547065652	1.998758806916	0.001241193083	1.317689496793	0.000426574859
8192	5.7575173443	2.00006649905	0.00006649905	1.318072991990	0.000043079662
16384	2.7721264678	1.999990952659	0.00009047340	1.318072991990	0.000043079662
32768	0.8108450840	1.999946089818	0.000053910181	1.318072991990	0.000043079662
65536	-5.3765210082	1.999995713264	0.00004286735	1.318120928890	0.00004857237

В первой колонке таблицы даны номера  $n$  подходящих дробей разложения. Номера подходящих дробей составляют степень 2. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей  $P_n/Q_n$  с ростом  $n$  не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения асимптотически приближаются к 2, т.е. к модулю комплексного числа. Даже беглого взгляда на колонки 5 и 6 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (20) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

На рис. 2 показаны значения подходящих дробей непрерывной дроби (20).

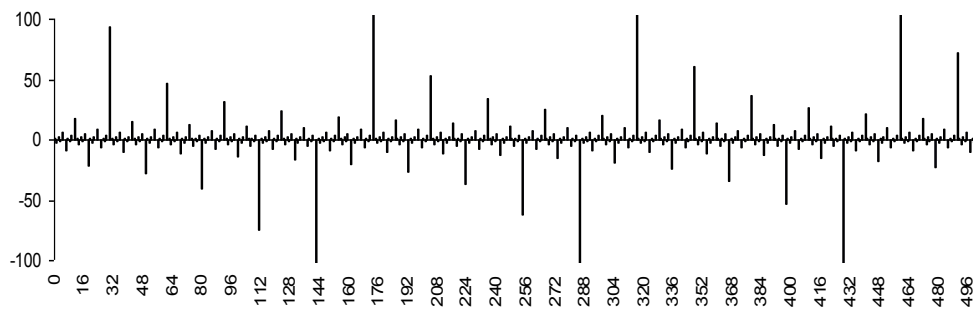


Рис. 2. Распределение значений подходящих дробей непрерывной дроби (20).

Формулы (5) и (6) можно распространить на непрерывные дроби других классов, в частности, на практически важные предельно-периодические непрерывные дроби, которыми представляются элементарные и многие специальные функции.

В табл. 3 показаны результаты суммирования расходящейся непрерывной дроби.

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \dots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{-2n+1} - \dots \quad (21)$$

Таблица 3

**Определение значения расходящейся ценной дроби (21)**

$$r_0 = 3.2171505117 \dots, \varphi_0 = 1.3536398454 \dots$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754	1.5707963267	0.2171564813
4	-3.0000000	3.0000000000	0.2171505117	1.5707963267	0.2171564813
8	-97.5000000	4.9614481602	1.7442976485	1.5707963267	0.2171564813
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386	1.3744467859	0.0208069405
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367	1.3744467859	0.0208069405
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	1.3744467859	0.0208069405
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	1.3499030933	0.0037367521
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	1.3621749396	0.0085350941
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618	1.3499030933	0.0037367521
1024	-15.4772571	3.2219262392	0.0047757275	1.3560390164	0.0023991710
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336	1.3529710549	0.0006687905
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676	1.3529710549	0.0006687905
8192	-0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	1.3533545501	0.0002852953
16384	-1.7591587	3.2167104407	0.0004400709	1.3533545501	0.0002852953
32768	-6.4347291	3.2170964982	0.0000540134	1.3536421715	0.0000023260
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610	1.3536421715	0.0000023260

Легко понять, почему непрерывная дробь (21) расходится. При отрицательном аргументе, логарифмическая функция имеет комплексное значение:  $\ln(-2) = 3.2171505117e^{i1.3536398454}$ , которое, естественно, не может приближаться непрерывной дробью с вещественными элементами и, тем не менее,  $r/\varphi$ -алгоритм позволяет установить значение непрерывной дроби (21).

Рассмотрим еще одну практически важную задачу, решаемую при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Известно, что при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений встречаются принципиальные трудности. В книге С.К. Годунова и В.С. Рябенко "Разностные схемы" [10] отмечается: "Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что, казалось бы, разумная разностная схема имеет решение, не сходящееся при измельчении сетки к истинному решению дифференциального уравнения".

Рассмотренный выше способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Поясним примером. Как известно, удобный метод решения разностной краевой задачи, представляющий один из вариантов исключения неизвестных и носящий название "прогонки", фактически эквивалентен записи решения обыкновенной непрерывной дроби, то есть для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений решения могут представляться как сходящимися непрерывными дробями, так и расходящимися [67]. Имеет место ситуация: решения системы существуют, но при измельчении шага сетки значения решений системы изменяются, причем, скачкообразно, т. е. с ростом размерности СЛАУ не могут быть найдены пределы, к которым бы эти решения стремились. В этом случае говорят, что система является "расходящейся" и решения не могут быть записаны. Возникает вопрос: что это означает для рассматриваемой СЛАУ с матрицей вещественных коэффициентов? Ответ состоит в следующем: если решаемая система "расходится", то возможно существование комплексных решений СЛАУ, которые традиционными методами решения не могут быть установлены.

Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX = B, \quad (22)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], \quad B = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T.$$

где  $A$  – матрица вещественных коэффициентов,  $X$  – вектор искомых решений,  $B$  – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, “расходится” данная система или нет, решаем одним из классических методов подсистемы смежных порядков, например 1, 2, 3, ... и строим последовательности, состоящие из их решений  $\{\bar{x}_i\}$ , т.е. последовательности вида

$$\{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)}\}, \{\bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)}\}, \dots, \{\bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}. \quad (23)$$

Если каждая последовательность стремится к некоторому “своему” пределу с ростом размерности  $m$  системы, то последовательность корней  $\{\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \bar{x}_3^{(m)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}$ ,  $m \rightarrow \infty$ , будет являться искомым решением рассматриваемой БСЛАУ. В случае, если пределы последовательностей (23) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше  $r/\varphi$ -алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении расходящихся СЛАУ  $m \gg n$ , что обусловлено  $r/\varphi$ -алгоритмом, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных “отсчетов”. Этот алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае “по Гауссу” вещественные решения расширяющейся системы (22) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль  $r_i$  комплексного корня  $x_i$  находится по формуле

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

где  $\bar{x}_i^{(m)}$  – значение вещественной неизвестной  $\bar{x}_i$ , полученное “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ размерности  $m$ .

Модуль аргумента  $\varphi_i$  комплексного корня  $x_i$  БСЛАУ определяется следующим образом:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (25)$$

где  $k_i^{(m)}$  – количество отрицательных значений  $\bar{x}_i$ , полученных “стандартным” алгоритмом решения СЛАУ из общего количества  $m$  значений  $\bar{x}_i$ , найденных из “расширяющейся” системы.

Данный способ решения БСЛАУ достаточно экономичен, а главное – метод позволяет решать расходящиеся в традиционном смысле БСЛАУ, что не обеспечивают известные алгоритмы решения БСЛАУ.

В качестве примера рассмотрим решение при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма расходящейся бесконечной системы (26).

Решить систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (26)$$

В табл. 4 приведены результаты определения  $x_i$  системы (26) с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (24) и (25). В первой колонке таблицы указана размерность решаемых систем. Во второй колонке помещены значения  $\bar{x}_1$ , полученные по методу прогонки. Как видно из таблицы, значения, полученные “по прогонке” для расходящейся системы, не стремятся к какому-либо пределу. В то же время в колонках 3 и 4 табл. 3 с ростом размерности системы (26) устанавливаются значения, соответственно, модуля и аргумента комплексного решения  $\bar{x}_1$  системы (26).

Таблица 4

**Определение значения  $\bar{x}_1$  системы (26)**

Размерность системы, $m$	Значение $\bar{x}_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(m)}$
2	2.500000000000E-01	5.000000000000E-01	0.000000000000E+00
3	1.176470588235E-01	3.086789594993E-01	0.000000000000E+00
4	-2.000000000000E-01	2.769413275131E-01	7.853981633974E-01
7	5.511811023622E-02	2.22264956834E-01	4.487989505128E-01
8	-4.250000000000E+00	3.213623350779E-01	7.853981633974E-01
15	-4.316594612571E-01	2.586318164389E-01	8.377580409573E-01
16	3.566826367091E-01	2.638802890571E-01	7.853981633974E-01
31	2.368807660622E-01	2.338062307929E-01	7.093918895203E-01
32	1.059969835469E-01	2.280970928948E-01	6.872233929728E-01
63	3.535238227882E-01	2.262750841807E-01	7.479982508547E-01
64	1.745241108523E-01	2.253588030476E-01	7.363107781851E-01
127	-3.252270368534E-01	2.200670942025E-01	7.421085008480E-01
128	3.769412205239E-01	2.209942810126E-01	7.363107781851E-01
255	2.545459857837E-01	2.245282017180E-01	7.022383578612E-01
256	1.213393341306E-01	2.239890962004E-01	6.994952392759E-01
511	4.544313219042E-01	2.191004764571E-01	7.070120453284E-01
512	2.021042090470E-01	2.190659250807E-01	7.056311624274E-01
1023	-1.468533026117E-02	2.191323997622E-01	7.063209289596E-01
1024	8.316406972992E-01	2.194179980411E-01	7.056311624274E-01
2047	7.182382967496E-01	2.184842239440E-01	7.029064168755E-01
2048	2.349945882313E-01	2.184919957063E-01	7.025632008516E-01
4095	8.970276633117E-02	2.184996917478E-01	7.027347669568E-01
4096	-5.225224025607E-01	2.185462070065E-01	7.033301912456E-01

Аналогично находятся значения  $x_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , системы (26).

На рис. 3 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2048$  бесконечной системы (26).

В табл. 5 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (26), полученного при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. В первой колонке табл. 4 указаны номера строк системы (26), по которым проводилась проверка. Во второй колонке приведены значения проверяемых строк системы (26) после подстановки найденных комплексных  $x_i$  из решаемой системы (26) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (26), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (26) с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Из табл. 5 можно заключить, что погрешности, допущенные при решении системы (19) с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, весьма невелики ( $\varepsilon = 10^{-3} - 10^4$ ).

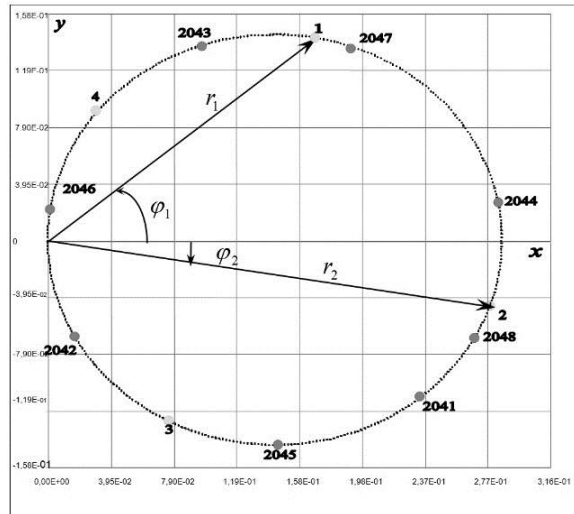


Рис. 3. Расположение  $x_i$  БСЛАУ (26) на комплексной плоскости.

Таблица 5

Результаты проверки решения системы (26)

Номер строки, $n$	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1.001299469052E+00 i1.762678328659E-03	1	1.299469051622E-03 i1.762678328659E-03
2	1.001615385287E+00 i1.823158910945E-03	1	1.615385286690E-03 i1.823158910945E-03
4	1.001420584071E+00 i1.786263723479E-03	1	1.420584071188E-03 i1.786263723479E-03
8	1.000966887833E+00 i1.224856975491E-03	1	9.668878325528E-04 i1.224856975491E-03
16	1.001094874798E+00 i1.078635879098E-03	1	1.094874797582E-03 i1.078635879098E-03
32	1.001217090677E+00 i1.378751449401E-03	1	1.217090677040E-03 i1.378751449401E-03
64	1.000939873348E+00 i9.321736272402E-04	1	9.398733476283E-04 i9.321736272402E-04
128	1.001321599553E+00 i3.972567037168E-04	1	1.321599553336E-03 i3.972567037168E-04
256	1.000792866804E+00 i1.707477617846E-03	1	7.928668038036E-04 i1.707477617846E-03
512	1.001030405321E+00 i1.250966938645E-03	1	1.030405321258E-03 i1.250966938645E-03
1024	1.000587637913E+00 i2.199988158475E-03	1	5.876379127570E-04 i2.199988158475E-03
2048	1.000849453587E+00 i4.776958470371E-03	1	8.494535870614E-04 i4.776958470371E-03

Некоторые другие применения  $r/\varphi$ -алгоритма приведены в [70]. Особо следует подчеркнуть эффективность использования методов теории непрерывных дробей при суммировании расходящихся рядов. Именно вопросы суммирования рядов через, так называемые, соответствующие непрерывные дроби составляют, в значительной степени, содержание книги.

Приведём примеры суммирования расходящихся числовых рядов через соответствующие цепные дроби. Определение значений расходящихся в классическом смысле соответствующих цепных дробей производилось с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (5) и (6).

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = 1 + \frac{2}{1-1} = -1,$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = 1 - \frac{2}{1-2} - \frac{3}{-3+1} = \frac{1}{4},$$



$$1-3+5-7+9-11+\dots=1-\frac{3}{1}+\frac{5}{3}-\frac{7}{5}+\frac{9}{7}-\frac{11}{9}+\dots=0,$$

$$1+1-1+2-5+14-42+132-\dots=1+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+\dots}+\frac{1}{1+\dots}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033\dots,$$

$$1+1+1+2+5+14+42+132+\dots=1-\frac{1}{1-1}+\frac{1}{1-\dots}+\frac{1}{1-\dots}=e^{\frac{i\pi}{3}},$$

$$1-1!+2!-3!+4!-\dots=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\dots+\frac{n}{1+1}+\frac{n}{1+1}+\dots=0.596347\dots,$$

$$1+1!+2!+3!+4!+\dots=\frac{1}{1-1}+\frac{1}{1-1}+\frac{2}{1-1}+\frac{2}{1-1}+\dots+\frac{n}{1-1}+\frac{n}{1-1}+\dots=1.349725e^{i0.028001},$$

$$1-1+1\cdot 3-1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\dots=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\frac{3}{1+1}+\dots+\frac{n}{1+1}+\dots=0.655680\dots,$$

$$1+1+1\cdot 3+1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\dots=\frac{1}{1-1}+\frac{1}{1-1}+\frac{2}{1-1}+\frac{3}{1-1}+\dots+\frac{n}{1-1}+\dots=1.050320e^{i0.809228}.$$

Как правило, непрерывные дроби неожиданны и изящны, и их можно долго рассматривать, как завораживающий своими гранями кристалл:

$$e=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{7+\dots}}}}}}}}}$$

Более ста лет известна уникальная по красоте формула Рамануджана [28]:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\frac{3}{1+1}+\frac{4}{1+1}+\dots=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Можно предложить, пожалуй, более неожиданную формулу, полученную суммированием расходящейся цепной дроби [55]:

$$1-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dots-\frac{1}{1-1}+\frac{1}{1-1}+\frac{2}{1-1}+\frac{3}{1-1}+\frac{4}{1-1}+\dots=i\sqrt{\frac{\pi}{2e}},$$

Нелишне обратить внимание, что суммирование с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма сопряжено с выполнением достаточно больших объемов вычислений и вряд ли осуществимо без использования компьютеров. Видимо, этим и объясняется, почему метод суммирования “расходящихся” непрерывных дробей так запоздал со своим появлением.

Математические факты могут быть зафиксированы не только в виде теорем, но и в столбцах чисел. Академик В. И. Арнольд в предисловии к книге американских математиков Р. Грехема и О. Паташника “Конкретная математика” утверждал: “Примеры учат не меньше, чем правила”. Он же в своей книге “Цепные дроби” [2] написал весьма примечательную фразу: “Математика – экспериментальная наука”. Любопытно также, что последняя монография выдающегося теоретика В.И. Арнольда имеет название: “Экспериментальное наблюдение математических фактов”[3].

О насущной необходимости даже для математика-теоретика пользоваться вычислениями высказывался украинский академик М.Ф. Кравчук еще в конце 30-х годов прошлого столетия [83]: “Мы не умеем, как следует, привить молодежи охоты до эффективных вычислений. И до сих пор имеет место “забобон”, что высшая математика не

нуждается в вычислениях, что вычисления для неё – низкая материя, что суть высшей математики в абстрактных теориях. Чтение Эйлера – один из лучших воспитательных приёмов в преодолении этих ошибочных воззрений”.

В последнее время вычислительный эксперимент все чаще рассматривается как новая технология научного поиска в разных областях знания, в том числе такой абстрактной, как математика. Становится очевидно: закономерности, лежащие на поверхности или на относительно небольшой глубине, в основном уже обнаружены и описаны. Разумеется, это не касается пустопорожних теорем – все их зафиксировать на бумаге никогда и никому не удастся. Глубинные же связи аналитически, то есть на кончике пера, устанавливаются со всё большим трудом. Это хорошо понимали уже классики – непревзойденные аналитики, например, Эйлер, Лежандр, Гаусс, когда фундаментальные теоремы в теории чисел находили, пристально всматриваясь в числовые таблицы, так сказать, в экспериментальный материал, Деррик Лемер, автор популярных “Таблиц простых чисел”, известный также работами по цепным дробям [91], писал: “Несмотря на утверждение некоторых выдающихся ученых, что математика – наука, ничего общего не имеющая с практикой, история теории чисел была в основном создана теми, кто следовал методам естествоиспытателей”.

Немного о терминологии. Обычно “цепные дроби” и “непрерывные дроби” рассматриваются как синонимы. Например:

Хованский А.Н., [49]. *Бесконечной цепной или непрерывной дробью называет разложение*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (27)$$

“*Continue fraction*” – непрерывная дробь, – именно так была наречена конструкция (27) английским математиком Джоном Валлисом в “*Arithmetica infonitorium*” (“Арифметика бесконечных”), которая вышла в 1655 г. [91]. Как отмечается в [50], термин “*Kettenbruche*” – цепная дробь, появился в Германии в середине XVIII в.

Следует здесь отметить, что российские математики вплоть до двадцатых годов прошлого столетия использовали в своих работах термин “непрерывные дроби”. И лишь стараниями А.Я. Хинчина, кстати, активно публиковавшегося в немецких журналах, “цепные дроби” получили права гражданства и, более того, существенно потеснили “непрерывные дроби” в сочинениях русскоязычных авторов. Надо сказать, что “цепные дроби” (*chain fraction*) вводились и в английском языке, но, похоже, термин остался невостребованным.

В русской литературе, в отличие от “прочих разных шведов”, в ходу два практически равноценных термина: “цепные дроби” и “непрерывные дроби” для обозначения одного и того же понятия. Таков уж наш менталитет, если говорить попросту. Отдать предпочтения одному из этих терминов затруднительно. Некоторые преимущества имеются у цепных дробей. Например, не вызывает нареканий фраза: “Конечная цепная дробь”, что не скажешь о выражении “Конечная непрерывная дробь”. Слово сочетание “цепная дробь” вполне определенно указывает на дискретность структуры. С другой стороны, цепная дробь (27) – это очень частный случай непрерывных дробей, которые могут иметь структуры, неизмеримо более сложные, нежели классические цепные дроби, соответствующие линейному, то есть цепному графу.

Учитывая бесконечное многообразие непрерывных дробей, классические непрерывные дроби (27) будем называть *цепными дробями*. Дроби других классов следует

именовать иначе. Например, “*непрерывные дроби Хессенберга*”, “*ветвящиеся непрерывные дроби*”, “*восходящие непрерывные дроби*” и т.д. Определяя выражение (27) как “цепную дробь”, мы тем самым выделяем классические непрерывные дроби из множества непрерывных дробей, задаваемых графом той или иной структуры.

В книге много таблиц, может быть, более, чем обычно случается в книгах математического содержания. Возможно, это вызовет некоторую аллергию при чтении. Мы сознательно шли на включение в текст большого количества экспериментального материала, ибо рассматриваем математические таблицы, как математические факты. Джон-Карло Рота, редактор американской Математической энциклопедии, утверждал [16]: «Математика состоит главным образом из фактов».

Авторы выражают глубокую признательность В.Ю. Войтулевичу, В.М. Ефимовой, Г.А. Кириченко, С.В. Плющенко, И.С. Семёнову, М.В. Хисамутдинову и другим программистам, которые во многом способствовали обнаружению и фиксации математических фактов, представленных на страницах книги.

В заключительном разделе «Из истории непрерывных дробей» повествуется о замечательном львовском математике Виталии Яковлевиче Скоробогатько, открывшим в шестидесятых годах минувшего столетия ветвящиеся непрерывные дроби. Светлой памяти В.Я. Скоробогатько посвящается эта книга.

г. Таганрог,  
19 марта 2017 г.

В. И. Шмойлов

## ВВЕДЕНИЕ

1. В своей книге [16] У. Джоунс и В. Трон пишут: "Хотя уже греки знали об алгоритме Евклида, нет сведений о том, что они использовали его для получения непрерывных дробей".

Г. Цейтен в "Истории математики в XVI и XVII веках" отмечает [50]: "К настоящему образованию непрерывных дробей приходит только Бомбелли в своей "Алгебре" 1572 года."

Действительно, Бомбелли принял

$$-a + \sqrt{a^2 + r} = x, \quad \text{то есть} \quad \sqrt{a^2 + r} = a + x,$$

и отсюда нашёл

$$r = 2ax + x^2,$$

что, в свою очередь, позволило записать

$$x = \frac{r}{2a + x}.$$

Ряд все более точных приближений получается, если вместо  $x$  в знаменатель последовательно помещать уже полученные приближенные значения этой величины.

И все же решающий шаг в оформлении аппарата цепных дробей сделал в 1613 году Кательди [91], – он вводит в эти вычисления повторное применения дробной черты, то есть получает настоящее обозначение непрерывных дробей:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}}, \quad (1)$$

только вместо знака "+" Кательди пишет "et."

В главе "О непрерывных дробях", помещенной в первом томе "Введения в анализ бесконечных", Эйлер пишет [82]: "Непрерывной дробью я называю такую дробь, знаменатель которой состоит из целого числа с дробью, у которой знаменатель опять представляет совокупность целого и дроби, которая далее составлена таким же образом, причём, это может либо продолжаться до бесконечности, либо где-нибудь приостановиться. Такого рода дробью будет выражение

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{c + \frac{1}{e + \frac{1}{f + etc}}}}}$$

или

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + etc}}}}}$$

2. Леонард Эйлер в трактате "De fractionibus continuis dissertatio" [94] заложил основы теории цепных дробей. Это первая работа Эйлера по непрерывным дробям. Она была написана в 1737г. Эйлер в основном рассматривал *правильные* цепные дроби, то есть цепные дроби, частные числители которых равны единице, а частные знаменатели – натуральные числа. Именно к таким цепным дробям приводит алгоритм Евклида. Поэтому естественней эти цепные дроби называть не правильными или регулярными, а *цепными дробями Евклида*.

Раскладывая  $\sqrt{2}$  в цепную дробь, Эйлер записывает:

$$\sqrt{2} = 1.41421356 = \frac{141421356}{100000000}.$$

Производя последовательно выделение целой части числа, Эйлер приходит к разложению

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}} \quad (2)$$

Эйлер приводит еще одну правильную цепную дробь, период которой состоит уже из двух элементов:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}} \quad (3)$$

Позже, в 1748 г., Эйлер сформулировал знаменитую теорему: "*Всякая периодическая цепная дробь представляет квадратическую иррациональность*". Спустя двадцать лет, в 1768 г., Лагранж доказал обратную теорему: "*Всякая квадратическая иррациональность изображается периодической цепной дробью*".

Для числа  $e$  Эйлер записывает цепную дробь:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}} \quad (4)$$

Следует заметить, что разложение числа  $e$  в правильную цепную дробь, значительно ранее Эйлера, в 1714 г., получил английский математик Коутс [20].

Цепную дробь (4) будем называть *цепной дробью Коутса*. Роджер Коутс, ученик Исаака Ньютона, более известен всё же как Котес. Широкой популярностью пользуются

формулы Котеса для приближённого вычисления определённых интегралов по значениям подынтегральной функции в конечном числе равноотстоящих точек.

Коутс в работе "Измерение соотношений" (Logometria), увидевшей свет в 1717 г., уже после смерти автора, привел замечательное равенство

$$\ln(\cos x + i \sin x) = xi,$$

эквивалентное формуле Эйлера, связывающей в комплексной области показательную и тригонометрические функции. Знаменитая формула

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

о которой Лагранж отозвался, как о прекраснейшем открытии века в математическом анализе, была опубликована Эйлером лишь в 1743 г.

Эйлер установил другие правильные цепные дроби:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}}$$

В работе [94] Эйлер приводит первые функциональные дроби:

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{1}{s-1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3s-1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5s-1 + \frac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}, \quad (5)$$

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{2}{2s-1 + \frac{1}{6s + \frac{1}{10s + \frac{1}{14s + \frac{1}{18s + \text{etc.}}}}}}, \quad (6)$$

Эйлер рассматривает непрерывные дроби столь же важным инструментом анализа, как и ряды.

Если в (5) заменить  $s=1/x$ , то получим

$$e^x = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^2}{18} + \dots + \frac{x^2}{2(2n+1)} + \dots \quad (7)$$

В 1776г. Лагранж опубликовал такую цепную дробь для показательной функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1-2} + \frac{x}{3-2} + \frac{x}{5-2} + \dots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \dots \quad (8)$$

Все подходящие дроби разложения (7) совпадают с нечетными подходящими дробями разложения (8). Цепную дробь (7) называют *сжатой* цепной дробью. Напротив, цепную дробь (8) можно назвать *растянутой* цепной дробью, так как все подходящие дроби разложения (7) включаются, как подмножество, в множество подходящих дробей разложения (8).

Эйлер неоднократно в своих работах обращался к изучению непрерывных дробей и применял их для представления функций и определенных интегралов, интегрирования дифференциальных уравнений, суммирования рядов и т.д. Популяризации непрерывных дробей содействовал труд Эйлера "Introductio in analysin infinitorum", вышедший в Лозанне в 1748 г. В первом томе этого сочинения Эйлера непрерывным дробям, как уже отмечалось, отводилась отдельная глава. Эта монография Эйлера неоднократно переиздавалась в Европе на протяжении XVIII-XX столетий, что, несомненно, способствовало тому, что интерес к непрерывным дробям постоянно поддерживался. "Введение в анализ бесконечных" издавалось и на русском языке: в 1936 г. (первый том) и в 1961 г. [82].

### 3. Цепная дробь Ламберта

$$tgx = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \frac{x^2}{11 - \dots}}}}} \quad (9)$$

одна из самых впечатляющих формул во всей математике. Многие если что и знают из цепных дробей, так именно это разложение. Эта цепная дробь часто приводится даже в тех справочниках, в которых больше о цепных дробях не найти ни слова. Цепная дробь для  $tgx$  имеет классически выразительную форму, и эту дробь не так просто забыть.

Кстати, коэффициенты степенного ряда

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

по памяти воспроизведет редко кто из математиков. Можно, конечно, воспользоваться формулой:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{2^{2\kappa} (2^{2\kappa} - 1)}{(2\kappa)!} |B_{2\kappa}| x^{2\kappa-1},$$

но для этого надо держать в голове значения первых чисел Бернулли:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \dots,$$

которые, впрочем, могут быть определены при помощи весьма практичной формулы

$$B_{2\kappa} = (-1)^{\kappa-1} \frac{2(2\kappa)!}{(2\pi)^{2\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2\kappa}}.$$

Цепная дробь для тангенса впервые получена в работе Ламберта "Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга", опубликованной в 1770 г. Публикацию Ламберт предваряет словами: *"Я имею некоторое основание сомневаться, что настоящая статья будет прочитана и понята теми, для кого это было бы особенно полезно"*.

Ламберт в своей работе приводит разложение

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \frac{1}{26 + \dots}}}}}}}. \quad (10)$$

Очевидно, что цепная дробь (10) следует из цепной дроби Эйлера (7) при  $x = 1$ .

Цепная дробь (10) является сжатой по отношению к цепной дроби

$$e = 1 + \frac{1}{1-2} + \frac{1}{2+3} - \frac{1}{3-2} + \frac{1}{2+5} - \frac{1}{5-2} + \dots + \frac{1}{2n-1-2} + \frac{1}{2+\dots}, \quad (11)$$

которая получается из цепной дроби Лагранжа (8) при  $x=1$ . Подходящие дроби разложения (10) совпадают с нечетными подходящими дробями цепной дроби (11). Вместе с тем, цепную дробь (11) можно рассматривать как сжатую цепную дробь относительно правильной цепной дроби Коутса (4). Подходящие дроби (11) совпадают со значениями цепной дроби (4), имеющими порядковые номера

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots, 3n-2, 3n-1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Значения подходящих дробей разложений (4), (11) и (10) приведены, соответственно, в таблицах 1а, 1в и 1с.

**4.** Приведем таблицы, из которых видна скорость сходимости некоторых цепных дробей для числа  $e$ .



Таблица 1а

**Значения подходящих дробей цепной дроби Коутса**

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \dots$$

Номер звена	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значения подходящих дробей	2	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{1264}{465}$	$\frac{1437}{536}$	$\frac{2721}{1001}$

Таблица 1б

**Значения подходящих дробей цепной дроби Лагранжа**

$$e = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \dots$$

Номер звена	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значения подходящих дробей	1	2	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{1457}{536}$	$\frac{2721}{1001}$

Таблица 1с

**Значения подходящих дробей цепной дроби Эйлера**

$$e = 1 + \frac{2}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \frac{1}{22} + \frac{1}{26} + \dots$$

Номер звена	1	2	3	4	5
Значения подходящих дробей	1	3	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$

В табл. 2 приведены результаты вычислений числа  $e$  при помощи правильной цепной дроби (4) – цепной дроби Коутса.

Таким образом, 20 подходящих дробей правильной цепной дроби Коутса обеспечивают вычисление числа  $e$  с точностью 14 десятичных знаков.

В табл. 3 приведены результаты вычислений числа  $e$  с использованием цепной дроби Лагранжа.

Таблица 2

**Определение значения цепной дроби Коутса**

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \dots$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	2,00000000000000	0,71828182845905
2	3,00000000000000	0,28171817154096
3	2,66666666666667	0,05161516179238
4	2,75000000000000	0,03171817154095
5	2,71428571428571	0,00399611417333
6	2,71875000000000	0,00046817154095
7	2,71794871794872	0,00033311051033
8	2,71830985915493	0,00002803069588
9	2,71827956989247	0,00000225856657
10	2,71828358208955	0,00000175363051
11	2,71828171828172	0,00000011017733
12	2,71828183520599	0,00000000674695
13	2,71828182294395	0,00000000551510
14	2,71828182873570	0,0000000027665
15	2,71828182844540	0,0000000001364
16	2,71828182847058	0,00000000001154
17	2,71828182845856	0,00000000000048
18	2,71828182845907	0,00000000000002
19	2,71828182845903	0,00000000000002
20	2,71828182845905	0,00000000000000

Таблица 3

**Определение значения цепной дроби Лагранжа**

$$e = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \dots$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	1,71828182845905
2	2,00000000000000	0,71828182845905
3	3,00000000000000	0,28171817154096
4	2,75000000000000	0,03171817154095
5	2,71428571428571	0,00399611417333
6	2,71794871794872	0,00033311051033
7	2,71830985915493	0,00002803069588
8	2,71828358208955	0,00000175363050
9	2,71828171828172	0,00000011017733
10	2,71828182294395	0,00000000551510
11	2,71828182873570	0,0000000027665
12	2,71828182845058	0,0000000001154
13	2,71828182845856	0,00000000000048
14	2,71828182845903	0,00000000000002
15	2,71828182845905	0,00000000000000

Как видно из табл. 3, пятнадцатая подходящая дробь цепной дроби Лагранжа позволяет вычислить число  $e$  с точностью 14 десятичных знаков.

В табл. 4 приведены результаты вычислений числа  $e$  с использованием «сжатой» цепной дроби Эйлера.

Таблица 4

**Определение значения цепной дроби**

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots + \frac{1}{2(2n+1) + \dots}}}}}}$$

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	1,71828182845905
2	3,00000000000000	0,28171817154095
3	2,71428571428571	0,00399611417334
4	2,71830985915493	0,00002803069588
5	2,71828171828172	0,00000011017733
6	2,71828182873570	0,0000000027665
7	2,71828182845856	0,00000000000049
8	2,71828182845905	0,00000000000000

Таблица 5

**Определение значения цепной дроби**

$$e = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3 - \frac{2}{4 - \frac{3}{5 - \frac{4}{6 - \dots - \frac{n-2}{n - \dots}}}}}}$$

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	1,71828182845905
2	2,00000000000000	0,71828182845905
3	2,50000000000000	0,21828182845905
4	2,66666666666666	0,05161516179239
5	2,70833333333333	0,00994849512572
6	2,71666666666667	0,00161516179238
7	2,71805555555556	0,00022627290349
8	2,71825396825397	0,00002786020507
9	2,71827876984127	0,00000305861778

Восьмая подходящая дробь цепной дроби определяет число  $e$  с точностью 14 десятичных разрядов.

Интересно сравнить скорость сходимости цепных дробей (4), (10) и (11) со скоростью сходимости следующей цепной дроби:

$$e = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3 - \frac{2}{4 - \frac{3}{5 - \frac{4}{6 - \dots - \frac{n-2}{n - \dots}}}}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (12)$$

Цепная дробь (12) – так называемая *равноценная* цепная дробь. Для степенного ряда, представляющего показательную функцию

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (13)$$

равноценной, то есть эквивалентной, будет цепная дробь

$$e^x = 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2 + x - \frac{2x}{3 + x - \frac{3x}{4 + x - \frac{4x}{5 + x - \dots - \frac{(n-1)x}{n + x - \dots}}}}}} \quad (14)$$

Подходящие дроби разложения (14) совпадают с частичными суммами степенного ряда (13). При  $x = 1$  из цепной дроби (14) получим дробь (12).

В табл. 5 приведены результаты вычисления числа  $e$  с использованием равноценной ряду цепной дроби (12). Необходимо использование 18 звеньев равноценной дроби или 18 членов ряда, чтобы определить число  $e$  с точностью 14 десятичных разрядов.

Следовательно, ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

сходится несколько быстрее, чем правильная цепная дробь Коутса (4), но этот же ряд сходится несколько медленнее, чем "соответствующая" цепная дробь (11) и значительно медленней, чем "сжатая" (10).

В [13] приведены сравнительные характеристики скорости сходимости цепных дробей и степенных рядов для элементарных функций. Как правило, цепные дроби, ап-

проксимирующие элементарные функции, сходятся значительно быстрее соответствующих степенных рядов. Кроме того, цепные дроби, учитывая возможность суммирования по Никпорцу, представляют элементарные функции на всей плоскости комплексного переменного.

5. Число Лудольфа, то есть к число  $\pi$ , имеет следующую правильную цепную дробь:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14 + \dots}}}}}}}}}}}} \quad (15)$$

Ф. Кымпан [97] пишет: "Весьма распространено мнение, что обозначение  $\pi$  очень древнего происхождения. Но это вовсе не так. Обозначение отношения окружности к диаметру буквой  $\pi$ , равно как и обозначение основания натурального логарифма буквой  $e$ , введено Эйлером." Здесь можно лишь уточнить, что согласно позднейшим исследователям [20], впервые обозначение  $\pi$  употребил Вильям Джонс (1675-1749), английский преподаватель математики в своем "Обзоре достижений математики" (Synopsis palmariorum matheseos, London, 1706), то есть за год до рождения Л. Эйлера.

Перрон в своей монографии [111] приводит правильную цепную дробь для  $\pi$ , содержащую сто звеньев. Правильная цепная дробь дается в стандартной компактной форме:

$$\pi = 3 + /7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, \dots /$$

Как видим, никакой закономерности в правильной цепной дроби для  $\pi$  нет.

Правильная цепная дробь (15), представляющая число  $\pi$ , сходится быстро, как можно видеть из табл.6. Тринадцатая подходящая дробь обеспечивает точность вычисления числа с 14-ю десятичными знаками.

Вообще, все правильные цепные дроби сходятся быстро, во всяком случае, быстрее, чем самая медленно сходящаяся правильная цепная дробь – цепная дробь Фибоначчи (табл. 7).

Таблица 6

**Определение значения цепной дроби**

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	3,000000000000000	0,14159265358979
2	3,14285714285714	0,00126448926734
3	3,14150943396226	0,00008321962753
4	3,14159292035398	0,0000026676418
5	3,14159265301190	0,0000000057789
6	3,14159265392142	0,00000000033162
7	3,14159265346744	0,0000000012235
8	3,14159265361894	0,0000000002914
9	3,14159265358108	0,0000000000871
10	3,14159265359140	0,0000000000160
11	3,14159265358939	0,0000000000040
12	3,14159265358982	0,0000000000002
13	3,14159265358979	0,0000000000000

Таблица 7

**Определение значения цепной дроби**

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,000000000000000	0,618033988749894
2	2,000000000000000	0,381966011250105
3	1,500000000000000	0,118033988749894
4	1,666666666666666	0,048632677916771
5	1,600000000000000	0,018033988749894
6	1,625000000000000	0,006966011250105
7	1,61538461538461	0,002649373365279
8	1,61904761904761	0,001013630297724
9	1,61764705882352	0,000386929926365
10	1,61818181818181	0,000147829431923
11	1,61797752808988	0,000056460660007
...	...	...
38	1,61803398874990	0,000000000000001
39	1,61803398874989	0,000000000000000

Можно привести несколько разложений, связанных с числом  $\pi$ :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{7^2}{2} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \dots$$

(Бруннер, 1655 г.)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{\dots + \frac{n \cdot (n+1)}{1} + \dots}}}} \quad (\text{Эйлер, 1739 г.})$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \dots + \frac{n^2}{2n+1} + \dots}}}} \quad (\text{Ламберт, 1770 г.})$$

Цепная дробь Ламберта получается из цепной дроби (16), представляющей арктангенс:

$$\text{arctg}x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \dots + \frac{n^2 x^2}{2n+1} + \dots}}} \quad (16)$$

Цепная дробь (16) получена Ламбертом в 1770 г. Цепная дробь (16) – так называемая соответствующая цепная дробь. Эта дробь не равноценна степенному ряду для арктангенса, то есть ряду

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (17)$$

В отличие от медленно сходящегося степенного ряда (17), цепная дробь Ламберта имеет высокую скорость сходимости. В табл. 8 приведены результаты вычислений цепной дроби Ламберта.

Таблица 8

**Определение значения цепной дроби Ламберта**

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \dots + \frac{n^2}{2n+1} + \dots}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	0,21460183660255
2	0,75000000000000	0,03539816339744
3	0,79166666666666	0,00626850326921
4	0,78431372549019	0,00108443790725
5	0,78558558558558	0,00018742218813
6	0,78536585365853	0,00003230973891
7	0,78540372670807	0,00000556331062
8	0,78539720627303	0,00000095712441
9	0,78539832796998	0,00000016457253
10	0,78539813511163	0,00000002828581
11	0,78539816825758	0,0000000486013
12	0,78539816256256	0,0000000083488
13	0,78539816354084	0,0000000014339
14	0,78539816337282	0,0000000002462
15	0,78539816340167	0,0000000000422
16	0,78539816339672	0,0000000000072
17	0,78539816339757	0,0000000000012
18	0,78539816339742	0,0000000000002
19	0,78539816339745	0,0000000000000

Таким образом, 19-я подходящая дробь разложения Ламберта позволяет определить  $\pi/4$  с точностью 14-ти десятичных знаков.

6. В первых параграфах работы [56] Эйлер приводит ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}, \quad (18)$$

бесконечное произведение Валлиса

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad (19)$$

и цепную дробь Броункера

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \dots}}}}} \quad (20)$$

Ряд Лейбница равен  $\pi/4$ , бесконечное произведение Валлиса, записанное в форме Эйлера (19), равно также  $\pi/4$ , а цепная дробь Броункера (20) равна  $4/\pi$ .

Обычно в математической литературе цепную дробь Броункера связывают с бесконечным произведением Валлиса. Легко установить, что цепная дробь Броункера не связана с бесконечным произведением Валлиса, а получается из цепной дроби

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+3-x^2} + \frac{x^2}{5-3x^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{(2n+1)-(2n-1)x^2} + \dots \quad (21)$$

при  $x=1$ .

Разложение (21) – это эквивалентная степенному ряду Грегори цепная дробь:

$$\operatorname{arctg} x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{x}{1+3-x^2} + \frac{x^2}{5-x^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{(2n+1)-(2n-1)x^2} + \dots$$

Сходимость цепной дроби Броункера столь же медленная, что и сходимость эквивалентного этой дроби ряда Лейбница (табл. 9).

Таблица 9

**Определение значения цепной дроби**

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots + \frac{(2n-1)^2}{2} + \dots}}}}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
10	0,7939003542573	0,0086021908599
100	0,7863166101355	0,0003164467381
1000	0,7854907225214	0,0000925591840
10000	0,7854074264839	0,0000052630865

Таблица 10

**Определение значения ряда**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Номер звена дроби	Значения частичных сумм	Погрешность аппроксимации
10	0,76045990473235	0,02493725866510
100	0,78289822588964	0,00249993750781
1000	0,78514816345995	0,0002499993750
10000	0,78537316339751	0,0000249999994

В табл. 10 приведены значения  $\pi/4$ , найденные из ряда Лейбница.

Аналогично преобразованию ряда в цепную дробь имеет место эквивалентное преобразование бесконечного произведения в цепную дробь, полученное английским математиком Глейшером в 1874 г. [91]:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + \alpha_n) = 1 + \alpha_0 + \frac{(1 + \alpha_0)\alpha_1}{1} - \frac{(1 + \alpha_1)\alpha_2}{-\alpha_1 + (1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{(1 + a_2)a_1 a_3}{a_2 + (1 + a_2)a_3} - \dots - \frac{(1 + a_n)a_{n-1} a_{n+1}}{-a_n + (1 + a_n)a_{n+1}} - \dots \quad (22)$$

Запишем формулу Валлиса в виде

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right), \quad (23)$$

и используя тождество (22), получим после преобразований:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1+1} - \frac{1 \cdot 2}{1+1+1} + \frac{2 \cdot 3}{1+1+1+1} - \frac{3 \cdot 4}{1+1+1+1} + \dots + \frac{(n-1) \cdot n}{1} + \dots \quad (24)$$

Разложение (24), как отмечает О.Перрон [111], имеется в работе Эйлера [95], опубликованной в 1739 г.

Цепная дробь (24) может быть записана также в эквивалентном виде:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n} + \dots}}}}$$

Так как цепная дробь Эйлера эквивалентна бесконечному произведению Валлиса, то можно записать:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \dots + 1/n + \dots}}}}$$

В табл. 11 и табл. 12 приведены результаты вычислений константы  $\pi/2$  с использованием цепной дроби Эйлера (24) и бесконечного произведения Валлиса (23).

Таблица 11

Таблица 12

**Определение значения цепной дроби**

**Определение значения произведения**

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \dots + 1/n + \dots}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \dots$$

Номер звена дроби	Значения		Число множителей	Значения	
	подходящих дробей	Погрешность аппроксимации		частичных произведений	Погрешность аппроксимации
2	2,00000000000000	0,42920367320511	2	2,00000000000000	0,42920367320511
10	1,65119677500630	0,08040044821141	10	1,50108797727845	0,06970834951644
100	1,57866984460879	0,00787351781389	100	1,56303945010771	0,00775687668718
1000	1,57158192120960	0,00078559441471	1000	1,57001190930030	0,00078441749459
10000	1,57087486857463	0,00007854177974	10000	1,57071779679495	0,00007852999994
100000	1,57080418079617	0,00000785400128	100000	1,57078847291144	0,00000785388345
1000000	1,57079711219326	0,00000078539837	1000000	1,57079554139772	0,00000078539717
10000000	1,57079640533471	0,00000007853982	10000000	1,57079624825509	0,00000007853980
100000000	1,57079633464888	0,00000000785399	100000000	1,57079631894092	0,00000000785397

Интересна другая цепная дробь

$$e^{-1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots + \frac{(n-1)}{n} + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{\dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}} \quad (25)$$

которая может быть получена из ряда

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

при помощи эквивалентного преобразования Эйлера.

В табл. 13 приведены результаты вычислений цепной дроби (25), представляющей константу  $e^{-1}$ .

Таблица 13

Таблица 14

**Определение значений цепной дроби**

**Определение значения цепной дроби**

$$e^{-1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{\dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{\dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	0,71828182845905
2	2,00000000000000	0,28171817154095
3	1,66666666666667	0,05161516179238
4	1,72727272727273	0,00899089881368
5	1,71698113207547	0,00130069638357
6	1,71844660194175	0,00016477348270
7	1,71826333176026	0,00001849669878
8	1,71828369389345	0,00000186543440
9	1,71828165766640	0,00000017079264
10	1,71828184277783	0,00000001431878
11	1,71828182735187	0,00000000110717
12	1,71828182853849	0,00000000007944
13	1,71828182845373	0,00000000000532
14	1,71828182845938	0,00000000000033
15	1,71828182845903	0,00000000000002

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
1	1,00000000000000	0,34432045758120
2	0,50000000000000	0,15567954241880
3	0,75000000000000	0,09432045758120
4	0,60000000000000	0,05567954241880
5	0,69230769230769	0,03662814988889
6	0,63157894736842	0,02410059505038
7	0,67241379310345	0,01673425068465
8	0,64397905759162	0,01170048482718
9	0,66412213740458	0,00844259498578
10	0,64953664700927	0,00614289540953
11	0,66024204392649	0,00456250150769
12	0,65226325703522	0,00341628538358
13	0,65827505171468	0,00259550929588
...	...	...
290	0,65567954241879	0,00000000000001
291	0,65567954241880	0,00000000000000

Цепные дроби (25) и (26), содержащие коэффициенты гармонического ряда, указывают на глубокую связь между двумя фундаментальными константами  $\pi$  и  $e$ .

Запишем цепную дробь, частные числители которой есть числа натурального ряда:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} \quad (27)$$

Цепную дробь (27) можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1 + \frac{1/3}{1 + \frac{1/4}{1 + \dots + \frac{1/n}{1 + \dots}}}}} \quad (28)$$

В разложении (28) частными числителями и частными знаменателями являются числа гармонического ряда. Не случайно поэтому цепная дробь (28) имеет своим значением выражение, содержащее как число  $\pi$ , так и число  $e$  [52]:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,6556795424188. \quad (29)$$

Цепная дробь (29) входит в знаменитую формулу Рамануджана, приведенную в предисловии.

В табл. 14 даны результаты вычислений цепной дроби, имеющей частными числителями числа натурального ряда.

Еще более медленно сходящейся цепной дробью, нежели цепная дробь (29), будет цепная дробь, имеющая частными числителями квадраты натуральных чисел (табл. 15).

Таблица 15

**Определение значения цепной дроби**

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}}$$

Номер звена	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0.500000000000	0.193147180560
10	0.645634920635	0.047512259925
100	1.688172179310	0.004975001250
1000	1.692647430560	0.000499750000
10000	1.693097183060	0.000049997500
100000	1.693142180585	0.00000499998
1000000	1.693146680560	0.000000500000
10000000	1.693147130560	0.000000050000
100000000	1.693147175560	0.000000005000

Цепная дробь

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \dots + \frac{n^2}{1 + \dots}}}}} \quad (30)$$

равноценная цепная дробь, то есть она эквивалентна ряду

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots, \quad (31)$$

чем и объясняется чрезвычайно медленная сходимостью цепной дроби (30).

Помимо эквивалентных или равноценных цепных дробей существуют так называемые соответствующие цепные дроби, которые сходятся, как правило, значительно быстрее, чем ряды. Ранее рассматривался пример соответствующей цепной дроби:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{9}{7} + \frac{16}{9} - \dots + \frac{n^2}{2n+1} + \dots$$

В табл. 16 приведены результаты вычислений ряда Меркатора.

Приведем еще одну быстро сходящуюся цепную дробь, которая может быть получена из соответствующей цепной дроби Лагранжа:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2+3} + \frac{x}{2+5} + \dots + \frac{nx}{2+2n+1} + \dots$$

При  $x = 1$  имеем:

$$\ln 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+5} + \dots + \frac{n}{2+2n+1} + \dots \tag{32}$$

В табл. 17 приведены результаты вычисления цепной дроби (32).

Таблица 16

**Определение значения ряда**

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Число членов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность аппроксимации
2	0,500000000000000	0,19314718055994
10	0,64563492063492	0,04751225992502
100	0,68817217931020	0,00497500124974
1000	0,69264743055982	0,00049975000012
10000	0,69309718305996	0,00004999749998
100000	0,69314218058498	0,00000499997496
1000000	0,69314668056025	0,00000049999969
10000000	0,69314713056010	0,00000004999984
100000000	0,69314717556042	0,00000000499952

Таблица 17

**Определение значения цепной дроби**

$$\ln 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+5} + \dots + \frac{n}{2+2n+1} + \dots$$

Число звеньев	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0,666666666666666	0,02648051389328
3	0,700000000000000	0,00685281944005
4	0,69230769230769	0,00083948825225
5	0,693333333333333	0,00018615277339
6	0,69312169312169	0,00002548743825
7	0,69315245478036	0,00000527422042
8	0,69314641744548	0,00000076311446
9	0,69314733235438	0,00000015179444
10	0,69314715785304	0,00000002270690
11	0,69314718496213	0,00000000440219
12	0,69314717988653	0,00000000067341
13	0,69314718068816	0,00000000012822
14	0,69314718054001	0,00000000001993
15	0,69314718056369	0,00000000000375
16	0,69314718055936	0,00000000000058
17	0,69314718056005	0,00000000000012
18	0,69314718055993	0,00000000000001

Таким образом, использование цепной дроби (32), содержащей 18 звеньев, обеспечивает точность вычисления  $\ln 2$  с 13 десятичными разрядами.

Для сравнения: применение для определения  $\ln 2$  ряда (31), или равноценной цепной дроби (30), включающих 100 миллионов звеньев, позволяет вычислить  $\ln 2$  с точностью всего 8 десятичных знаков.



# ГЛАВА 1 НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

## 1. Обобщенные непрерывные дроби

Несколько отступим от традиции и определим непрерывную дробь отношением определителей вида:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{vmatrix}}, \quad (1.1.1)$$

где элементы  $a_{ij}$  – независимые переменные величины.

Что же общего между отношением определителей (1.1.1) и конструкцией

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots + \frac{a_n}{b_n + \ddots}}}}, \quad (1.1.2)$$

которая в математической литературе собственно и определяется как непрерывная или цепная дробь? Связь между выражениями (1.1.1) и (1.1.2), тем не менее, существует. И если определять выражение (1.1.1) как непрерывную дробь, то выражение (1.1.2) следовало бы называть обыкновенной непрерывной дробью. Будем, однако, называть выражение (1.1.1) *обобщенной непрерывной дробью* [37], оставляя за выражением (1.1.2) традиционное название – *цепная дробь*.

Подходящие дроби разложения (1.1.2) записываются так:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}, \dots$$

Подходящие дроби обобщенной непрерывной дроби (1.1.1) введем следующим образом:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_{11}}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \dots$$

Легко заметить, что обобщенная непрерывная дробь (1.1.1) записывается отношением определителя квадратной матрицы общего вида к определителю главного минора  $M_{11}$  этой же матрицы, то есть определитель, стоящий в знаменателе, получается из опре-

делителя, записанного в числителе, вычеркиванием элементов первой строки и первого столбца.

Представление обобщённой непрерывной дроби отношением определителей квадратных матриц общего вида имеет то основание, что все известные классы непрерывных дробей есть частные случаи этой непрерывной дроби. Например, обыкновенные непрерывные дроби, или цепные дроби, могут быть записаны отношением трёхдиагональных определителей:

$$a_{11} + \frac{a_{12}}{a_{22} + \frac{a_{23}}{a_{33} + \frac{a_{34}}{a_{44} + \frac{a_{45}}{a_{55} + \dots}}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (1.1.3)$$

Ветвящиеся непрерывные дроби с числом ветвления  $N=2$ , представляются отношением определителей характерной ступенчатой структуры:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \dots} + \frac{a_4}{b_4 + \dots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \dots} + \frac{a_6}{b_6 + \dots}} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}$$

Непрерывные дроби с расположением звеньев “вниз” и “вверх”

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_5}{b_5 + \frac{a_7}{b_7 + \dots}}} + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_6}{b_6 + \dots}}}$$

также могут быть определены отношением определителей [56].

Старший по модулю корень алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \quad (1.1.4)$$

представляется непрерывной дробью Хессенберга, которую можно записать отношением определителей матриц Хессенберга:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (1.1.5)$$

Важно подчеркнуть, что непрерывной дробью (1.1.5) представляется как действительный, так и комплексный корень уравнения (1.1.4). В случае, если корень комплексный, значение его по подходящим дробям непрерывной дроби Хессенберга может быть установлено при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма [59].

Цепные дроби рассматриваются как важный, но далеко не единственный класс непрерывных дробей, бесчисленное разнообразие структур которых нашло в определителях практически идеальное средство для их записи, а также для выполнения операций над ними. Возможность изучения непрерывных дробей различных классов с единых позиций представляется существенным завоеванием теории.

Классифицировать непрерывные дроби наиболее естественным образом можно с использованием графов, которые определяют их структуру. В [55] было предложено обыкновенные цепные дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (1.1.6)$$

описывать линейным ориентированным взвешенным графом [54]:

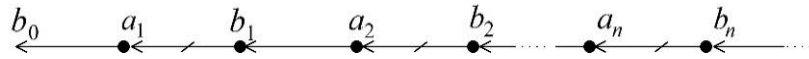


Рис. 1.1. Граф цепной дроби (1.1.6).

Ветвящиеся непрерывные дроби [55]:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \dots} + \frac{a_4}{b_4 + \dots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \dots} + \frac{a_6}{b_6 + \dots}} \quad (1.1.7)$$

можно задавать графом типа дерева:

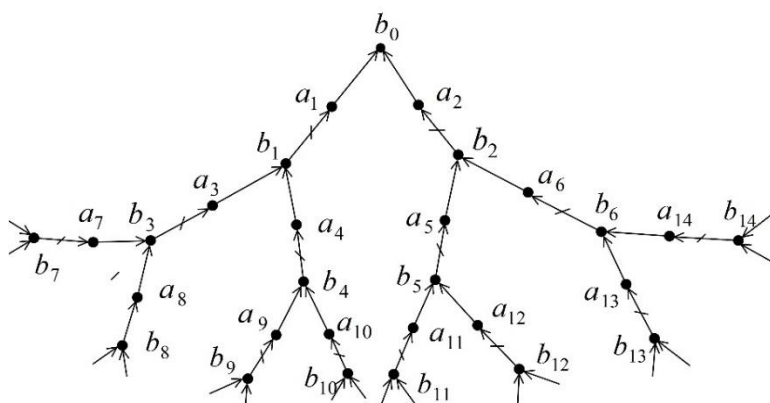


Рис. 1.2. Граф ветвящейся непрерывной дроби (1.1.7).

Для непрерывной дроби Хессенберга с четырьмя диагоналями

$$\varpi = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right| \end{array} \quad (1.1.8)$$

граф имеет вид [54]:

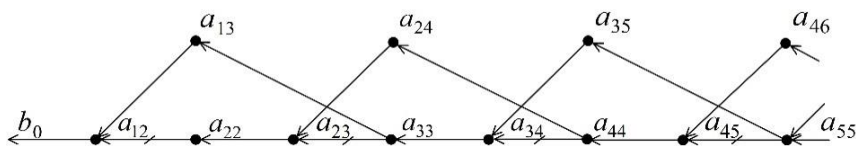


Рис. 1.3. Граф непрерывной дроби Хессенберга (1.1.8).

## 2. Цепные дроби

Считается, что цепные дроби впервые появились на страницах «Алгебры» Бомбелли, вышедшей в 1572 г. [50] Естественная запись цепных дробей (1.1.2) имеет единственный недостаток – занимает значительную площадь страницы. Поэтому предлагалось множество «экономичных» форм представления цепных дробей [91]. В настоящее время наибольшее распространение получили две формы компактной записи цепных дробей:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}}, \quad (1.2.1)$$

$$b_0 + \frac{a_1 |}{|b_1} + \frac{a_2 |}{|b_2} + \dots + \frac{a_n |}{|b_n} + \dots \quad (1.2.2)$$

Запись (1.2.1) была предложена в 1820 г. известным английским астрономом и математиком Джоном Гершелем, а запись (1.2.2) появилась в работе немецкого математика Альфреда Прингсхейма в 1898 г. В книге мы используем запись Гершеля (1.2.1).

Иногда используются такие компактные записи цепных дробей:

$$\begin{aligned} & b_0 + a_1 / (b_1 + a_2 / (b_2 + a_3 / (b_3 + a_4 / (b_4 + a_5 / (b_5 + \dots))))), \\ & b_0 + a_1 / b_1 + a_2 / b_2 + a_3 / b_3 + a_4 / b_4 + \dots + a_n / b_n + \dots, \\ & [b_0; a_1 / b_1, a_2 / b_2, a_3 / b_3, a_4 / b_4, a_5 / b_5, \dots]. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для компактной записи цепных дробей используются также обозначения:

$$b_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1} = b_0 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + \dots} + \frac{a_n}{1 + \dots}, \quad (1.2.4)$$

$$b_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2 + \dots} + \frac{1}{b_n + \dots}, \quad (1.2.5)$$

$$b_0 + \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 + \dots} + \frac{a_n}{b_n + \dots}, \quad (1.2.6)$$

Обозначения (1.2.4) – (1.2.6) аналогичны каноническим обозначениям  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  для рядов

и  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  для бесконечных произведений. Выбор символа  $K$  определился немецким словом Kettenbruch (цепная дробь).

Если в (1.2.5) частные знаменатели натуральные числа, то такие цепные дроби, именуемые как правильные, записываются скобками Гаусса:

$$(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots).$$

Конечную цепную дробь

$$\frac{P_{k,k+n}}{Q_{k,k+n}} = b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{\dots + \frac{a_{k+n}}{b_{k+n}}}}$$

называют *отрезком* цепной дроби (1.2.1).

Используется также бесконечная цепная дробь

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \frac{a_{n+3}}{\dots}}}$$

Эту цепную дробь называют *остатком* цепной дроби (1.2.1) и обозначают  $r_n$ .

Таким образом, запишем:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{\dots + \frac{a_k}{b_k + r_k}}}.$$

Выражение (1.2.1) называется *цепной (Kettenbruch) или непрерывной дробью (continued fraction)*. Обычно  $a_i, b_i$  – это действительные или комплексные числа, а также функции, как правило, полиномы первой или второй степени. Но компонентами цепной дроби (1.2.1) могут быть и иные объекты, такие как матрицы, элементы абстрактных пространств, в которых введены операции сложения и деления, и т.д. [58]. Давно уже изучаются операторные дроби, интегральные непрерывные дроби [81] и другие подобные агрегаты.

Элементы  $a_i$  называют *частными числителями* (*partial numerator*),  $b_i$  – *частными знаменателями* (*partial denominator*),  $b_0$  – *свободным членом*. Иногда  $a_i$  и  $b_i$  называют *элементами* (*elements*). Дробь  $a_i/b_i$  именуют *звеньями* или *частными отношениями* (*partial quotient*) цепной дроби. Конечную цепную дробь (1.2.1) называют *n-й подходящей дробью* или *аппроксимантой* (*approximant*) цепной дроби. Числитель  $P_n$  и знаменатель  $Q_n$  подходящей дроби  $P_n/Q_n$  называют *n-м – числителем* (*nth numerator*) и *n-м – знаменателем* (*nth denominator*).  $P_n$  и  $Q_n$ , записанные в виде трехдиагональных определителей, принято называть *континуантами* (*continuants*).

Помимо символов  $P_n/Q_n$  используют и другие обозначения подходящих дробей. Например, в монографиях [16, 111] подходящие дроби записываются как  $A_n/B_n$ . Для обозначения подходящих дробей используется также символ  $T_n(0)$ , когда речь идет о дробно-линейных преобразованиях. Кроме того, аналогично символу  $s_n$  для частичных сумм ряда используется символ  $f_n$ , обозначающий *n-ю* подходящую дробь [16]:

$$f_n = P_n / Q_n .$$

Мы будем применять для обозначения подходящих дробей символ  $\omega_n$  :

$$\omega_n = P_n / Q_n ,$$

так как символ  $f$  традиционно используется для обозначения функций. Символом  $\omega$  иногда будем обозначать цепную дробь:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots} .$$

Из определения *n-й* подходящей дроби в виде отношения трехдиагональных определителей используются *рекуррентные формулы*:

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} , \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} , \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

которые при начальных условиях

$$P_{-1} = 1, P_0 = b_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$$

справедливы при  $n \geq 1$ .

Таким образом, числители и знаменатели подходящих дробей цепной дроби (1.2.6) можно последовательно определять, используя простые рекуррентные соотношения второго порядка (1.2.7). Обычно справедливость рекуррентных формул (1.2.7) устанавливают методом математической индукции. В самом деле, для  $n = 2$  определяем непосредственно:

$$\frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 b_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0} .$$

Можно записать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}} .$$

Используя соотношение (1.2.7), установим:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\left( b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{\left( b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}} =$$

$$\frac{P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}}{Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}} = \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}}.$$

Следовательно, рекуррентные соотношения (1.2.7) справедливы для всех целых  $n \geq 2$ .

Соотношения (1.2.7) впервые установлены Валлисом и подробнее были рассмотрены Эйлером. Эйлером введен термин “непрерывная дробь” (fractio continua) [91].

Аналогично ситуации с рядами, само по себе выражение

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

никакого определенного смысла не имеет, ибо, как известно, действие сложения в своем непосредственном содержании имеет дело лишь с конечным числом слагаемых. Смысл конструкций, имеющих бесконечное число арифметических действий, всякий раз надо определять. Если ряд удобно определять через частичные суммы, то цепную дробь столь же естественно толковать через понятие подходящей дроби.

Определив цепную дробь как выражение (1.2.6) и введя понятие подходящей дроби, остается сделать заключительный и, казалось бы, совершенно очевидный шаг, – определить значение цепной дроби как предел, к которому стремится последовательность подходящих дробей. Именно так авторы в теории цепных дробей и поступают, утверждая:

*“Цепная дробь называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega.$$

*Этот предел является значением цепной дроби” [16].*

В [53] введено иное, отличное от традиционного, определение сходимости цепных дробей, которое позволяет суммировать расходящиеся в классическом смысле цепные дроби, то есть находить их значения. Метод суммирования расходящихся цепных дробей [62-80] ( $r/\varphi$  – алгоритм) нашел разнообразные применения в вычислительной математике, некоторые из них будут рассмотрены далее.

### 1.3. Цепные дроби и дробно-линейные преобразования

Х. Уолл в монографии “Analytic theory of continued fractions” [122] определял цепные дроби, как произведение дробно-линейных преобразований. Х. Уолл рассматривает дробно-линейную функцию общего вида

$$t_n(z) = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}, \quad \gamma_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.1)$$

и произведения дробно-линейных преобразований:

$$t_0 t_1(z) = t_0(t_1(z)), \quad t_0 t_1 t_2(z) = t_0 t_1(t_2(z)), \quad t_0 t_1 t_2 t_3(z) = t_0 t_1 t_2(t_3(z)), \dots$$

К цепной дроби канонического вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}$$

придем, если рассмотрим частный случай дробно-линейных преобразований (1.3.1).

Запишем цепную дробь

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + z}}, \quad a_n \neq 0 \quad (1.3.2)$$

и введем обозначения

$$t_0(z) = b_0 + z, \quad t_n(z) = \frac{a_n}{b_n + z}, \quad n \geq 1 .$$

Тогда

$$T_n(z) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + t_n(z)}},$$

$$T_n(z) = T_{n-1}(t_n(z)) . \quad (1.3.3)$$

Из (1.3.2) видим, что

$$\frac{P_n}{Q_n} = T_n(0) = T_{n+1}(\infty) .$$

Последовательно применяя преобразование (1.3.3), получим:

$$T_n(z) = T_{n-2}(t_{n-1}(t_n(z))) = T_{n-3}(t_{n-2}(t_{n-1}(t_n(z)))) = t_0(t_1(\dots(t_{n-1}(t_n(z))))). \quad (1.3.4)$$

Таким образом,  $n$ -ю подходящую дробь можно рассматривать как результат последовательного применения дробно-линейных преобразований в точке  $z = 0$ :

$$T_n(0) = t_0 t_1 \dots t_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}} = \frac{P_n}{Q_n} . \quad (1.3.5)$$

Бесконечная цепная дробь может быть записана следующим образом:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(\infty) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots} . \quad (1.3.6)$$

Х. Уолл, как и другие авторы [16, 101], определяет значение бесконечной цепной дроби

$$\omega = b_0 + K_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} ,$$

как значение предела дробно-линейных преобразований

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 t_1 \dots t_n(\infty) .$$

Цепная дробь (1.3.6) сходится или является сходящейся, если предел последовательности подходящих дробей (1.3.6) существует и конечен. Значение цепной дроби определяется значением предела последовательности аппроксимант.

Как отмечает Уолл, проблема сходимости непрерывных дробей значительно сложнее и интереснее, чем соответствующая проблема для рядов.

#### 1.4. Правильные цепные дроби и некоторые их применения

Правильными цепными дробями называют цепные дроби, у которых все частные числители равны единице, а все частные знаменатели, кроме  $b_0$ , являются натуральными числами:

$$\omega = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n} + \dots}} \quad (1.4.1)$$



Из равенства

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

следует, что все подходящие дроби правильной цепной дроби *несократимы*.

Алгоритм Евклида дает возможность находить наибольший общий делитель (НОД) чисел  $u$  и  $v$ . Пусть даны два натуральных числа  $u$  и  $v$ , причем  $u > v$ . Разделив  $u$  на  $v$ , имеем

$$\frac{u}{v} = q_0 + \frac{u_1}{v}$$

Разделив  $v$  на  $u_1$ , имеем аналогично

$$\frac{v}{u_1} = q_1 + \frac{u_2}{v_1}$$

Продолжая, получим

$$\frac{u_1}{u_2} = q_2 + \frac{u_3}{u_2}$$

и т.д. Такой процесс последовательных делений называется *алгоритмом Евклида*. Так как  $u, u_1, u_2, \dots$  – монотонно убывающая последовательность натуральных чисел, то такой процесс конечен, т.е. существует такой индекс  $n$ , что  $\frac{u_{n-1}}{u_n} = q_n$  (следовательно,  $u_n \neq 0, u_{n+1} = 0$ ). Отсюда  $u_n$  является *наибольшим общим делителем* чисел  $u$  и  $v$ . Часто его обозначают через  $(u, v)$ .

**Пример.** Найти наибольший общий делитель чисел 5291 и 4514. Раскладывая по алгоритму Евклида отношение 5291/4514 в цепную дробь, получим

$$\frac{5291}{4514} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{148/37}}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + 4}}}$$

Следовательно, НОД (5291, 4514) = 37.

**Пример.** Найти НОД (353, 136).

$$\frac{353}{136} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3/2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + 1 + \frac{1}{2}}}}$$

Следовательно, числа 353 и 136 взаимно простые.

Алгоритм Евклида используется для решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени. Уравнение  $ax + by = c$ , где  $a, b$  и  $c$  известны, а  $x$  и  $y$  неизвестны, называют *неопределенным уравнением первой степени*.

Будем считать, что  $a, b$  взаимно простые. Тогда общее решение в целых числах рассматриваемого уравнения имеет вид [33]:

$$x = (-1)^{n-1} c Q_{n-1} + t Q_n,$$

$$y = (-1)^n c P_{n-1} - t P_n,$$

где  $t$  – произвольное целое число,  $P_{n-1}$  и  $Q_{n-1}$  – числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби в разложении  $a/b = P_n/Q_n$  в правильную цепную дробь.

Одной из важнейших задач диофантова анализа является решение в целых числах уравнения Пелля

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

где  $a$  - положительное целое число, не являющееся квадратом. Эта задача была решена Л. Лагранжем при помощи цепных дробей [20].

Подходящие дроби правильной цепной дроби являются *наилучшими приближениями*. Пусть любое действительное число  $A$  разложено в правильную цепную дробь. Обозначим через  $P_n/Q_n$  подходящую дробь  $n$ -го порядка этой цепной дроби. Тогда имеет место неравенство

$$\left| A - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \quad (1.4.2)$$

Эти подходящие дроби являются наилучшими приближениями к числу  $A$  в том смысле, что никакая рациональная дробь со знаменателем, не превышающим  $Q_n$ , не может отличаться от  $A$  меньше, чем дробь  $P_n/Q_n$ .

Всякое действительное иррациональное число можно однозначно представить в виде бесконечной правильной дроби. Всякая бесконечная правильная цепная дробь по теореме Зейделя сходится и является разложением одного и только одного иррационального действительного числа.

Несколько слов о периодических правильных цепных дробях. Правильная цепная дробь  $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$  называется *чисто периодической*, если последовательность ее частных знаменателей  $q_0, q_1, q_2, \dots$  представляет собой повторение одного и того же периода из  $n$  чисел  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ . Если же такое повторение начинается не с  $q_0$ , а с некоторого  $q_k$  ( $k \geq 1$ ), то правильная цепная дробь называется *смешанной периодической*. Аналогично вводится понятие периодических цепных дробей и для цепных дробей общего вида.

В теории чисел важную роль играет теорема Лагранжа, утверждающая, что всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую *правильную* цепную дробь.

### 1.5. Некоторые формулы теории цепных дробей

Получим так называемую детерминантную формулу. Запишем разность между двумя соседними подходящими дробями:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.1)$$

Заменяя  $P_n$  и  $Q_n$  с помощью рекуррентных формул

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} \left[ (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) Q_{n-1} - (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) P_{n-1} \right] = \\ &= -a_n \frac{P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}}{Q_{n-1} Q_n}. \end{aligned}$$

Применяя то же преобразование к соотношению  $P_{n-1}Q_{n-2} - Q_{n-1}P_{n-2}$ , получим

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^2 a_n a_{n-1} \frac{P_{n-2}Q_{n-3} - Q_{n-2}P_{n-3}}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Повторяя подобные преобразования, получим *формулу разности между соседними подходящими дробями*:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}, \quad (1.5.3)$$

то есть

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n. \quad (1.5.4)$$

Формула (1.5.4) называется *детерминантной формулой* (determinant formula).

Определим разность между двумя подходящими дробями, причём разность индексов подходящих равна двум.

Можно записать

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}. \quad (1.5.5)$$

Сложив (1.5.3) и (1.5.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n} \left( \frac{a_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{1}{Q_{n-1}} \right) = \\ &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n Q_{n+1}} (a_{n+1} Q_{n-1} - Q_{n+1}) = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1}}{Q_{n-1} Q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем формулу разности между подходящими дробями, индексы которых отличаются на 2:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1}}{Q_{n-1} Q_{n+1}}. \quad (1.5.6)$$

Заменив в (1.5.6)  $n$  на  $2k$ , запишем:

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} = - \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{Q_{2k-1} Q_{2k+1}}. \quad (1.5.7)$$

Используя формулу (1.5.7), можно получить

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{Q_1 Q_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 b_5}{Q_3 Q_5} - \dots - \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{Q_{2k-1} Q_{2k+1}}. \quad (1.5.8)$$

Аналогично запишем

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{Q_{2k-2} Q_{2k}}, \quad (1.5.9)$$

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{Q_0 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 b_4}{Q_2 Q_4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{Q_{2k-2} Q_{2k}}. \quad (1.5.10)$$

Если все элементы цепной дроби положительны, то есть  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ , то для подходящих дробей разложения

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (1.5.11)$$

имеет место, так называемое, *свойство «вилки»*.

Из формулы (1.5.10) видно, что подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность. Очевидно, что все подходящие дроби разложения (1.5.11) четного порядка меньше величины  $b_0 + a_1/b_1$ . Следовательно, подходящие дроби четного порядка образуют при положительных членах звеньев монотонно возрастающую, ограниченную сверху числом  $b_0 + a_1/b_1$ , последовательность. Такая последовательность имеет предел, то есть  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}/Q_{2k}$  существует.

Из формулы (1.5.8) следует, что при положительных членах звеньев подходящие дроби нечетного порядка образуют монотонно убывающую последовательность. При этом ясно, что все подходящие дроби нечетного порядка больше  $b_0$ . Таким образом, подходящие дроби нечетного порядка образуют при положительных членах звеньев монотонно убывающую, ограниченную снизу числом  $b_0$  последовательность. Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k-1}/Q_{2k-1}$  существует. Отсюда еще не следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}/Q_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k-1}/Q_{2k-1}$ .

В общем случае для знакоположительных цепных дробей имеет место расположение подходящих дробей (рис. 1.4).

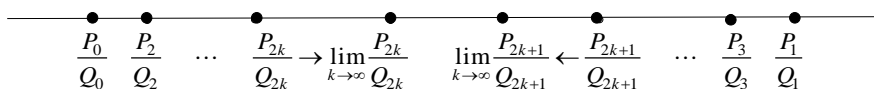


Рис. 1.4. Расположение подходящих дробей знакоположительной цепной дроби.

А.Н. Хованский [49] так определяет *сходимость* цепных дробей: “Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} \neq \infty,$$

то есть, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

существует и конечен, то цепная дробь называется *сходящейся*“.

В этом случае при положительных членах звеньев ее значение  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n$  больше любой ее подходящей дроби четного порядка и меньше любой ее подходящей дроби нечетного порядка, то есть имеет место свойство «вилки».

Из соотношения

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \quad (1.5.12)$$

следует, что

$$\left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.13)$$

Для знакоположительных цепных дробей существует практически удобная оценка погрешности аппроксимации:

$$\Delta_n = \left| \omega - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right|. \quad (1.5.14)$$

Значение  $\omega$  для знакоположительной цепной дроби  $P_{n-1}/Q_{n-1}$  и  $P_n/Q_n$ , однако, все же несколько ближе к значению  $P_n/Q_n$ .

Ситуация аналогична с оценкой погрешности аппроксимации сходящимися знакопеременными рядами. Собственно, для знакоположительных цепных дробей эквивалентный цепной дроби ряд является знакпеременным.

Можно записать тождество

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \left( \frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} \right) + \left( \frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} \right) + \dots + \left( \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right). \quad (1.5.15)$$

Сложив в тождестве (1.5.15) разности, определяемые формулой (1.5.12), получим

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (1.5.16)$$

То есть для цепной дроби можно записать ряд

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots} = b_0 + \frac{a_1}{Q_0 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n} + \dots \quad (1.5.17)$$

Ряд и цепную дробь, удовлетворяющие равенству (1.5.17), называют *равноценными*.

Пример. Найти равноценный ряд для цепной дроби

$$\ln 2 = \frac{1}{1+2} - \frac{1^2}{2+3} + \frac{1^2}{3+4} - \frac{2^2}{4+5} + \dots + \frac{n^2}{2n+2n+1} - \frac{n^2}{2n+2n+1} + \dots \quad (1.5.18)$$

По формулам (1.5.17) имеем:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{1}{1+2} - \frac{1^2}{2+3} + \frac{1^2}{3+4} - \frac{2^2}{4+5} + \frac{3^2}{5+6} - \frac{3^2}{6+7} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} - \frac{1}{130} + \frac{1}{975} - \frac{1}{4725} + \frac{1}{32508} - \dots \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

Частичные суммы ряда (1.5.19) и  $n$ -е подходящие дроби разложения (1.5.18) равны:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1} = 1, & s_1 &= 1, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{1+2} - \frac{1^2}{3} = \frac{2}{3}, & s_2 &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{1}{1+2} + \frac{1^2}{3} - \frac{1^2}{10} = \frac{7}{10}, & s_3 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{7}{10}, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

## 1.6. Эквивалентные преобразования цепных дробей

Цепные дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots}, \quad (1.6.1)$$

$$b_0^1 + \frac{a_1^1}{b_1^1 + b_2^1 + \dots + b_n^1 + \dots} \quad (1.6.2)$$

называются *эквивалентными*, если

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P'_n}{Q'_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6.3)$$

где  $\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P'_n}{Q'_n}$  – подходящие дроби цепных дробей (1.6.1) и (1.6.2) соответственно. Переход от цепной дроби (1.6.1) к цепной дроби (1.6.2) называется *эквивалентным преобразованием дроби* (1.6.1). Эквивалентные преобразования всегда можно записать в виде

$$b_0 + \frac{\rho_1 a_1}{\rho_1 b_1 + \frac{\rho_1 \rho_2 a_2}{\rho_2 b_2 + \dots + \frac{\rho_{n-1} \rho_n a_n}{\rho_n b_n + \dots}}}, \quad (1.6.4)$$

где  $\rho_k$  – некоторые отличные от нуля комплексные числа.

Основное тождество (1.6.4) широко применяется при преобразованиях цепных дробей.

Если  $b_k \neq 0$ , то используя (1.6.4), где  $\rho_k = \frac{1}{b_k}$ , дробь (1.6.1) преобразуется к эквивалентной дроби с частными знаменателями, равными единице:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} = b_0 + \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{1 + \dots + \frac{c_n}{1 + \dots}}} \quad (1.6.5)$$

где 
$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad c_n = \frac{a_n}{b_{n-1} b_n}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.6.6)$$

Цепную дробь (1.6.1) можно преобразовать к эквивалентной дроби с частными числителями, равными единице:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} = b_0 + \frac{1}{d_1 + \frac{1}{d_2 + \dots + \frac{1}{d_n + \dots}}}, \quad (1.6.7)$$

где

$$d_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad d_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k} b_{2k+1}}{a_1 a_3 \dots a_{2k+1}},$$

$$d_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1} b_{2k}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

### 1.7. Равноценные цепные дроби

Цепную дробь и ряд называют *равноценными*, если  $n$ -я подходящая дробь цепной дроби совпадает с  $n$ -й частичной суммой ряда, и наоборот,  $n$ -я частичная сумма ряда имеет то же значение, что и  $n$ -я подходящая дробь цепной дроби.

Равноценные цепные дроби находятся по коэффициентам исходного степенного ряда с использованием тождественного преобразования:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = c_0 + \frac{c_1 x}{1 - c_1 + c_2 x - c_2 + c_3 x - \dots - c_{n-1} + c_n x - \dots} \quad (1.7.1)$$

Помимо формулы (1.7.1), можно записать еще одно тождество:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \frac{c_0}{1 - c_0 + c_1 x - c_1 + c_2 x - c_2 + c_3 x - \dots - c_{n-1} + c_n x - \dots} \quad (1.7.2)$$

Тождества (1.7.1) и (1.7.2) принадлежат Эйлеру [95].

Частичные суммы ряда и значения подходящих дробей разложений (1.7.1) и (1.7.2) совпадают. В самом деле, для цепной дроби (1.7.1):

$$c_0 + \frac{c_1 x}{1} = c_0 + c_1 x,$$

$$c_0 + \frac{c_1 x}{1 - c_1 + c_2 x} - \frac{c_2 x}{1 - c_1 + c_2 x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

$$c_0 + \frac{c_1 x}{1 - c_1 + c_2 x} - \frac{c_2 x}{1 - c_1 + c_2 x} - \frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

.....

Для цепной дроби (1.7.2):

$$\frac{c_0}{1 - c_0 + c_1 x} = c_0 + c_1 x,$$

$$\frac{c_0}{1 - c_0 + c_1 x} - \frac{c_1 x}{1 - c_0 + c_1 x} - \frac{c_0 c_2 x}{c_1 + c_2 x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

$$\frac{c_0}{1 - c_0 + c_1 x} - \frac{c_1 x}{1 - c_0 + c_1 x} - \frac{c_0 c_2 x}{c_1 + c_2 x} - \frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

.....

Заметим, что к тождествам Эйлера (1.7.1) и (1.7.2) можно прийти, производя эквивалентные преобразования определителей.

Используя тождества Эйлера (1.7.1) и (1.7.2), можно записать равноценные цепные дроби для элементарных функций.

Например, для логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \frac{x}{1+2-x} - \frac{1^2 x}{3-2x} + \frac{2^2 x}{4-3x} - \dots + \frac{n^2 x}{n+1-nx} + \dots \quad (1.7.3)$$

При  $x = 1$  получим равноценную цепную дробь:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{1+1} - \frac{1^2}{1+1} + \frac{2^2}{1+1} - \frac{3^2}{1+1} + \frac{4^2}{1+1} - \dots + \frac{n^2}{1+1} + \dots \quad (1.7.4)$$

Цепная дробь (1.7.4) сходится так же медленно, как и ряд для  $\ln 2$ . Частичные суммы ряда и подходящие дроби разложения совпадают:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1} = 1, \\ s_2 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ s_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, & \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{1}{1+1} - \frac{1^2}{1+1} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Для ряда Лейбница запишем равноценную дробь – цепную дробь Броункера:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{1}{1+2} - \frac{1^2}{2+2} + \frac{3^2}{2+2} - \frac{5^2}{2+2} + \frac{7^2}{2+2} - \dots + \frac{(2n+1)^2}{2} + \dots \quad (1.7.5)$$

Тождества Бернулли позволяют по заданной последовательности

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_n, \dots,$$

совпадающей со значениями подходящих дробей некоторой цепной дроби, найти эту цепную дробь. Эта цепная дробь может быть записана [49]:

$$k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1} + \frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2}} + \dots, \quad (1.7.6)$$

или в ином виде

$$\frac{k_0}{1 + \frac{k_0 - k_1}{k_1} + \frac{k_0(k_1 - k_2)}{k_2 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2}}}. \quad (1.7.7)$$

Например, для цепной дроби (1.7.6) можно записать:

$$\begin{aligned} & k_0, \\ & k_1 = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1}, \\ & k_2 = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_0}, \\ & \dots \\ & k_n = k_0 + \frac{k_1 - k_0}{1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_0} + \frac{(k_1 - k_0)(k_2 - k_3)}{k_3 - k_1} + \dots + \frac{(k_{n-2} - k_{n-3})(k_{n-1} - k_n)}{k_n - k_{n-2}}. \end{aligned}$$

Имеет место также тождество [49]:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = k_1 + \frac{k_2 - k_1^2}{k_1} + \frac{k_1 k_3 - k_2^2}{k_1 k_2 - k_3} + \frac{(k_2 k_4 - k_3^2)(k_1^2 - k_2)}{k_2 k_3 - k_1 k_4} + \dots + \frac{(k_{n-1} k_{n+1} - k_n^2)(k_{n-2}^2 - k_{n-3} k_{n-1})}{k_{n-1} k_n - k_{n-2} k_{n+1}} \quad (1.7.8)$$

Рассмотрим задачу Бернулли в более общей постановке: построить цепную дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2} + \frac{a_2}{\dots + b_n} + \dots, \quad (1.7.9)$$

если заданы две последовательности чисел

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \quad \text{и} \quad Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n,$$

Здесь  $P_n$  и  $Q_n$ , соответственно, значения числителей и знаменателей подходящих дробей цепной дроби (1.7.9). Используя известные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \end{aligned}$$

получим формулы, определяющие частные числители  $a_n$  и частные знаменатели  $b_n$  через заданные значения  $P_n$  и  $Q_n$  подходящих дробей разложения (1.7.9):

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ Q_{n-1} & Q_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}}{P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.7.10)$$

$$b_n = \frac{\begin{vmatrix} P_n & P_{n-2} \\ Q_n & Q_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n}{P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.7.11)$$



Если построить цепную дробь, значения подходящих которой будут совпадать со значениями частичных сумм ряда:

$$\begin{aligned} k_0 &= c_0, \\ k_1 &= c_0 + c_1, \\ k_2 &= c_0 + c_1 + c_2, \\ k_3 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

то подставляя значения  $k_m$ , определяемые соотношениями (1.7.12), в тождества Бернулли (1.7.6) и (1.7.7), получим цепные дроби Эйлера (1.7.1) и (1.7.2).

Равноценные цепные дроби можно построить не только для рядов, но и для бесконечных произведений.

В 1833 г. Штерн опубликовал тождества [91]:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{P_3}{Q_3} \cdots \frac{P_n}{Q_n} \cdots = \frac{1}{1 - \frac{P_1 - Q_1}{P_1} - \frac{(P_2 - Q_2)P_1 Q_1}{P_1 P_2 - Q_1 Q_2} - \frac{(P_3 - Q_3)(P_2 - Q_2)P_2 Q_2}{P_2 P_3 - Q_2 Q_3} - \dots - \frac{(P_{n-1} - Q_{n-1})(P_{n-1} - Q_{n-1})P_n Q_n}{P_n P_{n+1} - Q_n Q_{n+1}} - \dots} \quad (1.7.13)$$

При  $Q_n = 1$  имеем:

$$\prod_{i=1}^{\infty} P_i = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n \cdots = P_0 + \frac{P_0(P_1 - 1)}{1} - \frac{P_1(P_2 - 1)}{P_1 P_2 - 1} - \frac{P_2(P_3 - 1)(P_1 - 1)}{P_2 P_3 - 1} - \dots - \frac{P_{n-1}(P_n - 1)(P_{n-2} - 1)}{P_{n-1} P_n - 1} - \dots \quad (1.7.14)$$

В 1874 г. Глейшер предложил преобразование бесконечного произведения в цепную дробь [91]:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \alpha_i) = 1 + \alpha_0 + \frac{(1 + \alpha_0)\alpha_1}{1} - \frac{(1 + \alpha_1)\alpha_2}{\alpha_1 + (1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{(1 + \alpha_2)\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2 + (1 + \alpha_2)\alpha_3} - \dots - \frac{(1 + \alpha_n)\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}}{\alpha_n + (1 + \alpha_n)\alpha_{n+1}} - \dots \quad (1.7.15)$$

Применяя тождество Глейшера к произведению бесконечному Валлиса, получим цепную дробь:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdots = \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 + 1} + \frac{2 \cdot 3}{1 + 1} + \frac{3 \cdot 4}{1 + 1} + \dots + \frac{n(n+1)}{1} + \dots = 1 + \frac{1}{1+1/2+1/3+1/4+\dots+1/n+\dots} \quad (1.7.16) \end{aligned}$$

В монографии Перрона [111] отмечается, что цепная дробь (1.7.16) впервые встречается в работе Эйлера, опубликованной в 1739 г.

### 1.8. Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей

Если цепная дробь  $\omega_1$  имеет своими подходящими дробями некоторую подпоследовательность подходящих дробей цепной дроби  $\omega_2$ , то говорят, что цепная дробь  $\omega_1$  является *сжатой* относительно дроби  $\omega_2$ . Если же цепная дробь  $\omega_1$  имеет множество подходящих дробей, которое включает в себя, в частности, все подходящие дроби разложения  $\omega_2$ , то цепная дробь  $\omega_1$  в этом случае называется *растянутой* дробью относительно дроби  $\omega_2$ .

Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей относятся к основным преобразованиям и часто используются при исследовании сходимости цепных дробей, для построения параллельных алгоритмов, для улучшения аппроксимационных свойств аппарата цепных дробей, при получении цепных дробей заданной структуры.

Формулы для преобразования сжатия и растяжения цепных дробей получим, исходя из матричной записи цепных дробей. Запишем обыкновенную цепную дробь

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{2k-1}}{b_{2k-1} + \frac{a_{2k}}{b_{2k} + \frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1} + \dots}}}} \quad (1.8.1)$$

Сжатая цепная дробь имеет вид:

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{\frac{a_1 a_2}{b_1^2}}{b_2 + \frac{a_2}{b_1 + \frac{a_3}{b_3}} - b_4 + \frac{a_4}{b_3 + \frac{a_5}{b_5}} - \dots - b_{2k} + \frac{a_{2k}}{b_{2k-1} + \frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}} - \dots} \quad (1.8.2)$$

Подходящие дроби сжатой цепной дроби (1.8.2) могут быть определены по четным или нечетным диагональным элементам. Подходящие дроби (1.8.2) совпадают со значениями четных подходящих дробей разложения (1.8.1).

Сжатые цепные дроби, подходящие которых равны четным или нечетным подходящим дробям разложения (1.8.1), соответственно, имеют вид

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{(b_2 b_3 + a_3) b_1 + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_5 b_7}{(b_4 b_5 + a_5) b_3 + a_4 b_5} - \dots - \frac{a_{2n-1} a_{2n} b_{2n-3} b_{2n+1}}{(b_{2n} b_{2n+1} + a_{2n+1}) b_{2n-1} + a_{2n} b_{2n+1}} - \dots \quad (1.8.3)$$

$$\omega = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{(b_2 b_3 + a_3) b_4 + a_4 b_2} - \frac{a_4 a_5 b_6 b_8}{(b_4 b_5 + a_5) b_6 + a_6 b_4} - \dots - \frac{a_{2n-2} a_{2n-1} b_{2n-4} b_{2n}}{b_{2n} (b_{2n-2} b_{2n-1} + a_{2n-1}) + a_{2n} b_{2n-2}} - \dots \quad (1.8.4)$$

Растяжение цепной дроби сводится к построению такой цепной дроби, подходящие которой, в частности, включают все подходящие исходной дроби.

### 1.9. Алгоритмы вычисления значений непрерывных дробей

Алгоритм вычисления значения обыкновенной цепной дроби часто приводят в качестве примера классического последовательного алгоритма. Действительно, рассмотрим конечную цепную дробь:

$$\frac{p_5}{Q_5} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_5}{b_5}}}} \quad .$$

Чтобы вычислить ее значение, надо выполнить операции в естественном последовательном порядке, а именно: некоторое число  $a_5$  разделить на число  $b_5$ , полученный результат просуммировать с числом  $b_4$ , затем число  $a_4$  разделить на эту сумму, результат этой операции сложить с числом  $b_3$  и так далее, продвигаясь *снизу вверх*, пока не выполним все операции, то есть не определим значение цепной дроби.

На первый взгляд может показаться, что иначе вычислить значение цепной дроби нельзя, нежели как последовательно выполняя операции, определяемые самой записью цепной дроби. Но это только на первый взгляд. Всякий, кто хотя бы в малой степени соприкасался с цепными дробями, знает, что вычислять значения цепных дробей можно с помощью простых рекуррентных соотношений

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \quad ,$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

при начальных условиях:  $P_{-1} = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ ,  $P_0 = b_0$ ,  $Q_0 = 1$ .

Рассмотрим кратко алгоритмы вычисления значений цепных дробей, прежде всего, обращая внимание на количество операций, необходимых при вычислении единичной цепной дроби и серии подходящих дробей.

### Обратный рекуррентный алгоритм

Алгоритм вычисления цепной дроби “снизу – вверх” или, как он обычно именуется, *BR-алгоритм* [16], т.е. *обратный рекуррентный алгоритм* (backward recurrence algorithm), определяется самой записью цепной дроби:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}. \quad (1.9.1)$$

Для вычисления цепной дроби (1.9.1) надо последовательно выполнять операции в естественном порядке:  $a_n$  разделить на  $b_n$ , результат деления сложить со значением  $b_{n-1}$ . Число  $a_{n-1}$  делится на полученную на предыдущем шаге сумму и т.д.. BR-алгоритм можно записать в скобочной форме:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + a_1 : (b_1 + a_2 : (b_2 + \dots + a_{n-1} : (b_{n-1} + a_n : b_n) \dots)). \quad (1.9.2)$$

Процесс вычисления цепной дроби (1.9.1) “снизу-вверх”, то есть BR-алгоритм, запишем в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} d_{n-i} &= b_{n-i} + c_{n-i+1}, \\ c_{n-i} &= \frac{a_{n-i}}{d_{n-i}}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1, \quad c_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

то есть

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + c_1. \quad (1.9.4)$$

Запишем BR-алгоритм в еще более простых обозначениях:

$$F_k = \frac{a_k}{b_k + F_{k+1}}, \quad k = n, n-1, \dots, 1, \quad (1.9.5)$$

где  $F_{n+1} = 0$ .

Таким образом,

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}} = b_0 + F_1. \quad (1.9.6)$$

Для вычисления цепной дроби (1.9.6) с  $n$  звеньями, если используется BR-алгоритм, требуется  $n$  операций деления и  $n$  операций сложения. BR-алгоритм очень удобен в обращении. В ходе вычислений по этому методу не возникает проблемы переполнения разрядной сетки компьютера, как то имеет место в прямом рекуррентном алгоритме (FR-алгоритме). Кроме того, у BR-алгоритма сложилась твердая репутация алгоритма, устойчивого к накоплению вычислительной погрешности. Короче, BR-алгоритм очень эффективен при счете конкретной цепной дроби. Очевидно, BR-алгоритм применим только к *конечным* (terminatory) цепным дробям. В самом деле, так как вычисления проводятся “снизу-вверх”, то заранее, до начала счета, должна быть определена “длина” цепной дроби. Если после проведенных вычислений окажется, что значение функции

установлено с недостаточной точностью, то придется брать более длинную цепную дробь и счет производить заново, без учета вычислений, осуществленных ранее. Это, конечно, не экономичная схема вычислений серий подходящих дробей, но такова специфика BR-алгоритма.

Рассмотрим так называемый *адитивный* алгоритм, позволяющий записать цепную дробь в виде суммы цепных дробей [55]:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} \frac{a_2}{b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_k}{b_{k+1}^* + b_{k+2} + \dots + b_n},$$

где 
$$b_{k+1}^* = \frac{Q_{k+1}}{Q_k}, \quad a_{k+1}^* = b_{k+1}^* \left( \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right),$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k},$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_k}{b_{k+1}},$$

$$\frac{Q_{k+1}}{Q_k} = b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + b_k + \dots + b_1},$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = (-1)^{k+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Подробно параллельные алгоритмы вычисления значений цепных дробей рассмотрены в [55].

Необходимость в вычислении серий подходящих дробей, таким образом, возникает при аппроксимации функций цепными дробями, если заранее неизвестно количество звеньев для приближения функции в данной точке с определенной точностью. Многочисленные пересчеты цепной дроби могут, однако, оказаться неприемлемыми при жестких временных ограничениях, как то бывает в системах управления. BR-алгоритм становится непригодным, если имеем дело с определением значений длинных последовательностей подходящих дробей  $\{P_n/Q_n\}$ . Но есть ли практически важные задачи, которые приводят к необходимости вычислять длинные серии подходящих дробей? Оказывается, есть. И прежде всего с длинными сериями подходящих дробей приходится сталкиваться при суммировании расходящихся в классическом смысле цепных дробей при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма [57]. Для нахождения с достаточно высокой точностью модуля и аргумента комплексного числа, являющегося значением “расходящейся” цепной дроби, могут потребоваться сотни тысяч и даже миллионы подходящих дробей или “отчетов”. Поэтому насущно необходимы эффективные рекуррентные алгоритмы для вычисления значений длинных серий подходящих дробей. Самый известный рекуррентный алгоритм – это алгоритм Валлиса, опубликованный в середине семнадцатого столетия, хотя этот алгоритм был открыт задолго до Валлиса [91].

#### Прямой рекуррентный алгоритм

*Прямой рекуррентный алгоритм* (forward recurrence algorithm) или FR-алгоритм – это не что иное, как рекуррентные формулы Валлиса:

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

при начальных условиях  $P_{-1} = 1, P_0 = b_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$ .

Рекуррентные соотношения (1.9.7) – алгоритм последовательного вычисления числителей  $P_n$  и знаменателей  $Q_n$  подходящих дробей цепной дроби. Напомним, что BR-алгоритм считает цепную дробь с “хвоста”, при этом длина цепной дроби определяется до начала счета. FR-алгоритм считает цепную дробь с начала, и вовсе не обязательно заранее устанавливать номер конечного звена дроби.

Приллюстрируем FR-алгоритм примером:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4 - \frac{2}{2 + \frac{3}{1} + \dots}}}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 P_0 + a_1 P_{-1} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5, & Q_1 &= b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, \\ P_2 &= b_2 P_1 + a_2 P_0 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 26, & Q_2 &= b_2 Q_1 + a_2 Q_0 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11, \\ P_3 &= b_3 P_2 + a_3 P_1 = 2 \cdot 26 - 2 \cdot 5 = 42, & Q_3 &= b_3 Q_2 + a_3 Q_1 = 2 \cdot 11 - 2 \cdot 2 = 18, \\ P_4 &= b_4 P_3 + a_4 P_2 = 1 \cdot 42 + 3 \cdot 26 = 120, & Q_4 &= b_4 Q_3 + a_4 Q_2 = 1 \cdot 18 + 3 \cdot 11 = 51, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

FR-алгоритм позволяет вычислять величины  $P_n$  и  $Q_n$ , но при необходимости всегда можно определять текущие значения подходящих дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{26}{11}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{42}{18}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51}, \dots$$

Следует обратить внимание, что при использовании FR-алгоритма нельзя “по ходу дела” сокращать соответствующие  $P_n$  и  $Q_n$ . Например, если вместо  $P_3 = 42$  и  $Q_3 = 18$  взять уменьшенные в шесть раз величины  $P_3 = 7$  и  $Q_3 = 3$ , то такое сокращение приведет к неправильному значению очередной подходящей дроби:

$$\begin{aligned} P_4 &= 7 \cdot 1 + 26 \cdot 3 = 85, \\ Q_4 &= 3 \cdot 1 + 11 \cdot 3 = 36, \end{aligned}$$

то есть получим  $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{85}{36}$  вместо  $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51}$ .

Для вычисления при помощи FR-алгоритма значения цепной дроби с  $n$  звеньями необходимо произвести  $2n$  операции сложения,  $4n$  операции умножения и одну операцию деления, то есть всего  $6n + 1$  операций, что втрое более, чем при счете  $n$  звеньев цепной дроби с использованием BR-алгоритма. Но основной недостаток прямого рекуррентного алгоритма все же в другом. Для сходящейся цепной дроби, то есть дроби, у которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n / Q_n)$  существует и конечен, величины  $P_n$  и  $Q_n$  в отдельности неограниченно возрастают или убывают, выходя, как правило, достаточно быстро за разрядную сетку компьютера.

Основное преимущество классического прямого рекуррентного алгоритма – эффективность вычисления последовательности подходящих дробей. Для определения значений  $n$  подходящих дробей при помощи FR-алгоритма необходимо  $7n$  операций, в то время как используя BR-алгоритм нужно выполнить  $n(n+1)$  арифметических операций.

### Матричный алгоритм

Матричный алгоритм вычисления значений цепных дробей весьма близок к FR-алгоритму.

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (1.9.8)$$

Формула (1.9.8) - это так называемый *матричный алгоритм* определения значения цепной дроби

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (1.9.9)$$

Матричное представление цепных дробей предложил английский математик Милн-Томсон в работе, опубликованной в 1932 г. [91]. Поэтому алгоритм (1.9.8) будем называть *алгоритмом Милн-Томсона*. Алгоритм Милн-Томсона можно использовать для организации параллельных вычислений значений цепной дроби, когда счет дроби выполняют одновременно несколько процессоров. Если осуществлять последовательно перемножение слева направо, то получим вычислительную процедуру, совпадающую с классическим рекуррентным FR-алгоритмом.

Рассмотрим пример. Имеется дробь:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4 - \frac{2}{-2 + 1}}}.$$

Используя формулу (1.9.8), запишем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_4 \\ Q_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 26 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 51 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{120}{51}.$$

Формула (1.9.8) называется, как уже отмечалось, матричным алгоритмом определения значения цепной дроби. Во избежание недоразумений здесь надо привести некоторые разъяснения. На самом деле, вычислительная процедура, состоящая из произведений матриц, то есть выражение (1.9.8), определяет матрицу-столбец, состоящую из двух чисел:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix},$$

и ничего более. Однако эти числа  $P_n$  и  $Q_n$  как раз и являются числителями и знаменателями подходящих дробей цепной дроби (1.9.8), значения которой устанавливаются.

В [55] было введено обозначение:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[ \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \right].$$

Следовательно, матричный алгоритм примет модифицированную форму:

$$\omega_n = \frac{P_n}{Q_n} = \left[ \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} \right]. \quad (1.9.10)$$

Для бесконечной цепной дроби можно дать такое матричное представление:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_{n-1} & 1 \\ a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} \right]. \quad (1.9.11)$$

Поэтому можно сказать, что цепная дробь (1.9.9) сходится в классическом смысле, если существует предел произведения матриц (1.9.11).

Представим некоторые цепные дроби бесконечным произведением матриц:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_n \right] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots + \frac{n}{1 + \dots}}}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right] = \frac{\sqrt{2/\pi e}}{\operatorname{erfc}(1/\sqrt{2})}.$$

### Метод континуант

Цепную дробь

$$\omega = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}}}$$

можно представить отношением трехдиагональных определителей:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_k & a_{k+1} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k+1} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{M_{b_0}} \quad (1.9.12)$$

$M_{b_0}$  – определитель главного минора, то есть определитель, стоящий в знаменателе, получающийся из определителя, записанного в числителе, вычёркиванием элементов первой строки и первого столбца.

Определители, стоящие в числителе и знаменателе выражения (1.9.12), очевидно, могут быть определены при помощи известных рекуррентных формул (1.9.7). Вычислить трехдиагональные определители можно не только используя рекуррентные формулы (1.9.7). Применяя формулу Лапласа, запишем числитель  $P_n$  и знаменатель  $Q_n$  следующим образом:

$$P_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k-1} & a_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+2} & a_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{k+1} \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+3} & a_{k+4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+4} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.9.13)$$

Аналогично можно записать  $Q_n$ :

$$Q_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-1} & a_k \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k+1} & a_{k+2} & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{k+1} \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{k-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k+2} & a_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{k+3} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.9.14)$$

Выражения (1.9.13) и (1.9.14) запишем в более компактном виде:

$$\begin{aligned} P_n &= P_k P_{k+1,n} + a_{k+1} P_{k-1} P_{k+2,n}, \\ Q_n &= Q_k P_{k+1,n} + a_{k+1} Q_{k-1} P_{k+2,n}, \end{aligned} \quad (1.9.15)$$

где  $P_i$  ( $i = k-1, k, k+1, n, k+2, n$ ),  $Q_i$  ( $i = k-1; k$ ) – соответственно, числители и знаменатели цепных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}}, \\ \frac{P_k}{Q_k} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k}, \\ \frac{P_{k+1,n}}{Q_{k+1,n}} &= b_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2} + b_{k+3} + \dots + b_n}, \\ \frac{P_{k+2,n}}{Q_{k+2,n}} &= b_{k+2} + \frac{a_{k+3}}{b_{k+3} + b_{k+4} + \dots + b_n}. \end{aligned}$$

Вычисления значений  $P_n$  и  $Q_n$  по формулам (1.9.15) целесообразно выполнять на многопроцессорных ЭВМ, или, как говорят в последние годы, на суперкомпьютерах.

#### Алгоритм Тейкроу

Тейкроу [101] предложил следующий рекуррентный алгоритм вычисления значений цепных дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{i=1}^n \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_i, \quad (1.9.16)$$

где  $r_i = \frac{a_i}{b_{i-1} b_i}$ ,  $1 + \rho_i = \frac{1}{1 + r_i (1 + \rho_{i-1})}$ ,  $i = 3, 4, \dots$



Начальные значения

$$\rho_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad 1 + \rho_2 = \frac{1}{1 + r_2},$$

Можно показать, что алгоритм Тейкроу ( $\rho$ -алгоритм) эквивалентен построению равноценного ряда для цепной дроби, т.е.

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(-1)^{k+1} \prod_{j=1}^k a_j}{Q_{k-1} Q_k} \right].$$

Для нахождения значения очередной подходящей дроби по алгоритму Тейкроу необходимо выполнение 8 операций: 3 операции сложения, 3 операции умножения и 2 операции деления. Для подсчета значения цепной дроби, содержащей  $n$  звеньев, требуется  $8n$  операций. Число операций при вычислении подряд  $n$  подходящих дробей по алгоритму Тейкроу равно  $9n$ .

Можно предложить более экономичные рекуррентные формулы [60].

#### $\Delta$ - алгоритм

Известна формула

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_n Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\phi_n} - 1, \quad (1.9.17)$$

где

$$\phi_n = Q_n / Q_{n-1},$$

$$\phi_n = b_n + \frac{a_n}{\phi_{n-1}}, \quad \phi_1 = b_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из соотношения (1.9.17) имеем

$$\Delta f_n = \left( \frac{b_n}{\phi_n} - 1 \right) \Delta f_{n-1}, \quad (1.9.18)$$

$$\Delta f_1 = \frac{a_1}{b_1}.$$

Так как  $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$ , то используя формулы (1.9.17) и (1.9.18), можно находить значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления. Такое же количество арифметических операций, но другого состава, необходимо провести для нахождения значения подходящей дроби в  $\psi/\phi$ -алгоритме.

#### $\psi/\phi$ - алгоритм

Имеет место рекуррентная формула

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\psi_n}{\phi_n} \cdot \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad (1.9.23)$$

$$\text{где } \psi_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\psi_{n-1}}, \quad \psi_1 = b_1 + \frac{a_1}{b_0},$$

$$\varphi_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\varphi_{n-1}}, \quad \varphi_1 = b_1.$$

В  $\psi/\varphi$  алгоритме для определения значения последующей подходящей дроби необходимо выполнить 6 операций: 3 операции деления, 1 операцию умножения и 2 операции сложения.

Рассмотренные выше рекуррентные алгоритмы Тейкроу,  $\Delta$  и  $\psi/\varphi$ -алгоритмы позволяют на каждом этапе вычислений получать значение очередной подходящей дроби. Хотя по этим алгоритмам цепная дробь вычисляется "сверху-вниз" и используются рекуррентные формулы, однако вычисляется значение подходящей дроби  $P_n/Q_n$ , а не величины  $P_n$  и  $Q_n$ , как в прямом рекуррентном алгоритме, т.е. они не имеют недостатка *FR*-алгоритма, связанного с возможностью переполнения разрядной сетки ЭВМ. При этом, в отличие же от *BR*-алгоритма, не возникает трудностей с вычислением серии подходящих дробей.

Количество операций, необходимое для вычисления  $n$ -звенной обыкновенной цепной дроби и последовательности подходящих дробей  $P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots, P_n/Q_n$  при использовании различных алгоритмов, приведено в табл. 1.1.

Из табл. 1.1 видно, что *BR*-алгоритм, весьма эффективный при вычислении  $n$ -звенной цепной дроби, оказывается мало пригодным для нахождения значений серии подходящих дробей, которые применяются при суммировании по Никипорцу. Наиболее пригодными при вычислении серий подходящих дробей можно рассматривать  $\Delta$ -алгоритм и  $\psi/\varphi$ -алгоритм. При вычислениях, как правило, используется  $\Delta$ -алгоритм.

Таблица 1.1

**Характеристики алгоритмов вычисления значений цепных дробей**

№	Алгоритм	Число операций при вычислении $n$ -звенной дроби				Число операций при вычислении серии $\{P_i/Q_i\}$
		Сложение	Умножение	Деление	Общее число	
1	<i>BR</i> -алгоритм	$n$		$n$	$2n$	$n(n+1)$
2	<i>FR</i> -алгоритм	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
3	Матричный	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
4	Континuant	$2n$	$4n$	1	$6n+1$	$7n$
5	Тейкроу	$3n$	$3n$	$2n$	$8n$	$9n$
6	$\Delta$ -алгоритм	$3n$	$n$	$2n$	$6n$	$7n$
7	$\psi/\varphi$ -алгоритм	$2n$	$n$	$3n$	$6n$	$7n$

**1.10. Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей**

Приведем определение сходимости цепных дробей, данное С.С. Хлопониним [48]. Это определение вполне традиционно.

Цепная дробь

$$\omega(a, b) = b_0 + K \frac{a_n}{b_n}, \quad (1.10.1)$$

у которой существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega$$

называется *сходящейся*. Значение ее принимает равным этому пределу. В противном случае, цепная дробь называется *расходящейся*.

Как известно, сходимость рядов и бесконечных произведений не зависит от их первых членов, а зависит лишь от характера изменения их общего члена при неограниченном возрастании  $n$ . Сходимость же цепной дроби, вообще говоря, зависит и от их первых звеньев. Это обстоятельство заставляет ввести понятие *безусловной* и *условной сходимости*.

Сходящаяся цепная дробь

$$b_0 + \mathop{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

называется *безусловно сходящейся*, если она остается сходящейся при отбрасывании любого числа начальных звеньев, т.е. если цепные дроби

$$b_m + \mathop{K}_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad m = 0, 1, \dots$$

все сходятся. В противном случае сходящаяся цепная дробь называется *условно сходящейся*.

В теории цепных дробей часто рассматривается также понятие *несущественной* и *существенной расходимости*.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \infty$ , то цепная дробь называется *несущественно расходящейся*.

Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$  не существует, то цепную дробь называют *существенно расходящейся*.

Будем говорить, что цепная дробь (1.10.1) сходится *в широком смысле*, если она не является существенно расходящейся, иными словами, если существует конечный или бесконечный предел последовательности ее подходящих дробей.

В этом параграфе приведем некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей, доказательство которых можно найти в монографиях [16, 106].

*Теорема 1.1.* Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}} \quad (1.10.2)$$

с действительными положительными  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) сходится тогда и только тогда, когда

расходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$ .

*Теорема 1.2.* Цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (1.10.3)$$

с действительными положительными элементами сходится тогда и только тогда, когда расходится по крайней мере один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} b_{2k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_3 a_5 \dots a_{2k+1}} b_{2k+1}.$$

Утверждение теоремы 1.2 следует из теоремы 1.1, если, используя эквивалентные преобразования, дробь (1.10.3) привести к виду (1.10.2). Теоремы 1.1 и 1.2 принадлежат Зейделю.

*Теорема 1.3.* (Штерн [104]) Цепная дробь (1.10.3) с положительными элементами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1} b_n}{a_n} = \infty.$$

Более общий достаточный признак сходимости, установлен Прингсхеймом [104].

*Теорема 1.4.* Непрерывная дробь (1.10.3) с действительными положительными членами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{b_{n-1}b_n}{a_n}} = \infty.$$

Приведем признаки сходимости цепных дробей с комплексными элементами. Рассмотрим периодическую цепную дробь

$$\frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_2}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \dots + \frac{a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \dots \quad (1.10.4)$$

с комплексными элементами и связанную с ней цепную дробь

$$S(w) = \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \frac{a_2}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} + \dots + \frac{a_k}{b_k + 1} + \frac{w}{b_k + 1},$$

где  $w$  – комплексная переменная. Рассматривая  $S(w)$  как  $(k+1)$ -ю подходящую дробь, находим

$$S(w) = \frac{A_k + wA_{k-1}}{B_k + wB_{k-1}} \quad (1.10.5)$$

Неподвижной точкой дробно-линейного преобразования (1.10.5) называется точка  $x$ .

$$x = \frac{A_k + wA_{k-1}}{B_k + wB_{k-1}}.$$

Если  $B_{k-1} \neq 0$ , то неподвижные точки являются корнями квадратного уравнения

$$B_{k-1}x^2 + (B_k - A_{k-1})x - A_k = 0.$$

*Теорема 1.5.* (Уолл [122].) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – две неподвижные точки дробно-линейного отображения (1.10.5). Непрерывная дробь (1.10.4) с комплексными элементами сходится тогда и только тогда, когда  $x_1$  и  $x_2$  – конечные числа, удовлетворяющие одному из условий:

$$x_1 = x_2,$$

или

$$\left| \frac{A_{k-1} - x_2}{B_{k-1}} \right| > \left| \frac{A_{k-1} - x_1}{B_{k-1}} \right|,$$

причем дробь (1.10.4) сходится к неподвижной точке  $x_1$ .

*Теорема 1.6.* (Кох [104].) Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} + \dots \quad (1.10.6)$$

с комплексными частными знаменателями  $b_i$  расходится, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty \quad (1.10.7)$$

сходится. Более того, существуют конечные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1} = F_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = F_2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n+1} = G_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n} = G_2$$

и выполняется условие

$$F_1G_1 - F_2G_2 = 1. \quad (1.10.8)$$

Отсюда следует, что расходимость ряда (1.10.7) необходима для сходимости дроби (1.10.6).

*Теорема 1.7.* (Ван Флек [104].) Пусть элементы цепной дроби (1.10.6)  $b_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) принадлежат области

$$D = \left\{ z \in C, z \neq 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\},$$

где  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ . Тогда цепная дробь (1.10.6) сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ расходится.}$$

*Теорема 1.8.* (Ворпицкий [104].) Цепная дробь с комплексными элементами

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots + \frac{a_n}{1} + \dots$$

сходится, если для всех  $n \geq 2$

$$|a_n| \leq \frac{1}{4}.$$

*Теорема 1.9.* (Слешинский – Прингсхейм [104].) Цепная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots$$

с комплексными элементами сходится, если для всех  $n$

$$|b_n| > |a_n| + 1.$$

## ГЛАВА 2

### СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

#### 2.1. Алгоритмы построения соответствующих цепных дробей

В литературе по цепным дробям давно отмечено, что медленно сходящиеся и даже расходящиеся ряды могут быть просуммированы путём преобразования этих рядов в, так называемые, соответствующие цепные дроби.

Соответствующие цепные дроби не тождественны степенным рядам. Обычно соответствующие цепные дроби определяются следующим образом [16]. Для степенного ряда

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots + \beta_n x^n + \dots \quad (2.1.1)$$

можно построить по определённому алгоритму цепную дробь

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 x}{1} + \frac{\alpha_2 x}{1} + \frac{\alpha_3 x}{1} + \dots + \frac{\alpha_n x}{1} + \dots \quad (2.1.2)$$

такую, что разложение в ряд  $n$ -й подходящей дроби будет совпадать с исходным степенным рядом (2.1.1) вплоть до члена  $\beta_n z^n$  включительно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n + \gamma_{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (2.1.3)$$

Цепную дробь (2.1.2) называют – *соответствующей* (korrespondierende) данному ряду. Для построения соответствующих цепных дробей используются формулы Хейлгерманна-Стилтьеса [14] и другие алгоритмы. Следует, однако, отметить, что соответствующие цепные дроби, которые строятся по степенным рядам, могут быть как бесконечными, так и конечными. Цепная дробь, соответствующая степенному ряду (2.1.1) конечна тогда, когда степенной ряд является рядом Тейлора для рациональной функции [104]. Примеры конечных соответствующих цепных дробей будут рассматриваться в этой главе при суммировании расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана. Поэтому предлагается несколько иное, чем общепринятое, определение соответствующих цепных дробей: “*Соответствующие цепные дроби – это конечные или бесконечные цепные дроби вида (2.1.2), которые могут быть построены из степенного ряда (2.1.1) с использованием формул Хейлгерманна-Стилтьеса или других эквивалентных алгоритмов*”.

##### 2.1.1. Формулы Хейлгерманна-Стилтьеса

Определим суммирование рядов через соответствующие цепные дроби.

*Степенной ряд*

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.1.4)$$

*сходится к значению соответствующей ряду цепной дроби*

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \dots, \quad (2.1.5)$$

*которая является производящей функцией, порождающей этот ряд. Коэффициенты  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби (2.1.5) и степенного ряда (2.1.4) связаны формулами Хейлгерманна-Стилтьеса [14]:*

$$\omega_0 = c_0, \quad \omega_1 = c_1,$$

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \cdot \psi_{n+1}}{\varphi_n \cdot \psi_n}, \quad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \cdot \psi_n}{\varphi_n \cdot \psi_{n+1}},$$

где  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  – определители Ганкеля:

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (2.1.6)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1$$

Числовой ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (2.1.7)$$

суммируется значением цепной дроби (2.1.5) при  $x = 1$ .

Можно определить суммирование рядов не только через цепную дробь (2.1.5), но и через, так называемую, сопряженную цепную дробь, имеющую с цепной дробью (2.1.5) одни и те же значения нечетных подходящих дробей:

Степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.1.8)$$

сходится к значению соответствующей ряду цепной дроби

$$\frac{\omega'_1 x}{1} - \frac{\omega'_2 x}{1} + \frac{\omega'_3 x}{1} - \dots - \frac{\omega'_{2n} x}{1} + \frac{\omega'_{2n+1} x}{1} - \dots \quad (2.1.9)$$

которая является производящей функцией, порождающей этот ряд. Коэффициенты  $w'_i$ , соответствующей цепной дроби (2.1.9) и коэффициенты степенного ряда (2.1.8) связаны соотношениями:

$$\omega'_1 = c_0,$$

$$\omega'_{2n} = \frac{\varphi'_{n-1} \cdot \psi'_{n+1}}{\varphi'_n \cdot \psi'_n}, \quad \omega'_{2n+1} = -\frac{\varphi'_{n+1} \cdot \psi'_n}{\varphi'_n \cdot \psi'_{n+1}};$$

$$\varphi'_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad \psi'_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix}, \quad (2.1.10)$$

$$\varphi'_0 = 1, \quad \psi'_1 = 1$$

Числовой ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

суммируется значением цепной дроби (2.1.9) при  $x = 1$ .

Вывод формул Хейлерманна-Стилтьеса имеется в [40].

При определении сходимости степенных рядов через соответствующие цепные дроби область сходимости рядов совпадает с областью сходимости соответствующих цепных дробей. Следует подчеркнуть, что сходимость цепных дробей определяется не в классическом смысле, а в более общей формулировке, при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма [53], что во многих важных случаях приводит к расширению области сходимости цепных дробей. Например, степенной ряд логарифмической функции, если сходимость его определять через соответствующую цепную дробь, может аппроксимировать функцию  $\ln(1+x)$  не только в единичном круге, а и на плоскости комплексного переменного без

вырезов по отрицательной оси от  $-\infty$  до  $-1$ , то есть устанавливая и комплексные значения логарифмической функции, которые она принимает при отрицательных значениях аргумента.

Следует здесь особо подчеркнуть, что предлагаемый алгоритм суммирования рядов весьма эффективен и применительно к рядам, сходящимся в классическом смысле. В табл. 2.1 и табл. 2.2 приведены, соответственно, результаты вычисления  $\ln 2$  при помощи ряда Меркатора

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots, \quad (2.1.11)$$

и с использованием соответствующей цепной дроби

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{4 + \frac{2^2}{5 + \dots + \frac{n^2}{2n + 2n + 1 + \dots}}}}}}. \quad (2.1.12)$$

Таблица 2.1

**Определение значения  $\ln 2$   
при помощи ряда (2.1.11)**

Число членов ряда	Значения частичных сумм	Погрешность аппроксимации $\varepsilon =  \ln 2 - \sum_{n=1}^n a_n $
10	0.645634920635	0.047512259925
100	0.688172179310	0.004975001250
1000	0.692647430560	0.000499750000
10000	0.693097183060	0.000049997500
100000	0.693142180585	0.000004999998
1000000	0.693146680560	0.000000500000
10000000	0.693147130560	0.000000050000
100000000	0.693147175560	0.000000005000

Таблица 2.2

**Определение значения  $\ln 2$   
соответствующей цепной дробью (2.1.12)**

Число звеньев дроби	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации $\varepsilon =  \ln 2 - P_n/Q_n $
5	0.693333333333	0.000186152773
6	0.693121693121	0.000025487438
7	0.693152454780	0.000005274220
8	0.693146417445	0.000000763114
9	0.693147332354	0.000000151794
10	0.693147157853	0.000000022706
11	0.693147184962	0.000000004402
12	0.693147179886	0.000000000673

Использование соответствующей цепной дроби (2.1.12), содержащей 12 звеньев, обеспечивает точность вычисления  $\ln 2$  с девятью десятичными разрядами. Для сравнения: применение для определения  $\ln 2$  ряда (2.1.11), включающего 100 миллионов слагаемых, позволяет вычислить  $\ln 2$  всего с восемью верными десятичными знаками.

### 2.1.2. Метод Никпорца

Известно немалое число алгоритмов построения соответствующих цепных дробей: формулы Хейлерманна-Стилтьеса, Тиле, Хлопонина и другие [70]. Рассмотрим алгоритм построения соответствующих цепных дробей, который называют «методом деления рядов», или методом Никпорца [55]. Описание этого алгоритма позволяет наиболее наглядно показать, как строятся по степенным рядам соответствующие цепные дроби.

Пусть функция представлена степенным рядом:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.1.13)$$

Запишем ряд (2.1.13) следующим образом:

$$f(x) = a_0 + a_1xz_1.$$

Найдём  $z_1$ .

$$z_1 = \frac{f(x) - a_0}{a_1x} = 1 + \frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_3}{a_1}x^2 + \frac{a_4}{a_1}x^3 + \dots$$

или

$$z_1 = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots,$$

где



$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_1}, \quad \dots$$

Определим  $z'_1 = 1/z_1$ .

$$z'_1 = \frac{1}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots} = 1 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3 + c_4x^4 - \dots$$

Запишем значения первых коэффициентов  $c_i$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 \\ c_2 &= b_1^2 - b_2 \\ c_3 &= b_1^3 - 2b_1b_2 + b_3 \\ c_4 &= b_1^4 - 3b_1^2b_2 + 2b_1b_3 - b_4 + b_2^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Далее представим  $z'_1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} z'_1 &= 1 - c_1xz_2, \\ z_2 &= \frac{1 - z'_1}{c_1x} = 1 - \frac{c_2}{c_1}x + \frac{c_3}{c_1}x^2 - \frac{c_4}{c_1}x^3 + \dots, \\ z_2 &= 1 - d_1x + d_2x^2 - d_3x^3 + d_4x^4 - \dots, \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \frac{c_2}{c_1}, \quad d_2 = \frac{c_3}{c_1}, \quad d_3 = \frac{c_4}{c_1}, \quad d_4 = \frac{c_5}{c_1}, \quad \dots$$

Определим  $z'_2$ .

$$z'_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1 - d_1x + d_2x^2 - d_3x^3 + \dots} = 1 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \dots = 1 + e_1xz_3.$$

Таким образом, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1xz_1, \\ z'_1 &= 1 - c_1xz_2, \\ z'_2 &= 1 + e_1xz_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Заменим коэффициенты  $a_0, a_1, c_1, e_1, \dots$  через  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Так как  $z_n = 1/z'_n$ , перепишем эти равенства следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \omega_0 + \omega_1xz_1 = \omega_0 + \frac{\omega_1x}{z_1}, \\ z'_1 &= 1 - \omega_2xz_2 = 1 - \frac{\omega_2x}{z_2}, \\ z'_2 &= 1 + \omega_3xz_3 = 1 + \frac{\omega_3x}{z_3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Исключая  $z'_1, z'_2, z'_3, \dots$ , получим соответствующую цепную дробь (2.1.5).

Определим коэффициенты дроби (2.1.5) через коэффициенты исходного ряда (2.1.13).

$$\begin{aligned} \omega_0 &= a_0, \quad \omega_1 = a_1, \quad \omega_2 = c_1 = b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \\ \omega_3 &= e_1 = d_1, \quad d_1 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_1^2 - b_2}{b_1}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \omega_3 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 a_2}$$

Аналогично определяются следующие коэффициенты цепной дроби (2.1.5):

$$\omega_4 = \frac{a_1(a_3^2 - a_2 a_4)}{a_2(a_2^2 - a_1 a_3)},$$

$$\omega_5 = \frac{a_2[a_5(a_2^2 - a_1 a_3) + a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]}{(a_2^2 - a_1 a_3)(a_3^2 - a_2 a_4)},$$

$$\omega_6 = \frac{(a_2^2 - a_1 a_3)[a_6(a_3^2 - a_2 a_4) + a_5(a_2 a_5 - a_3 a_4) + a_4(a_4^2 - a_3 a_5)]}{(a_3^2 - a_2 a_4)[a_5(a_2^2 - a_1 a_3) + a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]}.$$

Запишем несколько первых коэффициентов  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби, используя формулы Хейлерманна-Стилтьеса (2.1.6):

$$\omega_0 = a_0, \quad \omega_1 = a_1, \quad \omega_2 = \frac{a_2}{a_1},$$

$$\omega_3 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 \cdot a_2}, \quad \omega_4 = \frac{a_1(a_3^2 - a_2 a_4)}{a_2(a_2^2 - a_1 a_3)},$$

$$\omega_5 = \frac{a_2[(a_2^2 - a_1 a_3) + a_4(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_3(a_3^2 - a_2 a_4)]}{(a_2^2 - a_1 a_3)(a_3^2 - a_2 a_4)}.$$

Как видим, формулы Хейлерманна-Стилтьеса (2.1.6) дают те же коэффициенты соответствующей цепной дроби (2.1.5) для степенного ряда (2.1.13), что и «метод деления рядов».

Легко заметить, что «явные» формулы (2.1.6) преобразования рядов в соответствующие цепные дроби мало пригодны в практическом плане, так как требуют вычисления определителей матриц Ганкеля высоких порядков. Известны эффективные рекуррентные формулы нахождения коэффициентов  $\omega_i$  соответствующих цепных дробей по коэффициентам  $a_i$  исходных рядов, в частности, алгоритмы Висковатова, Хлопонина и Рутисхаузера [65].

### 2.1.3. Рекуррентный алгоритм Рутисхаузера

Определим для ряда

$$\alpha_{0,0} + \alpha_{1,0}x + \alpha_{1,1}x^2 + \alpha_{1,2}x^3 + \dots + \alpha_{1,n-1}x^n + \dots \quad (2.1.14)$$

коэффициенты  $\alpha_{1,0}$  соответствующей цепной дроби

$$\alpha_{0,0} + \frac{\alpha_{1,0}x}{1} - \frac{\alpha_{2,0}x}{1} + \frac{\alpha_{3,0}x}{1} - \frac{\alpha_{4,0}x}{1} + \frac{\alpha_{5,0}x}{1} - \dots - \frac{\alpha_{2n,0}x}{1} + \frac{\alpha_{2n+1,0}x}{1} - \dots \quad (2.1.15)$$

Коэффициенты цепной дроби (2.1.15), исходя из коэффициентов степенного ряда (2.1.14), находятся по рекуррентным формулам Рутисхаузера [37]:

$$\alpha_{2,v} = \frac{\alpha_{1,v+1}}{\alpha_{1,v}},$$

$$\alpha_{3,v} = -\alpha_{2,v+1} + \alpha_{2,v},$$

$$\alpha_{4,v} = \frac{\alpha_{2,v+1} \cdot \alpha_{3,v+1}}{\alpha_{3,v}},$$

$$\alpha_{5,v} = \alpha_{3,v+1} - \alpha_{4,v+1} + \alpha_{4,v},$$

$$\dots$$

$$\alpha_{2n,v} = \frac{\alpha_{2n-2,v+1} \cdot \alpha_{2n-1,v+1}}{\alpha_{2n-1,v}},$$

$$\alpha_{2n+1,v} = \alpha_{2n-1,v+1} - \alpha_{2n,v+1} + \alpha_{2n,v}. \quad (2.1.16)$$

Элемент таблицы Рутисхаузера определяется по формулам (2.1.16) всего за две операции: при нахождении элемента нечетной строки нужна одна операция сложения и одна операция вычитания, при нахождении элемента четной строки используется одна операция умножения и одна операция деления.

Схема Рутисхаузера, определяемая формулами (2.1.16), показана на рис. 2.1.

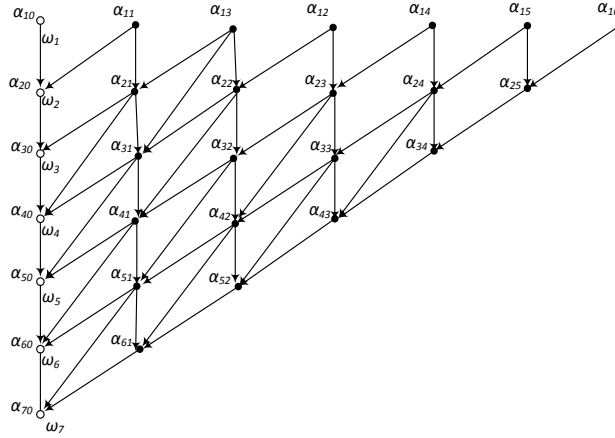


Рис. 2.1. Схема алгоритма Рутисхаузера.

Сравнивая (2.1.14) и (2.1.15), соответственно, с выражениями (2.1.13) и (2.1.5), можно записать:

$$a_n = \alpha_{1,n-1} \text{ и } \omega_n = \alpha_{n,0}.$$

Найдём по формулам (2.1.16) несколько первых коэффициентов  $a_{i,0}$  соответствующей цепной дроби (2.1.15):

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= \omega_0 = \alpha_0, \\ \alpha_{10} &= \omega_1 = \alpha_1, \\ \alpha_{20} = \omega_2 &= \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{10}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ \alpha_{30} = \omega_3 &= -\alpha_{21} + \alpha_{20} = -\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 a_2}, \\ \alpha_{40} = \omega_4 &= \frac{\alpha_{21} \alpha_{31}}{\alpha_{30}}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Так как

$$\alpha_{21} = \frac{a_3}{a_2}, \quad \alpha_{30} = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1 a_2}, \quad \alpha_{31} = \frac{a_3^2 - a_2 a_4}{a_2 a_3},$$

то подставляя эти значения в (2.1.14), имеем

$$\alpha_{40} = \omega_4 = \frac{a_1 (a_3^2 - a_2 a_4)}{a_2 (a_2^2 - a_1 a_3)}.$$

Аналогично установим значение коэффициента  $\alpha_{50}$ :

$$\alpha_{50} = \omega_5 = \alpha_{31} - \alpha_{41} + \alpha_{40}$$

После подстановки получим:

$$\alpha_{50} = \omega_5 = \frac{a_2 [a_5(a_2^2 - a_1a_3) + a_4(a_1a_4 - a_2a_3) + a_3(a_3^2 - a_2a_4)]}{(a_2^2 - a_1a_3)(a_3^2 - a_2a_4)}.$$

Таким образом, рекуррентный алгоритм Рутисхаузера дает те же коэффициенты для соответствующей цепной дроби, которые получены «методом деления рядов» и по формулам Хейлсманна-Стилтьеса.

## 2.2. Суммирование расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана

В анализе известна формула, связывающая дзета-функцию Римана с числами Бернулли [84]:

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

где  $B_{2k}$  – числа Бернулли.

Обычно числа Бернулли определяются через производящую функцию:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \dots + \frac{B_n}{n!}x^n + \dots,$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} \left[ 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots \right],$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

Числа Бернулли могут быть установлены детерминантной формулой Лапласа [21]:

$$B_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & 1/4! & \dots & 1/(n+1)! \\ 1 & 1/2! & 1/3! & \dots & 1/n! \\ 0 & 1 & 1/2! & \dots & 1/(n-1)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2! \end{vmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Значения расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана, определяются также через числа Бернулли. Эйлером [83] было установлено соотношение:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{(-1)^n (2^n - 1)}{n} B_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

В частности,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \quad (2.2.3)$$

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2.4)$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2.5)$$

Найдём значения расходящихся рядов (2.2.2) не посредством формулы Эйлера, (2.2.2) а преобразованием этих рядов в *соответствующие* цепные дроби, которые были определены выше.

Во второй колонке табл. 2.3 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для «колеблющегося» ряда Лейбница (2.2.3).

Таблица 2.3

**Определение значения ряда**  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ 

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-1	0
2	-1	0.5
3	0	

Подставляя значения коэффициентов  $\omega_n$  в цепную дробь (2.1.2), получим:  
 $1 + \frac{-1}{1 - \frac{-1}{1 + \frac{0}{1}}} = 1 - \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ . Таким образом,  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1 - \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ .

Этот же результат для ряда Лейбница получим по формуле (2.2.2) при  $n = 1$ :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = -B_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

В табл. 2.4 – 2.8 приведены коэффициенты соответствующих цепных дробей, найденных для расходящихся рядов (2.2.4) и (2.2.5) при  $k = 1, 2, 3$ . Следует обратить внимание, что найденные для рядов соответствующие цепные дроби – конечные. Число звеньев  $N$  конечных цепных дробей, суммирующих расходящиеся ряды, равно удвоенной степени слагаемых этих рядов плюс две единицы:  $N = 2n + 2$ .

Например, ряд

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots \quad (2.2.6)$$

суммируется цепной дробью с числом звеньев, которое определяется выражением (2.2.6) при  $n = 5$ :  $N = 2 \cdot 5 + 2 = 12$ .

Определим цепную дробь, суммирующую ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \quad (2.2.7)$$

Во второй колонке табл. 2.4 приведены коэффициенты этой цепной дроби.

Таблица 2.4

**Определение значения ряда**  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$ 

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-2	-1
2	-1.5	0.2
3	-0.16666666666667...	0.285714285714285...
4	-0.666666666666667...	0.25
5	-0,191e-1503	

Коэффициент  $\omega_5 = -0,191e-1503$ , то есть имеет значение, которое будем считать нулевым. Аналогично, и для других цепных дробей полагаем нулевыми коэффициенты  $\omega_i$ , если эти коэффициенты имеют такой же порядок малости.

После подстановки в цепную дробь (2.1.5) значений коэффициентов  $\omega_i$  получим:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = 1 - \frac{2}{1 + 1 - \frac{1.5}{1 + \frac{0.1666...}{1 + \frac{0.1666...}{1}}}} = 0.25. \quad (2.2.8)$$

Следует отметить одно обстоятельство. Из формул (2.1.6), определяющих значения коэффициентов соответствующих цепных дробей по коэффициентам ряда, следует, что если коэффициенты ряда – целые числа, то коэффициенты  $\omega_n$  соответствующих цепных дробей – рациональные. По формулам (2.1.6) для ряда (2.2.7) найдём:

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = -2, \omega_2 = -\frac{3}{2}, \omega_3 = -\frac{1}{6}, \omega_4 = -\frac{2}{3}, \omega_5 = 0.$$

Подставляя эти коэффициенты в цепную дробь (2.1.2), получим:

$$1 + \frac{-2}{1} - \frac{\frac{3}{2}}{1} + \frac{-\frac{1}{6}}{1} - \frac{\frac{2}{3}}{1} = 1 - \frac{2}{1+2} + \frac{3}{1+2-3} + \frac{1}{1+2-3+1} - \frac{2}{4} = 0,25.$$

Из формулы (2.2.4) также следует, что

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \frac{2^2 - 1}{2} B_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Таким образом, значение расходящегося ряда (2.2.7) установлено двумя различными способами, – построением соответствующей цепной дроби и формулой суммирования (2.2.4), включающей числа Бернулли.

Установим цепную дробь, суммирующую ряд

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots \quad (2.2.9)$$

Во второй колонке табл. 2.5 приведены коэффициенты соответствующей ряду (2.2.9) цепной дроби.

Таблица 2.5

**Определение значения ряда  $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots$**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $a_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-4	-3
2	-2.25	-0.230769230769230...
3	-0.472222222222222...	0.24
4	-0.810457516339869...	0.010869565217391...
5	-0.136622390891840...	-0.00641025641025...
6	-0.548387096774193...	-0,313e - 1504
7	0	

Значение расходящегося ряда (2.2.9) определяется конечной цепной дробью, имеющей нулевое значение:

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots = 1 - \frac{4}{1+1} - \frac{2.25}{1-1} + \frac{0.4722...}{1} + \frac{0.8104...}{1} - \frac{0.1366...}{1} + \frac{0.5483...}{1} = 0.$$

Расходящийся ряд (2.2.9) имеет нулевое значение, что согласуется с формулой (2.2.5). Здесь уместно привести высказывание Нильса Абея в связи с определением значений расходящихся рядов [20]: «Можно ли вообразить себе что – либо более возмутительное, чем утверждение, будто бы  $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \dots$ , где  $n$  – целое положительное число?»

Продолжим суммирование расходящихся рядов через соответствующие цепные дроби. Расходящийся ряд

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots \quad (2.2.10)$$

имеет соответствующую цепную дробь, коэффициенты которой приведены в табл. 2.6:

Таблица 2.6

**Определение значения ряда  $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots$**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $a_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-8	-7
2	-3.375	-0.828571428571428...
3	-1.004629629629629...	1.010989010989010...
4	-0.984468339307048...	-0.021008403361344...
5	-0.347903896917363...	-0.207036247334754...
6	-0.618065187239944...	-0.128571428571428...
7	-0.111956521739130...	-0.123140495867768...
8	-0.486956521739130...	-0.125
9	0	

Следовательно,

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots = 1 - \frac{8}{1+} \frac{3.375}{1-} \frac{1.0046\dots}{1+} \frac{0.9844\dots}{1-} \frac{0.3479\dots}{1+} \frac{0.6180\dots}{1-} \frac{0.1119\dots}{1+} \frac{0.4869\dots}{1-} = -0.125. \quad (2.2.11)$$

Из соотношения (2.2.4) можно записать:

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots = \frac{2^4 - 1}{4} B_4 = \frac{15}{4} \cdot \left( -\frac{1}{30} \right) = -\frac{1}{8} = -0,125.$$

Таким образом, соответствующая цепная дробь (2.2.11) для расходящегося ряда (2.2.10) дает то же значение, что и формула (2.2.4).

Запишем еще одну цепную дробь, которая суммирует расходящийся ряд.

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \dots \quad (2.2.12)$$

Коэффициенты соответствующей цепной дроби приведены во второй колонке табл. 2.7.

Таблица 2.7

**Определение значения ряда  $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \dots$ .**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-16	-15
2	-5.0625	-1.639175257731958...
3	-1.902006172839506...	4.468842729970326...
4	-1.194881426389201...	0.589107854297097...
5	-0.665213627904199...	-0.654126288979997...
6	-0.695982761081949...	-0.058745458732026...
7	-0.269836330273091...	0.0386704828307970...
8	-0.528896059045147...	0.0015578121393953...
9	-0.094302341762730...	-0.0007429829389102...
10	-0.449098226263228...	0
11	0	

Нулевое значение ряда (2.2.12) установлено через соответствующую цепную дробь:

$$1 - \frac{16}{1+} \frac{5.0625}{1-} \frac{1.9020\dots}{1+} \frac{1.1948\dots}{1-} \frac{0.6652\dots}{1+} \frac{0.6959\dots}{1-} \frac{0.2698\dots}{1+} \frac{0.5288\dots}{1-} \frac{0.0943\dots}{1+} \frac{0.4490\dots}{1-} = 0. \quad (2.2.13)$$

Нулевое значение ряда (2.2.12) также определяется формулой суммирования (2.2.5).

Найдём цепную дробь для расходящегося ряда

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots \quad (2.2.14)$$

Коэффициенты соответствующей ряду (2.2.14) цепной дроби помещены во второй колонке табл. 2.8.

Таблица 2.8

**Определение значения ряда  $1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots$ .**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-32	-31
2	-7.59375	-2.723636363636363...
3	-3.379758230452674...	15.605367008681925...
4	-1.449110852118517...	2.6856416132186408...

5	-1.131887307749223...	-3.794900950263825...
6	-0.783048949329761...	-0.292785965012629...
7	-0.488187303329301...	0.720278773173935...
8	-0.574030342979013...	0.2894079125380091...

Продолжение табл. 2.8.

9	-0.219668299598191...	0.2271559698219214...
10	-0.477557143137552...	0.2491558870314235...
11	-0.081339737700144...	0.2503771876885938...
12	-0.423343591264691...	0.25
13	0	

Значение расходящегося ряда (2.2.14) установлено преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots = \\
 & = 1 - \frac{32}{1 + \frac{7.5937}{1 - \frac{3.3797...}{1 + \frac{1.4491...}{1 - \frac{1.1318...}{1 + \frac{0.7830...}{1 - \frac{0.4881...}{1 + \frac{0.5740...}{1 - \frac{0.2196...}{1 + \frac{0.4775...}{1 - \frac{0.0813...}{1 + \frac{0.4233...}{1}}}}}}}}}}}} = 0.25. \quad (2.2.15)
 \end{aligned}$$

Используя формулу (2.2.4), имеем то же значение для расходящегося ряда (2.2.14):

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \dots = \frac{2^6 - 1}{6} B_6 = \frac{63}{6} \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

В анализе, помимо дзета-функции Римана

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

рассматривается функция  $\beta(n)$ :

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.16)$$

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots = \frac{(-1)^k E_{2k} \pi^{2n+1}}{4^{k+1} (2k)!},$$

где  $E_{2k}$  – числа Эйлера.

Числами Эйлера называют [84] коэффициенты в разложении

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$E_0 = 1, \quad E_{2k-1} = 0, \quad E_{2k} = (-1)^k \frac{4^{k+1} (2k)!}{\pi^{2k+1}} \left[ 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots \right].$$

$$E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad E_{10} = -50521, \quad E_{12} = 2702765, \quad E_{14} = -199360981, \quad \dots$$

Числа Эйлера  $E_{2k}$  определяются также детерминантной формулой [21], аналогичной формуле Лапласа:

$$E_{2k} = (-1)^k (2k)! \begin{vmatrix} 1/2! & 1/4! & 1/6! & \dots & 1/(2k)! \\ 1 & 1/2! & 1/4! & \dots & 1/(2k-2)! \\ 0 & 1 & 1/2! & \dots & 1/(2k-4)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2! \end{vmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Известна формула суммирования рядов [41]:



$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + \dots = \frac{1}{2} E_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.18)$$

Запишем формулы суммирования рядов (2.2.18) для нечётных и чётных степеней:

$$1 - 3^{2k-1} + 5^{2k-1} - 7^{2k-1} + \dots = \frac{1}{2} E_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2.19)$$

$$1 - 3^{2k} + 5^{2k} - 7^{2k} + \dots = \frac{1}{2} E_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (2.2.20)$$

Так как  $E_{2k-1} = 0$ , то

$$1 - 3^{2k-1} + 5^{2k-1} - 7^{2k-1} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2.21)$$

Установим значения расходящихся рядов, связанных с функцией  $\beta(n)$ , преобразовывая эти ряды в соответствующие цепные дроби.

В табл. 2.9 приведены коэффициенты цепной дроби, суммирующей ряд

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots \quad (2.2.22)$$

Таблица 2.9

**Определение значения ряда  $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots$**

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-3	-2
2	-1.66666666666667...	-0.125
3	-0.26666666666667...	0.083333333333333...
4	-0.6	0
5	0	

Следовательно,

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 + \dots = 1 - \frac{3}{1 + \frac{1.666}{1} - \frac{-0.2666\dots}{1} + \frac{0.6}{1}} = 0. \quad (2.2.23)$$

Если использовать при суммировании ряда (2.2.22) формулу (2.2.21), то получим также нулевое значение:

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots = \frac{1}{2} E_1 = 0. \quad (2.2.24)$$

Таким образом, значение ряда (2.2.22) установлено как построением соответствующей цепной дроби, так и формулой суммирования (2.2.19), включающей числа Эйлера.

Найдём значение ряда

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \dots \quad (2.2.25)$$

В табл. 2.10 помещены коэффициенты соответствующий ряду (2.2.25) цепной дроби. Число звеньев  $N$  конечных цепных дробей, соответствующих рядам

$$1 - 3^n + 5^n + 7^n - 9^n + \dots,$$

также определяется формулой (2.2.6), то есть  $N = 2n + 2$ , где  $n$ -степень слагаемых расходящегося ряда.

Таблица 2.10

**Определение значения ряда  $1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \dots$**

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-9	-8
2	-2.77777777777778...	-1.38235294117647...
3	-0.81777777777778...	0.44594594594594...
4	-0.735652173913043...	-0.439393939393939...
5	-0.185013876040703...	-0.532786885245901...
6	-0.489361702127659...	-0.5
7	0	

Таким образом,

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \dots = \\ = 1 - \frac{9}{1+} - \frac{2.777}{1-} - \frac{0.8177\dots}{1+} - \frac{0.7356\dots}{1-} - \frac{0.1850\dots}{1+} - \frac{0.4893\dots}{1-} = -0.5.$$

По формуле (2.2.20) имеем то же значение расходящегося ряда (2.2.25):

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \dots = \frac{1}{2} E_2 = \frac{1}{2} (-1) = -0.5.$$

Аналогично найдём значение расходящегося ряда:

$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \dots \quad (2.2.26)$$

В табл. 2.11 приведены коэффициенты соответствующей ряду (2.2.26) цепной дроби.

Таблица 2.11

**Определение значения ряда  $1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \dots$**

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-27	-26
2	-4.629629629629...	-3.796052631578947...
3	-1.885629629629629...	7.386752136752136...
4	-0.900248900062853...	0.955206847360912...
5	-0.489671913183046...	-0.7343763505920995...
6	-0.549255765733433...	-0.0424528301886798...
7	-0.140666846981581...	0.0202247191011235...
8	-0.436834094368340...	0
9	0	

Таким образом,

$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \dots = \\ = 1 - \frac{27}{1+} - \frac{4.6296}{1-} - \frac{1.8856\dots}{1+} - \frac{0.9002\dots}{1-} - \frac{0.4896\dots}{1+} - \frac{0.5492\dots}{1-} - \frac{0.1406\dots}{1+} - \frac{0.4368\dots}{1-} = 0.$$

То есть, расходящийся ряд (2.2.26) имеет нулевое значение. Это же нулевое значение ряда (2.2.26) определяет формула (2.2.21):

$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \dots = \frac{1}{2} E_3 = 0.$$

Найдём значение ряда

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 + \dots \quad (2.2.27)$$

построением соответствующей цепной дроби. В табл. 2.12 приведены коэффициенты этой цепной дроби.

Таблица 2.12

**Определение значения ряда  $1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - \dots$**

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-81	-80
2	-7.71604938271604...	-8.293201133144475...
3	-3.87444938271604...	49.089557171183079...
4	-1.09958606737906...	10.965856913437832...
5	-0.97385568886141...	-7.545203423325663...
6	-0.61551942437909...	1.2964088976993309...
7	-0.34705673374632...	3.2542235463239492...
8	-0.47164981957469...	2.5386076232181956...
9	-0.11343195500739...	2.4831101554100283...
10	-0.40598906628226...	2.5
11	0	

Следовательно, значение ряда (2.2.27) определяется конечной цепной дробью:

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 + \dots$$

$$= 1 - \frac{81}{1 + \frac{7.7160\dots}{1 - \frac{3.8744\dots}{1 + \frac{1.0995\dots}{1 - \frac{0.9738\dots}{1 + \frac{0.6155\dots}{1 - \frac{0.3470\dots}{1 + \frac{0.4716\dots}{1 - \frac{0.1134\dots}{1 + \frac{0.4059\dots}{1}}}}}}}}}} = 2,5.$$

Это же значение ряда (2.2.27) даёт формула (2.2.20):

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 - \dots = \frac{1}{2} E_4 = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5.$$

Найдём значение ряда

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \dots \quad (2.2.28)$$

В табл. 2.13 помещены коэффициенты соответствующей ряду (2.2.28) цепной дроби.

Таблица 2.13

**Определение значения ряда  $1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - \dots$**

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-243	-242
2	-12.86008230452674...	-16.53236342042755...
3	-7.481842304526748...	247.94707003812964...
4	-1.340550240083470...	51.05669994621217...
5	-1.724747045920873...	-104.12563937846293...
6	-0.688749871021777...	-18.481923061054908...
7	-0.642953390968142...	16.179620492596533...
8	-0.508698761904227...	1.7338609644084740...
9	-0.268430357460596...	-0.9475248189291177...
10	-0.429306698025288...	-0.0430755976739177...
11	-0.095055848842619...	0.0177284882031684...
12	-0.385641072157467...	0
13	0	

Таким образом,

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \dots =$$

$$= 1 - \frac{243}{1 + \frac{-12.8600\dots}{1 - \frac{7.4818\dots}{1 + \frac{1.3405\dots}{1 - \frac{1.7247\dots}{1 + \frac{0.6887\dots}{1 - \frac{0.6429\dots}{1 + \frac{0.5086\dots}{1 - \frac{0.2684\dots}{1 + \frac{0.4293\dots}{1 - \frac{0.0950\dots}{1 + \frac{0.3856\dots}{1}}}}}}}}}} = 0.$$

Расходящийся ряд (2.2.28) имеет нулевое значение. Это же нулевое значение ряда (2.2.28) определяет формула (2.2.21):

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \dots = \frac{1}{2} E_5 = 0.$$

Определим значение ряда

$$1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - 11^6 + \dots \quad (2.2.29)$$

В табл. 2.14 помещены коэффициенты соответствующей ряду (2.2.29) цепной дроби.

Таблица 2.14

Определение значения ряда  $1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \dots$

Номер звена, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1	1
1	-729	-728
2	-21.433470507544581...	-31.49608658432187...
3	-13.903934507544581...	1103.8698695919684...
4	-1.6313143853625328...	183.10824599696824...
5	-2.8687102815638655...	-907.56841366000745...
6	-0.7696003370765906...	-223.67535990258270...
7	-1.0599547387268127...	223.44168433902161...
8	-0.5481069312209799...	10.853306533862650...
9	-0.4767678588580081...	-60.040315659681355...
10	-0.4536348111560438...	-33.31959099112834...
11	-0.2187840095131980...	-29.10203931316482...
12	-0.4026609043055858...	-30.44310407235382...
13	-0.0818240759259793...	-30.52236729836546...
14	-0.3711875954661307...	-30.5
15	0	

Таким образом, устанавливаем значение расходящегося ряда (2.2.29):

$$\begin{aligned}
 & 1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - 11^6 + \dots = \\
 & = 1 - \frac{729}{1} + \frac{21.4334\dots}{1} - \frac{13.9039\dots}{1} + \frac{1.6313\dots}{1} - \frac{2.8687\dots}{1} + \frac{0.7696\dots}{1} - \frac{1.0599\dots}{1} + \\
 & \quad + \frac{0.5481\dots}{1} - \frac{0.4767\dots}{1} + \frac{0.4536\dots}{1} - \frac{0.2187\dots}{1} + \frac{0.4026\dots}{1} - \frac{0.0818\dots}{1} + \frac{0.3711\dots}{1} = -30,5.
 \end{aligned}$$

Этот же значение ряда (2.29) определяет формула (2.20)

$$1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - 11^6 + \dots = \frac{1}{2} E_6 = \frac{1}{2} (-61) = -30,5.$$

Как отмечалось выше, в анализе весьма широкое применение имеют числа Бернулли. Используем формулу Лапласа (2.2.1) для нахождения предела, связанного с числами Бернулли.

Известно [57], что периодические непрерывные дроби Хессенберга, то есть выражения вида

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ -1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ -1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & \alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (2.2.30)$$

представляют корень алгебраического уравнения  $n$ -й степени:

$$x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \dots - \alpha_{n-1} x - \alpha_n = 0. \quad (2.2.31)$$

Если корень  $x_i$  действительный, то выражение (2.2.30) определяет старший по модулю корень алгебраического уравнения. Если корень  $x_i$  комплексный, то установить его непосредственно из соотношения (2.2.30) нельзя. Значение этого комплексного корня можно найти при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, когда из серии подходящих вещественных дробей непрерывной дроби (2.2.30) устанавливаются модуль и аргумент комплексного числа.

Рассмотрим уравнение

$$x^n - \frac{1}{2!}x^{n-1} + \frac{1}{3!}x^{n-2} - \dots - (-1)^n \frac{1}{(n+1)!} = 0. \quad (2.2.32)$$

В табл. 2.15 приведены результаты вычислений старшего по модулю корня уравнения 25-й степени. Замена исходного уравнения “близким” предпринято для того, чтобы избежать деления на ноль при определении значений подходящих дробей.

Таблица 2.15

**Нахождение корня алгебраического уравнения**

$$x^{25} - \frac{1+10^{-12}}{2!}x^{24} + \frac{1+10^{-12}}{3!}x^{23} - \dots - \frac{1+10^{-12}}{26!} = 0. \quad (2.2.33)$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Значение модуля, $r_n$	Значение аргумента, $\varphi_n$
26	25330270134.0...	0.868163550639...	1.570796326794...
52	279843.441775...	0.371715652768...	1.570796326794...
104	38562.5657614...	0.243229082334...	1.570796326794...
208	68946.4134736...	0.196751398152...	1.570796326794...
416	4390.09489062...	0.176957506558...	1.570796326794...
832	17174.3445335...	0.167820330357...	1.570796326794...
1664	582.005880069...	0.163430218903...	1.570796326794...
3328	4289.71250720...	0.161278419131...	1.570796326794...
6656	144.533788374...	0.160213167031...	1.570796326794...
13312	1072.18629089...	0.159683182410...	1.570796326794...
26624	536.072986550...	0.159418847907...	1.570796326794...
53248	68.0314331572...	0.159286844790...	1.570796326794...
106496	134.014410239...	0.159220884225...	1.570796326794...
212992	67.0067958461...	0.159187914185...	1.570796326794...

Из колонок 3 и 4 табл. 2.15 можно видеть, что значением корня  $x_1$  уравнения (2.2.33) является мнимое число, близкое к значению  $i/2\pi$ .

$$\frac{i}{2\pi} = 0.15915494e^{i1.57079632}$$

Следовательно, можно записать значение периодической цепной дроби Хессенберга:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & 1/4! & 1/5! & \dots \\ 1 & 1/2! & 1/3! & 1/4! & \dots \\ 0 & 1 & 1/2! & 1/3! & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1/2! & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & 1/4! & \dots \\ 1 & 1/2! & 1/3! & \dots \\ 0 & 1 & 1/2! & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} = \frac{i}{2\pi} = 0.159154\dots e^{i1.570796\dots} \quad (2.2.34)$$

Из соотношения (2.2.34) и формулы Лапласа (2.2.1) устанавливаем предел, связанный с отношением соседних чисел Бернулли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{i}{2\pi}. \quad (2.2.35)$$

Предел (2.2.35) не может быть установлен в классическом смысле, так как при  $n \rightarrow \infty$  отношение определителей (2.2.34) не сходится ни к какой границе. Однако значение периодической цепной дроби Хессенберга (2.2.34), как видно из табл. 2.15, находится при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Учитывая соотношения (2.2.1) и (2.2.35), определим предел, связанный с отношением расходящихся рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \dots}{n(1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - \dots)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \cdot B_{n+1}}{(-1)^n \frac{2^n - 1}{n} \cdot n \cdot B_n} = -\frac{i}{\pi}. \quad (2.2.36)$$

Выше было установлено, что расходящиеся ряды (2.2.2), суммируются конечными цепными дробями, причём, число звеньев этих цепных дробей равно удвоенной степени слагаемых ряда плюс две единицы. Таким образом можно записать:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} + 4^{n-1} + \dots = \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1 + 1} + \frac{\omega_3}{1 - 1} + \dots + \frac{\omega_{2n-1}}{1} - \frac{\omega_{2n}}{1} = \frac{(-1)^n (2^n - 1)}{n} B_n. \quad (2.2.37)$$

Из выражения (2.2.37) следует, что числа Бернулли можно представить конечными цепными дробями, коэффициенты  $\omega_n$  которых определяются по коэффициентам исходного расходящегося ряда (2.2.2) с использованием формул Хейлсманна-Стильтьеса (2.1.6) или алгоритмом Рутисхаузера (2.1.16):

$$B_n = \frac{(-1)^n n}{2^n - 1} \left( \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} - \frac{\omega_2}{1 + 1} + \frac{\omega_3}{1 - 1} + \dots - \frac{\omega_{2n-1}}{1} - \frac{\omega_{2n}}{1} \right). \quad (2.2.38)$$

Так как числа Бернулли представляются определителями Лапласа (2.2.1), то выражение (2.2.38) можно рассматривать как разложение в цепную дробь этих определителей.

Установим предел, связанный с отношением соседних чисел Эйлера, как то было сделано для чисел Бернулли. Для чисел Эйлера известна детерминатная формула (2.2.17).

Определитель, стоящий в формуле (2.2.17) – определитель Хессенберга. Отношение этих определителей при  $n \rightarrow \infty$  стремится к старшему по модулю корню алгебраического уравнения:

$$x_n - \frac{1}{2!} x^{n-1} + \frac{1}{4!} x^{n-2} - \frac{1}{6!} x^{n-3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.2.39)$$

В табл. 2.16 приведены результаты вычислений старшего по модулю корня уравнения (2.2.39) при  $n = 25$ .

Таблица 2.16

**Нахождение корня уравнения**

$$x^{25} - \frac{1}{2!} x^{24} + \frac{1}{4!} x^{23} - \frac{1}{6!} x^{22} + \dots + \frac{1}{50!} = 0 \quad (2.2.40)$$

$$x_1 = 0,4052847345694\dots$$

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Значение погрешности $\varepsilon =  x_1 - x_1^{(n)} $
2	0,4166666667...	0,01138193209...
3	0,4066666667...	0,00138193209...
4	0,4054449648...	0,00016023030...
5	0,4053028479...	0,00001811340...
6	0,4052867604...	0,00000202587...
7	0,4052849602...	0,00000022564...
8	0,4052847596...	0,00000002509...
9	0,4052847373...	0,00000002789...
10	0,4052847348...	0,00000000309...
11	0,4052847346...	0,00000000034...

Следовательно, можно записать значение бесконечной периодической цепной дроби Хессенберга:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1/2! & 1/4! & 1/6! & 1/8! \dots \\ 1 & 1/2! & 1/4! & 1/6! \dots \\ 0 & 1 & 1/2! & 1/4! \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1/2! \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2! & 1/4! & 1/6! \dots \\ 1 & 1/2! & 1/4! \dots \\ 0 & 1 & 1/2! \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} = 0,4052847345\dots = \frac{4}{\pi^2}. \quad (2.2.41)$$

Учитывая (2.2.41) и детерминантную формулу (2.2.17) для чисел Эйлера, можно записать предел, связанный с отношением соседних чисел Эйлера с чётными номерами:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k-1)2k} \cdot \frac{E_{2k}}{E_{2k-2}} = \frac{4}{\pi^2}. \quad (2.2.42)$$

Определение значений расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана, выполнено построением для этих рядов, так называемых, соответствующих цепных дробей. Эти соответствующие цепные дроби – конечные, причём, число звеньев пропорционально степени слагаемых этих расходящихся рядов, которые, как известно, суммируются рациональными выражениями, включающих числа Бернулли и Эйлера. Тем самым, получены разложения в конечные цепные дроби чисел Бернулли и Эйлера, имеющих как чётные, так и нечётные порядковые номера, что открывает новые возможности в изучении этих чисел методами цепных дробей, в частности, исследованием их с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

### 2.3. Об одном алгоритме представления рациональных чисел конечными цепными дробями

Алгоритм Евклида позволяет записывать рациональные числа  $a/b$  цепными дробями вида:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}, \quad (2.3.1)$$

где  $q_i$  – целые положительные числа.

Рациональное число представляется алгоритмом Евклида конечной цепной дробью, причём, запись рациональных чисел в виде цепной дроби (2.3.1) с последним элементом  $q_n > 1$  единственная [46]. Рациональные числа можно, однако, представить конечными цепными дробями алгоритмом, который отличается от классического алгоритма Евклида. Этот алгоритм связан с построением, так называемых, соответствующих цепных дробей, которые часто именуются как  $C$ -дроби.

Если цепные дроби (2.3.1), которые называют *арифметическими* или *правильными*, применяются прежде всего в теории чисел [33, 76], то  $C$ -дроби широко используются в математическом анализе [1, 14, 16, 105] и в вычислительной математике [12, 25, 39, 74, 93, 101].

Запишем рациональное число  $a/b$ , где  $b > a$ , в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Не теряя общности, будем полагать, что имеет место чисто периодическая десятичная дробь:

$$\frac{a}{b} = 0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, \dots$$

которую представим в виде ряда

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_1}{10^{k+1}} + \frac{a_2}{10^{k+2}} + \dots + \frac{a_k}{10^{2k}} + \frac{a_1}{10^{2k+1}} + \dots \quad (2.3.2)$$

Построим для ряда (2.3.2) соответствующую цепную дробь по рекуррентному алгоритму Рутисхаузера, то есть по формулам (2.1.16).

Запишем ряд (2.3.2) в виде:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{1n} + \dots$$

По формулам (2.1.16) найдём коэффициенты  $\alpha_i$  соответствующей цепной дроби

$$\frac{\alpha_{10}}{1} - \frac{\alpha_{20}}{1} + \frac{\alpha_{30}}{1} - \frac{\alpha_{40}}{1} + \dots + \frac{\alpha_{2n,0}}{1} - \frac{\alpha_{2n+1,0}}{1} + \dots \quad (2.3.3)$$

Так как исходная бесконечная десятичная дробь периодическая и представляет рациональное число  $a/b$ , то соответствующая цепная дробь (2.3.3) будет конечной. В этом есть сходство с представлением рациональных чисел конечными цепными дробями, получаемыми по алгоритму Евклида. В качестве примера найдём конечную цепную дробь для отношения соседних чисел Фибоначчи  $F_7/F_6$ . Числа Фибоначчи удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1.$$

Таким образом, числа Фибоначчи составляют последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Числа Фибоначчи имеют замечательную особенность, а именно, отношение соседних чисел Фибоначчи  $F_n/F_{n-1}$  по алгоритму Евклида представляется правильной цепной дробью, то есть цепной дробью вида (2.3.1), которая имеет все частные знаменатели  $q_i$ , равными единице:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{1}}}}_{n \text{ звеньев}}$$

В табл. 2.17 приведены коэффициенты  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби, полученные алгоритмом Рутисхаузера из представления рационального числа  $21/13$  рядом (2.3.4).

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1,615384615384\dots = 1,(615384).$$

$$\frac{21}{13} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \dots \quad (2.3.4)$$

Таблица 2.17

**Коэффициенты  $\omega_i$  соответствующей ряду (2.3.4) цепной дроби**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	1,0	1,0
1	0,6	1,6
2	0,016666666667...	1,610169491525...
3	-0,483333333333...	1,62
4	-0,455172413793...	1,615356622998...
5	0,013009404388...	1,615388280133...
6	-0,096878422782...	1,615385501503...
7	-0,301125814734...	1,615384449150...
8	-0,136065573770...	1,615384615384...
9	-0,176e-1505	



Таким образом, можно записать конечную цепную дробь, в которую раскладывается рациональное число, заданное отношением чисел Фибоначчи  $F_1/F_6$ :

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1 + \frac{0,6}{1} - \frac{0,0166\dots}{1} - \frac{0,4833\dots}{1} + \frac{0,4551\dots}{1} + \frac{0,0130\dots}{1} + \frac{0,0968\dots}{1} - \frac{0,3011\dots}{1} + \frac{0,1360\dots}{1}. \quad (2.3.5)$$

Эквивалентными преобразованиями цепная дробь (2.3.5) может быть приведена к виду:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_8}{b_8}}}, \quad (2.3.6)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – целые числа.

Аналогичным приёмом, то есть построением соответствующих цепных дробей через ряды, можно построить конечные цепные дроби для простейших дробей вида  $1/q$ , где  $q$  – целое число. Очевидно, что дробь  $1/q$  разложить в цепные дроби, используя алгоритм Евклида, нельзя.

В качестве примера рассмотрим разложение числа  $1/7$  в цепную дробь.

$$\frac{1}{7} = 0,1428571428571\dots = 0, (142857).$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \dots \quad (2.3.7)$$

В табл. 2.18 приведены коэффициенты  $\omega_n$  соответствующей ряду (2.2.7) конечной цепной дроби, полученной с использованием алгоритма Рутисхаузера.

Таблица 2.18

**Коэффициенты  $\omega_n$  соответствующий ряду (2.3.7) цепной дроби**

Номер звена, $n$	Коэффициенты цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
1	0.1	0.1
2	0.4	0.166666666666...
3	0.35	0.142105263157...
4	-0.05	0.142857142857...
5	-0.014285714...	0.142867701404...
6	-0.914285714...	0.142862621768...
7	-1.00546875...	0.142857080206...
8	-0.00546875...	0.142857142857...
9	0.514e-1505	

Так как девятый коэффициент цепной дроби близок к нулю, то имеем конечную цепную дробь, представляющую число  $1/7$ :

$$\frac{1}{7} = \frac{0,1}{1} - \frac{0,4}{1} + \frac{0,35}{1} - \frac{0,05}{1} + \frac{0,01428\dots}{1} - \frac{0,91428\dots}{1} + \frac{1,00546\dots}{1} - \frac{0,00546\dots}{1}. \quad (2.3.8)$$

Возвращаясь к замечанию, сделанному к цепной дроби (2.2.5), отметим, что конечная цепная дробь (2.3.8) для числа  $1/7$  может быть преобразована к цепной дроби с целочисленными элементами.

Полученные конечные цепные дроби (2.3.5) и (2.3.8) следует рассматривать как частные случаи соответствующих цепных дробей для степенных рядов:

$$1 + 6x + x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 + 4x^6 + 6x^7 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{6x}{1} - \frac{0,166\dots x}{1} - \frac{4,833\dots x}{1} + \frac{4,551\dots x}{1} + \frac{0,130\dots x}{1} + \frac{0,968\dots x}{1} - \frac{3,011\dots x}{1} + \frac{1,360\dots x}{1}. \quad (2.3.9)$$

$$x + 4x^2 + 2x^3 + 8x^4 + 5x^5 + 7x^6 + x^7 + \dots =$$

$$\frac{x}{1} - \frac{4x}{1} + \frac{3,5x}{1} - \frac{0,5x}{1} + \frac{0,1428\dots x}{1} - \frac{9,1428\dots x}{1} + \frac{10,0546\dots x}{1} - \frac{0,0546\dots x}{1}. \quad (2.3.10)$$

При  $x = 10^{-1}$  из цепных дробей (2.3.9) и (2.3.10) получим цепные дроби (2.3.5) и (2.3.8). Рассматриваемые степенные ряды, очевидно, являются расходящимися при  $x \geq 1$ . Тем не менее, эти расходящиеся ряды при  $x \geq 1$ , очевидно, могут быть просуммированы, то есть могут быть установлены их значения, через конечные цепные дроби (2.3.9) и (2.3.10) при  $x \geq 1$ . «Сворачивая» цепные дроби (2.3.9) и (2.3.10) получим дробно-рациональные функции, для которых могут быть определены нули и полюсы. В частности, конечная цепная дробь (2.3.10) имеющая восемь звеньев, после эквивалентных преобразований примет вид:

$$\frac{P_8(x)}{Q_8(x)} = \frac{x(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)}{d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4}.$$

Вернемся к цепной дроби Фибоначчи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (2.3.11)$$

К цепной дроби Фибоначчи (2.3.11) можно прийти, не только выполняя по алгоритму Евклида разложение в цепную дробь отношения чисел Фибоначчи  $F_n/F_{n-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ , но и раскладывая в соответствующую цепную дробь ряд, которым может быть представлен корень квадратного уравнения

$$x^2 - px - q = 0. \quad (2.3.12)$$

Из формулы бинома Ньютона следует известный ряд, которым представляется корень квадратного уравнения (2.3.12):

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = p + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^3} + \frac{2q^3}{p^5} - \frac{5q^4}{p^7} + \frac{14q^5}{p^9} - \dots + \frac{(-1)^n C_n q^{n+1}}{p^{2n+1}} + \dots, \quad (2.3.13)$$

где  $C_n$  – числа Каталана.

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, \dots$$

Имеется ряд рекуррентных и явных формул для чисел Каталана, например, формула Эйлера [84]:

$$C_{n-1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}, \quad n \geq 3.$$

По ряду (2.3.13) можно построить соответствующую цепную дробь для корня квадратного уравнения (2.3.12):

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots + \frac{q}{p + \dots}}}} \quad (2.3.14)$$

Если в квадратном уравнении (2.3.12) положить  $p = 1$  и  $q = 1$ , то из (2.3.13) и (2.3.14) получим:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + 1 - 1 + 2 - 5 + 14 - 42 + 132 - 429 + \dots + (-1)^n C_n + \dots, \quad (2.3.15)$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1,618033\dots, \quad (2.3.16)$$

где  $C_n$  –  $n$ -е число Каталана,  $F_n$  –  $n$ -е число Фибоначчи.

Таким образом, цепную дробь Фибоначчи (2.3.11), определяющую корень квадратного уравнения  $x^2 - x - 1 = 0$ , можно получить преобразованием в соответствующую цепную дробь расходящегося знакопеременного ряда (2.3.15), составленного из чисел Каталана.

Корень квадратного уравнения

$$x^2 - px + q = 0 \quad (2.3.17)$$

может быть представлен рядом

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = p - \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^3} - \frac{2q^3}{p^5} - \frac{5q^4}{p^7} - \frac{14q^5}{p^9} - \frac{42q^6}{p^{11}} - \frac{132q^7}{p^{13}} - \frac{429q^8}{p^{15}} - \dots \quad (2.3.18)$$

По ряду (2.3.18) определим соответствующую цепную дробь:

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = p - \frac{q}{p - \frac{q}{p - \frac{q}{p - \dots - p - \dots}}} \quad (2.3.19)$$

Запишем ряд и соответствующую цепную дробь, которой может быть представлен корень алгебраического уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0. \quad (2.3.20)$$

Полагая в (2.3.18) и (2.3.19)  $p = 1$ ,  $q = 1$ , получим:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} = 1 - 1 - 1 - 2 - 5 - 14 - 42 - 132 - 429 - \dots, \quad (2.3.21)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \dots - 1 - \dots}}. \quad (2.3.22)$$

Если в (2.3.18) и (2.3.19) положить  $p = 2\cos\varphi$ ,  $q = 1$ , то запишем ряд и цепную дробь, представляющие  $e^{i\varphi}$ :

$$e^{i\varphi} = 2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi} - \frac{1}{(2\cos\varphi)^3} - \frac{2}{(2\cos\varphi)^5} - \frac{5}{(2\cos\varphi)^7} - \dots, \quad (2.3.23)$$

$$e^{i\varphi} = 2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi - \dots - \frac{1}{2\cos\varphi - \dots}}}. \quad (2.3.24)$$

При  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  получим ряд (2.3.21) и цепную дробь (2.3.22).

Цепная дробь (2.3.22), очевидно, является расходящейся цепной дробью, так как комплексное число не может быть представлено последовательностью вещественных подходящих дробей. Для определения расходящихся в классическом смысле цепных дробей в [53] был предложен  $r/\varphi$ -алгоритм, который был описан выше.

Подходящие дроби разложения (2.3.22) записываются формулой:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/3}{\sin n\pi/3}. \quad (2.3.25)$$

Цепная дробь (2.3.22), имеет периодически повторяющиеся значения подходящих дробей. Среди подходящих дробей присутствуют пары со значениями 0 и  $\pm\infty$ . Такие цепные дроби условно называют *ультрапериодическими* [54]. Ультрапериодические цепные дроби есть ничто иное, как представление комплексного корня  $re^{i\varphi}$  квадратного уравнения, причем, значение аргумента  $\varphi$  кратно числу  $\pi$ , то есть  $\varphi = \pi/s$ , где  $s$  – рациональное число. Найти значения ультрапериодических цепных дробей при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма на компьютере нельзя, ибо среди подходящих дробей, как отмечалось выше, встречаются пары, имеющие значения 0 и  $\pm\infty$ . Однако это препятствие можно обойти, если вместо, например, цепной дроби (2.3.22) вычислять “близкую” цепную дробь

$$1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon} - \frac{1}{1 + \varepsilon} - \dots - \frac{1}{1 + \varepsilon} - \dots. \quad (2.3.26)$$

В табл. 2.19 приведены значения цепной дроби (2.3.26) при  $\varepsilon = 10^{-7}$ .

Модуль и аргумент комплексного числа определялись при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. Значением цепной дроби (2.3.26) является корень квадратного уравнения

$$x^2 - (1 + 10^{-7})x + 1 = 0,$$

то есть комплексное число, весьма близкое к числу  $e^{i\pi/3}$ .

Таблица 2.19

## Определение значения цепной дроби

$$1 + 10^{-7} - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \dots - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \dots$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	1.9999990066E-07	0.0004472135	0.9995527864	0.0000000000	1.0471974934
4	1.0000029989E+00	1.000000249	0.000000249	0.7853981633	0.2617993300
8	5.99914472987E-07	0.1668253300	0.8331746699	0.7853981633	0.2617993300
16	1.00000109966E+00	0.9999930061	0.0000069938	0.9817477042	0.0654497892
32	2.19993070971E-06	0.6655679837	0.3344320162	0.9817477042	0.0654497892
64	1.00000429968E+00	0.9999842231	0.0000157768	1.0308350894	0.0163624040
128	8.59982064771E-06	0.9128948239	0.0871051760	1.0308350894	0.0163624040
256	1.00001709980E+00	0.9999924525	0.0000075474	1.0431069357	0.0040905576
512	3.41993152517E-05	0.9801113303	0.0198886696	1.0431069357	0.0040905576
1024	1.00006830203E+00	0.9999974627	0.0000025372	1.0461748973	0.0010225961

Положив в (2.3.23) и (2.3.24)  $\varphi = 0$ , получим сходящийся ряд и цепную дробь:

$$1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{2}{32} - \frac{5}{128} - \frac{14}{512} - \dots - \frac{C_n}{2^{2n-1}} - \dots, \quad 1 = 2 - \frac{1}{2-2} - \frac{1}{\dots} - \frac{1}{2-\dots}$$

где  $C_n$  – число Каталана.

Если представление вещественных чисел арифметическими цепными дробями, или цепными дробями Евклида, изучаются давно и успешно, то сколько-нибудь завершённой теории представления вещественных чисел так называемыми соответствующими цепными дробями не существует.

Наиболее интересная особенность соответствующих цепных дробей с вещественными звеньями – это их способность представлять комплексные числа, что открывает новые возможности в использовании аппарата цепных дробей в теории чисел.

#### 2.4. О постоянной Эйлера

В математическом анализе и в теории чисел часто используется постоянная Эйлера (или постоянная Эйлера-Маскерони), которая определяется как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right). \quad (2.4.1)$$

Иногда для обозначения постоянной используется латинская буква  $C$ . Это обозначение постоянной было предложено Эйлером в 1735 г, который установил константу с пятнадцатью знаками. В 1790 г. итальянский математик Лоренцо Маскерони определил 32 цифры постоянной. Постоянная Эйлера имеет значение:

$$\gamma = 0,577215664901532860606512090082402431042\dots$$

Также как и для числа  $\pi$ , правильная цепная дробь постоянной Эйлера не имеет видимой закономерности [76]:

$$\gamma = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{4+3} + \frac{1}{3+13} - \frac{1}{5+1} + \frac{1}{1+1} - \frac{1}{8+1} + \frac{1}{1+\alpha}.$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2+4} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{40+1} - \frac{1}{11+3} + \frac{1}{7+1} - \frac{1}{7+1} + \frac{1}{1+1} - \frac{1}{5+\dots}$$

Среди многочисленных математических констант постоянная Эйлера по частоте использования идёт следом за числами  $\pi$  и  $e$  [89].

Постоянная Эйлера имеет интегральные представления. Например [90]:

$$\gamma = -\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{e^x} dx, \quad \gamma = \int_0^1 \left( \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx.$$

Постоянная Эйлера выражается через производную гамма-функции:

$$\gamma = -\Gamma'(1).$$

Известны записи постоянной Эйлера в виде композиции рядов [98]:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) + \dots$$

Работы, в которых рассматриваются те или иные аспекты постоянной Эйлера, появляются регулярно уже не одно столетие. Ещё в 1872 году была опубликована обзорная статья английского математика Джеймса Глейшера с изложением истории этой константы [98]. Имеется немалое число недавних публикаций о постоянной Эйлера [86-90]. В вышедшей в 2003 г. монографии Стивена Финча [97], посвящённой математическим константам, приведена обширная библиография работ, связанных с постоянной Эйлера, включающая описание более ста источников.

Установим постоянную, аналогичную постоянной Эйлера, которая была бы связана не с гармоническим рядом, а с соответствующей гармоническому ряду цепной дробью.

Рассмотрим цепные дроби, которыми может быть представлен гармонический ряд. Запишем известные степенные ряды для логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (-1 < x \leq 1), \quad (2.4.2)$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (x^2 < 1). \quad (2.4.3)$$

Для степенных рядов (2.4.2) и (2.4.3) могут быть найдены, так называемые, соответствующие цепные дроби [12]:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \frac{3^2 x}{6 + \frac{3^2 x}{7 + \dots + \frac{n^2 x}{2n + \frac{n^2 x}{2n+1 + \dots}}}}}}}}}, \quad (2.4.4)$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1 - \frac{x}{2 - \frac{x}{3 - \frac{2^2 x}{4 - \frac{2^2 x}{5 - \frac{3^2 x}{6 - \frac{3^2 x}{7 - \dots - \frac{n^2 x}{2n - \frac{n^2 x}{2n+1 - \dots}}}}}}}}}. \quad (2.4.5)$$

Цепная дробь (2.4.4) для логарифмической функции была установлена Ламбертом в 1768 г. и независимо Лагранжем в 1776 г. [91]. Ламберт обратил внимание, что цепная дробь для логарифмической функции, в отличие от ряда Меркатора, сходится и при  $x > 1$ .

Соответствующие цепные дроби строятся по рядам с использованием различных алгоритмов, например, по формулам Хейлсманна-Стилтьеса или методом Рутисхаузера [70]. Соответствующие цепные дроби в сравнении с рядами имеют, как правило, высокую скорость сходимости и, что принципиально важно, представляют функции в более широких областях.

Для цепных дробей (2.4.4) и (2.4.5) можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = -\frac{1}{1-2} \frac{1^2}{2-3} \frac{1^2}{3-4} \frac{2^2}{4-5} \frac{2^2}{5-6} \frac{3^2}{6-7} \frac{3^2}{7-\dots} \frac{n^2}{2n-2n+1} \frac{n^2}{-\dots}, \quad (2.4.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-2} \frac{1^2}{2-3} \frac{1^2}{3-4} \frac{2^2}{4-5} \frac{2^2}{5-6} \frac{3^2}{6-7} \frac{3^2}{7-\dots} \frac{n^2}{2n-2n+1} \frac{n^2}{-\dots}. \quad (2.4.7)$$

Значения подходящих дробей разложений (2.4.6) и (2.4.7), если цепные дроби вычислять с учетом все большего числа звеньев, стремятся, соответственно, к бесконечно малым и бесконечно большим величинам, которые иногда обозначают как  $-\infty$  и  $+\infty$ .

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln \frac{1}{1-x} \right)$  имеет два представления, – гармоническим рядом:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln \frac{1}{1-x} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2.4.8)$$

и цепной дробью:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{2 - \frac{1^2}{3 - \frac{2^2}{4 - \frac{2^2}{5 - \frac{3^2}{6 - \frac{3^2}{7 - \dots - \frac{n^2}{2n - \frac{n^2}{2n+1 - \dots}}}}}}}}}} \quad (2.4.9)$$

В цепной дроби (2.4.9) номер подходящей дроби совпадает со значением частного знаменателя.

Соответствующая гармоническому ряду цепная дробь (2.4.9) также, как и гармонический ряд, расходится. Частичные суммы гармонического ряда и значения подходящих цепных дробей (2.4.9) неограниченно возрастают. Однако в отношении скорости роста частичные суммы гармонического ряда и подходящие дроби соответствующей ему цепной дроби ведут себя по-разному.

Если частичную сумму гармонического ряда обозначить через  $H_n$ , то

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad H_1 = 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4.10)$$

Для подходящих дробей разложения (2.4.9), которые можно рассматривать как аналог частичных сумм для цепных дробей, имеют место рекуррентные формулы:

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = 2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4.11)$$

Записывая подходящие дроби соответствующей гармоническому ряду цепной дроби (2.4.9), приходим к «удвоенному» гармоническому ряду:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$$

Из сравнения рекуррентных формул (2.4.10) и (2.4.11) следует, что значения подходящих дробей цепной дроби (2.4.9) увеличиваются значительно быстрее, чем растут значения частичных сумм гармонического ряда.

В табл. 2.20 даны значения частичных сумм гармонического ряда и значения подходящих соответствующей цепной дроби (2.4.9).

Таблица 2.20

**Значения частичных сумм гармонического ряда и подходящих дробей (2.4.9)**

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	1	3/2	11/6	25/12	137/60	49/20	363/140	761/280
$\frac{P_n}{Q_n}$	1	2	5/2	3	10/3	11/3	47/12	25/6

Можно записать формулу, связывающую значения подходящих соответствующей цепной дроби (2.4.9), построенной для гармонического ряда, и частичные суммы гармонического ряда:

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (2.4.12)$$

где  $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$  – подходящая дробь с номером  $2n$  цепной дроби (2.4.9).

Соотношение (2.4.12) запишем в развёрнутом виде:

$$\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \dots - \frac{n^2}{2n} = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Например,

$$\frac{P_8}{Q_8} = \left( \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{6} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{8} \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{6}.$$

Обратимся к формуле (2.4.1), то есть к постоянной Эйлера, которая определяется как предел разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа.

В табл. 2.21 приведены результаты вычисления постоянной Эйлера по формуле (2.4.1).

Таблица 2.21

**Определение значения постоянной Эйлера**

Значения $n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	Значения $\ln n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$	Погрешность, $ \gamma - \gamma_n $
10	2,92896825396825	2,30258509299405	0,62638316097421	0,04916749607268
100	5,18737751763962	4,60517018598809	0,58220733165153	0,00499166675000
1000	7,48547086055034	6,90775527898214	0,57771558156821	0,00049991666668
10000	9,78760603604438	9,21034037197618	0,57726566406820	0,00004999916667
100000	12,09014612986340	11,51292546497020	0,57722066489320	0,00000499999167
1000000	14,39272672286570	13,81551055796430	0,57721616490145	0,00000049999992
10000000	16,69531136585990	16,11809565095830	0,57721571490153	0,00000005000000
100000000	18,99789641385390	18,42068074395240	0,57721566990154	0,00000000500001
1000000000	21,30048150234790	20,72326583694640	0,57721566540154	0,00000000050000

Из табл. 2.21 видно, что нахождение верных знаков константы Эйлера по формуле (2.4.1) осуществляется весьма медленно.

Если в формуле (2.4.1), определяющей постоянную Эйлера, отрезок гармонического ряда, содержащего  $n$  слагаемых, где  $n$  – чётное число, то есть

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

заменить отрезком соответствующей цепной дроби, имеющей также  $n$  звеньев

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{2 - \frac{1^2}{3 - \frac{2^2}{4 - \frac{2^2}{5 - \dots - \frac{(n/2)^2}{n}}}}}}$$

то, очевидно, что конечного предела у этого выражения не будет, однако при замене в такой конструкции  $\ln n$  на  $\ln n^2$  и перестановке слагаемых получим постоянную:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n^2 - \left( \frac{1}{1 - \frac{1^2}{2 - \frac{1^2}{3 - \frac{2^2}{4 - \frac{2^2}{5 - \dots - \frac{(n/2)^2}{n}}}}}} \right) \right] = L_1. \quad (2.4.13)$$

Запишем формулу (2.4.13) в компактном виде:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n^2 - \frac{P_n}{Q_n} \right) \quad \text{или} \quad L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \ln n - \frac{P_n}{Q_n} \right),$$

где  $\ln n^2$  – натуральный логарифм квадрата числа  $n$ ,  $\frac{P_n}{Q_n}$  – значение  $n$ -й подходящей цепной дроби (2.4.9).

В табл. 2.22 даны результаты определения постоянной  $L_1$  по формуле (2.4.13).

Таблица 2.22

**Определение постоянной  $L_1$** 

Значения $n$	Значения $\ln n^2$	Значения подходящих $P_n/Q_n$	Значения разности $\ln n^2 - P_n/Q_n$
10	4,60517018598809	4.5666666666666673	0.038503519321424
100	9,21034037197618	8.9984106766588532	0.211929695317333
1000	13,81551055796430	13.585646859981065	0.229863697983224
10000	18,42068074395240	18.189017705968841	0.231663037983472
100000	23,02585092994050	22.794007898556639	0.231843031384089
1000000	27,63102111592850	27.399160084609722	0.231861031329127
10000000	32,23619130191660	32.004328470597066	0.231862831238225
100000000	36,84136148790470	36.609498476630783	0.231863059026393

Таким образом, постоянная  $L_1$ , определяемая формулой (2.4.13), имеет значение 0,2318630... Так как при вычислении этой константы использовались соответствующие цепные дроби логарифмической функции, установленные Ламбертом, то будем называть постоянную (2.4.13) постоянной Ламберта и обозначить её символом  $L_1$ .

Если постоянная Эйлера  $\gamma$  определяется как предел разности частичной суммы гармонического ряда и натурального логарифма числа  $n$ , то постоянная Ламберта  $L_1$  определяется как предел разности логарифма квадрата числа  $n$  и значения  $n$ -й подходящей соответствующей цепной дроби (2.4.9), построенной для гармонического ряда.

Учитывая формулу (2.4.12), устанавливающую связь между значениями подходящих цепных дробей (2.4.9) и частичными суммами гармонического ряда, постоянную  $L_1$  можно представить в виде:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k} \right), \quad (2.4.14)$$

или в эквивалентной записи:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \ln n - 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2} \right) \right]. \quad (2.4.15)$$

В формулах (2.4.14) и (2.4.15)  $n$  – чётное число. Обозначая  $L_1/2$  через  $L_2$ , получим:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2} \right) \right). \quad (2.4.16)$$

Константу  $L_2$  можно определить как предел разности между натуральным логарифмом числа  $n$  и частичной суммой гармонического ряда, причём, суммирование распространяется до  $n/2$ , где  $n$  – чётное число. Константа  $L_2$  равна  $L_1/2$ , то есть  $L_2=0,1159315\dots$

Легко заметить, что постоянная  $L_2$ , определяемая формулой (2.4.16), аналогична по структуре формуле (2.4.1), определяющей постоянную Эйлера, которая имеет многочисленные приложения в различных разделах математики и, прежде всего, в анализе.

Определим цепную дробь, равноценную гармоническому ряду. Для ряда, составленного из элементов, обратных нечётным натуральным числам

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots \quad (2.4.17)$$

соответствующей цепной дробью будет дробь

$$\frac{1}{1 - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \frac{4^2}{9} - \frac{5^2}{11} - \dots - \frac{n^2}{2n+1} - \dots} \quad (2.4.18)$$

Если частичную сумму ряда (2.4.17) обозначить  $h_n$ , то

$$h_n = h_{n-1} + \frac{1}{2k+1}, \quad h_1 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$



Для подходящих цепной дроби (2.4.18), которые будем обозначать как  $P_n^{(H)}/Q_n^{(H)}$  имеет место рекуррентное соотношение

$$\frac{P_n^{(H)}}{Q_n^{(H)}} = \frac{P_{n-1}^{(H)}}{Q_{n-1}^{(H)}} + \frac{1}{n}, \quad \frac{P_1^{(H)}}{Q_1^{(H)}} = 1. \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4.19)$$

Для частичных сумм гармонического ряда  $H_n$  имеет место формула (2.4.10). Сравнивая соотношения (2.4.10) и (2.4.19), можно записать:

$$\frac{P_n^{(H)}}{Q_n^{(H)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

где  $P_n^{(H)}/Q_n^{(H)}$  –  $n$ -я подходящая дробь цепной дроби (2.4.18).

Таким образом, цепная дробь (2.4.18) является равноценной, то есть эквивалентной, гармоническому ряду:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} &= \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} = \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} = \frac{11}{6} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-7} = \frac{25}{12} \\ &\dots \dots \dots \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} &= \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-7} \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1}. \end{aligned}$$

Можно записать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-7} \frac{4^2}{-9} \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1} \dots \quad (2.4.20)$$

Цепная дробь (2.4.20) – это другая запись фундаментального объекта математического анализа – гармонического ряда. Следовательно, постоянная Эйлера может быть представлена в записи, отличной от стандартной:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-7} \dots - \frac{(n-1)^2}{2n-1} - \ln n \right).$$

Ряд, содержащий обратные четные числа

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots \quad (2.4.21)$$

представляется соответствующей цепной дробью:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1-6} \frac{1}{-1-10} \frac{2}{-1-14} \dots - \frac{n}{1-4n+2} \dots \quad (2.4.22)$$

Цепная дробь (2.4.22) получена А.З. Никипорцем [55]. Можно выполнить сложение цепных дробей:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1} \frac{1^2}{1-3} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-7} \frac{4^2}{-9} \dots - \frac{n^2}{2n+1} \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{1-6} \frac{1}{-1-10} \frac{2}{-1-14} \dots - \frac{n}{1-4n+2} \dots = \\ &= \frac{1}{1} \frac{1^2}{1-2} \frac{1^2}{-3} \frac{2^2}{-4} \frac{2^2}{-5} \frac{3^2}{-6} \frac{3^2}{-7} \dots - \frac{n^2}{2n} \frac{n^2}{2n+1} \dots \end{aligned}$$

Эквивалентными преобразованиями цепная дробь (2.4.22) приводится к виду:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1-6} \frac{1}{-1-10} \frac{2}{-1-14} \dots - \frac{n}{1-4n+2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-2} - \frac{1^2}{2-3} + \frac{1^2}{3-4} - \frac{2^2}{4-5} + \frac{2^2}{5-6} - \frac{3^2}{6-7} + \frac{3^2}{7-\dots} - \frac{n^2}{2n-2n+1} + \frac{n^2}{\dots} \right) \quad (2.4.23)$$

Следовательно,  $n$ -ю подходящую цепной дроби (2.4.23), которую будем обозначать как  $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$ , можно записать:

$$\frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-2} - \frac{1^2}{2-3} + \frac{1^2}{3-4} - \frac{2^2}{4-5} + \frac{2^2}{5-6} - \frac{3^2}{6-7} + \dots - \frac{(n/2)^2}{n} \right),$$

где  $n$  – чётное число.

Если частичную сумму ряда (2.4.21) обозначить  $g_n$ , то

$$g_n = g_{n-1} + \frac{1}{2n}, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для подходящих  $P_n^{(q)}/Q_n^{(q)}$  цепной дроби (2.4.23), которая является соответствующей цепной дробью для ряда (2.3.21), имеют место рекуррентные соотношения:

$$\frac{P_{2n-1}^{(q)}}{Q_{2n-1}^{(q)}} = \frac{P_{2n-2}^{(q)}}{Q_{2n-2}^{(q)}} + \frac{1}{2n}, \quad \frac{P_{2n}^{(q)}}{Q_{2n}^{(q)}} = \frac{P_{2n}^{(q)}}{Q_{2n}^{(q)}} + \frac{1}{2n}; \quad \frac{P_1^{(q)}}{Q_1^{(q)}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{P_2^{(q)}}{Q_2^{(q)}} = 1; \quad n = 2, 3, \dots$$

В табл. 2.23 приведены частичные суммы ряда (2.4.21) и значения подходящих соответствующих цепных дробей (2.4.23).

Таблица 2.23

Значения частичных сумм ряда (2.4.21) и подходящих цепной дроби (2.4.23)

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$	1/2	3/4	11/12	25/24	137/120	49/40	363/280	761/560
$\frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}}$	1/2	1	5/4	3/2	10/6	11/6	47/24	25/12

Запишем формулу, связывающую значения подходящих соответствующей цепных дробей (2.4.23), построенной для ряда, содержащего обратные чётные числа, и частичные суммы этого ряда:

$$\frac{P_{2n}^{(q)}}{Q_{2n}^{(q)}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

В табл. 2.24 показаны частичные суммы гармонического ряда и значения подходящих соответствующей цепной дроби (2.4.23), построенной для ряда (2.4.21), содержащего обратные чётные числа.

Таблица 2.24

Значения частичных сумм гармонического ряда и подходящих дроби (2.4.23)

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	1	3/2	11/6	25/12	137/60	49/20	363/140	761/280
$\frac{P_n^{(q)}}{Q_n^{(q)}}$	1/2	1	5/4	3/2	10/6	11/6	47/24	25/12

Формула, устанавливающая связь подходящих цепной дроби (2.4.23), построенной для ряда, содержащего обратные чётные числа, и частичной суммой гармонического ряда, имеет вид:

$$\frac{P_{2n}^{(q)}}{Q_{2n}^{(q)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (2.4.24)$$

Например:

$$\frac{P_8^{(q)}}{Q_8^{(q)}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-2} - \frac{1^2}{2-3} + \frac{1^2}{3-4} - \frac{2^2}{4-5} + \frac{2^2}{5-6} - \frac{3^2}{6-7} + \frac{3^2}{7-8} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

Соотношение (2.4.24) можно записать:

$$\frac{P_n^{(ч)}}{Q_n^{(ч)}} = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}. \quad (2.4.25)$$

Учитывая соотношение (2.4.25), ранее установленную константу  $L_2$  представим в виде:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{4} - \frac{2^2}{5} - \dots - \frac{(n/2)^2}{n} \right) \right].$$

Таким образом, имеют место формулы, устанавливающие эквивалентность подходящих дробей частичным суммам гармонического ряда:

$$\frac{P_n}{Q_n} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}, \quad (2.4.26)$$

$$\frac{P_n^{(н)}}{Q_n^{(н)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (2.4.27)$$

$$\frac{P_n^{(ч)}}{Q_n^{(ч)}} = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k}. \quad (2.4.28)$$

Подходящие дроби  $P_n/Q_n$  – это подходящие цепной дроби, соответствующей гармоническому ряду. Подходящие  $P_n^{(н)}/Q_n^{(н)}$  и  $P_n^{(ч)}/Q_n^{(ч)}$  – подходящие соответствующих цепных дробей, построенных для рядов из обратных нечётных и чётных чисел.

Из соотношения (2.4.26) следует, что значение  $n$ -й подходящей цепной дроби, соответствующей гармоническому ряду, эквивалентно удвоенному значению частичной суммы гармонического ряда, причём, частичная сумма составлена из  $n/2$  членов гармонического ряда. Формула (2.4.27) показывает, что  $n$ -я подходящая цепной дроби, соответствующая ряду, составленной из элементов, обратных нечётным числам, эквивалентна  $n$ -й частичной сумме гармонического ряда. Другими словами, цепная дробь (2.4.18) эквивалентна гармоническому ряду. Из формулы (2.4.28) следует, что  $n$ -я подходящая цепной дроби, соответствующей ряду, включающие обратные чётные числа, эквивалентна частичной сумме гармонического ряда с числом членов  $n/2$ .

Запишем формулы, связывающие подходящие дроби  $P_n/Q_n$  соответствующих цепных дробей гармонического ряда с подходящими цепными дробями  $P_n^{(н)}/Q_n^{(н)}$  и  $P_n^{(ч)}/Q_n^{(ч)}$  соответствующих цепных дробей, построенных для рядов из обратных нечётных и чётных чисел:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} &= 2 \frac{P_n^{(н)}}{Q_n^{(н)}}, & \frac{P_n^{(н)}}{Q_n^{(н)}} &= \frac{1}{2} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \\ \frac{P_n}{Q_n} &= 2 \frac{P_n^{(ч)}}{Q_n^{(ч)}}, & \frac{P_n^{(ч)}}{Q_n^{(ч)}} &= \frac{1}{2} \frac{P_n}{Q_n}. \end{aligned}$$

Кроме того, можно записать:

$$\frac{P_n^{(н)}}{Q_n^{(н)}} = \frac{P_{2n}^{(ч)}}{Q_{2n}^{(ч)}}.$$

Определим константы, связанные не с гармоническим рядом, а с рядами, содержащими обратные нечётные и чётные числа.

Константа, аналогичная константе Эйлера, включающая вместо гармонического ряда ряд из элементов, обратных нечётным числам, имеет вид:

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots \right) - \ln \sqrt{n} \right] \quad (2.4.29)$$

или:

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln \sqrt{n} \right), \quad L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \ln n \right).$$

В табл. 2.25 приведены результаты вычисления постоянной  $L_3$  по формуле (2.4.29).

Таблица 2.25

**Определение постоянной  $L_3$**

$n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$	$\ln \sqrt{n}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln \sqrt{n}$
10	2,13325553015955	1,15129254649702	0,981962983662532
100	3,28434218930163	2,30258509299405	0,981757096307589
1000	4,43563267333511	3,45387763949107	0,981755033844041
10000	5,58692519920714	4,60517018598809	0,981755013219045
100000	6,73821774549791	5,75646273248511	0,981755013012795
1000000	7,88951029199287	6,90775527898214	0,981755013010733
10000000	9,04080283848987	8,05904782547916	0,981755013010711
100000000	10,19209538498690	9,21034037197618	0,981755013010712
1000000000	11,34338793148390	10,36163291847320	0,981755013010725

Из табл. 2.25 можно видеть, что константа  $L_3$  устанавливается с большой точностью с увеличением  $n$ . Так, при  $n = 10^9$  константа  $L_3$  определена с 13-ю десятичными разрядами, в то время как константа Эйлера при  $n = 10^9$  была получена с 8-ю точными знаками (табл. 2.21).

Константа, в записи которой вместо гармонического ряда записан ряд из элементов, обратных чётным числам, представляется формулой:

$$L_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \ln \sqrt{n} \right],$$

Несложно показать, что константа  $L_4$  равна половине константы Эйлера:

$$L_4 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{\gamma}{2} = 0,28860783\dots$$

Запишем ещё одну константу, кратную константе Эйлера:

$$L_5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{1-2} - \frac{1^2}{3-4} - \frac{2^2}{5-6} - \frac{3^2}{7-8} - \dots - \frac{n^2}{2n-2n+1} - \dots \right) - \ln n^2 \right]. \quad (2.4.30)$$

Выражение (2.4.30) приведём в эквивалентном виде:

$$L_5 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \right),$$

откуда следует, что

$$L_5 = 2\gamma = 1,1544313\dots$$

В анализе известна формула:

$$Ei^*(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

В [55] приведено любопытное выражение:

$$\gamma = i\pi + e \left( \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1-1} - \frac{2}{1-1} - \frac{3}{1-1} - \frac{3}{1-1} - \dots - \frac{n}{1-1} - \frac{n}{1-1} - \dots \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}. \quad (2.4.31)$$

Цепная дробь в формуле (2.4.31) – расходящаяся в классическом смысле. Значение этой цепной дроби, однако, можно установить с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма. Результаты вычисления расходящейся цепной дроби, входящей в формулу (2.4.31), приведены в табл. 2.26.

Таблица 2.26

**Нахождение значения расходящейся цепной дроби**

$$\text{Ei}(1) = e^{\left( \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{2}{1-\frac{2}{1-\frac{3}{1-\frac{3}{1-\dots-\frac{n}{1-\frac{n}{1-\dots}}}}}}}} \right)}$$

Номер звена дроби	Значения подходящих дробей	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
4	5,43656365	3,23260009	0,43633380	-0,00000000	1,02800173
6	1,08731273	3,84423102	0,17529713	-0,39269908	0,63530265
16	1,26199375	4,12365173	0,44717838	-0,78539816	0,24260357
32	-3,22229391	3,21557146	0,45336243	-0,88357293	0,14442880
64	-5,44198600	3,40441763	0,26451626	-0,98174770	0,04625403
128	3,40902451	3,44911711	0,21981677	-1,03063508	0,00283335
256	2,26696092	3,60976107	0,05917282	-1,04310693	0,01510519
512	2,46414684	3,65055907	0,01837481	-1,04310693	0,01510519
1024	1,67450019	3,69927410	0,03034020	-1,02163120	0,00637053
...	...	...	...	...	...
1048576	5,89027864	3,66844670	0,00048718	-1,02773716	0,00026457
2097152	8,12082269	3,66953895	0,00060305	-1,02787255	0,00017918
4194304	7,05859556	3,66906517	0,00013127	-1,02781431	0,00018742
8388608	2,28589509	3,66933307	0,00039917	-1,02805737	0,00005563

Точное значение цепной дроби:

$$\text{Ei}(1) = e^{\left( \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{2}{1-\frac{2}{1-\frac{3}{1-\frac{3}{1-\dots-\frac{n}{1-\frac{n}{1-\dots}}}}}}}} \right)} = \text{Ei}(1) = 3,6689338967e^{-i1,0280017377}$$

Сумма ряда равна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} = 1,317902151454\dots$$

Значение постоянной Эйлера, найденное из соотношения (2.4.31):

$$\gamma = i3,1415826535 + 3,6689338967(\cos 1,0280017377 - i \cdot \sin 1,0280017377) - 1,31790215145 = 0,5772156655 + i0,0000000002.$$

Значение постоянной Эйлера:  $\gamma = 0,5772156649\dots$

Исторически сложилось так, что ряды получили в математике несравнимо большее распространение, нежели цепные дроби. Многие математические константы определяются именно рядами. Постоянная Эйлера представляется как предел при  $n \rightarrow \infty$  разности между частичной суммой гармонического ряда и натуральным логарифмом числа  $n$ . Выше были получены константы, аналогичные по структуре постоянной Эйлера, связанные, однако, не с гармоническим рядом, а с, так называемыми, соответствующими цепными дробями. Представляет интерес получение других математических констант через построение соответствующих цепных дробей для рядов, определяющих константы.

## 2.5. Разложение тригонометрических рядов в цепные дроби

Представление функции степенным рядом требует существования у этой функции производных всех порядков, в то время как для разложения функции в тригонометрический ряд достаточно существования и непрерывности одной только производной, причем, и это требование не является еще необходимым. Таким образом, для тригонометрических рядов класс охватываемых ими функций значительно шире, чем для степенных, что представляет собой несомненное преимущество тригонометрических рядов.

Во многих практически важных случаях, тригонометрические ряды сходятся медленно. Функция  $f(x)$  может иметь внутри промежутка  $(-\pi, +\pi)$  производные сколь угодно высокого порядка, но достаточно одной точки прерывности в конце промежутка,

чтобы ряд Фурье был практически негодным для вычисления. Отсюда вытекает задача улучшения сходимости рядов Фурье.

Получим разложение в цепные дроби тригонометрических рядов. 1 случай.

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + \dots \quad (2.5.1)$$

Ряд вида (2.5.1) можно переписать следующим образом:

$$a_0 + \frac{1}{2} \left( a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{i2\varphi} + a_3 e^{i3\varphi} + \dots + a_n e^{in\varphi} + \dots \right. \\ \left. \dots + a_1 e^{-i\varphi} + a_2 e^{-i2\varphi} + a_3 e^{-i3\varphi} + \dots + a_n e^{-in\varphi} + \dots \right), \quad (2.5.2)$$

то есть тригонометрический ряд (2.5.1) заменим через два степенных ряда от мнимых аргументов.

Следовательно, тригонометрический ряд (2.5.1) может быть представлен суммой двух цепных дробей:

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + \dots = \\ = \omega_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1 e^{i\varphi}}{1 - \frac{\omega_2 e^{i\varphi}}{1 + \frac{\omega_3 e^{i\varphi}}{1 - \dots - \frac{\omega_{2n} e^{i\varphi}}{1 + \frac{\omega_{2n+1} e^{i\varphi}}{1 - \dots} + \frac{\omega_1}{e^{i\varphi} - 1} \frac{\omega_2}{-1 + e^{i\varphi}} \frac{\omega_3}{- \dots - 1 + \frac{\omega_{2n}}{e^{i\varphi} - \dots} \frac{\omega_{2n+1}}{e^{i\varphi} - \dots}} \right). \quad (2.5.3)$$

Коэффициенты звеньев  $\omega_{2n}$  и  $\omega_{2n+1}$  цепной дроби (2.5.3) выражаются через коэффициенты  $a_n$  исходного тригонометрического ряда при помощи известных формул Хейлманна-Стилтьеса.

Запишем подходящие дроби разложения (2.5.3).

$$\frac{P_1}{Q_1} = \omega_0 + \omega_1 \cos \varphi, \\ \frac{P_2}{Q_2} = \omega_0 + \frac{-\omega_1 \omega_2 + \omega_1 \cos \varphi}{1 + \omega_2^2 - 2\omega_2 \cos \varphi}, \\ \frac{P_3}{Q_3} = \omega_0 + \frac{\omega_1(\omega_3 - \omega_2) + \omega_1[1 + \omega_3(\omega_3 - \omega_2)] \cos \varphi + \omega_1 \omega_3 \cos 2\varphi}{1 + (\omega_3 - \omega_2)^2 + 2(\omega_3 - \omega_2) \cos \varphi}, \\ \frac{P_4}{Q_4} = c_0^{(4)} + \frac{c_{10}^{(4)} + c_{11}^{(4)} \cos \varphi + c_{12}^{(4)} \cos 2\varphi}{c_{00}^{(4)} + c_{01}^{(4)} \cos \varphi + c_{02}^{(4)} \cos 2\varphi}, \\ c_0^{(4)} = \omega_0, \\ c_{10}^{(4)} = -\omega_1[(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4) + \omega_2 \omega_4 (\omega_4 - \omega_3)], \\ c_{11}^{(4)} = \omega_1[1 + \omega_2 \omega_4 + (\omega_4 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)], \\ c_{12}^{(4)} = -\omega_1(\omega_4 - \omega_3), \\ c_{00}^{(4)} = 1 + \omega_2^2 \omega_4^2 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)^2, \\ c_{01}^{(4)} = -2(1 + \omega_2 \omega_4)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4), \\ c_{02}^{(4)} = 2\omega_2 \omega_4 \\ \frac{P_5}{Q_5} = c_0^{(5)} + \frac{c_{10}^{(5)} + c_{11}^{(5)} \cos \varphi + c_{12}^{(5)} \cos 2\varphi + c_{13}^{(5)} \cos 3\varphi}{c_{00}^{(5)} + c_{01}^{(5)} \cos \varphi + c_{02}^{(5)} \cos 2\varphi}, \\ c_0^{(5)} = \omega_0,$$

$$\begin{aligned} c_{10}^{(5)} &= \omega_1 \left[ (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5) (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4) - (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) \right], \\ c_{11}^{(5)} &= \omega_1 \left[ 1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5) (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) + (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4) (1 + \omega_3 \omega_5) \right], \\ c_{12}^{(5)} &= \omega_1 \left[ (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5) - \omega_3 \omega_5 (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) \right], \\ c_{13}^{(5)} &= \omega_1 \omega_3 \omega_5, \\ c_{00}^{(5)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)^2 + (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4)^2, \\ c_{01}^{(5)} &= -2(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) (1 + \omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4), \\ c_{02}^{(5)} &= 2(\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4), \\ \frac{P_6}{Q_6} &= c_0^{(6)} + \frac{c_{10}^{(6)} + c_{11}^{(6)} \cos \varphi + c_{12}^{(6)} \cos 2\varphi + c_{13}^{(6)} \cos 3\varphi}{c_{00}^{(6)} + c_{01}^{(6)} \cos \varphi + c_{02}^{(6)} \cos 2\varphi + c_{03}^{(6)} \cos 3\varphi}, \\ c_0^{(6)} &= \omega_0, \\ c_{10}^{(6)} &= -\omega_1 \left[ (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) \right] \times \\ &\times (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) + \omega_2 \omega_4 \omega_6 (\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6), \\ c_{11}^{(6)} &= \omega_1 \left[ 1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6 + \omega_2 \omega_4 \omega_6) \right. \\ &\left. + (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) (1 + \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) \right], \\ c_{12}^{(6)} &= -\omega_1 \left[ (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) (\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) - \right. \\ &\left. - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) + \omega_2 \omega_4 \omega_6 \right], \\ c_{13}^{(6)} &= \omega_1 (\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6), \\ c_{00}^{(6)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)^2 + (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \\ &+ \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6)^2 + (\omega_2 \omega_4 \omega_6)^2, \\ c_{01}^{(6)} &= -2 \left[ (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) + (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \omega_3 \omega_5 - \right. \\ &\left. - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6 + \omega_2 \omega_4 \omega_6) \right], \\ c_{02}^{(6)} &= 2 \left[ (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) + \right. \\ &\left. + \omega_2 \omega_4 \omega_6 (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) \right], \\ c_{03}^{(6)} &= -2 \omega_2 \omega_4 \omega_6, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} &= c_0^{(2n-1)} + \frac{c_{10}^{(2n-1)} + c_{11}^{(2n-1)} \cos \varphi + c_{12}^{(2n-1)} \cos 2\varphi + \dots + c_{1,n}^{(2n-1)} \cos n\varphi}{c_{00}^{(2n-1)} + c_{01}^{(2n-1)} \cos \varphi + c_{02}^{(2n-1)} \cos 2\varphi + \dots + c_{0,n-1}^{(2n-1)} \cos (n-1)\varphi}, \\ \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} &= c_0^{(2n)} + \frac{c_{10}^{(2n)} + c_{11}^{(2n)} \cos \varphi + c_{12}^{(2n)} \cos 2\varphi + \dots + c_{1,n}^{(2n)} \cos n\varphi}{c_{00}^{(2n)} + c_{01}^{(2n)} \cos \varphi + c_{02}^{(2n)} \cos 2\varphi + \dots + c_{0,n}^{(2n)} \cos n\varphi}. \end{aligned}$$

**Пример 1.**

$$-\ln \left( 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \right) = \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \dots + \frac{1}{n} \cos n\varphi + \dots, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.5.4)$$

По формулам Хейлерманна-Стилтьеса получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}
-\ln\left(2 \sin \frac{1}{2} \varphi\right) &= \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \dots + \frac{1}{n} \cos n\varphi + \dots = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\varphi}}{1-2} - \frac{e^{i\varphi}}{3-2} - \frac{e^{i\varphi}}{5-2} - \dots - \frac{ne^{i\varphi}}{2n+1-2} - \frac{ne^{i\varphi}}{2} - \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{e^{i\varphi}-2} - \frac{1}{3e^{i\varphi}-2} - \frac{1}{5e^{i\varphi}-2} - \dots - \frac{n}{(2n+1)e^{i\varphi}-2} - \frac{n}{2} - \dots \right). \quad (2.5.5)
\end{aligned}$$

Подходящие дроби разложения (2.5.5):

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{Q_1} &= \cos \varphi, \\
\frac{P_2}{Q_2} &= \frac{-2 + 4 \cos \varphi}{5 - 4 \cos \varphi}, \\
\frac{P_3}{Q_3} &= \frac{-12 + 20 \cos \varphi - 3 \cos 2\varphi}{26 - 24 \cos \varphi}, \\
\frac{P_4}{Q_4} &= \frac{-39 + 60 \cos \varphi - 18 \cos 2\varphi}{73 - 84 \cos \varphi + 12 \cos 2\varphi}, \\
\frac{P_5}{Q_5} &= \frac{-423 + 645 \cos \varphi - 222 \cos 2\varphi + 10 \cos 3\varphi}{759 - 936 \cos \varphi + 180 \cos 2\varphi}, \\
\frac{P_6}{Q_6} &= \frac{-2531 + 3912 \cos \varphi - 1590 \cos 2\varphi + 220 \cos 3\varphi}{4335 - 5832 \cos \varphi + 1620 \cos 2\varphi - 120 \cos 3\varphi}. \quad (2.5.6)
\end{aligned}$$

Вне промежутка  $0 < \varphi < 2\pi$  цепная дробь (2.5.5) изображает функцию, получающуюся периодическим продолжением  $-\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$ . Полагая в (2.5.5)  $\varphi = \pi$ , получим известную цепную дробь:

$$\ln 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots + \frac{n}{2n+1 + \frac{n}{2} + \dots}}}}$$

В табл. 2.27 приведены значения подходящих дробей (2.5.6) при различных значениях аргумента.

Таблица 2.27

$\varphi$	$-\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$	Значения подходящих дробей					
		1	2	3	4	5	6
1	0,042018	0,540302	-0,056787	-0,001398	0,040173	0,044735	0,043215
2	-0,520543	-0,416147	-0,549859	-0,510232	-0,521445	-0,520638	-0,520493
3	-0,690639	-0,989932	-0,665177	-0,696905	-0,689395	-0,690793	-0,690619
5	-0,179688	0,283662	-0,223874	-0,198495	-0,175866	-0,179177	0,180044
10	-0,651739	-0,839071	-0,640988	-0,650350	-0,651640	-0,651030	-0,651234

В табл. 2.28 приведены значения функции  $y = -\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$ , вычисленные при помощи ряда (2.5.4).

Таблица 2.28

$\varphi$	$-\ln(2 \sin \frac{\varphi}{2})$	Значения частичных сумм ряда					
		1	2	3	4	5	6
1	0,042018	0,540302	0,332229	0,002232	-0,161179	-0,104447	0,055561
2	-0,520543	-0,416147	-0,742969	-0,422913	-0,459288	-0,627102	-0,486463
3	-0,690639	-0,989992	-0,509907	-0,813617	-0,602658	-0,754590	-0,664543
5	-0,179688	0,283662	-0,135874	-0,389095	-0,287065	-0,088824	-0,063112



2 случай .

$$b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots + b_n \sin n\varphi + \dots \quad (2.5.7)$$

Тригонометрический ряд (2.5.7) может быть представлен следующей суммой двух цепных дробей:

$$\begin{aligned} & b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots + b_n \sin n\varphi + \dots = \\ & = \frac{1}{2i} \left( \frac{\omega_1 e^{i\varphi}}{1} - \frac{\omega_2 e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_3 e^{i\varphi}}{1} - \dots - \frac{\omega_{2n} e^{i\varphi}}{1} + \frac{\omega_{2n+1} e^{i\varphi}}{1} - \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{\omega_1}{e^{i\varphi} - 1} \frac{\omega_2}{1 + e^{i\varphi}} - \dots - \frac{\omega_{2n}}{1 + e^{i\varphi}} \frac{\omega_{2n+1}}{-\dots} \right). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Коэффициенты звеньев  $\omega_{2n}$  и  $\omega_{2n+1}$  цепной дроби (2.5.8) выражаются через коэффициенты  $b_n$  исходного тригонометрического ряда при помощи формул Хейлерманна-Стилтьеса, причем, определители имеют своими элементами коэффициенты  $b_n$ .

Запишем подходящие дроби разложения (2.5.8)

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \omega_1 \sin \varphi, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{\omega_1 \sin \varphi}{1 + \omega_2^2 - 2\omega_2 \cos \varphi}, \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{\omega_1 [1 + \omega_3(\omega_3 - \omega_2)] \sin \varphi + \omega_1 \omega_3 \sin 2\varphi}{1 + (\omega_3 - \omega_2)^2 + 2(\omega_3 - \omega_2) \cos \varphi}, \\ \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{\omega_1 [1 - \omega_2 \omega_4 + (\omega_4 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)] \sin \varphi - \omega_1 (\omega_4 - \omega_3) \sin 2\varphi}{1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)^2 + \omega_2^2 \omega_4^2 - 2(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4)(1 + \omega_2 \omega_4) \cos \varphi + 2\omega_2 \omega_4 \cos 2\varphi}, \\ \frac{P_5}{Q_5} &= \frac{d_{11}^{(5)} \sin \varphi + d_{12}^{(5)} \sin 2\varphi + d_{13}^{(5)} \sin 3\varphi}{d_{00}^{(5)} + d_{01}^{(5)} \cos \varphi + d_{02}^{(5)} \cos 2\varphi}, \\ d_{11}^{(5)} &= \omega_1 [1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) + \\ & \quad + (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4)(\omega_3 \omega_5 - 1)], \\ d_{12}^{(5)} &= \omega_1 [(\omega_3 - \omega_4 + \omega_5) - \omega_3 \omega_5 (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)], \\ d_{13}^{(5)} &= \omega_1 \omega_3 \omega_5, \\ d_{00}^{(5)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5)^2 + (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4)^2, \\ d_{01}^{(5)} &= -2(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5) [1 + (\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4)], \\ d_{02}^{(5)} &= 2(\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_4), \\ \frac{P_6}{Q_6} &= \frac{d_{11}^{(6)} \sin \varphi + d_{12}^{(6)} \sin 2\varphi + d_{13}^{(6)} \sin 3\varphi}{d_{00}^{(6)} + d_{01}^{(6)} \cos \varphi + d_{02}^{(6)} \cos 2\varphi + d_{03}^{(6)} \cos 3\varphi}, \\ d_{11}^{(6)} &= \omega_1 [1 - (\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6 - \omega_2 \omega_4 \omega_6) + \\ & \quad + (\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_5 + \omega_2 \omega_6 + \omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6)(\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6 - 1)], \\ d_{12}^{(6)} &= \omega_1 [(\omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) - (\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6) \times \\ & \quad \times (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) + \omega_2 \omega_4 \omega_6], \\ d_{13}^{(6)} &= \omega_1 (\omega_3 \omega_5 - \omega_3 \omega_6 + \omega_4 \omega_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{00}^{(6)} &= 1 + (\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)^2 + (\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \\
&\quad + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)^2 + (\omega_2\omega_4\omega_6)^2, \\
d_{01}^{(6)} &= -2[(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) + (\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \omega_3\omega_5 - \\
&\quad - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6)(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6 + \omega_2\omega_4\omega_6)], \\
d_{02}^{(6)} &= 2[(\omega_2\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \omega_2\omega_6 + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \omega_4\omega_6) + \\
&\quad + \omega_2\omega_4\omega_6(\omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6)], \\
d_{03}^{(6)} &= -2\omega_2\omega_4\omega_6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} &= \frac{d_{11}^{(2n-1)} \sin \varphi + d_{12}^{(2n-1)} \sin 2\varphi + \dots + d_{1,n}^{(2n-1)} \sin n\varphi}{d_{00}^{(2n-1)} + d_{01}^{(2n-1)} \cos \varphi + d_{02}^{(2n-1)} \cos 2\varphi + \dots + d_{0,n-1}^{(2n-1)} \cos(n-1)\varphi}, \\
\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} &= \frac{d_{11}^{(2n)} \sin \varphi + d_{12}^{(2n)} \sin 2\varphi + \dots + d_{1,n}^{(2n)} \sin n\varphi}{d_{00}^{(2n)} + d_{01}^{(2n)} \cos \varphi + d_{02}^{(2n)} \cos 2\varphi + \dots + d_{0,n}^{(2n)} \cos n\varphi}.
\end{aligned}$$

**Пример 2.**

$$\frac{\pi - \varphi}{2} = \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots + \frac{1}{n} \sin n\varphi + \dots, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.5.9)$$

По формулам Хейлсманна-Стилтьеса получим следующее разложение тригонометрического ряда в цепную дробь:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi - \varphi}{2} &= \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots + \frac{1}{n} \sin n\varphi + \dots = \\
&= \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{i\varphi}}{1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} - \frac{e^{i\varphi}}{3} - \frac{2e^{i\varphi}}{2} - \frac{2e^{i\varphi}}{5} - \dots - \frac{ne^{i\varphi}}{2n+1} - \frac{ne^{i\varphi}}{2} - \dots - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{i\varphi}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3e^{i\varphi}} - \frac{2}{2} - \frac{2}{5e^{i\varphi}} - \dots - \frac{n}{(2n+1)e^{i\varphi}} - \frac{n}{2} - \dots \right). \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

Подходящие дроби разложения (2.5.10):

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{Q_1} &= \sin \varphi, \\
\frac{P_2}{Q_2} &= \frac{4 \sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi}, \\
\frac{P_3}{Q_3} &= \frac{20 \sin \varphi - 3 \sin 2\varphi}{26 - 24 \cos \varphi}, \\
\frac{P_4}{Q_4} &= \frac{48 \sin \varphi - 18 \sin 2\varphi}{73 - 84 \cos \varphi + 12 \cos 2\varphi}, \\
\frac{P_5}{Q_5} &= \frac{465 \sin \varphi - 222 \sin 2\varphi + 10 \sin 3\varphi}{759 - 936 \cos \varphi + 180 \cos 2\varphi}, \\
\frac{P_6}{Q_6} &= \frac{2352 \sin \varphi - 1470 \sin 2\varphi + 220 \sin 3\varphi}{4335 - 5832 \cos \varphi + 1620 \cos 2\varphi - 120 \cos 3\varphi}. \quad (2.5.11)
\end{aligned}$$

### 2.6. Ускорение сходимости рядов Фурье построением соответствующих цепных дробей

В приложениях наиболее удобны тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами. В этом случае лишь несколько первых членов ряда весьма точно определяют его сумму, так как при достаточной скорости приближения к нулю коэффициентов сумма всех последующих членов ряда оказывается малой. В практике использования тригонометрических рядов часто возникает задача улучшения их сходимости. Естественным образом возникает следующая задача. Дан тригонометрический ряд, сумму которого обозначим через  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Требуется выделить из этого ряда другой ряд, сумма которого  $\varphi(x)$  известна в конечном виде, с тем, чтобы оставшийся ряд, то есть ряд, связанный с  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  соотношением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

имел достаточно быстро убывающие коэффициенты.

Если эта задача решена, то операции над  $f(x)$  заменятся операциями над известной функцией  $\varphi(x)$  и над рядом с быстро убывающими коэффициентами.

Можно указать на два приёма улучшения сходимости тригонометрических рядов. Первый приём основан на следующем обстоятельстве: разность двух эквивалентных бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем каждая из них. Две бесконечно малые называются эквивалентными, если их отношение стремится к единице.

Второй приём улучшения сходимости основан на представлении коэффициентов Фурье в виде сумм

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \dots \quad (A = \text{const.}, \quad B = \text{const.})$$

Можно заметить, что этот приём сводится к многократному применению первого приёма улучшения сходимости рядов.

Более эффективным способом ускорения сходимости рядов является способ, связанный с построением для медленно сходящихся рядов, так называемых, соответствующих цепных дробей. В таблицах, приведённых ниже, показаны сравнительные характеристики эффективности вычисления рядов Фурье непосредственно и через соответствующие цепные дроби.

#### Пример 3.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos x - \frac{\cos x}{2^2} + \frac{\cos x}{3^2} - \frac{\cos x}{4^2} + \dots \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (2.6.1)$$

Определим скорость сходимости ряда Фурье (2.6.1) и соответствующей цепной дроби, построенной по коэффициентам этого ряда алгоритмом Рутисхаузера, то есть посредством формул (2.1.16).

В табл. 2.29 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.1) при  $x = 0,1$ .

В четвёртой колонке приведены погрешности при вычислении ряда Фурье (2.6.2) с различным числом членов ряда. Отметим невысокую скорость сходимости ряда Фурье (2.6.2): отрезок ряда с миллионом членов обеспечивает точность порядка  $10^{-11}$ .

В табл. 2.30 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (2.6.1)

цепной дроби при  $x = 1$ . Коэффициенты цепной дроби приведены в третьей колонке таблицы.

Таблица 2.29

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.1) при  $x = 0, 1$**

$$0,1^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos 0,1 - \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} - \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \right) \quad (2.6.2)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left  0,1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-3.980016661	-0.6901485274	0.7001485274
2	0.9800665778	0.2899180504	0.2799180504
4	0.2302652485	0.09558930376	0.08558930376
8	0.04354416933	0.02798812348	0.01798812348
16	-0.000456242536	0.009397598428	0.0006024015725
32	-0.003899588968	0.008116926257	0.001883073743
64	0.0009699071472	0.0104745123	0.0004745122976
128	0.0002375079506	0.01011640987	0.000116409871
256	0.5449257823e-4	0.01002645172	0.2645171806e-4
512	0.9066872285e-5	0.01000421748	0.4217484591e-5
1024	-0.1120899852e-5	0.009999348865	0.6511346343e-6
2048	-0.7889932958e-6	0.0099996191	0.3808996448e-6
4096	0.8795616443e-7	0.01000003842	0.3842266541e-7
1000000	0.3963204892e-11	0.01	0.1995145757e-11

Таблица 2.30

**Определение значения ряда Фурье (2.6.1) при  $x = 1$**

$$1 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos 1 - \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} - \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \right)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left  1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-2.161209223	-2.161209223	1.12865891	0.1286589102
2	-0.4161468365	-0.1925527765	0.6132731061	0.3867268939
4	-0.1634109052	-0.5802477275	1.018714615	0.01871461525
8	-0.009093752113	1.487131434	1.000114009	0.0001140092512
16	-0.01496342938	-0.4089745426	0.9999999726	0.2735050464e-7
32	0.003258685002	-0.2322459026	1	0.4454063588e-16
64	0.0003826730766	-0.6741606326	1	0.8943391567e-33
128	-0.000169164019	1.483098543	1	0.407730213e-66
256	-0.242863525e-5	-0.2817313324	1	0.2515576839e-132

Следует обратить внимание на чрезвычайно высокую скорость сходимости цепной дроби. Цепная дробь содержащая 256 звеньев, обеспечивает погрешность порядка  $10^{-132}$ . Для сравнения: ряд Фурье (2.6.2), имеющий 256 слагаемых, даёт погрешность порядка  $10^{-4}$ , а ряд, включающий миллион слагаемых, даёт всего 10 точных разрядов результата (Табл. 2.29).

**Пример 4.**

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right), \quad -\pi < x < \pi \quad (2.6.3)$$

В табл. 2.31 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.3) при  $x = 0,1$ .

Коэффициенты рядов Фурье (2.6.1) и (2.6.3) достаточно быстро убывают, тем не менее, скорость сходимости рядов невысока, что можно наблюдать из данных погрешностей, приведённых в колонках 4 табл. 2.29 и 2.31.

Таблица 2.31

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.3) при  $x = 0,1$**

$$0,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos 0,1 + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,5}{5^2} + \frac{\cos 0,7}{7^2} + \dots \right) \quad (2.6.4)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left  0,1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-1.26687865	0.3039176764	0.2039176764
2	-0.1351524663	0.1687652101	0.06876521011
4	-0.0198740269	0.1041962703	0.004196270343
8	-0.0004002906775	0.08723653335	0.01276346665
16	0.001323765228	0.0980104813	0.001989518698
32	-0.0003207507067	0.1002288251	0.0002288251073
64	-0.7823724044e-4	0.09996810828	0.3189172275e-4
128	-0.1827502819e-4	0.09996320551	0.3679448827e-4
256	-0.3274440716e-5	0.09998103915	0.1896085183e-4
512	0.2396068097e-6	0.09999415562	0.584437973e-5
1024	0.2671742846e-6	0.1000008417	0.8416694447e-6
2048	-0.3491653145e-7	0.09999964742	0.3525829623e-6
4096	0.12443531e-7	0.09999993467	0.6533243451e-7

В табл. 2.32 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (2.6.3) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.32

**Определение значения ряда Фурье (2.6.4)**

$$0,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos 0,1 + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,5}{5^2} + \frac{\cos 0,7}{7^2} + \dots \right)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left  0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-1.26687865	-1.26687865	0.3039176764	0.2039176764
2	-0.1351524663	-0.1066814617	0.1526250965	0.05262509654
4	-0.0198740269	-0.1682293697	0.08732416813	0.01267583187
8	-0.0004002906775	0.5686637154	0.05940418876	0.04059581124
16	0.001323765228	-12.91826718	0.09818390992	0.001816090082
32	-0.0003207507067	-0.2179993635	0.09997862369	0.2137630646e-4
64	-0.7823724044e-4	0.3509407588	0.09999983971	0.1602850756e-6
128	-0.1827502819e-4	-2.117968726	0.1	0.1487427607e-13
256	-0.3274440716e-5	-0.1409783124	0.1	0.1455298157e-26
505	-0.1166429549e-5	0.7066252757	0.1	0.8910236066e-50

Сравнивая данные таблиц 2.31 и 2.32, можно отметить высокую эффективность цепной дроби при вычислении ряда Фурье (2.6.4). Цепная дробь, содержащая 505 звеньев обеспечивает погрешность порядка  $10^{-50}$ , в то время как использование ряда Фурье (2.6.4) непосредственно при учёте 4096 членов даёт погрешность порядка  $10^{-7}$ .

**Пример 5.**

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) \quad (2.6.5)$$

В табл. 2.33 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.5) при  $x = 0,1$ .

Так как скорость убывания коэффициентов ряда Фурье (2.6.6) сопоставима со скоростью убывания коэффициентов ряда Фурье (2.6.4), то и скорости сходимости рядов (2.6.4) и (2.6.6) примерно одинаковы.

Таблица 2.33

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.5) при  $x = 0, 1$**

$$0,099833 \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 0,2}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 0,4}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 0,6}{5 \cdot 7} + \dots \right) \quad (2.6.6)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left  \sin 0,1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	-0.4159531745	0.2206665979	0.1208331813
2	-0.07818208538	0.1424845125	0.04265109588
4	-0.01408054815	0.09837968031	0.001453736341
8	0.0001457960254	0.08724050503	0.01259291162
16	0.001242491091	0.09844134434	0.001392072307
32	-0.0003088064258	0.09991128193	0.7786527965e-4
64	-0.7560574333e-4	0.0997644695	0.6894714963e-4
128	-0.1734579105e-4	0.09978820174	0.452149115e-4
256	-0.2886086095e-5	0.09981311325	0.2030339381e-4
512	0.3567938445e-6	0.09982777952	0.5637122541e-5
1024	0.2511444261e-6	0.09983437956	0.9629137938e-6
2048	-0.2799731836e-7	0.09983305183	0.3648132982e-6
4096	0.1380843436e-7	0.09983335854	0.5810351094e-7

В табл. 2.34 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (2.6.6).

Таблица 2.34

**Определение значения ряда Фурье (2.6.6)**

$$0,099833 \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 0,2}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 0,4}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 0,6}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left  \sin 0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	-0.4159531745	-0.4159531745	0.2206665979	0.1208331813
2	-0.07818208538	-0.1879588621	0.1243881192	0.02455470258
4	-0.01408054815	-0.1663690299	0.08513134974	0.0147020669
8	0.0001457960254	0.08600422096	-0.466330678	0.5661640946
16	0.001242491091	-2.096074222	0.09783363098	0.00199978567
32	-0.0003088064258	-0.1879617157	0.09980917131	0.242453394e-4
64	-0.7560574333e-4	0.02555575217	0.09983372	0.30335769e-6
128	-0.1734579105e-4	-4.186160986	0.09983341665	0.1830372783e-13
256	-0.2886086095e-5	-0.07529481065	0.09983341665	0.1438876188e-26
503	-0.1255101572e-5	-0.6582305078	0.09983341665	0.27563717e-50

Из табл. 2.33 и табл. 2.34 следует, что использование при вычислении ряда Фурье (2.6.6) соответствующей этому ряду цепной дроби обеспечивает, как и в рассмотренных выше примерах, высокую скорость сходимости. Из данных колонок 5 табл. 2.32 и табл. 2.34 можно заметить, что соответствующие цепные дроби обеспечивают квадратичную скорость сходимости, то есть при увеличении числа звеньев цепной дроби вдвое, также в два раза увеличивается точность вычислений.

Рассмотрим ещё несколько примеров, демонстрирующих эффективность цепных дробей при вычислении рядов Фурье.

**Пример 6.**

$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right), \quad 0 < x < \pi \quad (2.6.7)$$

В табл. 2.35 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.7) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.35

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.7) при  $x = 0,1$**

$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin 0,1 + \frac{\sin 0,3}{3} + \frac{\sin 0,5}{5} + \frac{\sin 0,7}{7} + \dots \right) \quad (2.6.8)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность, $\varepsilon = \left  1 - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	0.127111854	0.127111854	0.872888146
2	0.1254226711	0.2525345251	0.7474654749
4	0.1171776335	0.4917968695	0.5082031305
8	0.08467000417	0.8848137045	0.1151862955
16	0.001707811087	1.178963519	0.1789635194
32	0.0003398114762	0.9033436152	0.09665638479
64	0.001335718927	0.9512196215	0.0487803785
128	0.001792812922	0.97739431	0.02260569002
256	0.001846253678	0.992410373	0.007589626965
512	0.001220237635	1.00177158	0.001771580447
1024	-0.0002962793593	1.002584398	0.002584397515
2048	0.0002760985599	0.9994221442	0.000577855838
4096	0.0001173629133	1.000565886	0.0005658860663

Коэффициенты ряда Фурье (2.6.7) убывают медленно, что “гарантирует” слабую его сходимость 4096 членов ряда (2.7.8) обеспечивают результат всего с тремя верными десятичными разрядами (Табл. 2.35).

В табл. 2.36 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (2.6.8).

Таблица 2.36

**Определение значения ряда Фурье (2.6.8)**

$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin 0,1 + \frac{\sin 0,3}{3} + \frac{\sin 0,5}{5} + \frac{\sin 0,7}{7} + \dots \right)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность, $\varepsilon = \left  0,1 - \frac{P_n}{Q_n} \right $
1	0.127111854	0.127111854	0.127111854	0.872888146
2	0.1254226711	-0.9867110519	9.565230667	8.565230667
4	0.1171776335	-0.9920583462	0.2012773584	0.7987226416
8	0.08467000417	-0.9902515575	0.3825783554	0.6174216446
16	0.001707811087	-0.9900779039	0.6655488971	0.3344511029
32	0.0003398114762	-0.9900435979	0.9221795976	0.07782040244
64	0.001335718927	-0.9900357774	0.9967201038	0.003279896239
128	0.001792812922	-0.9900339008	0.9999945974	0.5402621268e-5
256	0.001846253678	3.661841176	1	0.1450950984e-10
512	0.001220237635	3.776695996	1	0.8159669305e-22
1024	-0.0002962793593	0.1895841833	1	0.2625423426e-44

Следует отметить, что несмотря на то, что коэффициенты исходного ряда Фурье медленно убывают, скорость сходимости соответствующей цепной дроби весьма высока: цепная дробь с 1024 звеньями обеспечивает погрешность при вычислении ряда (2.6.8) порядка  $10^{-44}$ .

**Пример 7.**

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad (2.6.9)$$

В табл. 2.37 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.9) при  $x = 1$ , построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 2.37

**Определение значения ряда Фурье (2.6.9) при  $x = 1$**

$$1 = 2 \left( \sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \frac{\sin 4}{4} + \dots \right) \quad (2.6.10)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность
1	1.68294197	1.68294197	1.68294197	0.6829419696
2	-0.9092974268	0.5403023059	1.09260498	0.09260497969
4	0.3784012477	0.9771401098	0.9937450943	0.006254905728
8	-0.2473395617	0.7885180891	0.9999723769	0.2762308591e-4
16	0.03598791458	0.7711050475	0.9999999995	0.5105888349e-9
32	-0.03446416758	0.7703416654	1	0.1688257252e-18
64	-0.02875081369	0.7701965124	1	0.1812117964e-37
65	0.02544088245	-0.2298914363	1	0.181229119e-37
128	-0.01126621423	0.7701622212	1	0.2067551732e-75
129	-0.002999587473	-0.2298595734	1	0.2067601885e-75
256	0.007806312766	0.7701538868	1	0.2678080738e-151
257	-0.004461923539	-0.2298515384	1	0.26780971e-151

Соответствующая ряду Фурье (2.6.10) цепная дробь обеспечивает высокую скорость сходимости.

**Пример 8.**

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \quad (2.6.11)$$

В табл. 2.38 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.11) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.38

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.11) при  $x = 0,1$**

$$1,490354434 \dots = \cos 0,1 + \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots \quad (2.6.12)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность $\varepsilon =  1,4903 \dots - \sum_{n=1}^n a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.4953502689
2	0.2450166445	1.24002081	0.2503336244
4	0.05756631213	1.403735621	0.08661881351
8	0.01088604233	1.488259979	0.002094455171
16	-0.000114060634	1.51025264	0.01989820613
32	-0.000974897242	1.493008794	0.002654360226
64	0.0002424767868	1.490113625	0.0002408095636
128	0.5937698765e-4	1.490433632	0.791978687e-4
256	0.1362314456e-4	1.490418844	0.6440957653e-4
512	0.2266718071e-5	1.490385272	0.3083800755e-4
1024	-0.280224963e-6	1.490363452	0.9017546554e-5
2048	-0.197248324e-6	1.490353017	0.1417316183e-5
4096	0.2198904111e-7	1.490354998	0.5634416884e-6
1000000	-0.990801223e-12	1.490354434	0.8570704657e-12

Из колонки 4 табл. 2.38 следует, что скорость сходимости ряда Фурье (2.6.12) незначительна: миллион членов ряда обеспечивает погрешность порядка  $10^{-12}$ .

В табл. 2.39 показаны результаты вычисления цепной дроби, соответствующей ряду Фурье (2.6.12).



Таблица 2.39

**Определение значения ряда Фурье (2.6.12)**

$$1,490354434 \dots = \cos 0,1 + \frac{\cos 0,2}{2^2} + \frac{\cos 0,3}{3^2} + \frac{\cos 0,4}{4^2} + \dots$$

*построением соответствующей цепной дроби*

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left  1,4903 \dots - \frac{p_n}{q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.4953502689
2	0.2450166445	-0.246246853	1.32006635	0.1702880845
4	0.05756631213	-0.2527534121	1.481607894	0.008746540523
8	0.01088604233	0.09576073928	1.515262299	0.02490786461
16	-0.000114060634	-0.284485322	1.487040059	0.003314375066
32	-0.000974897242	-0.2116731484	1.490717466	0.0003630320944
64	0.0002424767868	-0.181814571	1.490325034	0.2940042274e-4
128	0.5937698765e-4	-0.09620522848	1.490354435	0.6130518774e-9
256	0.1362314456e-4	-2.724241456	1.490354434	0.2306600907e-18
512	0.2266718071e-5	0.5450086852	1.490354434	0.8058497858e-34

Можно сравнить эффективность вычисления ряда Фурье (2.6.12) методом определения частичных сумм и методом цепных дробей. При 512 слагаемых ряда (2.6.12) погрешность составляет порядка  $10^{-4}$ , а цепная дробь с 512 звеньями обеспечивает погрешность порядка  $10^{-34}$ , то есть разница в эффективности аппроксимации составляет 30 порядков.

**Пример 9.**

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad (2.6.13)$$

В табл. 2.40 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.13) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.40

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.13) при  $x = 0,1$** 

$$0,05 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 0,1n}{n} \quad (2.6.14)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность $\varepsilon = \left  1,4903 \dots - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.04983341665
2	-0.0993346654	0.0004987512493	0.04950124875
4	-0.09735458558	0.001650901226	0.04834909877
8	-0.08966951136	0.005790516862	0.04420948314
16	-0.06247335019	0.01978557833	0.03021442167
32	0.001824191982	0.05167800285	0.001678002848
64	-0.001821081326	0.04870835088	0.001291649118
128	-0.001808670509	0.048909047	0.001090952998
256	-0.001759533571	0.04903469561	0.0009653043888
512	-0.001570922837	0.04918626941	0.0008137305851
1024	-0.0009334526266	0.04954068189	0.0004593181093
2048	0.0002742830788	0.05014721551	0.0001472155111
4096	-0.0002269197216	0.04988430047	0.000115699532
1000000	0.1353399421e-6	0.05000004288	0.4287926899e-7

Ряд Фурье (2.6.14) – медленно сходящийся ряд: частичная сумма с миллионом слагаемых обеспечивает шесть точных десятичных разряда.

В табл. 2.41 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (2.6.14) цепной дроби.

Таблица 2.41

**Определение значения ряда Фурье (2.6.14)**

$$0,05 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 0,1n}{n}$$

*построением соответствующей цепной дроби*

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left  0,05 \dots - \frac{p_n}{q_n} \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.09983341665	0.04983341665
2	-0.0993346654	0.9950041653	0.05004170838	0.4170837554e-4
4	-0.09735458558	0.998343083	0.04999997219	0.2781086585e-7
8	-0.08966951136	0.9975730286	0.05	0.113599796e-13
16	-0.06247335019	0.9975148487	0.05	0.1782044426e-26
32	0.001824191982	0.9975048532	0.05	0.4222653145e-52
64	-0.001821081326	0.9975027309	0.05	0.2321645728e-103
128	-0.001808670509	0.9975022396	0.05	0.6940698305e-206
256	-0.001759533571	-1.228936371	0.05	0.75827669e-301

Соответствующая цепная дробь позволяет вычислить ряд Фурье (2.6.14) с чрезвычайно высокой точностью. Эффективность вычисления ряда Фурье цепными дробями в сравнении с непосредственным подсчётом частичных сумм этого ряда впечатляющая: цепные дроби при числе звеньев 256 дают погрешность почти на 300 порядков меньшую, чем использование частичных сумм.

**Пример 10.**

$$\frac{\pi^2 - 3x^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (2.6.15)$$

В табл. 2.42 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.15) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.42

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.15) при  $x = 0,1$** 

$$0,8199670334 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 0,1n}{n^2} \quad (2.6.16)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность $\varepsilon =  0,8199 \dots - \sum_{n=1}^N a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.1750371319
2	-0.2450166445	0.7499875208	0.06997951261
4	-0.05756631213	0.7985697075	0.02139732594
8	-0.01088604233	0.8154700026	0.004497030871
16	0.000114060634	0.8201176338	0.0001506003931
32	0.000974897242	0.8204378019	0.0004707684359
64	-0.0002424767868	0.8198484053	0.0001186280744
128	-0.5937698765e-4	0.819937931	0.2910246775e-4
256	-0.1362314456e-4	0.8199604205	0.6612929516e-5
512	-0.2266718071e-5	0.8199659791	0.1054371148e-5
1024	0.280224963e-6	0.8199671962	0.1627836586e-6
2048	0.197248324e-6	0.8199671286	0.9522491121e-7
4096	-0.2198904111e-7	0.8199670238	0.9605666353e-8
1000000	-0.990801223e-12	0.8199670334	0.4987864392e-12

Как уже отмечалось, скорость сходимости ряда Фурье во многом определяется степенью убывания коэффициентов ряда. Так как коэффициенты ряда Фурье (2.6.15) определяются формулой  $1/n^2$ , то ряд Фурье (2.6.15) сходится достаточно быстро.

В табл. 2.43 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (2.6.16) цепной дроби.

Таблица 2.43

Определение значения ряда Фурье (2.6.16) при  $x = 0,1$

$$0,8199670334 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 0,1n}{n}$$

соответствующей цепной дробью

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left  0,8199 \dots - \frac{p_n}{q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.1750371319
2	-0.2450166445	0.246246853	0.7984005439	0.02156648954
4	-0.05756631213	0.2527534121	0.819428477	0.0005385564321
8	-0.01088604233	-0.09576073928	0.8199682072	0.1173788121e-5
16	0.000114060634	0.284485322	0.8199670334	0.7566439677e-12
32	0.000974897242	0.2116731484	0.8199670334	0.5592005863e-24
64	-0.0002424767868	0.181814571	0.8199670334	0.2541286383e-47
128	-0.5937698765e-4	0.09620522848	0.8199670334	0.1351121865e-94
256	-0.1362314456e-4	2.724241456	0.8199670334	0.5300260132e-189
512	-0.2266718071e-5	-0.5450086852	0.8199670334	0.9332636185e-300

Использование соответствующих цепных дробей при определении значений ряда Фурье (2.6.16), как и следовало ожидать, оказалось чрезвычайно эффективным. Использование цепной дроби с 512 звеньями обеспечило погрешность порядка  $10^{-300}$ .

**Пример 11.**

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad (2.6.17)$$

В табл. 2.44 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.17) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.44

Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.17) при  $x = 0,1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)0,1}{2n+1} \quad (2.6.18)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность $\varepsilon = \left  \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^n a_n \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.6855647468
2	0.09850673555	0.1983401522	0.5870580112
4	0.09203109818	0.3862563581	0.3991418053
8	0.06649966577	0.6949310585	0.0904671049
16	0.001341311691	0.9259557829	0.1405576195
32	0.0002668873093	0.7094844163	0.07591374709
64	0.001049071192	0.7470861437	0.03831201969
128	0.001408071977	0.767643696	0.01775446743
256	0.001450044248	0.7794372843	0.005960879079
512	0.0009583723972	0.7867895594	0.00139139603
1024	-0.0002326972646	0.7874279445	0.002029781062
2048	0.0002168473018	0.7849443165	0.0004538469139
4096	0.9217661659e-4	0.7858426093	0.0004444458771
1000000	-0.1815130091e-6	0.785395751	0.2412433463e-5

Ряд Фурье (2.6.17) – медленно сходящийся ряд, так как коэффициенты ряда определяются формулой  $1/2n + 1$ . Из четвертой колонки табл. 2.44 можно видеть, что частичная сумма из миллиона членов ряда обеспечивает всего четыре точных десятичных знака.

В табл. 2.45 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (2.6.17) при  $x = 0,1$  цепной дроби.

Таблица 2.45

**Определение значения ряда Фурье (2.6.18)**

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)0,1}{2n+1}$$

построением соответствующей цепной дроби

Число звеньев дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left  \frac{\pi}{4} - \frac{p_n}{q_n} \right $
1	0.09983341665	0.09983341665	0.09983341665	0.6855647468
2	0.09850673555	-0.9867110519	7.512514599	6.727116435
4	0.09203109818	-0.9920583462	0.1580828676	0.6273152958
8	0.06649966577	-0.9902515575	0.3004763377	0.4849218257
16	0.001341311691	-0.9900779039	0.5227208814	0.262677282
32	0.0002668873093	-0.9900435979	0.7242781622	0.06112000115
64	0.001049071192	-0.9900357774	0.7828221389	0.002576024482
128	0.001408071977	-0.9900339008	0.7853939202	0.4243208822e-5
256	0.001450044248	-0.596810691	0.7853981634	0.837693701e-11
512	0.0009583723972	0.2895201609	0.7853981634	0.5204159989e-22

Из четвертой колонки табл. 2.45 можно заключить, что скорость сходимости соответствующей ряду (2.6.18) цепной дроби также не слишком велика, особенно в сравнении со скоростью сходимости цепной дроби, построенной для ряда Фурье (2.6.15) и других аналогичных рядов с коэффициентами, быстро стремящимися к нулю.

**Пример 12.**

$$\frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad (2.6.19)$$

В табл. 2.46 приведены результаты вычисления ряда Фурье (2.6.19) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.46

**Определение частичных сумм ряда Фурье (2.6.19) при  $x = 0,1$** 

$$1,155160734 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)0,1}{(2n+1)^2} \quad (2.6.20)$$

Число членов ряда	Значения элементов ряда	Значения частичной суммы ряда	Погрешность $\varepsilon =  1,1551 \dots - \sum_{n=1}^n a_n $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.1601565685
2	0.1061484988	1.101152664	0.05400806973
4	0.01560902423	1.151864991	0.003295743021
8	0.000314387563	1.165185137	0.01002440326
16	-0.001039682779	1.156723298	0.001562564331
32	0.000251917016	1.154981015	0.000179718819
64	0.6144738495e-4	1.155185781	0.2504770047e-4
128	0.1435317358e-4	1.155189632	0.2889832351e-4
256	0.2571739724e-5	1.155175626	0.148918182e-4
512	-0.1881867483e-6	1.155165324	0.4590165106e-5
1024	-0.2098381924e-6	1.155160073	0.661045636e-6
2048	0.2742337967e-7	1.155161011	0.276918011e-6
4096	-0.977312639e-8	1.155160785	0.5131197407e-7
100000	0.2329455026e-12	1.155160734	0.3358085181e-12

Скорость сходимости ряда Фурье (2.6.19) характерна для рядов Фурье, имеющих аналогичные коэффициенты, – частичные суммы с миллионом членов дают погрешность порядка  $10^{-11} - 10^{-12}$ .

В табл. 2.47 показаны результаты вычисления соответствующей ряду Фурье (2.6.19) при  $x = 0,1$  цепной дроби.

Таблица 2.47

**Определение значения ряда Фурье (2.6.20)**

$$1,155160734 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)0,1}{(2n+1)^2}$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Число звеньев дроби	Значение элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность $\varepsilon = \left  1,1551 \dots - \frac{p_n}{q_n} \right $
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653	0.1601565685
2	0.1061484988	-0.1066814617	1.11382908	0.04133165417
4	0.01560902423	-0.1682293697	1.165116309	0.009955575072
8	0.000314387563	0.5686637154	1.187044609	0.03188387559
16	-0.001039682779	-12.91826718	1.156587088	0.001426353815
32	0.000251917016	-0.2179993635	1.155177523	0.1678891183e-4
64	0.6144738495e-4	0.3509407588	1.15516086	0.125887604e-6
128	0.1435317358e-4	-2.117968726	1.155160734	0.116822291e-13
256	0.2571739724e-5	-0.1409783124	1.155160734	0.11429885e-26
512	-0.1881867483e-6	2.863832055	1.155160734	0.310339232e-49

Здесь можно отметить, что скорость суммирования цепной дробью знакопостоянного ряда Фурье (2.6.20) значительно уступает скорости суммирования аналогичного знакопеременного ряда Фурье (2.6.15).

**7. Определение значений расходящихся рядов Фурье соответствующими цепными дробями**

Пусть дан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.7.1)$$

относительно которого известно только, что он является рядом Фурье некоторой функции  $f(x)$ . Если известно, что ряд (2.7.1) сходится к  $f(x)$ , то  $f(x)$  получается как предел частичных сумм этого ряда. Иначе дело обстоит в случае, когда сходимость ряда установить не удалось или же, когда ряд оказался расходящимся. Здесь либо не знаем, существует или нет предел частичных сумм, либо знаем, что этот предел не существует. Нужно, следовательно, изыскать операцию, которая позволяла бы найти функцию по её ряду Фурье, независимо от того, сходится этот ряд или нет. Такие операции называют суммированием ряда [43]. Известно несколько способов суммирования рядов Фурье.

**Способ средних арифметических**

Рассмотрим ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.7.2)$$

и положим:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\delta_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ , то условимся говорить, что ряд (2.7.2) суммируем способом средних арифметических к значению  $\delta$ .

Известно, что ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  суммируется способом средних арифметических к этой функции в каждой точке её непрерывности. Известно также, что ряд Фурье непрерывной функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  равномерно суммируется к ней способом средних арифметических, хотя ряд Фурье непрерывной функции  $f(x)$  может быть расходящимся.

Метод средних арифметических восстанавливает абсолютно интегрируемую функцию по её непрерывности, то есть всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Поэтому любая абсолютно интегрируемая функция вполне определена (с точностью до её значений в конечном числе точек) своим тригонометрическим рядом Фурье независимо от того, сходится этот ряд или нет.

#### Способ степенных множителей

Рассмотрим ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.7.3)$$

и наряду с ним ряд

$$u_0 + u_1 r + u_2 r^2 + \dots + u_n r^n + \dots \quad (2.7.4)$$

Допустим, что ряд (2.7.4) сходится для  $0 < r < 1$ . Это будет всегда иметь место, когда члены ряда (2.7.3) ограничены. Для суммы  $\delta(r)$  ряда (2.7.4) существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 1} \delta(r) = \delta.$$

В этом случае скажем, что ряд (2.7.3) суммируется способом степенных множителей к значению  $\delta$ . Этим способом суммируются некоторые расходящиеся ряды.

Известны формулы

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (2.7.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Функцию переменных  $r$  и  $\varphi$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}$$

называют ядром Пуассона.

Пусть  $f(x)$  – абсолютно интегрируемая функция и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим для  $0 \leq r \leq 1$  ряд

$$f(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.7.6)$$

Если существует  $\lim_{r \rightarrow 1} f(x, r)$ , то это означает, что ряд (2.7.6) суммируем способом степенных множителей.

Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция с периодом  $2\pi$  на прямой. Эта функция определяется своим рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.7.7)$$

однозначно. Однако, поскольку ряд Фурье непрерывной функции, вообще говоря, не обязан сходиться, мы не можем такую функцию получить непосредственным суммированием её ряда Фурье. Способ восстановления непрерывной функции по её ряду Фурье даёт теорема Фейера [43], установленная в 1905 году.

Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j \cos jx + b_j \sin jx - \quad (2.7.8)$$

– частичная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$ . Положим

$$\delta_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}, \quad (2.7.9)$$

$\delta_n$  – средние арифметические сумм  $S_k$  называются суммами Фейера функции  $f(x)$ .

Если  $f(x)$  – непрерывная функция с периодом  $2\pi$ , то последовательность  $\{\delta_n\}$  её сумм Фейера сходится к  $f(x)$  равномерно на всей числовой оси.

Во втором параграфе главы построением соответствующих цепных дробей были просуммированы, то есть определены значения расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана. Собственно, посредством соответствующих цепных дробей были получены иным путём классические результаты:

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \dots = \frac{(-1)^n(2^n - 1)}{n} B_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7.10)$$

Так как числа Бернулли с нечётными индексами, кроме  $B_1$ , равны нулю, то имеем формулы для “чётных” и “нечётных” степеней:

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7.11)$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0. \quad (2.7.12)$$

В этом параграфе при помощи соответствующих цепных дробей найдём значения расходящихся тригонометрических рядов, имеющих коэффициентами числа натурального ряда в целой степени:

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (2.7.13)$$

Также будем различать случай нечётных и чётных степеней.

Рассмотрим вначале случай “нулевой” степени, то есть тригонометрический ряд

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \dots \quad (2.7.14)$$

В табл. 2.48 приведены частичные суммы тригонометрического ряда (2.7.14) при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.48

**Определение частичных сумм тригонометрического ряда**

$$1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.15)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	0.9800665778	2.975070743
4	0.921060994	4.851468226
8	0.6967067093	8.0159353
16	-0.0291995223	10.4728051
32	-0.9982947758	-0.5824022899
64	0.9931849188	2.161113103
128	0.9728325657	3.299584964
256	0.8928064018	5.447054846
512	0.5942065421	8.833524473
1024	-0.2938371708	9.903669521
2048	-0.8273194342	-5.526295293
4096	0.3689148923	9.971342424
1000000	-0.9907992414	1.356870427

Из данных третьей колонки табл. 2.48 можно видеть, что тригонометрический ряд (2.7.15) – расходящийся, так как частичные суммы не стремятся ни к какому пределу. Можно также заметить, что частичные суммы не нарастают неограниченно, более того – частичные суммы ряда (2.7.15) меняют свой знак.

Сумма расходящегося тригонометрического ряда может быть учтановлена построением соответствующей цепной дроби. В табл. 2.49 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда (2.7.15).

Таблица 2.49

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots$   
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	0.9800665778	-0.9849874122	67.27799122
3	0.9553364891	0.01022048231	40.83556426
4	0.921060994	-1.015241401	0.5
5	0.8775825619	-0.4834305544e-298	-

Из третьей колонки табл. 2.49 видно, что коэффициент  $\omega_5$  имеет значение близкое к нулевому, что свидетельствует о конечности соответствующей цепной дроби. Следовательно, можно записать:

$$1 + \cos 0,1 + \cos 0,2 + \cos 0,3 + \cos 0,4 + \dots = 1 + \frac{0,9950 \dots}{1} - \frac{0,9849 \dots}{1} + \frac{0,0102 \dots}{1} - \frac{0,0152 \dots}{1} = \frac{1}{2}. \quad (2.7.16)$$

Тригонометрический ряд (2.7.14) имеет сумму  $\frac{1}{2}$  при любом  $x$ .

Из (2.7.16) можно записать:

$$1 + \cos 0,1 r + \cos 0,2 r^2 + \cos 0,3 r^3 + \cos 0,4 r^4 + \dots = 1 + \frac{0,9950 \dots r}{1} - \frac{0,9849 \dots r}{1} + \frac{0,0102 \dots r}{1} - \frac{0,0152 \dots r}{1} = \frac{1}{2}. \quad (2.7.17)$$

Известна формула

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}, \quad 0 < r < 1 \quad (2.7.18)$$

Установим суммы тригонометрического ряда (2.7.18) преобразованием его в соответствующие цепные дроби при различных значениях  $r$ . В табл. 2.50 приведены результаты суммирования ряда (2.7.19) построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 2.50

**Суммирование тригонометрического ряда**

$$\frac{1}{2} + 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2 \cos 0,2 + 0,5^3 \cos 0,3 + 0,5^4 \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.19)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби	Погрешность
1	0.4975020826	0.4975020826	0.9975020826	0.4731101743
2	0.2450166445	-0.4924937061	1.480287513	0.00967525598
3	0.1194170611	0.005110241156	1.475474656	0.004862399184
4	0.05756631213	-0.5076207004	1.470612257	0.5599581711e-300
5	0.02742445506	-0.2417152772e-298		



Из табл. 2.50 видно, что соответствующая ряду (2.7.19) цепная дробь конечна и она точно определяет сумму тригонометрического ряда. Фактически, на конечную цепную дробь, суммирующую ряд (2.7.19), можно смотреть как на разложение в конечную цепную дробь формулы Пуассона (2.7.18) при  $r = 0,5$  и  $x = 0,1$ .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0,5^2}{1 - 2 \cdot 0,5 \cdot \cos 0,1 + 0,5^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0,4975 \dots}{1} - \frac{0,4924 \dots}{1} + \frac{0,0051 \dots}{1} - \frac{0,5076 \dots}{1} = 1,470612257 \dots$$

Тригонометрический ряд (2.7.19) при  $r = 0,5$  является сходящимся и его значение может быть найдено непосредственно определением частичных сумм (Табл. 2.51).

Таблица 2.51

**Определение частичных сумм тригонометрического ряда**

$$\frac{1}{2} + 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2 \cos 0,2 + 0,5^3 \cos 0,3 + 0,5^4 \cos 0,4 + \dots$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда	Погрешность
1	0.4975020826	0.9975020826	0.4731101743
2	0.2450166445	1.242518727	0.2280935298
4	0.05756631213	1.4195021	0.05111015653
8	0.002721510583	1.468519265	0.002092992319
16	-0.4455493515e-6	1.470615675	0.3418166196e-5
32	-0.2324336152e-9	1.470612257	0.222942353e-9
64	0.5384066233e-19	1.470612257	0.5102159832e-19
128	0.2858897963e-38	1.470612257	0.2641700232e-38
256	0.7710426573e-77	1.470612257	0.6722331771e-77
512	0.4431794855e-154	1.470612257	0.3127252174e-154
1024	-0.1634523518e-308	1.470612257	0.3359749027e-299

При  $r > 1$  тригонометрический ряд  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$  является расходящимся, однако его значение может быть установлено через соответствующую цепную дробь. Установим значение ряда (2.7.18) при  $r = 3$  и  $x = 0,1$ .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3^2}{1 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 0,1 + 3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2,9850 \dots}{1} - \frac{2,9549 \dots}{1} + \frac{0,0306 \dots}{1} - \frac{3,0457 \dots}{1} = -0,9925619865 \dots$$

Аналогично просуммируем ряды “по синусам”.

Имет место формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}, \quad 0 < r < 1 \quad (2.7.20)$$

Установим суммы тригонометрического ряда (2.7.20) преобразованием его в соответствующие цепные дроби при различных значениях  $r$ . В табл. 2.52 приведены результаты суммирования ряда (2.7.21) построением соответствующей цепной дроби.

Из табл. 2.52 видно, что соответствующая ряду (2.7.21) цепная дробь конечная и она точно определяет сумму тригонометрического ряда. Фактически, на конечную цепную дробь, суммирующую ряд (2.7.21), можно смотреть как на разложение в конечную цепную дробь формулы (2.7.20) при  $r = 0,5$  и  $x = 0,1$ .

Тригонометрический ряд (2.7.20) при  $r = 0,5$  является сходящимся и его значение может быть найдено непосредственным определением частичных сумм.

Таблица 2.52

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $0,5 \sin 0,1 + 0,5^2 \sin 0,2 + 0,5^2 \sin 0,3 + 0,5^2 \sin 0,4 + \dots$  (2.7.21)  
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.04991670832	0.04991670832	0.04991670832
2	0.0496673327	-0.9950041653	9.991665277
3	0.03694002583	0.2512552296	0.2437396407
4	0.02433864639	-0.2512552296	0.1957549949
5	0.01498204808	0.102658998e-299	

$$\frac{0,5 \sin 0,1}{1 - 2 \cdot 0,5 \cos 0,1 + 0,5^2} =$$

$$= \frac{0,0499 \dots}{1} - \frac{0,9950 \dots}{1} + \frac{0,2512 \dots}{1} - \frac{0,2512 \dots}{1} = 0,1957549949 \dots$$

При  $r > 1$  тригонометрический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$  является расходящимся, однако его значение может быть установлено через соответствующую цепную дробь.

В табл. 2.53 приведены частичные суммы расходящегося тригонометрического ряда (2.7.13) для  $n = 1$ :

$$1 + \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + 4 \cos 4x + \dots = \quad (2.7.22)$$

при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.53

**Определение частичных сумм тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 + 2 \cos 0,2 + 3 \cos 0,3 + 4 \cos 0,4 + \dots$  (2.7.23)

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	1.960133156	3.955137321
4	3.684243976	10.50539076
8	5.573653675	30.77286625
16	-0.4671923568	57.55911985
32	-31.94543283	-233.6329587
64	63.5638348	106.6291622
128	124.5225684	356.6278668
256	228.5584389	1256.717744
512	304.2337495	4227.151351
1024	-300.8892628	9500.865998
2048	-1694.350201	-12523.73706
4096	1511.075399	38732.45744
1000000	-990798.2506	856671.3243

Сумма расходящегося тригонометрического ряда (2.7.22) может быть установлена построением для этого ряда соответствующей цепной дроби.

В табл. 2.54 приведены результаты суммирования ряда (2.7.22) при  $x = 0,1$ .

В третьей колонке табл. 2.54 помещены значения коэффициентов  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби, построенной по исходному расходящемуся ряду (2.7.23). Коэффициенты цепной дроби находились по алгоритму Рутисхаузера, то есть по формулам (2.1.16).

Таблица 2.54

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 + 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 + 4\cos 0,4 + \dots$   
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	1.960133156	-1.969974824	-0.02580411402
3	2.866009467	0.5078244295	-2.246327613
4	3.684243976	-0.5086308189	32.8565651
5	4.387912809	-0.002396719945	31.6534107
6	4.952013689	-1.345611792	36.87389795
7	5.353895311	0.08045357737	38.79141127
8	5.573653675	-0.7416805125	-99.08337502
9	5.594489714	0.2884256813e-294	-99.08337502

Из данных колонки 3 следует, что коэффициент  $\omega_9$  имеет значение, близкое к нулю:  $\omega_9 = 0,288 \dots e^{-294}$ . Таким образом, заключаем, что соответствующая тригонометрическому ряду (2.7.23) цепная дробь – конечная, имеет 8 звеньев и её значение равно  $-99,0833\dots$ . Следовательно можно записать значение расходящегося ряда (2.7.23):

$$1 + \cos 0,1 + 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 + 4\cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{1,969 \dots}{1} + \frac{0,507 \dots}{1} - \frac{0,508 \dots}{1} + \dots + \frac{0,080 \dots}{1} - \frac{0,741 \dots}{1} = -99,083375.$$

В табл. 2.55 приведены частичные суммы знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \cos x - 2\cos 2x + 3\cos 3x - 4\cos 4x + \dots + (-1)^{n+1} \cos nx + \dots \quad (2.7.24)$$

при  $x = 0,1$ .

Таблица 2.55

**Определение частичных сумм тригонометрического ряда**

$$1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots \quad (2.7.25)$$

Число членов ряда	Значение элементов ряда	Значения суммы ряда
1	0.9950041653	1.995004165
2	-1.960133156	0.0348710096
4	-3.684243976	-0.783363499
8	-5.573653675	-1.567222743
16	0.4671923568	1.891703348
32	31.94543283	17.42680286
64	-63.5638348	-30.59357508
128	-124.5225684	-60.51302592
256	-228.5584389	-110.3671294
512	-304.2337495	-140.7113845
1024	300.8892628	176.2592132
2048	1694.350201	819.8484178
4096	-1511.075399	-659.1231099
1000000	-97789.93069	-48370.95246

В табл. 2.56 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда (2.7.25) построением соответствующей цепной дроби.

Из табл. 2.56 следует, что соответствующая ряду (2.7.25) цепная дробь конечная и имеет 8 звеньев. Кроме того, цепная дробь является сходящейся, в том смысле, что соседние подходящие дроби дают близкие значения.

Таблица 2.56

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots$   
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	-1.960133156	1.969974824	1.335021077
3	2.866009467	-0.5078244295	1.198897981
4	-3.684243976	0.5086308189	1.250657915
5	4.387912809	0.002396719945	1.250581146
6	-4.952013689	1.345611792	1.250625158
7	5.353895311	-0.08045357737	1.250626723
8	-5.573653675	0.7416805125	1.250626043
9	5.594489714	-0.2884256813e-294	

Запишем значение расходящегося ряда (2.7.25):

$$1 + \cos 0,1 - 2\cos 0,2 + 3\cos 0,3 - 4\cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} + \frac{1,969 \dots}{1} - \frac{0,507 \dots}{1} + \frac{0,508 \dots}{1} + \dots - \frac{0,080 \dots}{1} + \frac{0,741 \dots}{1} = 1,250626 \dots$$

Определим сумму расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos x - 2^3 \cos 2x + 3^3 \cos 3x - 4^3 \cos 4x + \dots \quad (2.7.26)$$

при  $x = 0,1$ .

В табл. 2.57 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.27)$$

построением соответствующей цепной дроби.

Таблица 2.57

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots$   
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	7.840532623	-7.879899297	0.8553751847
3	25.79408521	4.590060909	-1.429050852
4	58.94790362	-0.7199647674	2.819359077
5	109.6978202	0.7589450195	10.79609342
6	178.2724928	-0.4528498772	-23.49674651
7	262.3408702	0.1943560471	-84.78079095
8	356.7138352	-0.3973380547	547.0496634
9	453.1536669	-0.021071757	443.4281251
10	540.3023059	-1.292795419	1829.90374
11	603.7364376	0.0199511359	2284.694277
12	626.1541997	-0.7579833706	-66906.71231
13	587.6949265	-0.0001592590172	-65280.40293
14	466.3898401	-1.147197585	-80432.99535
15	238.7380556	0.01732983008	-82984.82284
16	-119.6012433	-0.871416877	60001.00835
17	-633.0130005	0.7704941609e-285	

Из колонки 3 табл. 2.57 следует, что соответствующая ряду (2.7.27) цепная дробь – конечная и имеет 16 звеньев.

Число звеньев  $N$  конечных цепных дробей, суммирующих расходящиеся ряды вида

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (2.7.28)$$

определяется формулой

$$N = 4(n + 1), \quad (2.7.29)$$

где  $n$  – показатель степени чисел натурального ряда.

Запишем значение расходящегося ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^3 \cos 0,2 + 3^3 \cos 0,3 + 4^3 \cos 0,4 + \dots = \\ = 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{7,879 \dots}{1} + \frac{4,590 \dots}{1} - \frac{0,719 \dots}{1} + \dots + \frac{0,017 \dots}{1} - \frac{0,871 \dots}{1} = 60001,00835 \dots$$

Определим сумму расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos x + 2^5 \cos 2x + 3^5 \cos 3x + 4^5 \cos 4x + \dots \quad (2.7.30)$$

при  $x = 0,1$ .

В табл. 2.58 приведены результаты суммирования расходящегося тригонометрического ряда

$$1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.31)$$

построением соответствующей цепной дроби

Таблица 2.58

**Суммирование тригонометрического ряда**

$$1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	31.36213049	-31.51959719	0.9673978605
3	232.1467669	24.11746082	-2.903693498
4	943.1664579	-1.024909095	1.963602426
5	2742.445506	2.95888744	17.50030235
6	6417.809742	-0.5375849807	-10.43017827
7	12854.70264	0.9049695601	-82.93410135
8	22829.68545	-0.4217693232	129.9104837
9	36705.44702	0.3491307565	573.5629616
10	54030.23059	-0.3715230432	-2910.381046
11	73052.10895	0.1393666847	-76953.17425
12	90166.20476	-0.5139268708	4184.424291
13	99320.44258	-0.2861917698	2018.777132
14	91412.40866	-1.038583886	203544.409
15	53716.06252	0.003411531578	295809.6084
16	-30617.9183	-0.6889427346	-20939545.95
17	-182940.7571	-0.0003493173169	-19365682.23
18	-429313.8077	-1.144678805	-47240459.91
19	-800496.9732	0.008296383641	-51727086.21
20	-1331669.877	-0.8738645763	261782466.2
21	-2061842.481	-0.0002974938781	255487538.8
22	-3032918.19	-1.091696423	351998228.3
23	-4288381.006	0.007446301673	363527942
24	-5871588.897	-0.9151039494	-119999999
25	-7823668.121	-0.1898535559e-275	

Соответствующая цепная дробь, суммирующая расходящийся тригонометрический ряд (2.7.31) – конечная.

Число звеньев этой конечной цепной дроби определяется формулой (2.7.29):

$$N = 4(5 + 1) = 24.$$

Значение ряда (2.7.31) определяется конечной цепной дробью, значения подходящих дробей которой приведены в четвёртой колонке табл. 58. Таким образом, можно записать сумму расходящегося ряда (2.7.31)

$$1 + \cos 0,1 + 2^5 \cos 0,2 + 3^5 \cos 0,3 + 4^5 \cos 0,4 + \dots = \frac{P_{24}}{Q_{24}} = -119999999.$$

Рассматривая значения подходящих соответствующих расходящихся рядов с нечётными степенями коэффициентов, то есть рядам вида

$$1 + \cos x + 2^{2k-1} \cos 2x + 3^{2k-1} \cos 3x + 4^{2k-1} \cos 4x + \dots \quad (2.7.32)$$

Можно отметить, что конечные цепные дроби ни есть сходящиеся, т.е. их подходящие дроби не приближают значение последней подходящей дроби, которая и определяет значение цепной дроби. Это свидетельствует о том, что значением расходящегося тригонометрического ряда (2.7.32) при  $k \rightarrow \infty$  является комплексное число, которое может быть определено по значениям подходящих дробей при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Возвратимся к суммированию расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана:

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7.33)$$

Следует установить формулу суммирования расходящихся “нечётных” тригонометрических рядов (2.7.32), аналогично формулам суммирования (2.7.33).

Формула суммирования для ряда (2.7.32) должна также включать числа Бернулли, как то имеет место при суммировании расходящихся рядов (2.7.33). К этому есть некоторые предпосылки, связанные с суммированием тригонометрических рядов, имеющих коэффициентами натуральные числа чётных степеней, то есть расходящиеся ряды вида

$$1 + 1^{2k} \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7.34)$$

Не будем приводить частичные суммы расходящихся рядов (2.7.34). Приведём результаты суммирования рядов (2.7.34) построением соответствующих цепных дробей.

В табл. 2.59 приведены результаты суммирования расходящегося ряда (2.7.34) при  $k = 1$  и  $x = 0,1$ .

Таблица 2.59

$$\begin{aligned} & \text{Суммирование тригонометрического ряда} \\ & 1 + \cos 0,1 + 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 + 4^2 \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.34) \\ & \text{построением соответствующей цепной дроби} \end{aligned}$$

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	3.920266311	-3.939949649	0.6615574128
3	8.598028402	1.746724056	-1.29043183
4	14.7369759	-0.601732856	4.706376726
5	21.93956405	0.2753371014	12.67318496
6	29.71208214	-0.4158245742	255.6362233
7	37.47726718	0.01118214137	192.3526082
8	44.5892294	-1.136540019	-141.1510455
9	50.35040743	-0.01705406828	-181.0819298
10	54.03023059	-0.8898189061	-11105.86052
11	54.88513069	0.0006706194693	-9406.946388
12	52.17951664	-1.003018839	1
13	45.20730204	-0.5330486848e-289	1

Из табл. 2.59 следует, что соответствующая ряду (2.7.34) цепная дробь конечная и имеет единичное значение. Число звеньев соответствующей цепной дроби равно 12. Цепные дроби, соответствующие рядам с чётными степенями коэффициентов натуральных чисел, – имеют единичное значение при любых  $x$ .

Из табл. 2.57 можно записать:

$$1 + \cos 0,1 + 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 + 4^2 \cos 0,4 + \dots = \\ = 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{3,939 \dots}{1} + \frac{1,746 \dots}{1} - \frac{0,601 \dots}{1} + \dots + \frac{0,0006 \dots}{1} - \frac{1,003 \dots}{1} = 1.$$

В табл. 2.60 приведены результаты суммирования тригонометрического ряда, имеющие коэффициенты чётной степени:

$$1 + \cos x - 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x + 4^2 \cos 4x + \dots \quad (2.7.35)$$

при  $x = 0,1$  построением цепной дроби.

Таблица 2.60

*Суммирование знакопеременного тригонометрического ряда*

$$1 + \cos 0,1 - 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 - 4^2 \cos 0,4 + \dots \quad (2.7.36)$$

*построением соответствующей цепной дроби*

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	-3.920266311	3.939949649	1.2014199
3	8.598028402	-1.746724056	0.7673219367
4	-14.7369759	0.601732856	0.9766019191
5	21.93956405	-0.2753371014	1.011407616
6	-29.71208214	0.4158245742	1.000040398
7	37.47726718	-0.01118214137	0.9999541515
8	-44.5892294	1.136540019	1.000000193
9	50.35040743	0.01705406828	0.9999998297
10	-54.03023059	0.8898189061	1
11	54.88513069	-0.0006706194693	1
12	-52.17951664	1.003018839	1
13	45.20730204	0.5330486848e-289	1

Из табл. 2.60 следует, что соответствующая цепная дробь для “чётного” ряда имеет единичное значение. Особенность цепной дроби, соответствующей знакопеременному ряду состоит в том, что построенная цепная дробь является “сходящейся”, то есть подходящие цепные дроби приближаются к “1”, а не возникают “внезапно”, как то имеет место в случае знакопостоянных тригонометрических рядов “чётной степени”.

$$1 + \cos 0,1 - 2^2 \cos 0,2 + 3^2 \cos 0,3 - 4^2 \cos 0,4 + \dots = \\ = 1 + \frac{0,995 \dots}{1} + \frac{3,939 \dots}{1} - \frac{1,746 \dots}{1} + \frac{0,601 \dots}{1} - \dots - \frac{-0,0006 \dots}{1} + \frac{1,003 \dots}{1} = 1.$$

Можно также записать:

$$\cos x - 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x - 4^2 \cos 4x + \dots = 0.$$

Единичное значение имеет сумма ряда с коэффициентами в 4-й степени:

$$1 + \cos x - 2^4 \cos 2x + 3^4 \cos 3x - 4^4 \cos 4x + \dots \quad (2.7.37)$$

Это следует из колонки 4 табл. 2.61, в которой приведены значения подходящих дробей соответствующей ряду (2.7.37) цепной дроби.

Число звеньев конечной цепной дроби равно 20:

$$N = 4(4 + 1) = 20.$$

Соответствующая цепная дробь имеет единичное значение:

$$1 + \cos 0,1 + 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 + 4^4 \cos 0,4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{0,995 \dots}{1} - \frac{15,759 \dots}{1} + \frac{10,825 \dots}{1} - \frac{0,860 \dots}{1} + \dots + \frac{0,001 \dots}{1} + \frac{1,008 \dots}{1} = 1.$$

Таблица 2.61

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + \cos 0,1 + 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 + 4^4 \cos 0,4 + \dots$  (2.7.38)  
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	1.995004165
2	15.68106525	-15.75979859	0.9325868738
3	77.38225562	10.82504101	-1.990264283
4	235.7916145	-0.8605162248	2.2445116
5	548.4891012	1.584409836	12.67125813
6	1069.634957	-0.4932060256	-12.49160458
7	1836.386092	0.4795792155	-65.42312635
8	2853.710681	-0.4033671388	197.6600265
9	4078.383002	0.1446847694	552.7748096
10	5403.023059	-0.3340972918	1849.88193
11	6641.100814	0.1131121585	1402.628906
12	7513.850397	-1.490052597	-16998.02373
13	7640.034044	-0.006036888456	-23276.47159
14	6529.457762	-0.743454421	-2202276.92
15	3581.070834	0.0004379845497	-1914039.436
16	-1913.619894	-1.047073297	950160.1296
17	-10761.22101	-0.003881385124	1077137.035
18	-23850.76709	-0.9486648783	14635214.43
19	-42131.41964	0.001032557228	13277499.34
20	-66583.49385	-1.008190443	1
21	-98182.97527	0.7410947703e-281	

Таблица 2.62

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $\cos 0,1 - 2^4 \cos 0,2 + 3^4 \cos 0,3 - 4^4 \cos 0,4 + \dots$  (2.7.39)  
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.9950041653	0.9950041653	0.9950041653
2	-15.68106525	15.75979859	0.05936850372
3	77.38225562	-10.82504101	-1.647237751
4	-235.7916145	0.8605162248	-0.4381692429
5	548.4891012	-1.584409836	0.5997383318
6	-1069.634957	0.4932060256	0.1033689375
7	1836.386092	-0.4795792155	-0.0622861625
8	-2853.710681	0.4033671388	-0.004340291559
9	4078.383002	-0.1446847694	0.001676996878
10	-5403.023059	0.3340972918	0.5576907979e-4
11	6641.100814	-0.1131121585	-0.9027190058e-4
12	-7513.850397	1.490052597	0.1190983523e-6
13	7640.034044	0.006036888456	-0.8835990133e-7
14	-6529.457762	0.743454421	-0.1086518115e-10
15	3581.070834	-0.0004379845497	0.1135688739e-10
16	1913.619894	1.047073297	-0.1104614864e-13
17	-10761.22101	0.003881385124	0.1046464499e-13
18	23850.76709	0.9486648783	0.2763737748e-17
19	-42131.41964	-0.001032557228	-0.2787852573e-17
20	66583.49385	1.008190443	0
21	-98182.97527	-0.7410947703e-281	



Можно записать сумму рядов:

$$1 + 1^{2k} \cos x - 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x - 4^{2k} \cos 4x + \dots = 1 \quad (2.7.40)$$

Имеет место также нулевое значение тригонометрических рядов с коэффициентами чётной степени:

$$1^{2k} \cos x - 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x - 4^{2k} \cos 4x + \dots = 0 \quad (2.7.41)$$

Можно отметить, что нулевые значения имеют расходящиеся ряды связанные с дзета-функцией Римана, составленные из чётных степеней элементов натурального ряда:

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = \frac{(-1)^{2k+1}(2^{2k+1}-1)}{2k+1} B_{2k+1}.$$

Так как  $B_{2k+1} = 0$ , то

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0. \quad (2.7.42)$$

Можно предположить, что суммы тригонометрических рядов, коэффициенты которых являются члены натурального ряда в нечётных степенях, также определяются через выражения, в которые входят числа Бернулли, о чём говорилось при суммировании тригонометрических рядов (2.7.22) с коэффициентами в нечётной степени.

Выше было рассмотрено суммирование расходящихся тригонометрических рядов с коэффициентами, составляющими элементы натурального ряда в нечётных и чётных степенях, то есть ряды:

$$1 + \cos x + 2^{2k-1} \cos 2x + 3^{2k-1} \cos 3x + 4^{2k-1} \cos 4x + \dots \quad (2.7.43)$$

$$1 + \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots \quad (2.7.44)$$

Было установлено, что расходящиеся ряды (2.7.43) и (2.7.44) суммируются, то есть определяется их значение, соответствующими цепными дробями, которые конечны. Было установлено, что число звеньев  $N$  конечных цепных дробей суммирующих расходящиеся ряды

$$1 + \cos x + 2^n \cos 2x + 3^n \cos 3x + 4^n \cos 4x + \dots \quad (2.7.45)$$

определяется формулой:

$$N = 4(n + 1),$$

где  $n$  – показатель степени натуральных чисел, которые входят как коэффициенты тригонометрического ряда.

При этом “чётные” ряды, то есть ряды

$$1 + \cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7.46)$$

имеют единичные значения.

Ряды (2.7.46) без начальной единицы имеют нулевое значение:

$$\cos x + 2^{2k} \cos 2x + 3^{2k} \cos 3x + 4^{2k} \cos 4x + \dots = 0, \quad (2.7.47)$$

что позволяет провести параллели между тригонометрическими рядами с дзета-функцией Римана:

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \dots = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

также имеющие нулевые значения.

Возникает вопрос: будет ли справедлива формула для числа членов звеньев цепной дроби

$$N = 4(n + 1), \quad (2.7.48)$$

которая была для рядов с коэффициентами натуральных чисел и для рядов, если коэффициенты ни есть элементы натурального ряда? Оказалось, что формула (2.7.48) имеет место и в этих случаях.

В табл. 2.63 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда:

$$1 + 1,5^2 \cos x + 2,5^2 \cos 2x + 3,5^2 \cos 3x + 4,5^2 \cos 4x + \dots \quad (2.7.49)$$

преобразованием ряда (2.7.49) при  $x = 0,1$  в соответствующую цепную дробь.

Таблица 2.63

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + 1,5^2 \cos x + 2,5^2 \cos 2x + 3,5^2 \cos 3x + 4,5^2 \cos 4x + \dots$   
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	2.238759372	2.238759372	3.238759372
2	6.125416112	-2.736076145	-0.2895513705
3	11.70287199	0.8255329624	-3.488451626
4	18.65148513	-0.7331526577	7.750782463
5	26.5468725	0.192463105	18.2824568
6	34.87042973	-0.495715436	272.521262
7	43.02237303	0.01426453625	205.4131723
8	50.33705975	-1.129066427	-124.6656549
9	56.10029964	-0.01812629211	-164.3329576
10	59.56832922	-0.8897286977	-11972.9327
11	59.98808706	0.0006579559377	-10033.40759
12	56.61839914	-1.001077896	-99.20837502
13	48.75166152	0.1963580414e-289	

Из третьей колонки табл. 2.63 следует, что число звеньев цепной дроби, соответствующей ряду (2.7.43) определяется формулой (2.7.42):

$$N = 4(2 + 1) = 12.$$

Тем не менее, единичного значения цепная дробь, соответствующая ряду (2.7.51) не имеет, как то имело место для “чётных” рядов с коэффициентами чисел натурального ряда.

В табл. 2.64 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + 1,5^3 \cos x + 2,5^3 \cos 2x + 3,5^3 \cos 3x + 4,5^3 \cos 4x + \dots \quad (2.7.50)$$

при  $x = 0,1$  преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь.

Таблица 2.64

**Суммирование тригонометрического ряда**  
 $1 + 1,5^3 \cos 0,1 + 2,5^3 \cos 0,2 + 3,5^3 \cos 0,3 + 4,5^3 \cos 0,4 + \dots$  (2.7.51)  
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	3.358139058	3.358139058	4.358139058
2	15.31354028	-4.560126908	0.05673613765
3	40.96005197	1.885366453	-4.785580707
4	83.93168308	-0.8876062644	5.516980065
5	146.0077987	0.4995642887	18.80700307
6	226.6577932	-0.5495668807	-45.89645366
7	322.6677978	0.1524523207	-138.9189956
8	427.8650079	-0.471148856	580.4851273
9	532.9528465	-0.02583541312	473.8787166
10	625.4674568	-1.279710795	1764.025516
11	689.8630012	0.02312818735	2209.739487
12	707.7299892	-0.7479758279	-68063.5022
13	658.1474305	-0.0001379575733	-66576.81527
14	518.166081	-1.162352785	-78855.18599
15	263.4164969	0.02152084707	-81128.39391
16	-131.1679041	-0.8576037311	59925.88332
17	-690.5259616	0.334217387e-285	

Из табл. 2.64 имеем, что конечная цепная дробь для ряда (2.7.47) имеем 16 звеньев. Это число звеньев устанавливает и формула (2.7.36):

$$N = 4(3 + 1) = 16.$$

В заключении параграфа найдём значения расходящихся тригонометрических рядов, содержащих синусы кратных углов.

В табл. 2.65 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + 4 \sin 4x + \dots \quad (2.7.52)$$

при  $x = 0,1$  построением для ряда (2.7.46) соответствующей цепной дроби.

Таблица 2.65

**Суммирование тригонометрического ряда**

$$1 + \sin 0,1 + 2 \sin 0,2 + 3 \sin 0,3 + 4 \sin 0,4 + \dots \quad (2.7.53)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	0.3973386616	-3.980016661	0.9664990408
3	0.88656062	1.748769854	0.7771209764
4	1.557673369	-0.6051087855	1.374149829
5	2.397127693	0.2714970126	2.213730396
6	3.38785484	-0.4149709198	572.4604217
7	4.509523811	0.0004208781547	445.5427975
8	5.738848727	-1.00060804	1
9	7.049942187	0.4500818722e-294	

Соответствующая цепная дробь, как следует из табл. 2.65, – конечная, имеет 8 звеньев и единичное значение. Из колонки 4 табл. 2.65 следует, что подходящие цепной дроби не “сходятся” к единичному значению. Иной характер – сходящийся – имеют подходящие соответствующих цепных дробей для знакопеременных тригонометрических рядов. В табл. 2.56 уже рассматривался пример суммирования расходящегося знакопеременного ряда

$$1 + \cos 0,1 - 2 \cos 0,2 + 3 \cos 0,3 - 4 \cos 0,4 + \dots$$

“сходящейся” цепной дробью.

В табл. 2.66 суммирование знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2 \sin 2x + 3 \sin 3x - 4 \sin 4x + \dots \quad (2.7.54)$$

при  $x = 0,1$  осуществляется преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь.

Таблица 2.66

**Суммирование тригонометрического ряда**

$$1 + \sin 0,1 - 2 \sin 0,2 + 3 \sin 0,3 - 4 \sin 0,4 + \dots \quad (2.7.55)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	-0.3973386616	3.980016661	1.020046804
3	0.88656062	-1.748769854	0.9768658177
4	-1.557673369	0.6051087855	0.9977033039
5	2.397127693	-0.2714970126	1.001109068
6	-3.38785484	0.4149709198	1.000000157
7	4.509523811	-0.0004208781547	0.9999998425
8	-5.738848727	1.00060804	1
9	7.049942187	-0.4500818722e-294	

Из данных колонки 4 табл. 2.66 следует, что соответствующие цепные дроби для знакопеременных тригонометрических рядов являются “сходящимися”. Тригонометрические ряды “по синусам” для нечётных степеней коэффициентов-элементов натурального ряда, – имеют единичные значения.

$$1 + 1^{2k-1} \sin x + 2^{2k-1} \sin 2x + 3^{2k-1} \sin 3x + 4^{2k-1} \sin 4x + \dots = 1.$$

или

$$1^{2k-1} \sin x + 2^{2k-1} \sin 2x + 3^{2k-1} \sin 3x + 4^{2k-1} \sin 4x + \dots = 0.$$

Уже отмечалось, что число звеньев  $N$  в конечной соответствующей цепной дроби определяется лишь степенью коэффициентов и не зависит от аргумента  $x$ .

В третьей главе, где методами цепных дробей будет подобно изучена функция Вейерштрасса

$$\omega(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\vartheta^n \pi x),$$

установлено, что число звеньев, соответствующей ряду Вейерштрасса цепной дроби, при фиксированных коэффициентах “ $a$ ” и “ $b$ ” определяется количеством десятичных разрядов неизвестной  $x$ .

В табл. 2.67 показаны результаты суммирования знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2 \sin 2x + 3 \sin 3x - 4 \sin 4x + \dots \quad (2.7.56)$$

при  $x = 0,11$  преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь.

Таблица 2.67

**Суммирование тригонометрического ряда**

$$1 + \sin 0,11 - 2 \sin 0,22 + 3 \sin 0,33 - 4 \sin 0,44 + \dots \quad (2.7.57)$$

**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.1097783008	0.1097783008	1.109778301
2	-0.4364592462	3.975824392	1.022062334
3	0.9721290852	-1.748516588	0.9745388776
4	-1.70375786	0.6046898638	0.9974681361
5	2.613436145	-0.2720267725	1.001224963
6	-3.678701112	0.415579564	1.000000254
7	4.87294667	-0.0006151092965	0.9999997459
8	-6.165911031	1.000889042	1
9	7.524233807	-0.7319045267e-295	

Из табл. 2.66 и табл. 2.67 следует, что число звеньев соответствующих цепных дробей для различных аргументов  $x = 0,1$  и  $x = 0,11$  одно и то же и определяется формулой:

$$N = 4(n + 1).$$

Так как  $n = 1$ , то число звеньев соответствующих цепных дробей равно 8.

В табл. 2.68 показаны результаты суммирования тригонометрического ряда

$$1 + \sin x + 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x - 4^2 \sin 4x + \dots \quad (2.7.58)$$

при  $x = 0,1$  построением для ряда (2.7.59) соответствующей цепной дроби.

Таблица 2.68

**Суммирование тригонометрического ряда**  

$$1 + \sin 0,1 + 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 - 4^2 \sin 0,4 + \dots \quad (2.7.59)$$
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	0.7946773232	-7.960033322	0.985656187
3	2.65968186	4.613163112	0.7612218822
4	6.230693477	-0.7285689888	1.179018632
5	11.98563847	0.7553489263	1.957574127
6	20.32712904	-0.4543725232	-1.406803899
7	31.56666667	0.1872702811	-6.942479337
8	45.91078982	-0.3795355573	1377.265453
9	63.44947968	-0.0001101709975	1340.299384
10	84.14709848	-1.207157001	1588.597733
11	107.8360906	0.03226735983	1644.761981
12	134.2136284	-0.8282971075	-1998.999166
13	162.8413333	-0.1808899031e-289	

Соответствующая цепная дробь для тригонометрического ряда (2.7.59) конечная, число звеньев которой определяется формулой:

$$N = 4(2 + 1) = 12.$$

Результаты суммирования знакопеременного тригонометрического ряда

$$1 + \sin x - 2^2 \sin 2x + 3^2 \sin 3x - 4^2 \sin 4x + \dots \quad (2.7.60)$$

при  $x = 0,1$  соответствующей цепной дробью показаны в табл. 2.69.

Таблица 2.69

**Суммирование тригонометрического ряда**  

$$1 + \sin 0,1 - 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 - 4^2 \sin 0,4 + \dots \quad (2.7.61)$$
**построением соответствующей цепной дроби**

Номер звена дроби	Значения элементов ряда	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби
1	0.09983341665	0.09983341665	1.099833417
2	-0.7946773232	7.960033322	1.011142081
3	2.65968186	-4.613163112	0.9170174399
4	-6.230693477	0.7285689888	0.9735188727
5	11.98563847	-0.7553489263	0.9979564379
6	-20.32712904	0.4543725232	0.9883214958
7	31.56666667	-0.1872702811	0.9870887076
8	-45.91078982	0.3795355573	0.9874582574
9	63.44947968	0.0001101709975	0.9874582289
10	-84.14709848	1.207157001	0.9874582445
11	107.8360906	-0.03226735983	0.9874582447
12	-134.2136284	0.8282971075	0.9874582446
13	162.8413333	0.1808899031e-289	

Из данных табл. 2.69 следует, что число звеньев соответствующей цепной дроби – 12. Значения подходящих дробей, как видно из колонки 4 табл. 2.69, “сходятся” к значению знакопеременного ряда (2.7.62)

$$\begin{aligned}
 & 1 + \sin 0,1 - 2^2 \sin 0,2 + 3^2 \sin 0,3 - 4^2 \sin 0,4 + \dots = \\
 & = 1 + \frac{0,099 \dots}{1} + \frac{7,960 \dots}{1} - \frac{4,613 \dots}{1} + \frac{0,728 \dots}{1} - \dots - \frac{0,032 \dots}{1} + \frac{0,828 \dots}{1} = 0,9874582446 \dots
 \end{aligned} \tag{2.7.62}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что значения знакопеременных тригонометрических рядов с коэффициентами, представляющие степени  $n$  элементов натурального ряда, определяются значениями сходящихся цепных дробей. Значения знакопостоянных тригонометрических рядов с коэффициентами, также являющимися степенями элементов натурального ряда определяются “расходящимися” цепными дробями, “комплексные” значения которых могут быть установлены  $r/\varphi$ -алгоритмом.

## ГЛАВА 3

### ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ

#### 3.1. Функция Вейерштрасса

Пример непрерывной недифференцируемой функции Вейерштрасса был опубликован в 1875 г. Функция Вейерштрасса представляется тригонометрическим рядом вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad 0 < b < 1, \quad a = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Эта публикация 1875 года принята за точку отчёта кризиса математики. Пример подорвал интуитивное представление о том, что к непрерывной кривой всегда можно провести касательную. «Как интуиция может обмануть нас до такой степени?» – недоумевал Анри Пуанкаре. Более эмоционален был его старший товарищ Шарль Эрмит: «Я с ужасом отворачиваюсь от внушающих сомнение язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производных» [20]. Такие функции стали называть «плохими» и «монстрами».

Ниже приведён список классических фрактальных функций.

Классические фрактальные функции	
Функция Больцано, 1830 г.	Функция Римана, 1861 г.
Функция Вейерштрасса, 1872 г.	Функция Дарбу, 1872 г.
Функция Ханкеля, 1875 г.	Функция Кантора, 1883 г.
Ковер Серпиньского, 1915 г.	Салфетка Серпиньского, 1915 г.
Функция Безинковича, 1922 г.	Функция Ван дер Вардена, 1930 г.

Приведём аналитические записи функции Римана

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{n^2}$$

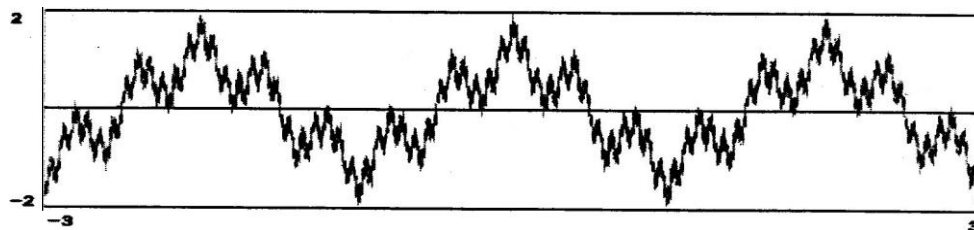
и функции Ван дер Вардена

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n},$$

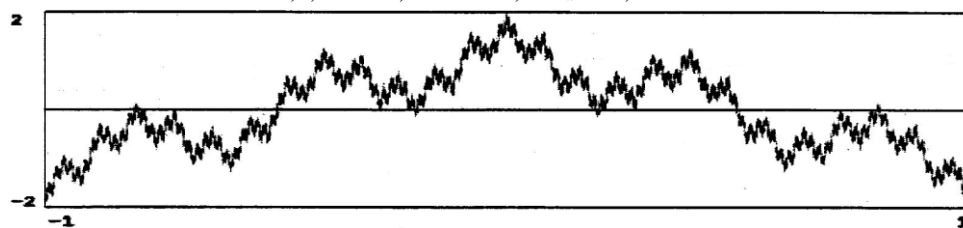
где  $\{ \}$  – дробная часть числа.

На рис. 3.1 показаны графики функции Вейерштрасса. Из представленных графиков функции Вейерштрасса на различных интервалах изменения переменной  $x$  хорошо просматривается свойство самоподобия, столь характерное для фрактальных функций.

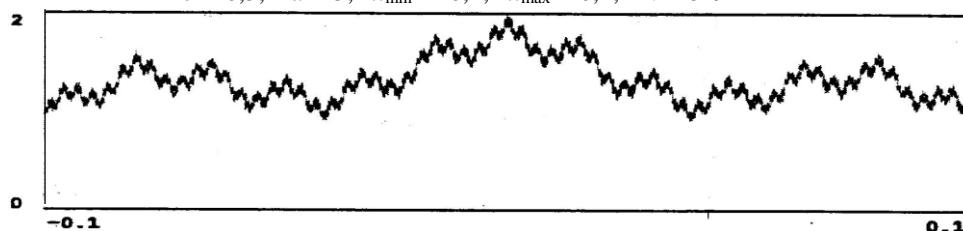
$$b = 0,5, \quad a = 5, \quad x_{\min} = -3, \quad x_{\max} = 3, \quad m = 8192$$



$$b = 0,5, \quad a = 5, \quad x_{\min} = -1, \quad x_{\max} = 1, \quad m = 8192$$



$$b = 0,5, \quad a = 5, \quad x_{\min} = -0,1, \quad x_{\max} = 0,1, \quad m = 8192$$



$$b = 0,5, \quad a = 5, \quad x_{\min} = -0,01, \quad x_{\max} = 0,01, \quad m = 8192$$

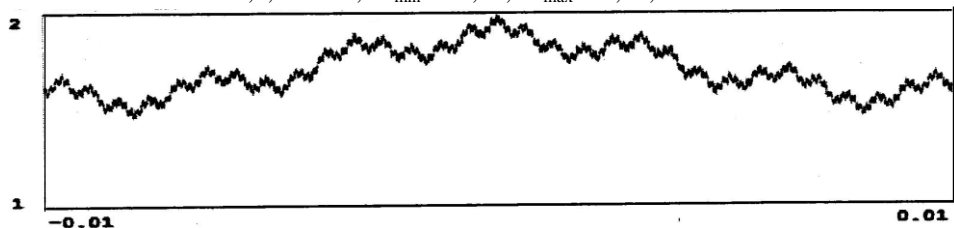


Рис. 3.1. Графики функции Вейерштрасса  $w(0,5; 5)$  на различных интервалах.

Непрерывные нигде недифференцируемые функции – одно из семейств функций со сложным локальным строением. Примеры Б. Больцано и К. Вейерштрасса – первые из таких конструкций. В последующее время недифференцируемые функции всё чаще фигурируют в теоретических и прикладных исследованиях. В частности, они используются при:

- конструировании фрактальных антенн;
- моделировании речевых сигналов и обработки цифровых изображений;
- в теории динамических систем;
- в теории приближений и т. д.



"Негладкий анализ" – интенсивно развивающийся раздел математики, в котором изучаются недифференцируемые функции. Быстрому становлению этого направления способствовали как потребности современной науки, так и возросшие возможности вычислительной техники. Сформировались направления негладкого анализа, такие как недифференцируемая оптимизация, негладкие задачи вариационного исчисления и другие [15, 36]. Одним из перспективных подходов в изучении недифференцируемых функций рассматривается подход, связанный с использованием фрактального анализа. В [17] с помощью средств фрактального анализа изучаются свойства непрерывной недифференцируемой функции, весьма близкой к знаменитой функции Вейерштрасса. В [29, 30, 73, 78, 99] был рассмотрен подход к изучению недифференцируемых функций, основные идеи которого связаны с  $r/\varphi$ -алгоритмом, предложенным для суммирования расходящихся непрерывных дробей. Была введена модификация функции Вейерштрасса, названная «функцией Вейерштрасса на интервале», и определены для этой функции  $r/\varphi$ -характеристики.

Применим к изучению свойств функции Вейерштрасса несколько необычный приём, связанный с построением для рядов, так называемых, соответствующих цепных дробей [74]. Следует отметить, что цепные дроби получили в последнее время в вычислительной математике разнообразные применения. Для суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей используется  $r/\varphi$ -алгоритм [53], существенно расширивший область использования цепных дробей [54-79].

Функция Вейерштрасса определяется рядом

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.1.1)$$

где  $0 < b < 1$ ,  $a$  – нечетное натуральное число.

Ряд (3.1.1) равномерно сходится в любом интервале, так что функция Вейерштрасса всюду непрерывна. К. Вейерштрасс доказал [123], что если  $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$ , то функция (3.1.1) не имеет конечной производной ни при каком значении  $x$ .

Функция Вейерштрасса имеет период равный 2. На рис. 3.2 представлен график функции Вейерштрасса на интервале  $-2 \leq x \leq 2$  при  $a = 7$  и  $b = 0,9$ .

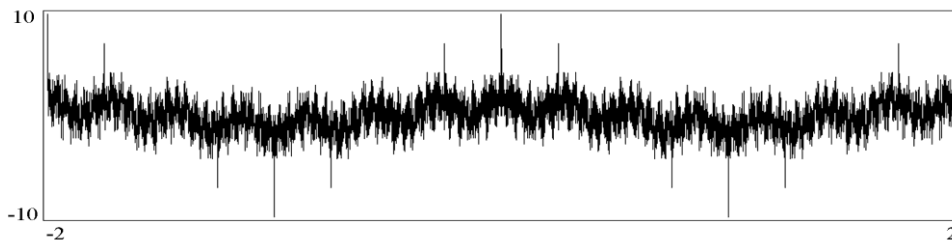


Рис. 3.2. График функции Вейерштрасса.

В табл. 3.1 показана точность, достигаемая при вычислении функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,1)$  с учетом различного числа членов ряда.

Рассмотрим распределение значений функции Вейерштрасса на малом интервале. На рис. 3.3 показан график функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  на интервале  $\Delta = 10^{-300}$ .

Таблица 3.1

**Вычисление функции Вейерштрасса при различном числе членов ряда**

Число членов ряда, $n$	Значения отрезка ряда, представляющего функцию Вейерштрасса	Погрешность
2	4.2204978923192775586460397420421665166781144024692e-01	1.89e-01
4	8.0189459954066273614274755098801163816884173646915e-02	1.53e-01
8	1.3280176462992915573260042191912460739714187997666e-01	1.00e-01
16	1.8996856973325144189846843158747302278573490702436e-01	4.32e-02
32	2.2517012922955381321127980074052478742166044585789e-01	8.01e-03
64	2.3290175952504074389342519523909093248589396724251e-01	2.75e-04
128	2.3317635499836877544784036173119612917618731038072e-01	3.24e-07
256	2.3317667913321116811724129275538570577751743695572e-01	4.51e-13
512	2.3317667913366174357160353497497570773161651672808e-01	8.71e-25
1024	2.3317667913366174357160440563768875782752013272985e-01	3.25e-48

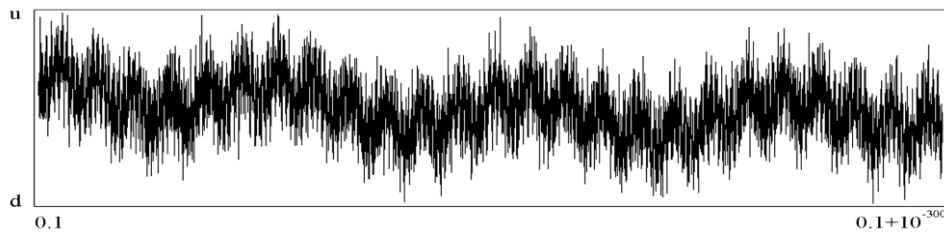


Рис. 3.3. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1 + 10^{-300})$ ,  
 $u = 2.3317667913366195134e-01$ ,  $d = 2.3317667913366137302e-01$ .

Функция Вейерштрасса непрерывна в классическом смысле, так как существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Однако значения функции Вейерштрасса в точках  $x_0 + \Delta$  становятся «близкими» к значению функции Вейерштрасса в точке  $x_0$  при чрезвычайно малых значениях  $\Delta$ . В табл. 3.2 приведены значения функции Вейерштрасса в точках  $0,1 + \Delta$  при различных  $\Delta$ .

Таблица 3.2

**Значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0.9$  при различных  $\Delta$** 

Значение интервала $\Delta$	Значение функции Вейерштрасса в точках $0,1 + \Delta$	Погрешность $ w(0,1) - w(0,1 + \Delta) $
$10^1$	2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326233293e-01	0
$10^0$	-2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326233293e-01	4.66e-01
$10^{-1}$	2.79421947072365653900120706167516792571587083679099022687775e+00	2.56e+00
$10^{-2}$	1.37685211023282374001780935329259808283502910036371946069195e+00	1.14e+00
$10^{-4}$	4.96762002463445910291670824064921068274791345674378794043767e-02	1.84e-01
$10^{-8}$	7.03572868503591089731662656211376043098531727582289028119593e-01	4.70e-01
$10^{-16}$	3.20733180632571301134540019606572188653878229737862341637813e-01	8.76e-02
$10^{-32}$	2.56180928511730305513974903805138604459611382716200133685240e-01	2.30e-02
$10^{-64}$	2.33541303271725083375936916633689033437185591321161407388559e-01	3.65e-04
$10^{-128}$	2.33176322692160345779285021926333847664419161660568200330212e-01	3.56e-07
$10^{-256}$	2.33176679133625844502873812089507021787307127291212906598672e-01	3.59e-14
$10^{-512}$	2.33176679133661743571604406042422476731687042776296698327206e-01	4.05e-28
$10^{-1024}$	2.33176679133661743571604405637688757827520132733104326271496e-01	3.82e-56

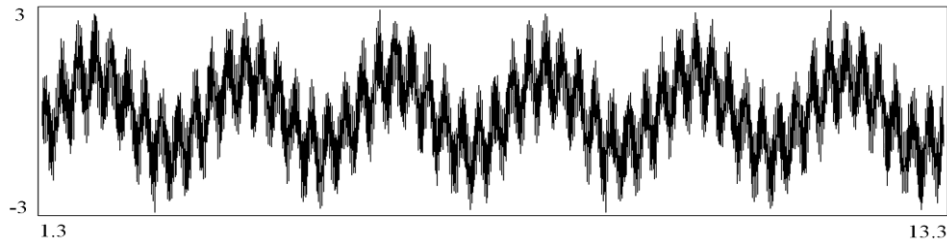
В табл. 3.3 приведены значения функции Вейерштрасса в различных точках  $x$ , полученные вычислением ряда (3.1.1) при  $a = 7$ ;  $b = 0,9$ .

Таблица 3.3

*Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда для различных значений  $x$*

Аргумент, $x$	Значение функции Вейерштрасса
0,1	2.3317667913366174357160440563768875782752013273310e-1
0,2	2.7942194707236565390012070616751679257158708367909e+0
0,3	7.9764426351276869838314991971299265064242055710293e-1
0,4	-2.2057805292763434609987929383248320742841291632091e+0
0,6	2.2057805292763434609987929383248320742841291632090e+0
0,7	-7.9764426351276869838314991971299265064242055710294e-1
0,8	-2.7942194707236565390012070616751679257158708367910e+0
0,9	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1
1,0	-1.000e1
1,1	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1

На рис. 3.3 показаны значения функции Вейерштрасса при параметрах  $a = 9$ ,  $b = 0,7$  на интервале  $\Delta = 1,3 \div 13,3$ . Всего представлено 8192 значений функции.

Рис. 3.3. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $1,3 \div 13,3$ .

В точке  $x = 1,3$  функция Вейерштрасса  $w(9; 0,7; x)$  имеет отрицательное значение:  $-0,345756030760\dots$ . В табл. 3.4 приведены значения функции Вейерштрасса в точках  $1,3 + \Delta$  при различных  $\Delta$ .

Таблица 3.4

*Значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9$ ,  $b = 0,7$  в точках  $1,3 + \Delta$*

Значение интервала, $\Delta$	Значение функции Вейерштрасса в точках $1,3 + \Delta$	Погрешность $ w(1,3) - w(1,3 + \Delta) $
$10^1$	<b>-3.45756030760278311275709385081807510939795551554791759454278</b> e-01	0
$10^0$	3.45756030760278311275709385081807510939795551554791759454278e-01	6.92e-01
$10^{-1}$	-1.03005664791649141367431139060939686286718196634293810355908e+00	6.84e-01
$10^{-2}$	5.02280048447134686201947919875578252705428180063421306724025e-02	3.96e-01
$10^{-4}$	2.92109189892759350992649396281127585423140533086713937622190e-01	6.38e-01
$10^{-8}$	-2.46222987121663843344296124305029093759242235423862297116265e-01	9.95e-02
$10^{-16}$	<b>-3.45590707781033681047106982655588650305386535266653267592301</b> e-01	1.65e-04
$10^{-32}$	<b>-3.45749196836879869617953993530183327251468715838712534616496</b> e-01	6.83e-06
$10^{-64}$	<b>-3.45756030789811925974558017962227886890935634937869060301925</b> e-01	2.95e-11
$10^{-128}$	<b>-3.45756030760278311271601943622372227840040709299187665435248</b> e-01	4.11e-22
$10^{-256}$	<b>-3.45756030760278311275709385081807510939790180284617678000104</b> e-01	5.37e-43

### 3.2. Интервальные и предельные $r/\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса

Исследуем поведение функции Вейерштрасса в окрестности точки  $x_0$ . Пусть  $x_0 = 0,1$ . Зафиксируем параметры функции Вейерштрасса:  $a = 7$ ,  $b = 0,9$ . Определим интервал  $\Delta$ , который будет разбит на равные подинтервалы. Положим  $\Delta = 10^{-20}$ , число

подинтервалов  $k = 2^{21} = 2097152$ . На концах подинтервалов, последовательно приближаясь к точке  $x_0$ , вычисляются значения функции Вейерштрасса. Погрешность при вычислении функции не более  $10^{-15}$ .

Необходимо обратить внимание на технические трудности, связанные с вычислением значений функции Вейерштрасса. Основная сложность заключается в вычислении аргумента косинуса, то есть величины  $a^n \pi x$ . Для решения данной задачи необходимо вычислить число  $a^n$  без округления мантиссы, При вычислениях использовался ряд (3.1.1) с числом членов  $n = 328$ , количество двоичных разрядов – 921.

На рис. 3.5 показан график значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$ .

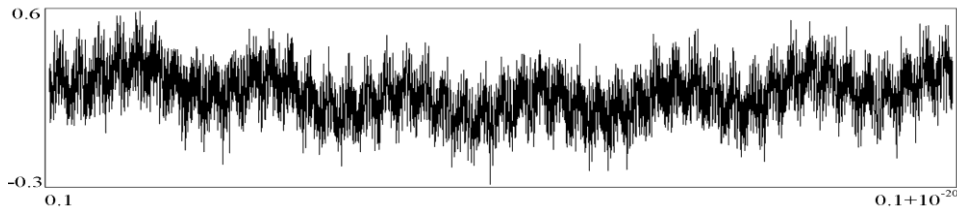


Рис. 3.5. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$ .

На рис. 3.6 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1 + 10^{-20})$  при разбиении интервала на  $2^{21}$  подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$ , равное величине  $0.233176679133662\dots$ .

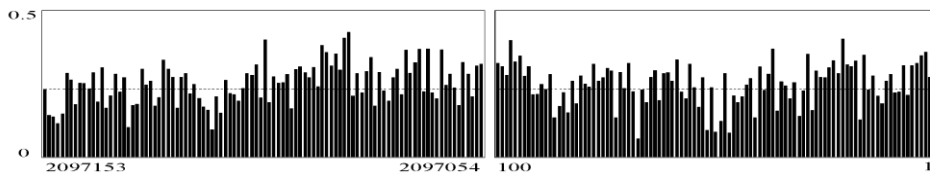


Рис. 3.6. График значений функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0$ .

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале  $\Delta = 10^{-20}$ , приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Значения функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0, \Delta = 10^{-20}$

Номер отсчета, $k$	Значение функции	Номер отсчета, $k$	Значение функции
1	3.24014862156500e-01	2097138	2.10991015021163e-01
2	2.74289439233013e-01	2097139	1.67513366971720e-01
3	3.59284219294589e-01	2097140	3.05878002954722e-01
4	3.46981500573381e-01	2097141	1.90184673531470e-01
5	3.21259163112732e-01	2097142	2.88853681374806e-01
6	3.13954021162165e-01	2097143	2.33956481702537e-01
7	2.13003106734017e-01	2097144	2.52189129082863e-01
8	3.13799922112283e-01	2097145	2.53105387775118e-01
9	2.23139061724919e-01	2097146	1.79924537986997e-01
10	2.20166036849900e-01	2097147	2.63796484186860e-01
11	2.82887413388193e-01	2097148	2.87176242316425e-01
12	2.60196374217181e-01	2097149	1.48097057172765e-01
13	1.83107597783911e-01	2097150	1.16383280790168e-01
14	2.10074070258832e-01	2097151	1.39161415417736e-01
15	2.78049265560823e-01	2097152	1.43395529410563e-01
16	2.30314228854660e-01	2097153	2.33176679133662e-01

Из табл. 3.5 можно видеть, что значение функции Вейерштрасса в ближайшей к  $x_0$  точке, то есть в точке  $x_0 + 10^{-20}/2^{21}$ , составляет величину 0,1433955294... . Это значение не приближает значения функции в точке  $x_0$ , равное величине 0,2331766791...

Анализируя графики значений функции Вейерштрасса заключаем, что значения функции на интервале  $\Delta$  осциллируют относительно "уровня  $x_0$ ", то есть относительно значения, равного значению функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ . Схожий осциллирующий характер имеют подходящие дроби расходящихся непрерывных дробей, которые удалось просуммировать, то есть найти их значения, используя, так называемый,  $r/\varphi$ -алгоритм, нашедший в последствии многочисленные применения в вычислительной математике [75]. Следует, однако, отметить важную особенность: в  $r/\varphi$ -алгоритме "уровень" задается осью  $x$ , которая разделяет подходящие дроби на положительные и отрицательные. Оказалось, что идеи "усреднения" и "уровня", связанные с  $r/\varphi$ -алгоритмом, могут эффективно быть использованы при разработке метода анализа быстро осциллирующих функций, в частности, функции Вейерштрасса.

Для функции Вейерштрасса можно выделить некоторые характеристики, которые по аналогии с  $r/\varphi$ -алгоритмом назовём  $r/\varphi$ -характеристиками.

Введём для функции Вейерштрасса (3.1.1)  $r/\varphi$ -характеристики.

$r$ -характеристика:

$$r(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} b^m \cos(a^m \pi x_i)}, \quad (3.2.1)$$

где  $w(a, b, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x_i)$  - значение функции Вейерштрасса в точке  $x_i$  равномерно делимого интервала  $[x_0, x_0 + \Delta]$ , на котором определяется  $r$ -характеристика функции (3.1.1).

Модуль  $\varphi$ -характеристики:

$$|\varphi(a, b, [x_0, x_0 + \Delta])| = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}, \quad (3.2.2)$$

где  $k_n$  - число значений функции Вейерштрасса  $w(a, b, x_i)$ , меньших значения функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ , из общего числа  $n$  значений функции  $w(a, b, x_i)$  при равномерном делении интервала  $[x_0, x_0 + \Delta]$ .

Можно отметить, что из определения интеграла Римана следует, что  $r$ -характеристика любой функции  $f(x)$ , для которой функция  $\ln|f(x)|$  интегрируема на соответствующем промежутке, вычисляется по формуле

$$r = e^{\frac{1}{\Delta} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta} \ln|f(x)| dx}.$$

Так как функция Вейерштрасса непрерывна, то  $r$ -характеристика может быть записана следующим образом:

$$r(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = e^{\frac{1}{\Delta} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta} \ln|\omega(a, b, x)| dx}.$$

В табл. 3.6 даны результаты вычисления по формулам (3.2.1) и (3.2.2)  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta = 25$ . Вычисления  $r/\varphi$ -характеристик последовательно производились при равномерном разбиении интервала на  $2^m$  подинтервалов.

Таблица 3.6

**Определение  $r/\varphi$ -характеристик в точке  $x_0 = 0,1$  при  $x \rightarrow x_0, \Delta = 25$**

Число разбиений интервала, $n$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\varepsilon_r =  r_n - r_{n-1} $	Модуль $\varphi$ -характеристики	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	-2.331766791e-01	2.3317667910e-01	-	1.5707963268e+00	-
2	2.205780529e+00	4.9314826341e-01	0.2599715843	1.0471975512e+00	0.5235987756
4	1.724603181e+00	7.7988275492e-01	0.2867344915	6.2831853072e-01	0.4188790205
8	1.333442649e+00	1.4464849509e+00	0.6666021960	3.4906585040e-01	0.2792526803
16	3.796251302e+00	1.7881574346e+00	0.3416724837	1.1087974071e+00	0.7597315567
32	-2.129762209e-01	8.3950843324e-01	0.9486490014	1.3327968833e+00	0.2239994762
64	1.422117868e+00	6.0494810976e-01	0.2345603235	1.4016336454e+00	0.0688367621
128	2.975271748e-01	6.8063524070e-01	0.0756871309	1.6803867682e+00	0.2787531228
256	1.647489222e+00	7.0823901958e-01	0.0276037789	1.6869252381e+00	0.0065384699
...	...	...	...	...	...
131072	2.543908594e-01	8.7062555163e-01	0.0001938679	1.7551722203e+00	0.0036537262
262144	1.108887951e+00	8.6857735559e-01	0.0020481960	1.7570604318e+00	0.0018882115
524288	-1.682734508e-01	8.7023793431e-01	0.0016605787	1.7552481766e+00	0.0018122552
1048576	8.577267975e-02	8.7113592115e-01	0.0008979868	1.7541922436e+00	0.0010559330
2097152	1.465355619e+00	8.7078133339e-01	0.0003545878	1.7547383621e+00	0.0005461185

В первой колонке табл. 3.6 приведено количество подинтервалов, на которые равномерно разбивается исходный интервал  $\Delta = 25$ . Во второй колонке даны значения функции Вейерштрасса в точках  $x_i$ , соответствующей последнему подинтервалу при равномерном делении исходного интервала на  $2^m$  фрагментов, причём, приближение к точке  $x_0 = 0,1$  осуществляется справа.

В третьей колонке приведены значения  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta = 25$ , вычисленные по формуле (3.2.1). Несмотря на то, что при вычислении  $r$ -характеристики использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые определялись последовательно в точках  $x_i$  интервала  $\Delta = 25$ , разбиваемого всякий раз на  $2^m$  частей ( $m = 1, 2, \dots, 21$ ), в колонке 3 фиксировались числа, асимптотически стремящиеся к некоторому значению. В колонке 4 дана разность значений  $r_{2^m}$  и  $r_{2^{m-1}}$ , полученных при разбиении интервала  $\Delta$  на  $2^m$  и  $2^{m-1}$  частей, соответственно. В колонке 5 показаны значения модуля  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$  на том же интервале  $\Delta = 25$ . Выше уже отмечалось, что за уровень отчёта, который определял, какие значения функции Вейерштрасса, вычисленные в точке  $x_i$  интервала  $\Delta$ , относить к множеству  $k_n$  формулы (3.2.2), было взято значение функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ .

На рис. 3.7 представлены значения  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса, вычисленные на интервале  $0,1 \div 25,1$  при равномерном разбиении этого интервала на  $2^{21}$  подинтервалов. В левой части рис. 3.7 приведены значения  $r_n$ , найденные по формуле (3.2.1) при использовании значений функции Вейерштрасса на начальном участке интервала ( $k = 1 \div 100$ ). В правой части рис. 3.7 значения  $r_n$  практически одинаковые. При их вычислении используется значительное число отчётов функции Вейерштрасса ( $k = 2^{21} - i$ , где  $i = 100, 99, \dots, 1$ ).

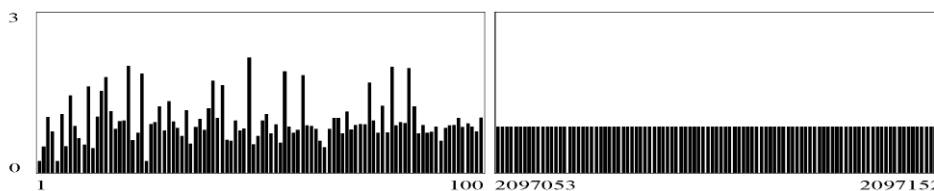


Рис. 3.7. График значений  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 25,1$ .

На рис. 3.8 показаны значения  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса, полученные по формуле (3.2.2) на интервале  $0,1 \div 25,1$  при равномерном разбиении этого интервала на  $2^{21}$  подинтервалов.

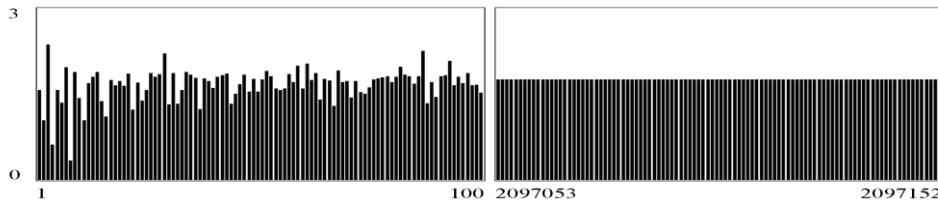


Рис. 3.8. График значений  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 25,1$ .

В табл. 3.7 даны результаты вычисления по формулам (3.2.1) и (3.2.2)  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta = 2$ . Вычисления  $r/\varphi$ -характеристик последовательно производились при равномерном разбиении интервала на  $2^n$  подинтервалов.

Таблица 3.7

**Определение  $r/\varphi$ -характеристик в точке  $x_0 = 0,1$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\Delta = 2$**

Число разбиений интервала, $n$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\mathcal{E}_r =  r_n - r_{n-1} $	Модуль $\varphi$ -характеристики	$\mathcal{E}_\varphi =  \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	2.33176679133662e-01	0.2331766791	-	0.0000000000	-
2	-2.33176679133663e-01	0.2331766791	0.0000000000	1.0471975512	1.0471975512
4	2.20578052927634e+00	0.5728434969	0.3396668178	1.2566370614	0.2094395102
8	1.72460318109052e+00	0.8918458265	0.3190023296	1.3962634016	0.1396263402
16	-1.33344264922251e+00	1.6104199560	0.7185741294	1.4783965429	0.0821331413
32	3.93834935811930e+00	1.9020217070	0.2916017510	1.6183962155	0.1399996726
64	-3.07225675894610e-01	0.8562175775	1.0458041295	1.8366233975	0.2182271820
128	5.61180636551890e-01	0.6094354070	0.2467821705	1.8752142196	0.0385908221
256	-3.93218785952536e-01	0.6834781925	0.0740427855	1.8091661974	0.0660480222
...	...	...	...	...	...
131072	-8.28042548021563e-02	0.8704404310	0.0024525610	1.7453931674	0.0033182476
262144	1.26462292644948e+00	0.8706299270	0.0001894960	1.7464784016	0.0010852342
524288	-3.41619609891292e-01	0.8685795342	0.0020503928	1.7488126601	0.0023342585
1048576	3.21418793964801e-01	0.8702390273	0.0016594931	1.7475919381	0.0012207220
2097152	1.01082077196144e-01	0.8711364686	0.0008974413	1.7467149273	0.0008770108

Во второй колонке табл. 3.7 приведены значения функции Вейерштрасса в точках  $x_i$ , которые соответствуют последнему подинтервалу при равномерном разбиении исходного интервала  $\Delta = 2$  на  $2^n$  фрагментов, причём, приближение к точке  $x_0 = 0,1$  осуществляется справа (рис. 3.9).

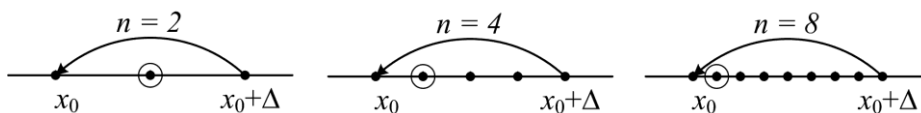


Рис. 3.9. Точки  $x_i$ , соответствующие последнему подинтервалу при  $x \rightarrow x_0$ .

В третьей и пятой колонках табл. 3.7 даны значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса на интервале  $\Delta = 2$ , найденные по формулам (3.2.1) и (3.2.2). При вычислении  $r/\varphi$ -характеристик использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые определялись последовательно в точках  $x_i$  интервала  $\Delta = 2$ , разбиваемого всякий раз на  $2^n$  частей.

На рис. 3.10 и рис. 3.11 показаны  $r/\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса, полученные по формулам (3.2.1) и (3.2.2) на интервале  $0,1 \div 2,1$  при равномерном разбиении этого интервала на  $2^{21}$  подинтервалов.

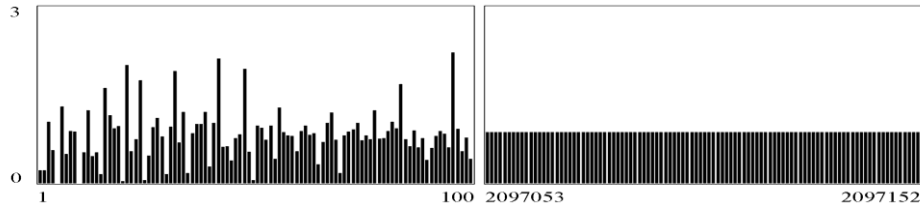


Рис. 3.10. График значений  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 2,1$  при  $x \rightarrow x_0$ .

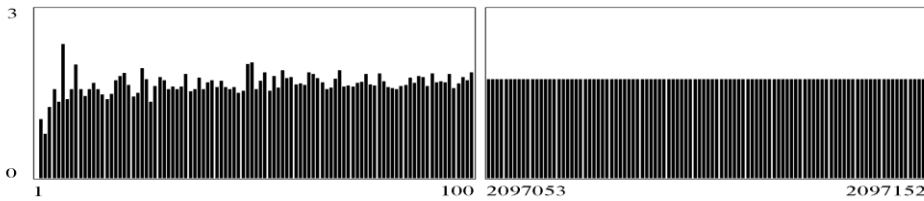


Рис. 3.11. График значений  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 2,1$  при  $x \rightarrow x_0$ .

На рис. 3.12 показано распределение значений функций Вейерштрасса при параметрах  $a = 7, b = 0,9$ . Интервал  $\Delta = 2$  расположен справа от точки  $x_0=0,1$ .

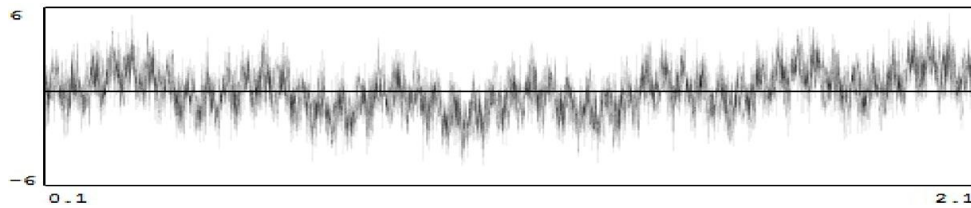


Рис. 3.12. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 2,1$ .

В табл. 3.8 показаны результаты вычисления  $r/\varphi$ -характеристик для функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  в различных точках  $x_i$ . Значения  $r/\varphi$ -характеристик находились на интервале  $\Delta = 2$ , совпадающем с периодом функции Вейерштрасса. При вычислениях  $r/\varphi$ -характеристик интервал, равный двум, делился на  $2^{15}$  подинтервалов.

Таблица 3.8

**Значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса в различных точках  $x_i$**

Значения $x_i$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\varphi$ -характеристика
2.000000000000E-01	2.308645109994E+00	8.690535358586E-01	-2.890567016602E+00
4.000000000000E-01	-2.151471298696E+00	8.636984419579E-01	-2.962915039063E-01
8.000000000000E-01	-2.547472121106E+00	8.718099475199E-01	1.832177734375E-01
1.600000000000E+00	-2.041082571184E+00	8.684730998755E-01	3.340466308594E-01
3.200000000000E+00	-2.468809509029E+00	8.681299921637E-01	2.050659179688E-01
6.400000000000E+00	-1.745189569423E+00	8.686769926723E-01	4.496118164063E-01
1.280000000000E+01	-1.970023096583E+00	8.716328025421E-01	3.612609863281E-01
2.560000000000E+01	-1.912729619093E+00	8.650545455502E-01	-3.788928222656E-01
5.120000000000E+01	-2.526002736602E+00	8.652528565257E-01	-1.877215576172E-01
1.024000000000E+02	-2.101157295175E+00	8.718363633985E-01	-3.111444091797E-01
2.048000000000E+02	-2.659016102361E+00	8.730483069895E-01	1.616571044922E-01



На рис. 3.13 представлен график, построенный по  $r/\varphi$ -характеристикам для 1024-х различных точек  $x_i$ .

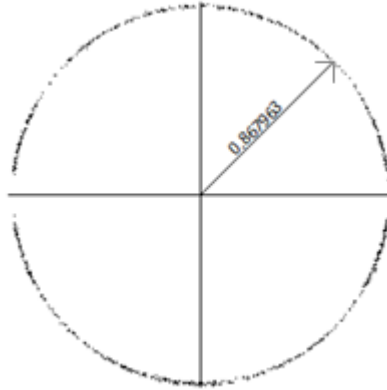


Рис. 3.13. Отображение на плоскости  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса в зависимости от  $x_i$ .

Исследуем поведение функции Вейерштрасса в окрестности точки  $x_0$ . Пусть  $x_0 = 0,1$ . Зафиксируем параметры функции Вейерштрасса:  $a = 7$ ,  $b = 0,9$ . Определим интервал  $\Delta$ , который будет разбит на  $n$  равных подинтервалов. Положим  $\Delta = 10^{-10}$ , число подинтервалов  $k = 2^{21} = 2097512$ . На концах подинтервалов, последовательно приближаясь к точке  $x_0$ , вычисляются значения функции Вейерштрасса. Погрешность при вычислении функции не более  $10^{-15}$ . Можно определить количество членов ряда при заданной погрешности  $\varepsilon$  по формуле:

$$n = \log_b \varepsilon.$$

Погрешность  $\varepsilon = 10^{-15}$  обеспечивается при сложении не менее 328 членов ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n$ . Необходимо вычислить число  $a^n$  без округления мантиссы, что требует использования  $q$  двоичных разрядов, определяемых соотношением:

$$q = n \log_2 a.$$

Таким образом, для заданных  $a = 7$  и  $n = 328$  число разрядов  $q$  равно 921. Далее число  $a^n$  умножается на  $x$  и из целой части полученного числа  $a^n$  вычитаются "двойки", так что в результате целая часть числа примет значения 0 или 1. Оставшееся число умножается на  $\pi$  и производится вычисление косинуса приведенного аргумента.

На рис. 3.14 показан график распределения значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 0,1000000001$ .

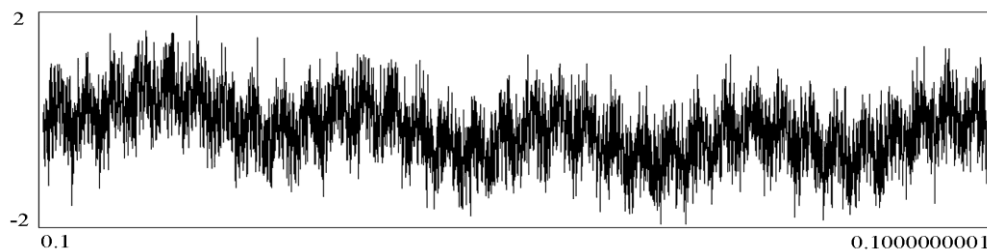


Рис. 3.14. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 0,1000000001$ .

На рис. 3.15 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 0,1000000001$  при разбиении интервала на  $2^{21}$  подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$ , равное величине  $0.233176679133662\dots$

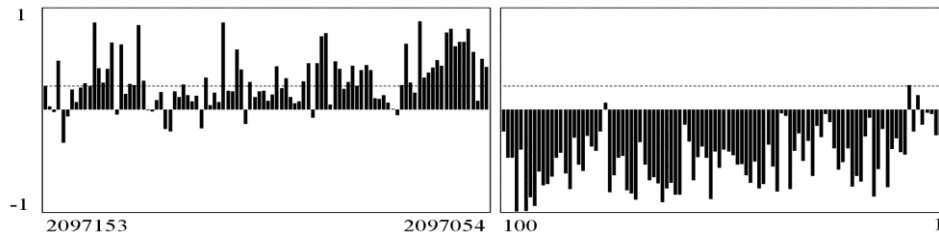


Рис. 3.15. График значений функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0$ .

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале  $\Delta = 10^{-10}$ , приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

**Значения функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\Delta = 10^{-10}$**

Номер отсчета, $k$	Значение функции	Номер отсчета, $k$	Значение функции
1	-6.25295466594902e-02	2097138	6.58705767988363e-01
2	-2.46059762683363e-01	2097139	4.02279072733480e-01
3	-2.50442222816751e-01	2097140	2.65183931577267e-01
4	-3.68471510642392e-02	2097141	4.06768989569054e-01
5	-2.44733031714151e-02	2097142	8.50289818676165e-01
6	-1.45979895538211e-01	2097143	2.37568124209613e-01
7	1.45500477666179e-01	2097144	2.61479861132985e-01
8	-2.09814349222072e-01	2097145	2.16874728369376e-01
9	2.43878170479272e-01	2097146	7.42738407640374e-02
10	-4.38116756819190e-01	2097147	1.98941408343906e-01
11	-4.13815910644200e-01	2097148	-6.37797916245480e-02
12	-2.76569127387281e-01	2097149	-3.18268645926570e-01
13	-3.84249833520620e-01	2097150	4.78659303361735e-01
14	-7.56032435891457e-01	2097151	-2.30638116883090e-02
15	-1.84374744877942e-01	2097152	3.21174235040281e-02
16	-5.76671388409889e-01	2097153	2.33176679133662e-01

Из табл. 3.9 можно заключить, что значение функции Вейерштрасса в ближайшей точке  $x_0 + 10^{-10}/2^{21}$ , которое составляет величину 0,0321174235..., ни в коей мере не характеризует значения функции в  $x_0$ , равное величине 0,2331766791...

В табл. 3.10 приведены результаты вычисления  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса (3.1.1) с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta=10^{-10}$ . Вычисления  $r/\varphi$ -характеристик последовательно производились при делении интервала  $10^{-10}$  на  $2^n$  равных частей. Максимальное число подинтервалов, на которое разбивается интервал  $10^{-10}$ , равно  $2^{21}$ . Интервал  $\Delta$  находится справа от точки  $x_0$ .

Таблица 3.10

**Определение  $r/\varphi$ -характеристик в точке  $x_0 = 0,1$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\Delta = 10^{-10}$**

Число разбиений интервала, $n$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\varepsilon_r =  r_n - r_{n-1} $	Модуль $\varphi$ -характеристики	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{2^n} - \varphi_{2^{n-1}} $
1	-6.25295466594903e-02	0.1207494598	-	1.5707963268	-
2	-2.32422470684058e-01	0.1502044625	0.0294550027	2.0943951024	0.5235987756
4	-4.33432595932641e-01	0.2487735235	0.0985690610	1.8849555922	0.2094395102
8	9.76210134357022e-01	0.3572331963	0.1084596728	1.7453292520	0.1396263402
16	2.79440153989695e-01	0.3000386495	0.0571945468	1.8479956786	0.1026664266
32	2.97620826589979e-01	0.2603374663	0.0397011831	1.9991953250	0.1511996464
64	7.17181131573445e-01	0.2840429296	0.0237054632	2.0299521762	0.0307568512

Окончание табл. 3.10

128	6.23094349268071e-01	0.2626265647	0.0214163648	2.1187485338	0.0887963576
256	-3.78521098919205e-01	0.2536947912	0.0089317735	2.1758890752	0.0571405414
...	...	...	...	...	...
131072	-4.69773057812122e-02	0.2482948974	0.0003948879	2.1972429359	0.0006159655
262144	2.16874728369377e-01	0.2482663434	0.0000285540	2.1951421021	0.0021008338
524288	-3.18268645926570e-01	0.2477378704	0.0005284730	2.1960331200	0.0008910179
1048576	-2.30638116883090e-02	0.2474486938	0.0002891766	2.1981923727	0.0021592527
2097152	3.21174235040281e-02	0.2475438482	0.0000951544	2.1981529741	0.0000393986

В первой колонке табл. 3.10 приведено количество подинтервалов, на которые равномерно разбивается исходный интервал  $\Delta = 10^{-10}$ . Во второй колонке даны значения функции Вейерштрасса в точке  $x_i$ , соответствующей последнему подинтервалу при равномерном делении исходного интервала на  $2^n$  фрагментов. В третьей колонке приведены значения  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta = 10^{-10}$ , вычисленные по формуле (3.2.1). Несмотря на то, что при определении  $r$ -характеристики использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые находились последовательно в точках  $x_i$  интервала  $\Delta = 10^{-10}$ , разбиваемого всякий раз на  $2^n$  равных частей ( $n = 1, 2, \dots, 21$ ), в колонке 3 фиксировались числа, асимптотически стремящиеся к некоторому пределу. В колонке 4 приведена «погрешность», то есть разность значений  $r_{2^n}$  и  $r_{2^{n-1}}$ , полученных при разбиении интервала  $\Delta$  на  $2^n$  и  $2^{n-1}$  частей, соответственно. В колонке 5 приведены значения модуля  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$  на том же интервале  $\Delta = 10^{-10}$ . Выше уже отмечалось, что за уровень отчёта, который определял, какие значения функции Вейерштрасса, вычисленные в точке  $x_i$  интервала  $\Delta$ , относить к множеству  $k_n$  формулы (3.2.2), было взято значение функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ .

На рис. 3.16 показаны значения  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса, вычисленные на интервале  $0,1 \div (0,1+10^{-10})$  при равномерном разбиении этого интервала на  $2^{21}$  подинтервалов. В левой части рис. 16 приведены значения  $r_n$ , найденные по формуле (3.2.1) при использовании значений функции Вейерштрасса на начальном участке интервала ( $n = 1 \div 100$ ). В правой части рис. 3.16 значения  $r_n$  практически одинаковые. При их вычислении используется большое число отчётов функции Вейерштрасса ( $n = 2^{21} - i$ ), где  $i = 100, 99, \dots, 1$ ).

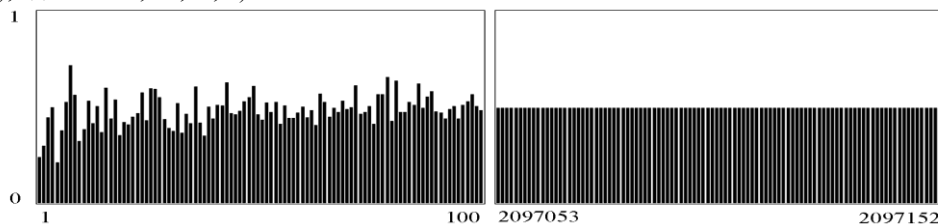


Рис. 3.16. График значений  $r$ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1+10^{-10})$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Из формулы (3.2.1) следует, что  $r$ -характеристика функции Вейерштрасса является функцией не только параметров  $a$ ,  $b$  и  $x_0$ , но и интервала  $\Delta$ , который, как уже отмечалось выше, равномерно разбивается на  $n$  подинтервалов.

В табл. 3.11 приведены результаты вычисления  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса (3.1.1) с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  в точке  $x_0 = 0,1$  на интервале  $\Delta = 10^{-20}$ . Вычисления  $r/\varphi$ -характеристик последовательно производились при делении интервала  $10^{-20}$  на  $2^m$  равных частей. Максимальное число подинтервалов, на которое разбивается интервал  $10^{-20}$ , равно  $2^{21}$ . Интервал находится справа от точки  $x_0$ .

Таблица 3.11

Определение  $r/\varphi$ -характеристик в точке  $x_0 = 0,1$  при  $x \rightarrow x_0, \Delta = 10^{-20}$

Число разбиений интервала, $n$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\varepsilon_r =  r_n - r_{n-1} $	Модуль $\varphi$ -характеристики	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	3.240148622e-01	2.7486853139e-01	-	0.0000000000e+00	-
2	9.650026221e-02	1.9390671359e-01	0.0809618178	1.0471975512e+00	1.0471975512
4	7.988068791e-02	1.6716348256e-01	0.0267432310	1.8849555922e+00	0.8377580410
8	2.010828886e-01	1.5872152501e-01	0.0084419575	2.4434609528e+00	0.5585053606
16	2.480473704e-01	1.7341251074e-01	0.0146909857	2.0327952464e+00	0.4106657064
32	2.886019029e-01	1.4870439103e-01	0.0247081197	1.9039955476e+00	0.1287996988
64	1.895001450e-01	1.3142961433e-01	0.0172747767	2.0299521762e+00	0.1259566286
128	3.450337590e-01	1.3130094160e-01	0.0001286727	1.9726279453e+00	0.0573242309
256	1.624167902e-01	1.3275157044e-01	0.0014506288	2.0536481160e+00	0.0810201707
...	...	...	...	...	...
131072	2.851406799e-01	1.3413490794e-01	0.0000945052	2.1310905191e+00	0.0003757800
262144	2.531053878e-01	1.3412941345e-01	0.0000054945	2.1312424587e+00	0.0001519396
524288	1.480970572e-01	1.3407793658e-01	0.0000514769	2.1319835521e+00	0.0007410934
1048576	1.391614154e-01	1.3411193015e-01	0.0000339936	2.1315062168e+00	0.0004773353
2097152	1.433955294e-01	1.3414134116e-01	0.0000294110	2.1320075743e+00	0.0005013575

Во второй колонке табл. 3.11 приведены значения функции Вейерштрасса в точках  $x_i$ , которые соответствуют последнему подинтервалу при равномерном разбиении исходного интервала  $\Delta = 10^{-20}$  на  $2^m$  фрагментов. В третьей и пятой колонках табл. 3.11 даны значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса на интервале  $\Delta = 10^{-20}$ , найденные по формулам (3.2.1) и (3.2.2).

На рис. 3.17 показан график распределения значений функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  на интервале  $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$ . На графике показано 4096 значений функции. Следует заметить, что характер распределения значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$  аналогичен рассмотренным выше распределениям значений этой функции на интервалах  $0,1 \div 0,1 + 10^{-10}$ .

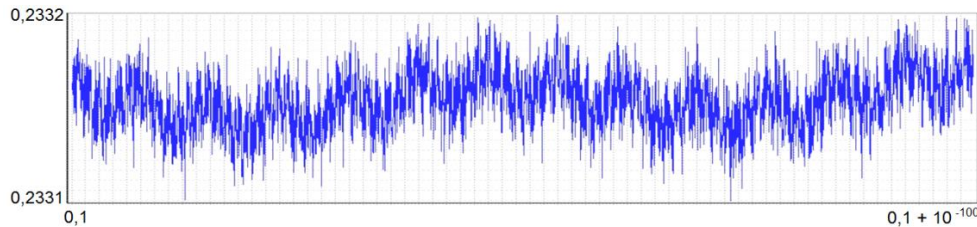


Рис. 3.17. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div 0,1 + 10^{-100}$ .

Рассмотрим характер значений функции Вейерштрасса на экстремально малом интервале, а именно, при  $\Delta = 10^{-200}$ . На рис. 3.18 показан график распределения 4096-ти значений функции Вейерштрасса с параметрами  $a=7, b=0,9$  на интервале  $\Delta = 10^{-200}$ .

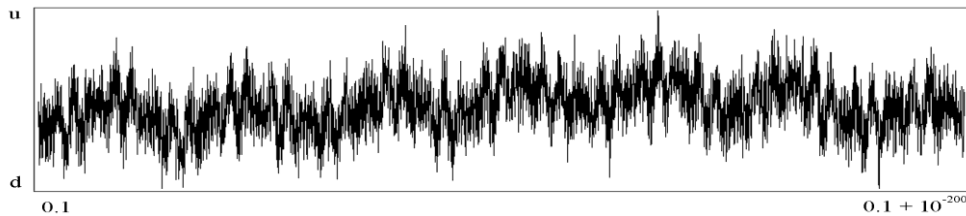


Рис. 3.18. График значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1 + 10^{-200})$ ,  $u = 0.233176679167, d = 0.233176679100$ .

На рис. 3.19 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале  $0,1 \div (0,1+10^{-200})$  при разбиении интервала на  $2^{21}$  подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$ .

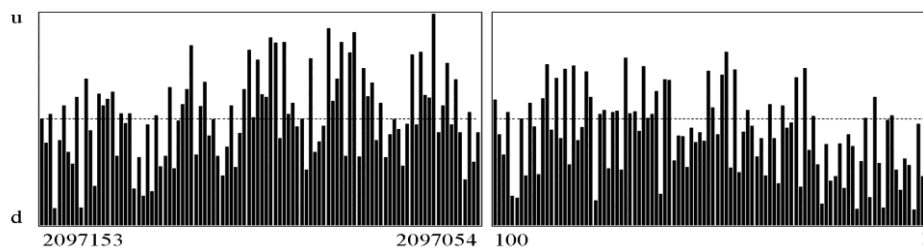


Рис. 3.19. График значений функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0$ ,  
 $u = 0.233176679167$ ,  $d = 0.233176679100$ .

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале  $\Delta = 10^{-200}$ , приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Значения функции Вейерштрасса при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\Delta = 10^{-200}$ 

Номер отсчета, $k$	Значение функции	Номер отсчета, $k$	Значение функции
1	2.33176679145689e-01	2097138	2.33176679139683e-01
2	2.33176679113599e-01	2097139	2.33176679137684e-01
3	2.33176679115616e-01	2097140	2.33176679141364e-01
4	2.33176679131997e-01	2097141	2.33176679112461e-01
5	2.33176679105118e-01	2097142	2.33176679129824e-01
6	2.33176679119075e-01	2097143	2.33176679146028e-01
7	2.33176679121118e-01	2097144	2.33176679105808e-01
8	2.33176679111253e-01	2097145	2.33176679140444e-01
9	2.33176679117685e-01	2097146	2.33176679119439e-01
10	2.33176679134588e-01	2097147	2.33176679123117e-01
11	2.33176679133199e-01	2097148	2.33176679137782e-01
12	2.33176679105757e-01	2097149	2.33176679126739e-01
13	2.33176679119677e-01	2097150	2.33176679105471e-01
14	2.33176679140439e-01	2097151	2.33176679135110e-01
15	2.33176679109013e-01	2097152	2.33176679126020e-01
16	2.33176679133808e-01	2097153	2.33176679133662e-01

В табл. 3.12 значения функции Вейерштрасса в точках интервала  $\Delta = 10^{-200}$  совпадают между собой до десятого десятичного знака. Таким образом, можно считать экспериментально подтвержденной непрерывность функции Вейерштрасса по Гейне, ибо для функции Вейерштрасса имеет место соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

В табл. 3.13 приведены значения  $r/\varphi$ -характеристик при различных интервалах  $\Delta$ . Интервалы расположены справа от точки  $x_0 = 0,1$ . Параметры функции Вейерштрасса  $a = 7$ ,  $b = 0,9$ . Интервалы делятся на 4096 подинтервалов. Погрешность при вычислении функции Вейерштрасса  $\varepsilon = 10^{-19}$ , число членов ряда (3.1.1)  $n = 416$ , количество двоичных разрядов  $q$  при вычислении равно 1168.

Таблица 3.13

*Значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса*

$\Delta$	$r$ -характеристика	Модуль $\varphi$ -характеристики	$\Delta$	$r$ -характеристика	Модуль $\varphi$ -характеристики
$10^0$	8.651433596418810895e-01	1.9568817310	$10^{-285}$	2.331766791336616606e-01	1.7529120835
$10^{-1}$	7.025592194035421638e-01	1.6823661904	$10^{-286}$	2.331766791336614380e-01	2.2981091488
$10^{-2}$	6.597091448592013706e-01	2.2428993194	$10^{-287}$	2.331766791336615407e-01	2.1202108097
$10^{-3}$	5.772967252326349288e-01	2.1347800702	$10^{-288}$	2.331766791336618612e-01	1.2061814118
$10^{-4}$	5.841863118852507782e-01	1.1402363378	$10^{-289}$	2.331766791336617044e-01	1.7046034828
$10^{-5}$	4.835840536675427629e-01	1.5550768615	$10^{-290}$	2.331766791336614771e-01	2.4951775677
$10^{-6}$	4.644177523639089034e-01	2.5496205939	$10^{-291}$	2.331766791336617516e-01	1.5389739946
$10^{-7}$	3.740502219643338458e-01	1.6202551323	$10^{-292}$	2.331766791336616973e-01	1.8265251894
$10^{-8}$	3.195769220421550078e-01	1.7682481472	$10^{-293}$	2.331766791336616152e-01	2.2697374310
$10^{-9}$	2.704785929803229862e-01	2.2329308780	$10^{-294}$	2.331766791336616372e-01	2.2068595697
$10^{-10}$	2.508260074266836269e-01	2.1861558837	$10^{-295}$	2.331766791336617442e-01	1.5535432551
$10^{-11}$	2.455366327977460663e-01	1.5428080105	$10^{-296}$	2.331766791336616882e-01	2.0205263955
$10^{-12}$	1.916368040897333251e-01	2.0289612305	$10^{-297}$	2.331766791336616606e-01	2.2919747234
$10^{-13}$	1.569066828256521631e-01	2.4108292172	$10^{-298}$	2.331766791336617697e-01	1.2874625495
$10^{-14}$	2.235238427564558248e-01	1.3879137669	$10^{-299}$	2.331766791336617497e-01	1.4753293301
...	...	...	$10^{-300}$	2.331766791336616618e-01	2.5595890353

Из табл. 3.13 следует, что при  $\Delta \rightarrow 0$   $r$ -характеристика стремится к значению  $0.233176679133661\dots$ , то есть к значению функции Вейерштрасса в точке  $x_0 = 0,1$ .

В общем случае, для непрерывной функции предельная  $r$ -характеристика в точке  $x_0$  равна модулю функции в этой точке. Для функции Вейерштрасса можно записать

$$r(a, b, x_0) = |\omega(a, b, x_0)|.$$

Зависимость  $r$ -характеристики от интервала  $\Delta$  имеет ярко выраженный характер, если интервал, на котором определяется  $r$ -характеристика по формуле (3.2.1), существенно меньше периода функции Вейерштрасса, равному, как уже отмечалось выше, двум. Если интервал  $\Delta > 2$ , то  $r$ -характеристика функции Вейерштрасса весьма слабо зависит от  $\Delta$ , что легко объяснимо периодическим характером в расположении отсчетов значений функции в различных точках «большого» интервала.

На рис. 3.20 показаны значения  $r$  характеристики  $w(0,7; 7; 0,1 + \Delta)$  в зависимости от величины интервала  $\Delta$ , на котором эти характеристики определяются.



Рис. 3.20. Зависимость  $r$ -характеристики от значения интервала  $\Delta$ .

Под предельным значением  $\varphi$ -характеристики понимается характеристика, определяемая при интервале  $\Delta \rightarrow 0$ . Из табл. 3.13 видно, что модуль  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса, устанавливаемой по формуле (3.2.2), при  $\Delta \rightarrow 0$  не стремится к определенному значению. На рис. 3.21 показаны значения модуля  $\varphi$ -характеристики в зависимости от величины интервала  $\Delta$ , на котором эта характеристика определяется.

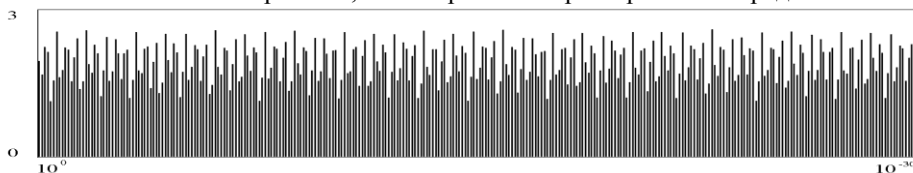


Рис. 3.21. Зависимость модуля  $\varphi$ -характеристики от значения интервала.

Для получения модуля предельной  $\varphi$ -характеристики следует использовать операцию усреднения, аналогичную операции, проводимой при получении  $r$ -характеристики:

$$\varphi(a, b, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^n \varphi(a, b, [x_0, x_0 + R^{-i}])}, \quad (3.2.3)$$

где  $R > 1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

В табл. 3.14 приведены значения модулей предельной  $\varphi$ -характеристики при различном числе  $\varphi$ -характеристик, полученных на интервалах  $\Delta_i = 10^{-i}$  по формуле (3.2.3).

Таблица 3.14

**Значения модулей предельных  $\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $W(7;0,7;0,1)$**

Число значений, $k$	Модуль усредненной $\varphi$ -характеристики	Число значений, $k$	Модуль усредненной $\varphi$ -характеристики
1	1.9568817310	285	1.8755585502
2	1.8144397655	286	1.8768868123
3	1.9472944675	287	1.8776814058
4	1.9925627512	288	1.8748081017
5	1.7820856839	289	1.8741929179
6	1.7420707722	290	1.8760369855
7	1.8394829242	291	1.8747650166
8	1.8105341312	292	1.8745982277
9	1.8057861881	293	1.8758181960
10	1.8445363667	294	1.8768519330
11	1.8732500759	295	1.8756535553
12	1.8431984763	296	1.8761234806
13	1.8568632528	297	1.8773843449
14	1.8918162828	298	1.8750174065
15	1.8531526461	299	1.8735196368
...	...	300	1.8754628045

Из табл. 3.14 следует, что при увеличении числа модулей  $\varphi$ -характеристик модуль усредненной  $\varphi$ -характеристики стремится к определенному значению, а именно 1.875....

На рис. 3.22 показаны значения модулей предельных  $\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $W(7;0,7;0,1)$  в зависимости от числа  $\varphi$ -характеристик.

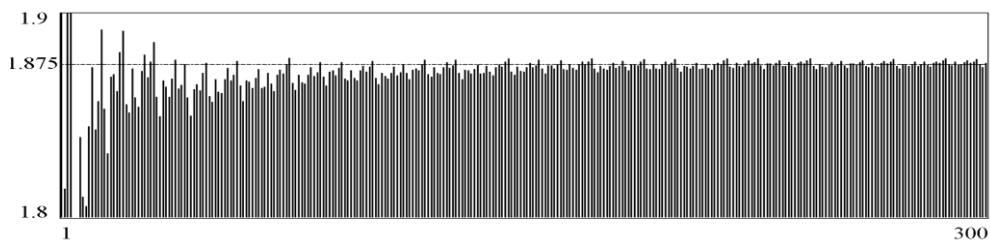


Рис. 3.22. График модулей предельных  $\varphi$ -характеристик.

Опираясь на проведенные исследования, можно ввести в рассмотрение некоторую модификацию функции Вейерштрасса, которую назовём «функцией Вейерштрасса на интервале» и обозначим  $\bar{w}(a, b, [x_0, x_0 + \Delta])$ . Эта функция определена не значением функции в произвольной точке  $x$  бесконечного интервала, как то имеет место в классическом случае, а совокупностью равномерно распределенных значений функции Вейерштрасса

на фиксированном интервале изменения переменной. При этих условиях «функция Вейерштрасса на интервале» имеет единственные  $r$  и  $\varphi$ -характеристики, определённые выше. При интервале, стремящемся к нулю,  $r$ -характеристика функции Вейерштрасса совпадает со значением модуля функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ . Показано, что при усреднении значений  $\varphi$ -характеристик, полученных на различных интервалах при  $\Delta \rightarrow 0$ , имеет место предельная  $\varphi$ -характеристика, отличная от нуля или от  $\pi$ . Следовательно, разность  $w(x_i) - w(x_0)$  при  $x_i \rightarrow x_0$  бесконечное число раз меняет знак.

Метод  $r/\varphi$ -характеристик может быть использован для анализа других быстро осциллирующих функций. Так как при построении метода  $r/\varphi$ -характеристик основные идеи заимствованы из ранее построенного алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей, то предложенный способ анализа быстро осциллирующих функций можно рассматривать в качестве одного из приложений  $r/\varphi$ -алгоритма.

### 3.3. Алгоритм определения знака $\varphi$ -характеристики

Как и в случае  $r/\varphi$ -алгоритма, формула (3.2.2) определяет модуль  $\varphi$ -характеристики. Знак  $\varphi$ -характеристики устанавливается также из анализа динамики в распределении «отсчетов», в данном случае – из анализа значений функции Вейерштрасса на равномерно делимом интервале  $\Delta$ . Следует однако отметить, что характер распределений отсчетов в случае функции Вейерштрасса значительно сложнее, чем в случае, имевшем место при определении аргумента комплексного числа при суммировании расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей. Для определения знака  $\varphi$ -характеристики используется алгоритм, описанный ниже. Алгоритм имеет два варианта, в зависимости от значения модуля угла  $\varphi$ :

1. Пусть имеются отсчёты функции Вейерштрасса (рис. 3.23). Для простоты описания алгоритма примем, что уровень  $x_0$ , то есть уровень, определяемый значением функции в точке  $x_0$ , равен нулю, то есть совпадает с осью  $x$ .

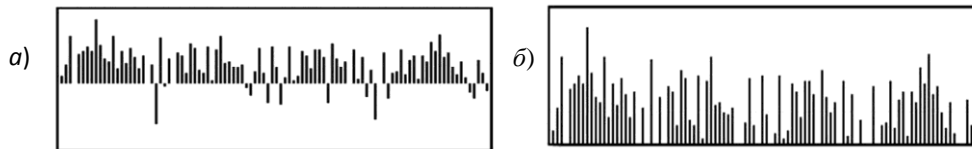


Рис. 3.23. Отсчеты значений функции Вейерштрасса.

Так как положительных отсчётов больше отрицательных, то по формуле (3.2.2) имеем:  $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ . Анализируются пары с положительными значениями функции, находящиеся или в соседних точках  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , или на минимальном друг от друга расстоянии, если положительные отсчёты разделяют отрицательные отсчёты. Следовательно, анализируем только пары положительных отсчётов (рис. 3.23 б).

Итак, можно сформулировать алгоритм определения знака  $\varphi$ -характеристики:

*Если модуль  $\varphi$ -характеристики, установленный по формуле (3.2.2), лежит в интервале  $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , то знак  $\varphi$ -характеристики будет положительным, если на принятом интервале  $\Delta$  среди положительных отсчетов число «убывающих» пар отсчетов значений функции Вейерштрасса в соседних точках составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар отсчетов принадле-*



жит к множеству «возрастающих» пар, то знак  $\varphi$ -характеристики будет отрицательным.

2. Если по формуле (3.2.2) получаем, что  $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi$ , то отсчеты функции с отрицательными значениями составляют большинство (рис. 3.24 а).

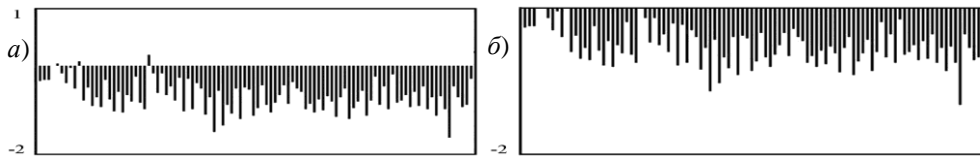


Рис. 3.24. Отсчеты значений функции Вейерштрасса с «отрицательным преобладанием».

Так как большинство из отсчетов отрицательные, то анализ пар, будем производить среди модулей отрицательных отсчетов (рис. 3.23 б).

Запишем «ветвление» алгоритма определения знака:

Если модуль  $\varphi$ -характеристики, установленный по формуле (3.2.2), лежит в интервале  $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi$ , то знак угла  $\varphi$  будет положительным, если на принятом интервале  $\Delta$  число убывающих по модулю пар отсчетов значений функции Вейерштрасса в соседних точках составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар отрицательных отсчетов, взятых по модулю, принадлежат к множеству «возрастающих» пар, то знак  $\varphi$ -характеристики будет отрицательным.

#### 3.4. Предельные $r/\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса

В табл. 3.15 приведены значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $W(9;0,7;1,3)$  при различных интервалах  $\Delta$ . Интервалы делятся на 4096 подинтервалов. Погрешность при вычислении функции Вейерштрасса  $\epsilon = 10^{-19}$ , число членов ряда (3.1.1)  $n = 130$ , количество двоичных разрядов при вычислении  $q = 413$ .

Таблица 3.15

Значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $W(9;0,7;1,3)$  при различных интервалах  $\Delta$

Интервал, $\Delta$	$r$ -характеристика	Модуль $\varphi$ -характеристики	Интервал, $\Delta$	$r$ -характеристика	Модуль $\varphi$ -характеристики
$10^0$	5.46564107533792592e-01	0.43707781610	$10^{-10}$	3.32615049946075383e-01	0.90866177557
$10^{-1}$	2.96146003170371750e-01	0.86648760033	$10^{-11}$	3.31785551706131767e-01	0.52679378887
$10^{-2}$	2.57240645235534283e-01	0.42404216193	$10^{-12}$	3.40401159599534913e-01	1.03288389170
$10^{-3}$	1.50482545031747610e-01	0.60577451705	...	...	...
$10^{-4}$	1.38837229518570280e-01	0.52526018250	$10^{-95}$	3.45756030760278016e-01	0.56360034181
$10^{-5}$	1.81426979364141637e-01	0.46928354991	$10^{-96}$	3.45756030760278209e-01	1.08349290201
$10^{-6}$	2.31555182798778094e-01	0.65331631459	$10^{-97}$	3.45756030760278193e-01	0.67632041017
$10^{-7}$	2.85425658038011290e-01	0.53752903348	$10^{-98}$	3.45756030760278292e-01	1.32810311842
$10^{-8}$	3.14973036486336087e-01	0.80284293588	$10^{-99}$	3.45756030760278247e-01	0.61420935209
$10^{-9}$	3.15059642486667364e-01	0.47925199133	$10^{-100}$	3.45756030760278307e-01	1.46766129833

При определении предельной  $r$ -характеристики представляет интерес не само значение этой характеристики, которое, в силу непрерывности функции Вейерштрасса, заведомо равно значению модуля функции Вейерштрасса в точке  $x_0$ , а скорость, с которой эта характеристика устанавливается при стремлении  $x$  к точке  $x_0$  в зависимости от параметров « $a$ » и « $b$ » функции Вейерштрасса.

Под предельным значением  $\varphi$ -характеристики понимается характеристика, определяемая при интервале  $\Delta \rightarrow 0$ . Из табл. 3.15 видно, что значения модуля  $\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса, устанавливаемые по формуле (3.2.2), при  $\Delta \rightarrow 0$  не стремятся к определенному значению.

Для получения модуля предельной  $\varphi$ -характеристики следует использовать операцию, аналогичную операции, проводимой при получении  $r$ -характеристики. В табл. 3.16 приведены значения модулей предельных  $\varphi$ -характеристик по формуле (3.2.3).

Таблица 3.16

**Значения модулей предельных  $\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $w(9; 0,7; 1,3)$**

Число значений характеристик	Модуль предельной $\varphi$ -характеристики	Число значений характеристик	Модуль предельной $\varphi$ -характеристики
1	0.43707781610	12	0.58328993830
2	0.61540434515	13	0.60950076589
3	0.54355486298	14	0.61164939512
4	0.55848342601	15	0.64209531041
5	0.55167477606	...	...
6	0.53700108268	95	0.65301878649
7	0.55225443238	96	0.65643645266
8	0.55039192015	97	0.65663636834
9	0.57397062367	98	0.66132493990
10	0.56371175534	99	0.66083633870
11	0.58871710210	100	0.66607774851

Из табл. 3.16 следует, что модуль предельной  $\varphi$ -характеристики стремится к определенному значению, а именно, к 0.666...

На рис. 3.25 показаны значения модулей предельных модулей  $\varphi$ -характеристик в зависимости от количества “текущих” значений  $\varphi$ -характеристик.



Рис. 3.25. График модулей предельных  $\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса  $w(9; 0,7; 1,3)$ .

### 3.5. Значения $r/\varphi$ -характеристик в зависимости от координаты $x$

В табл. 3.17 показаны результаты вычисления  $r/\varphi$ -характеристик для функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9, b = 0,7$  в различных точках  $x_i$ . Значения  $r/\varphi$ -характеристик находились на интервале  $\Delta = 2$ , совпадающем с периодом функции Вейерштрасса. При вычислениях  $r/\varphi$ -характеристик в точке  $x_i$  интервал  $\Delta = 2$  делился на  $2^{15}$  подинтервалов. Шаг изменения  $x_i$  равнялся 0,001.

Таблица 3.17

**Значения  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса в различных точках  $x_i$**

Значения $x_0$	Значение функции	$r$ -характеристика	$\varphi$ -характеристика
0.001	1.619882506e+00	5.4987165570e-01	2.9769823638e+00
0.002	2.148800089e+00	5.4541974082e-01	3.0644166004e+00
0.004	1.898649340e+00	5.5825585821e-01	3.1038195294e+00
0.008	1.844134390e+00	5.5337883964e-01	3.0768798140e+00
0.016	1.454766248e+00	5.5264858149e-01	2.6747014997e+00

Окончание табл. 3.17

0.032	1.033087932e+00	5.4445246568e-01	2.8339430205e+00
0.064	2.625692622e-01	5.5807695260e-01	2.1276622955e+00
0.128	6.829734706e-01	5.5427436099e-01	2.3897732636e+00
0.256	1.075349051e+00	5.4798075801e-01	2.2770291164e+00
0.512	-3.314627852e-01	5.5196817900e-01	-7.5450377441e-01
1.024	-2.015582900e+00	5.4535572003e-01	1.1466156470e-01

На рис. 3.26 показана зависимость  $r$ -характеристики от  $x$ :

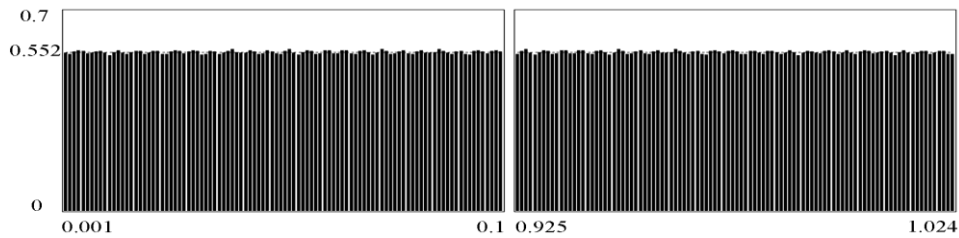


Рис. 3.26. Значения  $r$ -характеристики при различных  $x_i$ .

На рис. 3.27 представлен график, построенный по  $r/\varphi$ -характеристикам для 4096-х различных точек  $x_i$ .

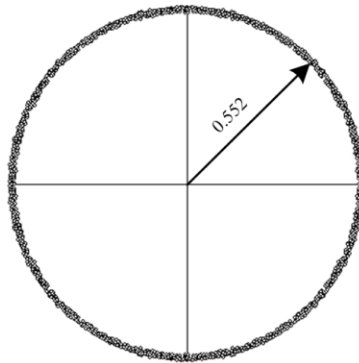


Рис. 3.27. Отображение на плоскости  $r/\varphi$ -характеристик функции Вейерштрасса в зависимости от  $x_i$ .

Продолжим экспериментальное исследование функции Вейерштрасса.

Ряд (3.1.1) мажорируется сходящимся рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ ,  $0 < b < 1$ , поэтому функция Вейерштрасса определена и непрерывна при всех вещественных  $x$ .

На рис. 3.28 представлен график функции Вейерштрасса на интервале  $-3 \leq x \leq 3$  при  $a = 5$  и  $b = 0,5$ . Всего показано 8192 значений функций.

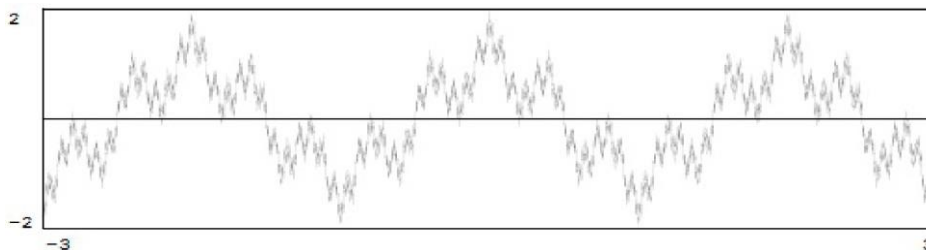


Рис. 3.28. График функции Вейерштрасса,  $W(5;0,5)$

На рис. 3.29 представлен график функции Вейерштрасса при  $a = 9$  и  $b = 0,6$ . На интервале  $-2 \leq x \leq 2$  показано 8192 значений функции.

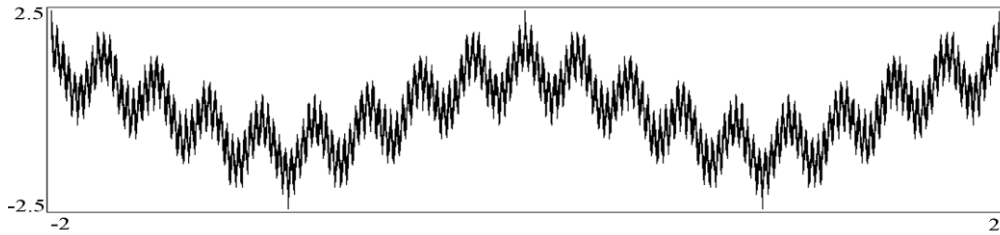


Рис. 3.29. График функции Вейерштрасса.

В литературе имеется небольшое число публикаций, в которых приводились результаты экспериментального изучения классической функции Вейерштрасса. В этом параграфе приведены графики функции Вейерштрасса на интервалах  $\Delta$  при различных параметрах  $a$  и  $b$  (рис. 3.30 – 3.34).

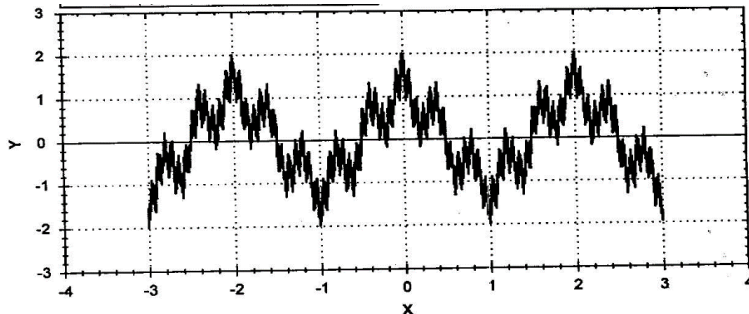


Рис. 3.30. График функции Вейерштрасса  $w(0,5; 5)$  при  $-3 < x < 3$

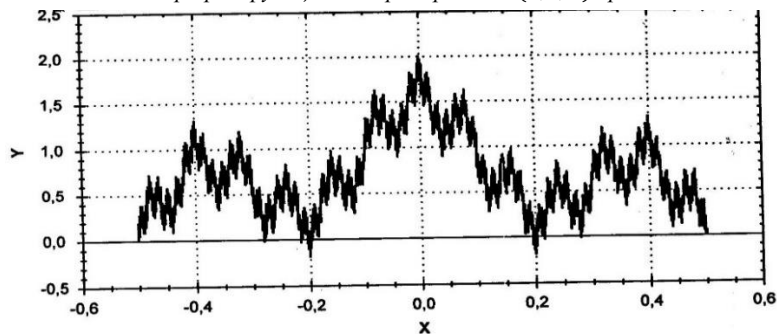


Рис. 3.31. График функции Вейерштрасса  $w(0,5; 5)$  при  $-0,5 < x < 0,5$

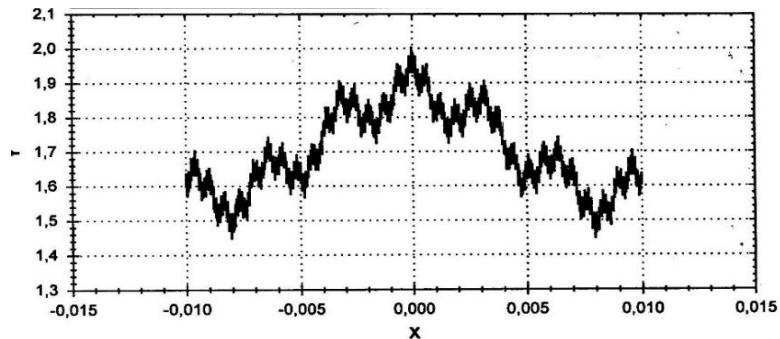


Рис. 3.32. График функции Вейерштрасса  $w(0,5; 5)$  при  $-0,01 < x < 0,01$

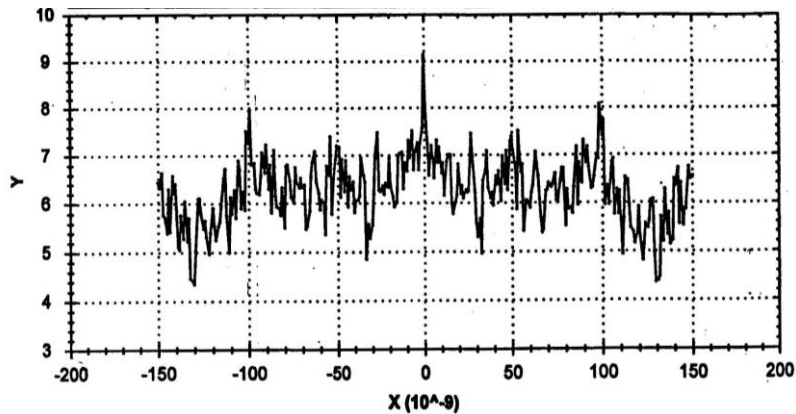


Рис. 3.33. График функции Вейерштрасса  $w(0,9;7)$  при  $-10^{-7} < x < 10^{-7}$

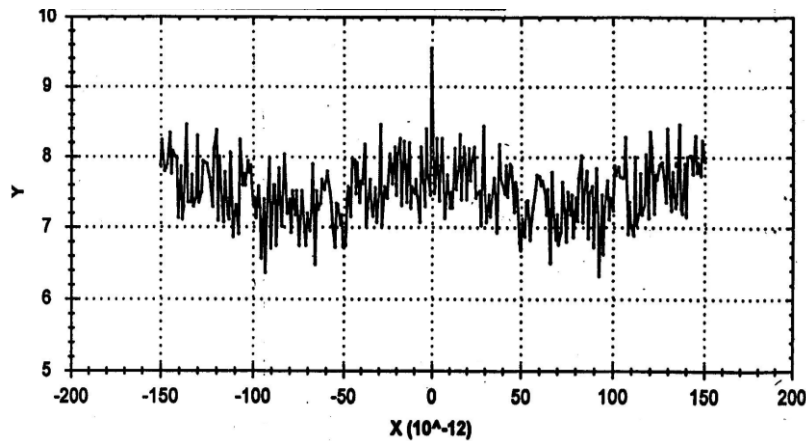


Рис. 3.34. График функции Вейерштрасса  $w(0,9;7)$  при  $-1,5 \cdot 10^{-10} < x < 1,5 \cdot 10^{-10}$

### 3.6. Определение функции Вейерштрасса цепными дробями

Построим по ряду Вейерштрасса, так называемую, соответствующую цепную дробь. В [70] были рассмотрены многочисленные соответствующие непрерывные дроби для элементарных и специальных функций. Соответствующие цепные дроби, как правило, представляют функции в более широкой области, нежели ряды, а также имеют более высокую скорость сходимости. Соответствующие цепные дроби могут быть установлены по степенным рядам, которыми представляются функции. Помимо формул Хейлманна – Стильеса и формул Хлопонина, известны рекуррентные алгоритмы для определения коэффициентов соответствующих непрерывных дробей, например, алгоритмы Висковатова, Никипорца, Рутисхаузера. Запишем алгоритм Рутисхаузера [115] и приведем граф этого алгоритма.

Определим для ряда:

$$a_{00} + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n-1} + \dots \quad (3.6.1)$$

коэффициенты  $a_{n0}$  соответствующей цепной дроби:

$$a_{00} + \frac{a_{10}}{1 - \frac{a_{20}}{1 + \frac{a_{30}}{1 - \frac{a_{40}}{1 + \frac{a_{50}}{1 - \dots - \frac{a_{2n,0}}{1 + \frac{a_{2n+1,0}}{1 - \dots}}}}}}}} \quad (3.6.2)$$

Коэффициенты цепной дроби (3.6.2) находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2,v} &= \frac{\alpha_{1,v+1}}{\alpha_{1,v}}, \\
 \alpha_{3,v} &= -\alpha_{2,v+1} + \alpha_{2,v}, \\
 \alpha_{4,v} &= \frac{\alpha_{2,v+1} \cdot \alpha_{3,v+1}}{\alpha_{3,v}}, \\
 \alpha_{5,v} &= \alpha_{3,v+1} - \alpha_{4,v+1} + \alpha_{4,v}, \\
 &\dots \\
 \alpha_{2n,v} &= \frac{\alpha_{2n-2,v+1} \cdot \alpha_{2n-1,v+1}}{\alpha_{2n-1,v}}, \\
 \alpha_{2n+1,v} &= \alpha_{2n-1,v+1} - \alpha_{2n,v+1} + \alpha_{2n,v}.
 \end{aligned}
 \tag{3.6.3}$$

Схема Рутисхаузера, определяемая формулами (3.6.3), показана на рис. 3.35.

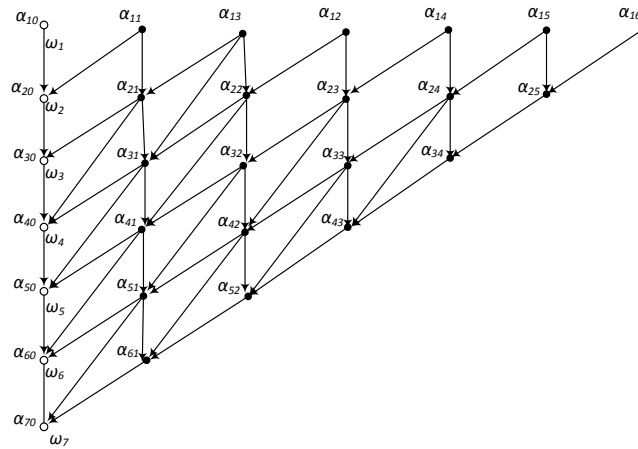


Рис. 3.35. Схема алгоритма Рутисхаузера.

Коэффициенты цепной дроби  $\alpha_{n0}$  будем обозначать символом с одним индексом, то есть положим  $\alpha_{n0} = \omega_n$ .

Вычислим функцию Вейерштрасса (3.1.1) при  $a = 7; b = 0,9; x_0 = 0,1$  преобразованием ряда в соответствующую цепную дробь. Разрядность переменных 5000 бит. В табл. 3.18 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби для функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,1)$ .

Таблица 3.18

Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,1)$

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	0.951056516295	0.951056516295
1	-0.529006727063	0.422049789232
2	1.456230589874	2.110572644331
3	2.012461179749	-0.072964113728
4	0.556230589874	0.233176679133
5	-2.52539e-1202	

Так как  $\omega_5 = \alpha_{50} = 0.513 \cdot 10^{-1202}$ , то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 3.18, в цепную дробь вида (3.6.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7; 0,9; 0,1) = 0,951057 - \frac{0,529006}{1} - \frac{1,456230}{1} + \frac{2,012461}{1} - \frac{0,556231}{1} = 0,233177.$$

В табл. 3.19 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные, построенных из исходных рядов (3.1.1), представляющих функцию Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в тех же рациональных точках  $x$ , что использовались при вычислении функции Вейерштрасса рядами.

Таблица 3.19

**Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби для различных значений  $x$**

Аргумент, $x$	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,1	2.331766791336617435716044056376e-1	-2.52539e-1202	5
0,2	2.794219470723656539001207061675e+0	-1.13488e-1201	5
0,3	7.976442635127686983831499197129e-1	2.80477e-1201	5
0,4	-2.20578052927634346099879293832e+0	9.60665e-1201	5
0,6	2.205780529276343460998792938324e+0	-1.25450e-1200	5

Из колонки 3 табл. 3.19 видно, что цепные дроби, представляющие функцию Вейерштрасса в рациональных точках  $x = 0,1; 0,2; 0,3, \dots$  конечны, так как пятые частные числители цепных дробей близки к нулю. Сравнивая вторые колонки табл. 3.3 и табл. 3.19 можно заключить, что значения функций Вейерштрасса, определенные рядами и цепными дробями, совпадают. Причем, для вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,1)$  с точностью 45 десятичных знаков требуется 1024 членов ряда, в то время как при “точном” вычислении этой же функции соответствующая цепная дробь имеет всего четыре звена. Очевидна вычислительная эффективность цепных дробей в сравнении с рядами.

Соответствующие цепные дроби для функции Вейерштрасса будут конечными в произвольных рациональных точках  $x$ , заданных числами с конечным числом десятичных разрядов.

В табл. 3.20 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$  в точке  $x = 0,111$ .

Таблица 3.20

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,111)$**

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	0.939811951086	0.939811951086
1	-0.688024378281	0.251787572805
2	0.224232938784	0.052916370340
3	4.825758794111	0.224245482975
4	4.357264191278	0.484961931198
5	-0.255710922537	0.958313937066
...	...	...
31	-19.071794834810	-0.093790187744
32	-18.717927452156	-0.131787400445
33	0.37484e-9004	

В табл. 3.21 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные дроби, построенных из исходных рядов (3.1.1) с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$ . Переменные  $x$  имеют три десятичных разряда:  $x = 0,111$ ;  $x = 0,222$ ;  $x = 0,333$ ; ...

Таблица 3.21

**Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби при различных значениях  $x$** 

Аргумент, $x$	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,111	-0.1317874004452739846525173072027e0	0.37484e-9004	33
0,222	-0.1530569770194524217559734019612e0	0.10853e-9004	33
0,333	0.12088194190984092396183752849618e1	0.19338e-9005	33
0,444	0.11463808279503072984087704261067e1	0.23072e-9018	17
0,555	0.89346677457495307448235913713774e0	0.32041e-9024	9
0,666	-0.9164091146439475946496679047149e0	-0.18714e-9004	33
0,777	-0.1190665946146215174923275561407e1	-0.66182e-9005	33
0,888	0.10228533583044874671171509840906e0	0.195129e-9017	17
0,999	-0.23351462022290565773815456526942e1	-0.58527e-9005	33
1,111	0.131787400445273984652517307202751e0	-0.48127e-9005	33

В табл. 3.22 приведены значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$ , определенные при помощи ряда (3.1.1) в тех же точках  $x$ , в которых значения функции устанавливались конечными цепными дробями.

Таблица 3.22

**Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда для различных значений  $x$** 

Аргумент, $x$	Значения функции Вейерштрасса
0,111	-0.1317874004452739846525173072027e0
0,222	-0.1530569770194524217559734019612e0
0,333	0.12088194190984092396183752849618e1
0,444	0.11463808279503072984087704261067e1
0,555	0.89346677457495307448235913713774e0
0,666	-0.9164091146439475946496679047149e0

Сравнивая вторые колонки табл. 3.21 и табл. 3.22 можно отметить совпадение значений функций Вейерштрасса, вычисленные по различным алгоритмам, – при помощи рядов и цепных дробей.

В табл. 3.23 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$  в точке  $x = 0,222222$ .

Таблица 3.23

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,222222)$** 

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, $P_{n+1}/Q_{n+1}$
0	0,7660448919	0,7660448919
1	0,1562790285	0,9223239204
2	-4,8704010562	0,7926664169
3	-4,136577979	0,4833329437
4	-0,1660285263	0,5946467407
5	-0,0014186983	0,5947479255
...	...	...
797	0,6909124693	0,0122795277
798	-9,4798262229	0,0122795277
799	-10,3483975575	0,0122795277
800	-0,7585597831	0,0122795277
801	4.156312e-150	

Так как  $\alpha_{801,0} = 4,1563 \cdot 10^{-150}$ , то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке



табл. 3.23, в цепную дробь вида (3.6.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7; 0, 9; 0, 222222) = 0,766044 + \frac{0,156279}{1} - \frac{4,870401}{1} + \dots - \frac{10,348397}{1} + \frac{0,758559}{1} = 0,012279 \dots$$

В табл. 3.24 приведены результаты определения значений функции Вейерштрасса через соответствующие цепные дроби, построенных из исходных рядов (3.1.1) с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$ . Переменные  $x$  имеют шесть десятичных разряда:  $x = 0,111111$ ;  $x = 0,222222$ ;  $x = 0,333333$ ;  $x = 0,444444$ .

Таблица 3.24

**Значения функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби при различных значениях  $x$**

Аргумент, $x$	Значения функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепной дроби	Номер конечного звена дроби
0,111111	-0.2891258132695	0.1563119e-152	1601
0,222222	0.0122795276749	4.1563119e-150	801
0,333333	3.6761809804422	-2.4201470e-155	801
0,444444	-1.2241731996156	-1,6155829e-327	801

В табл. 3.25 приведены значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$ , определенные при помощи ряда (3.1.1) в тех же точках  $x$ , в которых значения функции устанавливались конечными цепными дробями.

Таблица 3.25

**Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи рядов для различных значений  $x$**

Аргумент, $x$	Значения функции Вейерштрасса
0,111111	-0.2891258132695
0,222222	0.0122795276749
0,333333	3.6761809804422
0,444444	-1.2241731996156

Сравнивая вторые колонки табл. 3.24 и табл. 3.25 можно отметить совпадение значений функций Вейерштрасса, вычисленных по различным алгоритмам, – при помощи рядов и цепных дробей.

В табл. 3.26 приведены коэффициенты соответствующей цепной дроби, построенной для функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$  в точке  $x = 0,111111$ .

Таблица 3.26

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 111111)$**

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, $P_{n+1}/Q_{n+1}$
1	-0.6894398575	0.25025277527398164842548187180206949407052444307592
2	0.204015458	0.073545338271625997303649263732588407086166927334005
3	5.074316153	0.22629209666383923025767635037413900346183614984639
4	3.970351901	0.40442430134219747631843686626752581177610436345982
5	0.9604274562e-4	0.40438724915757798813700678464216544531663851145265
...	...	...
7997	7.906047051	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841

Окончание табл.3.26

7998	156.1613173	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
7999	121.2765738	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
8000	-0.00015947556	1.5470951952130667406297858904052419907439269167841
8001	-0.8213866354e-2269	

Так как  $\alpha_{8001,0} = -0,8213e^{-2269}$ , то полученная соответствующая цепная дробь конечная. Подставляя коэффициенты цепной дроби, приведенные во второй колонке табл. 3.26, в цепную дробь вида (3.3.2), получим конечную соответствующую цепную дробь, представляющую функцию Вейерштрасса:

$$w(7;0,9;0,1111111) = -0,689439\dots + \frac{0,204015\dots}{1} - \frac{5,074316\dots}{1} + \dots + \frac{121,276573\dots}{1} - \frac{-0,000159\dots}{1} = 1,547095\dots$$

Значения функции Вейерштрасса, установленные при помощи ряда в точке  $x = 0,1111111$ , также равно величине  $1,5470951952130\dots$ , которая была установлена через цепные дроби (табл. 3.26).

Функция Вейерштрасса (3.1.1), как известно, определена при  $b < 1$ . При  $b > 1$  ряд (3.1.1) – расходящийся. Значения расходящегося ряда (3.1.1) при  $b > 1$  можно установить через соответствующие цепные дроби.

Определим обобщённую функцию Вейерштрасса  $w(a, b, x)$  как соответствующую цепную дробь вида, построенную для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \tag{3.6.4}$$

где  $|b| > 0$ ,  $a$  – нечетное натуральное число,

При  $0 < b < 1$  имеем, как частный случай, классическую функцию Вейерштрасса, представленную сходящимся рядом (3.1.1), или соответствующей цепной дробью (3.6.2), построенной по коэффициентам этого ряда.

Если точка  $x$ , в которой определяется значение обобщённой функции Вейерштрасса, представлена числом с конечным числом десятичных разрядов, то соответствующая цепная дробь, которая собственно определяет эту функцию, будет конечной, как то имеет место при представлении цепной дробью классической функции Вейерштрасса (3.1.1).

Во второй колонке табл. 3.27 помещены коэффициенты цепной дроби, представляющей обобщённую функцию Вейерштрасса с параметрами  $a = 7; b = 1,9$  в точке  $x = 0,1$ .

Таблица 3.27

*Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей обобщённую функцию Вейерштрасса в точке  $w(7; 1, 9; 0, 1)$*

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	0.951056516295	0.951056516295
1	-1.116791979541	-0.165735463060
2	3.074264579213	1.489460339445
3	4.248529157256	-1.744804568807
4	1.174264579351	-0.035951293506
5	0.108462e-1501	

Четвертая подходящая дробь определяет значение обобщённой функции Вейерштрасса, полученное суммированием расходящегося ряда (3.6.4), при  $a = 7; b = 1,9; x = 0,1$  через соответствующую цепную дробь, найденную по алгоритму Рутисхаузера,

описываемому формулами (3.6.3). Производная обобщенной функции Вейерштрасса  $w(7; 1,9)$  в точке  $x = 0,1$  равна  $0.19770373570561$ . Пятый коэффициент цепной дроби для производной функции  $w(7; 1,9)$  в точке  $x = 0,1$  равен  $-0.398e-1501$ .

В табл. 3.28 даны коэффициенты соответствующей цепной дроби для функции  $w(7; 1,9)$  в точке  $x = 0,111$ . Последняя, тридцать вторая, подходящая дробь, определяет значение обобщенной функции Вейерштрасса  $w(7; 1,9)$  в точке  $x = 0,111$ .

Таблица 3.28

*Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей обобщенную функцию Вейерштрасса в точке  $x = 0,111$*

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	0.939811951086	0.939811951086
1	-1.452495912658	-0.512683958618
2	0.473380648575	-1.818339464525
3	10.187713011258	-0.576858135091
4	9.198668848963	0.447646380374
5	-0.539834169878	69.213058376730
...	...	...
28	6.351799878789	-0.249475671627
29	-0.725494238896	-7.407455641224
30	-0.034855245524	-8.850496019138
31	-40.262677968236	-7.376998634760
32	-39.515624614879	0.027178664886
33	0.71063e-1480	

Значение производной обобщенной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 1,9$  в точке  $x = 0,111$  равно  $0.08297651645874$ . Тридцать третий коэффициент конечной цепной дроби, представляющий производную обобщенной функции Вейерштрасса  $w(7; 1,9)$  в точке  $x = 0,111$ , равен  $-0.651e-1478$ .

### 3.7. Нахождение производной функции Вейерштрасса цепными дробями.

Применение цепных дробей позволило установить значения производной функции Вейерштрасса в рациональных точках, имеющих представление десятичной дробью с конечным числом разрядов. Прием суммирования расходящихся рядов построением, так называемых, соответствующих дробей, можно использовать при изучении других быстро осциллирующих функций, которые не имеют производных в классическом смысле.

Как уже отмечалось, установлено, что при  $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$  функция Вейерштрасса

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

не имеет производной в классическом смысле, т.е. не существует предела

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.7.1)$$

ни при каком значении  $x$ . Более того, Н. Харди [43] показал, что функция Вейерштрасса (3.1.1) не имеет производной и при  $ab > 1$ .

Определим производную функции Вейерштрасса из расходящегося ряда, которым производная функции Вейерштрасса может быть формально представлена:

$$w'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]. \quad (3.7.2)$$

Построим для расходящегося ряда (3.7.2) с параметрами  $a = 7; b = 0,9; x = 0,1$  соответствующую цепную дробь. Была получена конечная цепная дробь, причем, число звеньев этой цепной дроби такое же, как и в случае цепной дроби, построенной по сходящемуся ряду (3.1.1), представляющему функцию Вейерштрасса с теми же параметрами.

В табл. 3.29 приведены значения коэффициентов конечной цепной дроби, найденной для производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7; b = 0,9$  в точке  $x = 0,1$ .

Таблица 3.29  
Значения коэффициентов цепной дроби, представляющую производную функции Вейерштрасса в точке  $x = 0,1$

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	-0.970805519363	-0.970805519363
1	-16.012091630793	-16.982897150156
2	2.406385870876	10.414470714125
3	-14.087228258249	-14.495984106989
4	-16.493614129124	0.438947974933
5	1,30211e-1501	

Следовательно, можем записать конечную цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса

$$w'(7; 0,9; 0,1) = -0,970805 - \frac{16,012091}{1} - \frac{2,406385}{1} - \frac{14,087228}{1} + \frac{16,493614}{1} = 0,438947$$

В табл. 3.30 показаны значения производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7; b = 0,9$  в серии рациональных точек:  $x = 0,1; x = 0,2; x = 0,3; \dots$

Таблица 3.30

Значения производной функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби в различных точках  $x$

Аргумент, $x$	Значения производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер "конечного" звена дроби
0.1	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	1.30211e-1501	5
0.2	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	1.16618e-1501	5
0.3	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	-1.06706e-1501	5
0.4	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	-5.53924e-1502	5
0.5	-4.3035515802599907376200594291500039509550265744865e-1	-3.39830e-1504	3
0.6	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	9.51526e-1502	5
0.7	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	2.279132e-1501	5
0.8	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	-4.66134e-1501	5
0.9	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	-1.10445e-1500	5
1.1	-4.3894797493294912660825500663464136289965439960119e-1	1.761655e-1500	5
1.2	-4.1722194169037467909295703880070490957108237720458e-1	8.08202e-1501	5

Найдем цепные дроби для производной функции Вейерштрасса в других рациональных точках, причем, в точках  $x$  с большим числом десятичных знаков. Во второй колонке табл. 3.31 имеются коэффициенты конечной цепной дроби, значение которой определяет производную функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7; b = 0,9$  в точке  $x = 0,111$ .

Таблица 3.31

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке  $x = 0,111$**

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\omega_n$	Значения подходящих дробей, $P_n/Q_n$
0	-1.073457415941	-1.073457415941
1	-12.759082751230	-13.832540167172
2	-9.593730933009	-2.277856775517
3	-8.134837372902	35.948877318004
4	-5.228667081790	-0.653042714684
5	-2.259478771726	-4.541690470137
...	...	...
28	-4.364340785423	-2.798291065816
29	-44.145082382365	34.970282748019
30	-44.368483683669	-26.636513449076
31	3.633816638510	82.596798624171
32	3.980892708365	0.152651178956
33	-4.25646e-1479	

В табл. 3.32 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в серии рациональных точек:  $x = 0,111$ ;  $x = 0,222$ ;  $x = 0,333$ ; ...

Таблица 3.32

**Значения производной функции Вейерштрасса, установленные через ценные дроби в различных точках  $x$**

Аргумент $x$	Значение производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев ценных дробей	Номер конечного звена дроби
0.111	1.5265117895643695651893300367688522926574754014192e-1	-4.25646e-1479	33
0.222	-4.2807511367387880114435151288631239346406015660738e-1	-5.66595e-1479	33
0.333	3.8168174156937645757911787896376217070351479656766e-1	-1.79850e-1478	33
0.444	-5.7206810595214165787580600646832446019812785358066e-1	-3.14017e-1492	17
0.555	4.0675357188496212279603999890764278713237363256503e-1	-3.87306e-1498	9
0.666	-3.5132007233052424871125997731754409216990406442564e-1	-1.11563e-1478	33
0.777	1.9462041188856063108295407652369018827207837280964e-1	-4.23894e-1478	33
0.888	7.8454993784100843004813091816480145881840379645092e-2	-1.75835e-1491	17
0.999	-1.479528281870200010750381976271329695422326502807e-1	1.29550e-1477	33
1.111	-1.5265117895643695651893300367688522926574754014193e-1	3.67141e-1479	33

В табл. 3.33 приведены коэффициенты конечной цепной дроби для производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,222222$ .

Таблица 3.33

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке  $x=0,222222$**

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, $P_{n+1}/Q_{n+1}$
0	-2,0193751523	-2,0193751523
1	19,4913650484	17,4719898961
2	-2,1881707922	4,0942763172
3	-14,0238061943	21,4081167697
4	-18,1397215545	0,1023857378
5	0,0285510428	-0,0387938579
...	...	...
797	-0,5746896483	-13,3023567439
798	-316,1175508901	-19,3952807426
799	-313,4270699003	94,6087767123
800	0,2741924574	0,0719814736
801	-2,086761283e-326	

В табл. 3.34 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в серии рациональных точек:  $x = 0,111111$ ;  $x = 0,222222$ ;  $x = 0,333333$ ;  $x = 0,444444$ .

Таблица 3.34

**Значения производной функции Вейерштрасса, установленные через цепные дроби в различных точках  $x$**

Аргумент, $x$	Значение производной функции Вейерштрасса	Значения конечных звеньев цепных дробей	Номер конечного звена дроби
0.111111	-0.062460305523185	0.2199911e-151	1601
0.222222	0.071981473618939	-2.0867613e-326	801
0.333333	9.844370595748815	-0.4870014e-326	801
0.444444	0.049322958204706	1.69615029e-325	801

В табл. 3.35 приведены коэффициенты конечной цепной дроби для производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,111111$ .

Таблица 3.35

**Значения коэффициентов цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса в точке  $x=0,111111$**

Номер звена дроби, $n$	Значения коэффициентов цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей, $P_{n+1}/Q_{n+1}$
1	-12.72207775	-13.796565615456274007760628406878074322380241332858
2	-9.652154262	-2.2688075728787350875689620640415853633950101669534
3	-7.464258537	24.722717191653413989183510344256858277365097915535
4	-4.112302708	-0.43775673782930637247202161194105127607921452156084
5	-0.001633467112	-0.44054510732139743954932620052652471803133335888112
...	...	...
7997	-4.754090929	21.662635866555299815577860969764365200888741124758
7998	-4161.168967	21.64327570874947548579682533526900802048181002832
7999	-4304.241892	-72.089370603999758561888834772805673356318803317038
8000	-0.0007055683769	0.42109879949037836246860181405984024606476927569621
8001	0.5287242942e-2268	

В [53] предложено иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей используется  $r/\varphi$  – алгоритм.

Несмотря на то, что понятия сходимости и расходимости относятся к бесконечным цепным дробям, определим эти понятия для конечных цепных дробей, беря термины в кавычки, указывая, тем самым, что рассматриваются конечные цепные дроби. Целесообразность введения понятий “сходимости” и “расходимости” применительно к конечным цепным дробям обусловлено тем обстоятельством, что в некоторых практически важных случаях решение задачи мы получаем именно в конечных цепных дробях, как, например, при решении систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей или при суммировании некоторых расходящихся рядов [74]. К конечным цепным дробям приходим и при определении производной функции Вейерштрасса в рациональных точках, представляемых числами с конечным числом десятичных разрядов.

Конечная цепная дробь с  $n$  звеньями

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \quad (3.7.3)$$

будет “сходиться”, если последовательность её подходящих дробей приближается к значению  $\frac{P_n}{Q_n}$ .

Если последовательность подходящих дробей (3.6.8) не приближается к значению конечной цепной дроби (3.6.7), то конечную цепную дробь (3.6.7) будем называть “расходящейся”.

Для определения значений “расходящихся” конечных цепных дробей, также, как и в случае расходящихся бесконечных цепных дробей, будем использовать, с некоторой модификацией,  $r/\varphi$  – алгоритм:

Конечная цепная дробь (3.7.3) имеет в общем случае комплексное значение  $z = r_n e^{i\varphi_n}$ . Модуль  $r_n$  и модуль аргумента  $|\varphi_n|$  определяются по формулам:

$$r_n = \sqrt{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|}, \quad (3.7.4)$$

$$|\varphi_n| = \pi \frac{k_n}{n}, \quad (3.7.5)$$

где  $P_i/Q_i$  – подходящие цепной дроби (6.7),  $k_n$  – число отрицательных подходящих из общего числа  $n$  подходящих дробей.

Здесь надо отметить, что сам факт конечности цепных дробей не имеет принципиального значения при определении их “сходимости” и “расходимости”, так как конечные цепные дроби могут включать сколь угодно большое число звеньев.

Перспективным подходом к изучению быстро осциллирующих функций является метод, связанный со способом суммирования расходящихся цепных дробей, именуемый как  $r/\varphi$ -алгоритм. Этот алгоритм дает возможность установить комплексные значения расходящихся в классическом смысле цепных дробей, имеющих вещественные звенья, и позволяет подойти к изучению производных быстро осциллирующих функций с принципиально новых позиций.

На рис. 3.36 приведены первые и последние сто подходящих дробей цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,222222$ . Конечная цепная дробь для производной функции Вейерштрасса в точке  $x = 0,222222$  с шестью десятичными разрядами содержит 8000 звеньев.

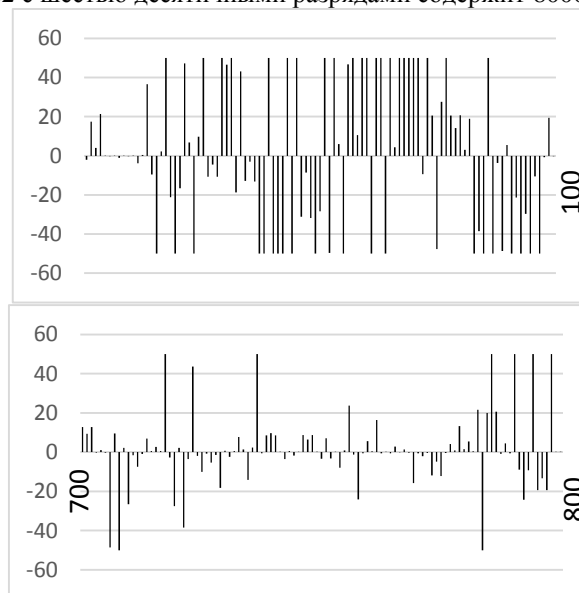


Рис. 3.36. Значения подходящих цепной дроби, представляющей производную  $w'(7;0,9;0,222222)$ .

Из рис. 3.36 видно, что цепная дробь, представляющая производную функции Вейерштрасса не сходится в классическом смысле.

В табл. 3.36 приведены результаты определения значений расходящейся в классическом смысле цепной дроби, которая получена для производной функции Вейерштрасса при помощи модифицированного  $r/\varphi$ -алгоритма. Для определения коэффициентов цепной дроби использовался алгоритм Рутисхаузера. Полученная цепная дробь – конечная, так как 801-й коэффициент этой цепной дроби близок к нулю:  $\alpha_{801,0} = -2,08676e-326$ .

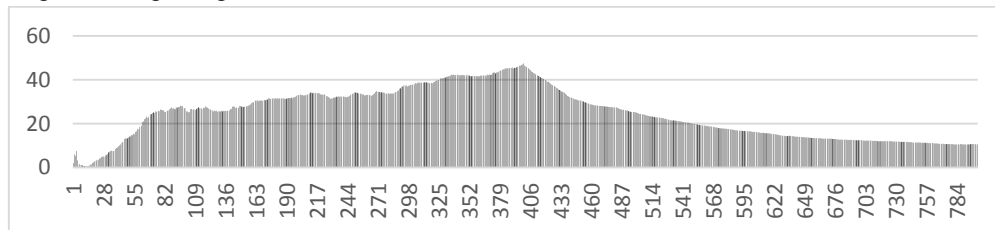
Таблица 3.36

**Определение комплексной производной функции Вейерштрасса  
с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,222222$**

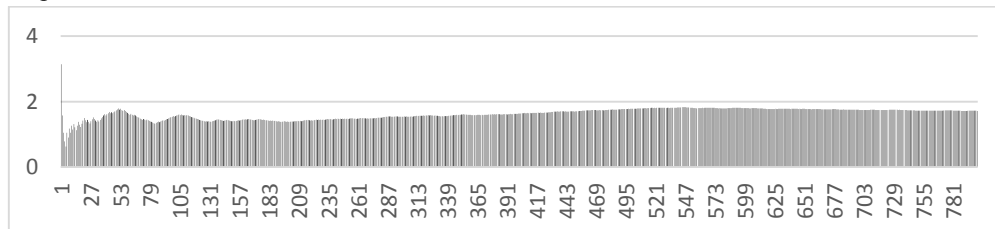
n	Коэффициенты ряда, $c_n$	Коэффициенты цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих, $P_{n+1}/Q_{n+1}$	Значения модуля $\Gamma_{n+1}$	Значения аргумента $\varphi_{n+1}$
0	-2,019375152	-2,019375152	-2,019375152	2,019375152	3,141592654
1	19,49136505	19,49136505	17,4719899	5,939907597	1,570796327
2	-42,6504357	-2,188170792	4,094276317	5,247013429	1,047197551
3	-504,7950067	-14,02380619	21,40811677	7,457250777	0,785398163
4	4875,186804	-18,13972155	0,102385738	3,163085208	0,628318531
5	-11006,63776	0,028551043	-0,038793858	1,518982969	1,047197551
...	...	...	...	...	...
795	-3,4214820e+635	-45,98182002	75,12667203	10,54416939	1,716825131
796	-3,0036140e+636	1,403436219	-19,4158875	10,55224954	1,718612794
797	2,0565214e+637	-0,574689648	-13,30235674	10,55531254	1,720395977
798	-1,9077442e+638	-316,1175509	-19,39528074	10,56335297	1,722174696
799	-5,0894769e+638	-313,4270699	94,60877671	10,59234101	1,720021978
800	-5,8928721e+639	0,274192457	0,071981474	10,52653946	1,717874635
801	5,8566322e+640	-2,08676e-326			

Таким образом, просуммировав при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма расходящуюся в классическом смысле цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,222222$ , получим значение комплексной производной:  $w'(7; 0,9; 0,222222) = 10,520 e^{i1,718}$ .

На рис. 3.37 показаны значения модуля  $r_n$  комплексного числа, являющегося значением “расходящейся” цепной дроби, представляющей производную функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,222222$ .

Рис. 3.37. Значение модуля  $r_n$  комплексного числа.

На рис. 3.38 приведены значения аргумента  $\varphi_n$  комплексного числа, представленного расходящейся цепной дробью, найденной для производной функции Вейерштрасса.

Рис. 3.38. Значение аргумента  $\varphi_n$  комплексного числа.



Аналогичным способом были установлены значения комплексных производных функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точках:  $x = 0,111111$  и  $x = 0,444444$ :

$$w'(7;0,9;0,111111) = 20,220 e^{i1,419}; \quad w'(7;0,9;0,444444) = 37,590 e^{i1,518}.$$

Применение цепных дробей позволило установить наличие производной функции Вейерштрасса в рациональных точках. Эти производные представлены конечными цепными дробями. Цепные дроби можно использовать при рассмотрении других функций, которые не имеют производных в классическом смысле.

В табл. 3.37 приведены результаты определения значений расходящейся в классическом смысле цепной дроби, которая получена для производной функции Вейерштрасса при помощи модифицированного  $r/\varphi$ -алгоритма. Для определения коэффициентов цепной дроби использовался алгоритм Рутисхаузера. Полученная цепная дробь – конечная, так как 8001-й коэффициент этой цепной дроби близок к нулю:  $\alpha_{8001,0} = 0,5287e^{-2268}$ .

Таблица 3.37

**Определение комплексной производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,111111$**

n	Коэффициенты цепной дроби, $\alpha_{n,0}$	Значения подходящих дробей $P_{n+1}/Q_{n+1}$	Значения модуля $\Gamma_{n+1}$	Значения аргумента $\varphi_{n+1}$
1	-12.72207775	-13.7965656154	3.85023	3.14159
2	-9.652154262	-2.2688075728	3.22792	3.14159
3	-7.464258537	24.7227171916	5.3699	2.35619
4	-4.112302708	-0.4377567378	3.25252	2.51327
5	-0.001633467112	-0.4405451073	2.33085	2.61799
...	...	...	...	...
7995	-0.02672761665	21.0796274990	63.2953	1.49654
7996	-142.9003835	21.6432712107	63.2868	1.49635
7997	-4.754090929	21.6626358665	63.2783	1.49616
7998	-4161.168967	21.6432757087	63.2698	1.49598
7999	-4304.241892	-72.0893706039	63.2708	1.49618
8000	-0.0007055683769	0.4210987994	63.2312	1.496
8001	0.5287242942e-2268	0.4210987994	63.1916	1.49581

Таким образом, просуммировав при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма расходящуюся в классическом смысле цепную дробь, представляющую производную функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,111111$ , получим значение комплексной производной:

$$w'(7; 0,9; 0,111111) = 63,231 e^{i1,718}.$$

### 3.8. Определение предела функции через непрерывные дроби

Весьма интересным представляется возможность использования  $r/\varphi$ -алгоритма при определении предела функции – одного из основных понятий в анализе. Известны два эквивалентных между собой определения предела функции в точке  $x_0$  [43]. Определение предела функции “на языке последовательностей”, или определение предела “по Гейне”, формулируется следующим образом: “Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  или при  $x \rightarrow x_0$ , если для любой последовательности допустимых значений аргумента  $x_n$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , последовательность соответствующих значений функции  $f(x_n)$  сходится к числу  $A$ ”.

В этом случае следует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Геометрический смысл предела функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

означает, что для всех точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$ , существуют значения функции, как угодно мало отличающиеся от числа  $A$ .

Определение предела функции “на языке  $\varepsilon - \delta$ ”, или определение предела функции “по Коши”, имеет такую формулировку: “Число  $A$  называется пределом функции в точке  $x_0$  или при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого положительного  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”.

Можно привести определение предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  в более общем случае [43]. Пусть  $E$  есть метрическое пространство. Предположим, что точка  $x_0 \in E$  не есть изолированная точка в  $E$ . Тогда направление  $x \rightarrow x_0$  определим как совокупность всех шаров  $U_r(x_0) = \{x \in E: p(x_0, x) < r\}$ , из которых выброшена центральная точка. Функция  $f(x)$ , определённая на  $E$  со значениями в метрическом пространстве  $M$ , имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , если существует точка  $A$ , для которой при любом  $\varepsilon > 0$  можно найти число  $\delta > 0$  так, что для всех  $x \in U_\delta(x_0)$ , то есть для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $p(x, x_0) < \delta$ , выполняется неравенство:

$$p(f(x), A) \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим трансцендентные функции, представимые, так называемыми, соответствующими непрерывными дробями, и для них дадим формулировку предела функции, отличающуюся от традиционных определений предела. Следует отметить, что трансцендентные функции представляются бесконечными непрерывными дробями и точно получить значение такой функции в точке  $x_0$  нельзя. Погрешность приближения будет уменьшаться с ростом числа звеньев цепной дроби. Чтобы связать классическое определение предела функции в точке  $x_0$  с пределом функции, представленной цепной дробью, установим соответствие между значением  $i$ -й подходящей дроби, представляющей функцию в точке  $x_0$ , и “точным” значением этой же функции в некоторой точке  $x_i$  интервала (Рис. 3.39).

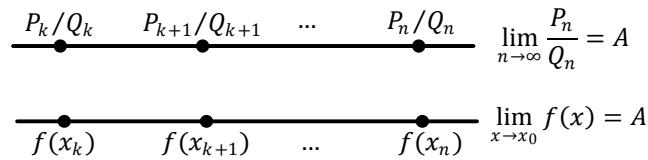


Рис. 3.39. Соответствие  $f(x_i)$  и  $P_i/Q_i$ .

Для функций, которые могут быть представлены соответствующими непрерывными дробями, то есть установлены через коэффициенты степенных рядов по формулам Хейлгерманна-Стилтьеса или найдены по формулам Тиле через обратные производные [70], можно дать такое определение предела:

Если функция  $f(x)$  представлена соответствующей непрерывной дробью

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \dots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \dots' \tag{3.8.1}$$

то функция  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , совпадающий со значением бесконечной непрерывной дроби для этой функции в точке  $x_0$ . Непрерывная дробь (3.8.1) сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число  $z = r_0 e^{i\varphi_0}$ , если существуют пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i| |Q_i|} = r_0, \tag{3.8.2}$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \tag{3.8.3}$$

где

$P_i/Q_i$  – значение  $i$ -й подходящей дроби;

$k_n$  – число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей  $n$  подходящих дробей.

Аналогичные определения предела функции в точке  $x_0$  можно привести, если функция представима непрерывными дробями иных классов, например, ветвящимися непрерывными дробями.

Таким образом, при установлении предела функции при  $x \rightarrow x_0$  вместо рассмотрения последовательности “точных” значений функции

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

при  $x_n \rightarrow x_0$ , рассматриваются значения подходящих непрерывной дроби функции в точке  $x_0$ . Если цепная дробь сходится в классическом смысле, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$  существует и он равен значению функции в точке  $x_0$ . Таким образом можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x_0)}{Q_n(x_0)}.$$

Если соответствующая непрерывная дробь, представляющая функцию в точке  $x_0$ , не сходится в классическом смысле, то по последовательности подходящих дробей (3.8.1) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (3.8.2) и (3.8.3), может быть установлено комплексное значение цепной дроби. В этом случае функция  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  имеет комплексный предел  $r_0 e^{i\varphi_0}$ .

Итак, предлагается использовать конкретный алгоритм вычисления функции, предел которой находится в точке  $x_0$ , а именно, – представление функции, так называемыми, соответствующими непрерывными дробями. Вводится однозначный механизм квантования при определении предела функции в точке  $x_0$ , заключающийся в использовании подходящих дробей. Устанавливается комплексный предел функции, если он имеет место, при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Для примера рассмотрим соответствующую непрерывную дробь логарифмической функции.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2^2 x}{4} + \frac{2^2 x}{5} + \frac{3^2 x}{6} + \frac{3^2 x}{7} + \dots + \frac{n^2 x}{2n} + \frac{n^2 x}{2n+1} + \dots \quad (3.8.4)$$

Очевидно, что “точно” определить значение функции  $\ln(1+x)$  в точке  $x_0$  нельзя, так как точное значение функции в точке  $x_0$  можно получить только в пределе, с учетом бесконечного числа звеньев цепной дроби (3.8.4).

Будем устанавливать значение функции  $\ln(1+x)$  в точке  $x_0$ , используя последовательность подходящих дробей:

$$\frac{P_k}{Q_n}, \frac{P_{k+1}}{Q_{n+1}}, \dots, \frac{P_m}{Q_m}, \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}, \dots$$

Цепная дробь с возрастающим числом звеньев определяет значение функции в точке  $x_0$  со все большей точностью. Будем полагать, что значение непрерывной дроби логарифмической функции с конечным числом звеньев  $k$  дает значение, которое соответствует “точному” значению логарифмической функции, в некоторой точке  $x_k$ , лежащей в окрестности точки  $x_0$ . Беря непрерывную дробь для  $\ln(1+x)$  в точке  $x_0$ , со все большим числом звеньев, например, с числом  $m \gg k$ , получим “точное” значение функции в некоторой окрестности точки  $x_0$ , причем, эта точка  $x_m$  лежит ближе к точке  $x_0$ , нежели точка  $x_k$ , а само значение функции в точке  $x_m$  ближе к значению искомого предела, т.е. значению функции в точке  $x_0$ , нежели, когда использовалась цепная дробь с меньшим числом звеньев. Таким образом, определяя цепную дробь для функции в точке

$x_0$ , тем самым будем получать последовательность “точных” значений функции в точках, приближающихся в точке  $x_0$ , то есть фактически определяя предел функции в точке  $x_0$  в классическом смысле.

Как известно, непрерывные дроби, представляющие функции, могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Если функция представляется расходящейся цепной дробью, то нельзя вычислить значения функции в последовательности точек, приближающихся к точке  $x_0$ . Тем не менее, используя введенные выше определение предела, можно установить предел функции в точке  $x_0$  в случае расходящейся непрерывной дроби.

Известно, что цепная дробь, соответствующая степенному ряду конечна тогда, когда степенной ряд является рядом Тейлора рациональной функции. В случае, если функция представима конечной цепной дробью, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{P_n(x_0)}{Q_n(x_0)}.$$

В качестве примера функции, которая представима конечной соответствующей цепной дробью, может быть указана функция Вейерштрасса  $w(a, b, x)$  в рациональных точках  $x_i$  [73].

## ГЛАВА 4

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Известно, что более половины всех вычислительных задач связаны с решением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это не удивительно, так как математические модели тех или иных процессов либо сразу строятся как СЛАУ, либо сводятся к ним посредством дискретизации. Поэтому важен выбор эффективного способа решения систем линейных алгебраических уравнений.

Прямые методы обеспечивают точный, без учёта погрешности округления, результат за фиксированное число операций. Наиболее распространённый из прямых методов – метод Гаусса, даёт решение за  $O(n^3/3)$  операции, что делает его малоприменимым при решении систем большой размерности.

Типичная область применения итерационных методов – системы линейных уравнений, возникающих при численном решении дифференциальных уравнений с частными производными. Обычно, это системы из большого числа уравнений, матрицы которых могут легко записываться и обрабатываться благодаря их специальному строению. С помощью итерационных методов может быть построено однако не решение, а только приближающаяся к решению последовательность. Таким образом, итерационные методы имеют некоторую теоретически неустранимую погрешность. Уязвимость итерационных методов, однако, в ином. Итерационные методы сходятся, то есть дают сходящуюся последовательность, не для любой системы линейных уравнений. Критерии сходимости накладывают весьма жёсткие ограничения на матрицу СЛАУ. Показательный пример, – так называемое, условие "диагонального преобладания". Эффективность итерационного метода во многом определяется также скоростью его сходимости, которая зачастую бывает чрезвычайно медленной. Историк математики Клод Брезински по этому поводу писал [91]: “Самое трудное – это, видимо, убедить людей, занимающихся итерационными методами, использовать процесс ускорения сходимости”.

Существуют, однако, методы решения СЛАУ, которые, являясь по сути точными методами, допускают, тем не менее, в процессе реализации алгоритма, при определённых условиях, накладываемых на матрицу системы, последовательное уточнения неизвестных, сближаясь в этом смысле с итерационными алгоритмами. Принципиальное отличие таких алгоритмов решения СЛАУ от итерационных состоит в том, что они допускают фиксированное число итераций, причём, на  $m$ -й итерации, где  $m$  связано с размерностью СЛАУ, имеем точное решение СЛАУ.

Существование точных алгоритмов решения СЛАУ «с фиксированным числом итераций» вызывает некоторые осложнения при классификации алгоритмов. Например, метод сопряжённых градиентов иногда рассматривают как итерационный, хотя этот алгоритм обеспечивает точное решение СЛАУ за конечное число операций. Также и метод ортогонализации приводит к итерационному процессу, который, однако, обрывается после  $m$  шагов, давая точное решение, если не учитывать погрешностей округления. Известна целая серия точных алгоритмов решения СЛАУ, использующих в своей структуре итерационные процедуры, которые обрываются на некотором шаге. В результате получаются точные значения неизвестных за конечное число операций, что является основным признаком прямого алгоритма. Эти точные алгоритмы имеют признаки

итерационных алгоритмов, так как позволяют, опять-таки при определённых условиях, получать значения  $x_i$  с некоторой точностью. Такие алгоритмы решения СЛАУ будем называть «точными методами с фиксированным числом итераций».

В последние десятилетия для решения СЛАУ большой размерности наиболее эффективным средством признаны итерационные методы неполной факторизации, дополненные вариационными алгоритмами ускорения сходимости [19]. Если ширина  $d$  ленточной части от обратной матрицы совпадает с размерностью  $N$  матрицы, то метод неполной факторизации из итерационного превращается в прямой, дающий точное решение за конечное число операций. Фактически в этом случае метод неполной факторизации переходит в блочный метод Гаусса.

Рассмотрим точный алгоритм решения СЛАУ, базирующийся на итерационных алгоритмах решения систем. В качестве исходных алгоритмов использовались метод простых итераций, или метод Якоби, а также метод Зейделя. Предложенный подход позволяет эффективно находить приближённые значения неизвестных СЛАУ при определённых условиях, накладываемых на коэффициенты матрицы. Здесь следует дать некоторые уточнения. Метод «цепных дробей», представленный в этой главе, приводит к предоставлению  $x_i$  в виде конечной цепной дроби с числом звеньев  $2n$ , где  $n$  – размерность решаемой СЛАУ.

Возможны два варианта: или цепная дробь обеспечивает все более точное определение  $x_i$  с ростом количества звеньев цепной дроби, или цепная дробь не дает приближений к  $x_i$  вплоть до вычисления конечной цепной дроби, имеющей  $2n$  звеньев, когда вне зависимости от характера цепной дроби имеем «точное» значение  $x_i$ , совпадающее с решением, полученным точным методом, для определенности, – найденным по методу Гаусса. Цепные дроби первого типа будем называть «сходящимися», а цепные дроби второго типа – «расходящимися». Цепные дроби первого типа, обеспечивающие приближение  $x_i$ , будем называть так же «вещественными», а цепные дроби второго типа, когда последовательность значений подходящих дробей не приближает  $x_i$ , будем называть «комплексными». Целесообразность такой терминологии обоснована далее. Тип цепной дроби, представляющей  $x_i$ , определяется коэффициентами исходной матрицы СЛАУ.

#### 4.1. Решение СЛАУ методом суммирования расходящихся рядов

Во второй главе было определено суммирование рядов через соответствующие цепные дроби:

*Степенной ряд*

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (4.1.1)$$

*сходится к значению соответствующей этому ряду цепной дроби*

$$\omega_0 + \frac{\omega_1x}{1 - \frac{\omega_2x}{1 + \frac{\omega_3x}{1 - \dots + \frac{\omega_{2n-1}x}{1 - \frac{\omega_{2n}x}{1 + \dots}}}} \quad (4.1.2)$$

Коэффициенты  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби (4.1.2) и коэффициенты  $c_i$  степенного ряда (4.1.1) связаны соотношениями Хейлерманна-Стилтьеса [16].

*Числовой ряд*

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (4.1.3)$$

суммируется значением цепной дроби (4.1.2) при  $x=1$ , если ряд (4.1.3) рассматривать как степенной ряд (4.1.1) при  $x=1$ .

Кроме формул Хейлерманна-Стилтьеса, которые весьма затруднительно использовать при получении значительного числа коэффициентов  $\omega_i$  соответствующей цепной

дроби, имеются рекуррентные формулы для определения  $\omega_i$ , например, алгоритм Рутисхаузера.

Рассмотрим метод решения СЛАУ, базирующийся на классическом итерационном алгоритме решения СЛАУ, а именно, на алгоритме Якоби, или методе простых итераций. В предлагаемом алгоритме суммирование рядов, которые строились для каждой неизвестной по значениям  $x_i^{(k)}$ , получаемых в процессе итераций, производилось через построение для этих рядов *соответствующих* цепных дробей. Для краткости предлагаемый комбинированный метод решения СЛАУ будем называть *методом цепных дробей*.

Пусть имеется система стандартного вида

$$Ax = b, \quad (4.1.4)$$

где  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$  – матрица  $n \times n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ . Система (4.1.4) преобразовывается к виду, соответствующему методу простых итераций

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $x$  – вектор неизвестных,  $B$  и  $c$  – некоторые новые матрица и вектор, соответственно.

Можно считать приближения для каждой неизвестной  $x_i$  частичными суммами ряда, который сходится, когда сходится итерационный процесс, и расходится, – в противном случае. Зная частичные суммы ряда, легко найти элементы ряда, первый из которых будет равен  $p_i^{(0)} = x_i^{(0)}$ , а последующие  $p_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$ , то есть можно рассматривать ряд

$$p_i^{(0)} + p_i^{(1)} + p_i^{(2)} + \dots + p_i^{(k)} + \dots, \quad (4.1.5)$$

частичная  $k$ -я сумма которого совпадает со значением  $x_i^{(k)}$ .

Ряд (4.1.5) может сходиться медленно и даже расходиться. Для суммирования ряда (4.1.5) будем использовать соответствующие цепные дроби. После того, как найдены коэффициенты соответствующей цепной дроби, можно просуммировать ряд (4.1.5), то есть для каждого  $x_i$  получим его значение.

Запишем ряд (4.1.5) и соответствующую цепную дробь (4.1.2) в модифицированных обозначениях:

$$\begin{aligned} & \alpha_{0,0}^{(i)} + \alpha_{1,0}^{(i)} + \alpha_{1,1}^{(i)} + \alpha_{1,2}^{(i)} + \dots + \alpha_{1,k-1}^{(i)} + \dots = \\ & = \alpha_{0,0}^{(i)} + \frac{\alpha_{1,0}^{(i)}}{1} - \frac{\alpha_{2,0}^{(i)}}{1} + \frac{\alpha_{3,0}^{(i)}}{1} - \dots - \frac{\alpha_{2n,0}^{(i)}}{1} + \frac{\alpha_{2n+1,0}^{(i)}}{1} - \dots \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Коэффициенты непрерывной дроби (4.1.6) находятся по рекуррентным формулам Рутисхаузера [37,115]:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,v}^{(i)} &= \frac{\alpha_{1,v+1}^{(i)}}{\alpha_{1,v}^{(i)}}, \\ \alpha_{3,v}^{(i)} &= -\alpha_{2,v+1}^{(i)} + \alpha_{2,v}^{(i)}, \\ \alpha_{4,v}^{(i)} &= \frac{\alpha_{2,v+1}^{(i)} \cdot \alpha_{3,v+1}^{(i)}}{\alpha_{3,v}^{(i)}}, \\ \alpha_{5,v}^{(i)} &= \alpha_{3,v+1}^{(i)} - \alpha_{4,v+1}^{(i)} + \alpha_{4,v}^{(i)}, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\alpha_{2n,v}^{(i)} = \frac{\alpha_{2n-2,v+1}^{(i)} \cdot \alpha_{2n-1,v+1}^{(i)}}{\alpha_{2n-1,v}^{(i)}},$$

$$\alpha_{2n+1,v}^{(i)} = \alpha_{2n-1,v+1}^{(i)} - \alpha_{2n,v+1}^{(i)} + \alpha_{2n,v}^{(i)}. \quad (4.1.7)$$

На рис. 4.1 приведена граф-схема алгоритма Рутисхаузера. Первая строка этой схемы составлена из коэффициентов исходного ряда. Крайний левый столбец этой схемы, то есть коэффициенты  $a_{i,0}$ , – искомые коэффициенты соответствующей цепной дроби (4.1.6).

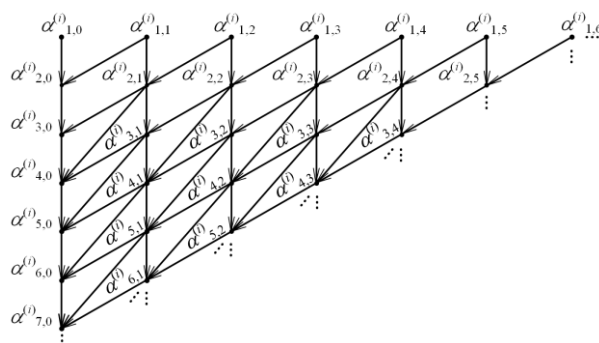


Рис. 4.1. Граф рекуррентного алгоритма Рутисхаузера.

В табл. 4.1 – 4.6 приведены результаты решения тестовых систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей. В таблицах первого вида записываются результаты вычислений  $x_1$  различных систем. В таблицах второго – помещены результаты определения  $x_i$ . В качестве «точных» значений неизвестных систем принимаются их значения, полученные методом Гаусса.

Опишем подробнее таблицы на примере решения системы (4.1.8). Размерность матрицы СЛАУ 128x128. Разрядность операндов при решении системы (4.1.8) составляет 5000 бит. Большая разрядность операндов – одна из особенностей рекуррентного алгоритма Рутисхаузера.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 1.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 1.2 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

Таблица 4.1

Определение  $x_1$  системы (4.1.8) методом цепных дробей

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{it} - x_{ldr}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-4.62373e1
2	-3.70999999999999e1	-3.80999999999999e1	2.55754475704e-2	-4.52629e1
3	-1.65942699458e1	-3.75617918620e1	-2.37690797241e1	-2.14682e1
4	-2.46572307903e2	1.52987935098e-1	8.26235789047	-5.34996e1
5	1.55363767088e3	7.27176805235	-4.48812465880e1	-3.56084e-1
6	-1.26847514698e4	-8.64770485878e-3	-4.51858892381e1	-5.14414e-2
7	9.98896681920e4	-1.38659192295e-1	-4.52352574917e1	-2.07319e-3



Окончание табл. 4.1

8	-7.90180527125e5	3.02306988116e-2	-4.52370549257e1	-2.75762e-4
9	6.24716046001e6	-1.23090492541e-1	-4.52373177581e1	-1.29301e-5
10	-4.93935848245e7	3.58553313416e-2	-4.52373290230e1	-1.66516e-6
...	...	...	...	...
255	-3.96112584075e228	2.23845251072e-5	-4.52373306882e1	-2.29084e-474
256	3.13186463771e229	-2.79777621567e-2	-4.52373306882e1	-1.15968e-1269
257	-2.47620916458e230	-2.20947695518e-795		

В первой колонке табл. 4.1 указаны номера итераций, во второй – результаты вычисления  $x_1$  по методу простых итераций. В колонке 3 помещены коэффициенты соответствующей цепной дроби, которые находятся по формулам Рутисхаузера (4.1.7). В четвертой колонке приводятся значения для неизвестной  $x_1$  системы (4.1.8), полученные методом цепных дробей, то есть после вычисления соответствующей цепной дроби. В колонке 5 табл. 4.1 приведены погрешности в определении  $x_1$ , которые устанавливаются как разности  $x_{1Г} - x_{1др}^{(k)}$ , где  $x_{1Г}$  – «точные» значения  $x_1$  системы (4.1.8), определяемые по методу Гаусса,  $x_{1др}^{(k)}$  – значения  $x_1$  системы (4.1.8), найденные методом цепных дробей после  $k$ -й итерации.

Таблица 4.2

Значения  $x_i$  системы (4.1.8), полученные методом цепных дробей

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iдр}$
1	-4.52373306882e1	-4.52373306882e1	256	-1.15968e-1269
2	-3.83326643521e1	-3.83326643521e1	256	-1.13187e-1269
4	-2.86661314817e1	-2.86661314817e1	256	-1.03237e-1269
8	-1.76186653441e1	-1.76186653441e1	256	-7.29081e-1270
16	-7.57551430988	-7.57551430988	256	-5.48101e-1270
32	-1.75297758357e-1	-1.75297758357e-1	256	-2.83948e-1270
64	4.47626693118	4.47626693118	256	-1.92022e-1270
128	7.11446779987	7.11446779987	256	-9.29242e-1271

В первой колонке табл. 4.2 указаны номера неизвестных  $x_i$  решаемой системы. Во второй колонке приведены «точные» решения  $x_i$  системы (4.1.8), найденные по методу Гаусса. В третьей колонке помещены значения решения  $x_i$ , установленные методом цепных дробей. В колонке 4 указано число звеньев конечных цепных дробей, представляющих неизвестное  $x_i$  СЛАУ. В колонке 5 приведены погрешности для  $x_i$ .

Анализируя табл. 4.1 и 4.2 можно сделать следующие выводы. Система (4.1.8) решается методом простых итераций. Из колонки 5 табл. 4.1 следует, что уже после 10-й итерации метод цепных дробей даёт в определении  $x_1$  погрешность порядка  $10^{-6}$ , а после 256-й итерации имеем «точное» решение.

Погрешность метода цепных дробей на 256-й итерации, то есть разность в значениях  $x_i$ , определённых точным методом Гаусса и методом цепных дробей, составила величину порядка  $10^{-1269}$ . Соответствующая цепная дробь, которая строилась по ряду, генерируемому алгоритмом простых итераций, или методом Якоби, оказалась конечной. В самом деле, как видно из колонки 3 табл. 4.1, в которой помещались коэффициенты  $\omega_i$ , получаемые по алгоритму Рутисхаузера из коэффициентов ряда, значение коэффициента  $\omega_i$  с номером 257 приняло практически нулевое значение. Если некоторый коэффициент  $\omega_i$  цепной дроби (4.1.6) равен нулю, то цепная дробь, естественно, обрывается, то есть становится конечной.

Метод цепных дробей обеспечивает точное решение СЛАУ при использовании  $2n$  итераций, выполненных по алгоритму простых итераций, где  $n$  – размерность СЛАУ.

Часто при тестировании алгоритмов решения СЛАУ используются системы с матрицей Гильберта. Система (4.1.9) имеет матрицу Гильберта размерности  $64 \times 64$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \dots \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \dots \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,7438909037 \\ 3,7592755191 \\ 3,2744270342 \\ 2,9560190740 \\ 2,7207249564 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.1.9)$$

При решении системы (4.1.9) использовалась разрядная сетка в 10000 бит. В таблицах 4.3 и 4.4 приведены результаты решения системы (4.1.9) методом цепных дробей.

Таблица 4.3

**Определение  $x_i$  системы (4.1.9) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	4.743890904	4.743890904	4.743890904	4.743890904	3.743890904
2	-154.1434753	-158.8873662	-33.49304809	0.1375317975	0.8624682025
3	8216.261349	8370.404825	19.18832631	1.784067912	0.7840679124
4	-449508.3328	-457724.5942	-5.497329836	0.5008196931	0.4991803069
5	24670525.83	25120034.17	1.872824191	0.8760336063	0.1239663937
6	-1,4E+09	-1,4E+09	-0.2374247875	0.8220635921	0.1779364079
7	7,44E+10	7,57E+10	1.183230509	0.8492233619	0.1507766381
8	-4,1E+12	-4,2E+12	1.606368506	0.9565063166	0.04349368338
9	0.2241227684e15	0.2282050727e15	-0.005776587445	0.9596643211	0.0403356789
10	-0.1230457453e17	-0.125286973e17	0.8835189829	0.9914115917	0.00858840835
...	...	...	...	...	...
124	-0.2524978739e215	-0.2570970189e215	1	1	0.9043844454e-20
125	0.1386239755e217	0.1411489542e217	0.1761711751e-31	1	0.9043844454e-20
126	-0.7610601343e218	-0.7749225318e218	1	1	0.1786463154e-20
127	0.4178299792e220	0.4254405806e220	0.1551512151e-32	1	0.1786463154e-20
128	-0.2293930317e222	-0.2335713315e222	1	1	0.3194118972e-1162
129	0.1259391753e224	0.1282331056e224	-0.4513496276e-1156		

Можно обратить внимание, что коэффициенты цепной дроби, представляющей  $x_i$ , имеют для четных номеров значения, близкие к единице, а для нечетных – к нулю.

Таблица 4.4

**Значения  $x_i$  системы (4.1.9), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1	1	128	0.1684399027e-1160
2	1	1	128	0.6383391047e-1160
4	1	1	128	0.5016590307e-1160
8	1	1	128	0.2922851489e-1159
16	1	1	128	0.3314344061e-1159
32	1	1	128	0.9251587468e-1159
64	1	1	128	0.9063010032e-1159

По методу цепных дробей после 10-й итерации получаем значение неизвестной  $x_1$  с погрешностью порядка  $10^{-2}$ , а после 128-й итерации погрешность в определении  $x_1$  составляет величину порядка  $10^{-1162}$ . На 129-й итерации имеем значение  $\omega_{129}$  порядка  $10^{-1156}$ , то есть можно говорить о конечной цепной дроби. Этот, казалось бы, парадоксальный результат имеет естественное объяснение. Неизвестные  $x_i$  определяются рациональными функциями, записываемыми формулами Крамера, то есть отношениями

определителей  $n$ -х порядков. Но, как известно, рациональные функции представляются конечными правильными  $S$ -дробями. Поэтому когда ряд, представляющий  $x_i$ , преобразовать одним из алгоритмов в соответствующую цепную дробь, или правильную  $S$ -дробь, то эта соответствующая цепная дробь будет конечной, что и наблюдается при решении СЛАУ методом простых итераций, дополненного суммированием через цепные дроби.

Рассмотрим СЛАУ со «случайной» матрицей. Размерность матрицы системы  $64 \times 64$ . Каждый элемент взят при помощи программы случайной выборки чисел из некоторого диапазона.

$$\begin{pmatrix} 41 & 18467 & 6334 & 26500 & 19169 & \dots \\ 30106 & 9040 & 8942 & 19264 & 22648 & \dots \\ 27350 & 1150 & 16941 & 21724 & 13966 & \dots \\ 2421 & 14310 & 6617 & 22813 & 9514 & \dots \\ 29869 & 20142 & 23844 & 1416 & 21881 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288 \\ 12052 \\ 17807 \\ 28433 \\ 193 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

В табл. 4.5 и 4.6 приведены результаты решения системы (4.1.10) методом цепных дробей.

Таблица 4.5

**Определение  $x_1$  системы (4.1.10) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность, $x_{ит} - x_{идр}$
1	7.024390244	7.024390244	7.024390244	7.024390244	8.986007281
2	-111815.3908	-111822.4152	-15919.16327	0.0004412260179	1.962058263
3	36879974.69	36991790.08	-15588.35491	-329.9846418	328.0230247
4	-2.8E+10	-2.8E+10	9.118443544	0.7564158324	2.71803287
5	0.1386680837e14	0.1389490329e14	-32.99660433	-22.48819355	20.52657651
6	-0.8449131112e16	-0.8462997921e16	116.3121259	0.9733760344	2.934993072
7	0.4615813592e19	0.4624262723e19	31.3005749	10.65677261	12.61838965
8	-0.2664974338e22	-0.2669590151e22	19.09239714	0.6005431614	2.562160199
9	0.149557645e25	0.1498241424e25	107.4686515	13.86165074	15.82326778
10	-0.8515601222e27	-0.8530556987e27	158.9889495	0.8571976168	2.818814654
...	...	...	...	...	...
124	-0.6350409157e341	-0.636161713e341	0.3121531904	-0.8761774847	1.085439553
125	0.3598125671e344	0.360447608e344	-0.9385897729	-1.92658192	0.03503511759
126	-0.2038688851e347	-0.2042286976e347	0.09196696147	-1.980370025	0.01875298804
127	0.1155115916e350	0.1157154605e350	0.1616451303	-1.972557705	0.01094066769
128	-0.6544857391e352	-0.655640855e352	0.6825436703	-1.961617037	0.3575335337e-1242
129	0.3708299546e355	0.3714844403e355	0.3091911984e-1238		

Таблица 4.6

**Значения  $x_i$  системы (4.1.10), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{ит} - x_{идр}$
1	-1.961617037	-1.961617037	128	0.8155853441e-1240
2	-1.440725043	-1.440725043	128	0.5902218463e-1241
4	-0.343882709	-0.343882709	128	0.3190413705e-1242
8	0.5329963713	0.5329963713	128	0.8613269965e-1241
16	-1.355261327	-1.355261327	128	0.154793027e-1241
32	1.198431044	1.198431044	128	0.6332554837e-1241
64	1.23388507	1.23388507	128	0.1949663415e-1242

На 128-й итерации метод цепных дробей даёт точное значение  $x_l$ , так как погрешность в определении  $x_i$  составляет порядка  $10^{-1240}$ . Из табл. 4.6 следует, что с такой же погрешностью определяются и другие неизвестные системы (4.1.10).

В рассмотренных выше примерах в качестве промежуточных использовались данные отсчётов, полученные методом простых итераций. Было установлено, что описанный метод решения СЛАУ можно применять, используя в качестве базового итерационного алгоритма алгоритм Зейделя. Метод Зейделя в совокупности с суммированием порождаемых рядов алгоритмом Рутисхаузера, также, как и в случае метода простых итераций, приводит к точному решению СЛАУ.

В методе цепных дробей генерация итерационных отсчётов для  $x_i$  имеет формальный характер, так как эти отсчёты являются промежуточными результатами и служат для построения по этим отсчётам рядов, значения которых затем находятся вне зависимости от того, являются эти исходные ряды сходящимися или расходящимися. Суммирование рядов происходит через построение по одному из известных алгоритмов, так называемых, соответствующих цепных дробей, которые оказываются конечными. Эти конечные цепные дроби дают точные значения  $x_i$ , если не учитывать неизбежных ошибок округления при счёте. Таким образом, установлено, что метод простых итераций в совокупности с построением соответствующих цепных дробей, использующих результаты  $2n$  итераций, приводит к точным решениям СЛАУ. Так как скорость сходимости метода простых итераций может быть значительно увеличена при построении соответствующих цепных дробей, видимо, целесообразно эти классические итерационные алгоритмы дополнять программным блоком, включающим построение соответствующих цепных дробей. Если построенные по итерациям соответствующие цепные дроби сходятся, то есть дают приближённые значения неизвестных при увеличении количества звеньев, то метод цепных дробей может использоваться в качестве итерационного без существенных ограничений на матрицу решаемой СЛАУ, что весьма полезно в практическом плане, так как позволяет существенно увеличить размерность решаемых СЛАУ.

#### 4.2. Решение систем алгебраических уравнений СЛАУ различных классов

Рассмотрим метод цепных дробей для решения СЛАУ более обстоятельно с привлечением СЛАУ, матрицы коэффициентов которых принадлежат различным классам.

В табл. 4.7 – 4.18 приведены результаты решения тестовых систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей. Прежде всего опишем системы, которые решались этим методом. Все системы имели «плотные» матрицы коэффициентов, которые условно можно разделить на 9 классов:

$Aa$	$Ba$	$Ca$
$Ab$	$Bb$	$Cb$
$Ac$	$Bc$	$Cc$

$A, B, C$  – матрицы коэффициентов системы,  $a, b, c$  – векторы – столбцы правой части систем.

В матрицах  $A$  диагональные элементы постоянны, в матрицах  $B$  диагональные элементы возрастают, в матрицах  $C$  диагональные элементы уменьшаются. Соответственно, « $a$ » означает вектор – столбец с постоянными элементами, « $b$ » – вектор – столбец с возрастающими элементами, « $c$ » – вектор – столбец с уменьшающимися элементами.

Результаты решения каждой системы методом цепных дробей приводятся в таблицах двух видов, которые рассматривались в первом параграфе. В таблицах первого вида записываются результаты вычислений  $x_i$  различных систем. В таблицах второго вида помещены результаты определения  $x_i$ . Во вторых таблицах также указывается число

итераций необходимых для построения конечных цепных дробей, то есть для точного решения системы. В качестве «точных» значений неизвестных систем принимаются их значения, полученные методом Гаусса с использованием стандартной программы.

Система (4.2.1) относится к системам класса *Va*, так как элементы главной диагонали увеличиваются, а коэффициенты правой части постоянны. Размерность СЛАУ 128x128.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & \dots \\ 7 & 1.001 & 7 & 7 & 7 & \dots \\ 7 & 7 & 1.002 & 7 & 7 & \dots \\ 7 & 7 & 7 & 1.003 & 7 & \dots \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 1.004 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

Как следует из колонки 2 табл. 4.7, система (4.2.1) не решается методом простых итераций, – элементы  $x_i^{(k)}$  растут по модулю с каждой итерацией примерно на порядок. Решения системы (4.2.1) удастся получить точно методом цепных дробей. Из колонки 3 табл. 4.7 видно, что частный числитель  $\omega_{257}$  соответствующей цепной дроби для  $x_1$  равен величине  $9,35 \cdot 10^{-551}$ , то есть цепная дробь конечная.

Таблица 4.7

**Определение  $x_1$  системы (4.2.1) методом цепных дробей**

Номер итерации, n	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{it} - x_{idr}$
1	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	-9.98888e-1
2	-8.88000000000e2	-8.89000000000e2	1.12359550562e-3	-1.20140e-5
3	7.42831079261e5	-5.24206082555e1	-6.13919214851e-2	6.25036e-2
4	-6.21694451544e8	5.51967950396	1.39732983801e-2	-1.28617e-2
5	5.20310021309e11	-1.00722718401	1.04665691359e-3	6.49246e-5
6	-4.35459133411e14	3.37372253043e-2	6.74960156660e-4	4.36622e-4
7	3.64445521045e17	-6.54380340038	1.11150320834e-3	7.82469e-8
8	-3.05012635213e20	5.73212623832e-3	1.11106708922e-3	5.14367e-7
9	2.55271919308e23	-6.58705479051	1.11158135925e-3	9.59797e-11
10	-2.13642797916e26	5.81582357638e-3	1.11158082385e-3	6.31381e-10
...	...	...	...	...
250	4.97536159678e730	-6.55927633862	1.11158145523e-3	1.18255e-391
251	-4.16399177419e733	2.70206193206e-4	1.11158145523e-3	7.75529e-391
252	3.48493816145e736	-6.55865425356	1.11158145523e-3	4.53856e-396
253	-2.91662295404e739	1.80791035694e-4	1.11158145523e-3	2.97626e-395
254	2.44098720322e742	-6.55802746846	1.11158145523e-3	8.74191e-401
255	-2.04291696943e745	9.07218378894e-5	1.11158145523e-3	5.73232e-400
256	1.70976305755e748	-6.55739599037	1.11158145523e-3	1.22847e-953
257	-1.43093907226e751	9.35513397279e-551		

Из колонки 3 табл. 4.7 следует, что коэффициенты цепной дроби, имеющие нечётные номера, близки к нулю. Кроме того, можно отметить, что цепная дробь для  $x_1$  «сходится», то есть даёт все уточняющиеся значения для  $x_1$ .

В табл. 4.8. показаны результаты определения неизвестных  $x_i$  систем (4.2.1). Как и следовало ожидать, «точные решения СЛАУ» (4.2.1), размерностью 128x128 устанавливаются цепными дробями с 256 звеньями.

Таблица 4.8

**Значения  $x_i$  системы (4.2.1), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.11158145523e-3	1.11158145523e-3	256	1.22847e-953
2	1.11176674969e-3	1.11176674969e-3	256	1.23263e-953
4	1.11213752399e-3	1.11213752399e-3	256	1.22312e-953
8	1.11287981501e-3	1.11287981501e-3	256	1.26446e-953
16	1.11436737366e-3	1.11436737366e-3	256	1.26294e-953
32	1.11735445324e-3	1.11735445324e-3	256	1.22332e-953
64	1.12337691281e-3	1.12337691281e-3	256	1.18158e-953
128	1.13561871810e-3	1.13561871810e-3	256	1.13453e-953

Система (4.2.2) относится к системам класса  $Bb$ . В системах этого класса элементы главной диагонали матрицы и элементы правой части образуют возрастающие последовательности.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 1.0001 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 1.0002 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.0003 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.0004 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

Значения  $x_1^{(k)}$  по методу простых итераций образуют знакопеременную последовательность элементов, причем, по модулю элементы  $x_1^{(k)}$  возрастают как элементы геометрической прогрессии. Как следует из табл. 4.9 и 4.10, при решении системы (4.2.2) обеспечивается погрешность в определении неизвестных порядка  $10^{-1067}$ .

Таблица 4.9

**Определение  $x_1$  системы (4.2.2) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-8.97788e1
2	-3.7100000000e1	-3.8100000000e1	2.55754475704e-2	-8.88044e1
3	-1.01233008980e3	-6.36965902834e1	2.54899518840	-9.13278e1
4	3.51862097992e4	-2.52019509595e1	-3.90244081332e-2	-8.87398e1
5	-1.33551072768e6	3.79553755881e1	-8.87787426877e1	-1.40871e-4
6	5.05591447817e7	3.15802683017e-8	-8.87788415816e1	-4.19779e-5
7	-1.91417761758e9	-2.97985272315e-1	-8.87788835593e1	-2.44462e-10
8	7.24709487323e10	2.86971573324e-6	-8.87788835595e1	-7.28636e-11
...	...	...	...	...
255	1.77514531390e402	4.67158123949e-8	-8.87788835596e1	-1.20799e-755
256	-6.72071755375e403	-2.98087858434e-1	-8.87788835596e1	-2.34647e-1067
257	2.54447025175e405	3.10777653942e-310		

Таблица 4.10

**Значение  $x_i$  системы (4.2.2), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	-8.87788835596e1	-8.87788835596e1	256	-2.34647e-1067
2	-8.73378352974e1	-8.73378352974e1	256	-2.44462e-1067
4	-8.44569734281e1	-8.44569734281e1	256	-2.93945e-1067
8	-7.87001833762e1	-7.87001833762e1	256	-2.61334e-1067
16	-6.72062986339e1	-6.72062986339e1	256	-2.24544e-1067
32	-4.42969968592e1	-4.42969968592e1	256	-2.91781e-1067
64	1.21022442061	1.21022442061	256	-2.33198e-1067
128	9.09987112506e1	9.09987112506e1	256	-2.88807e-1067

Система (4.2.3) принадлежит к классу  $Bc$ , так как диагональные элементы матрицы возрастают, а элементы правой части - уменьшаются. Размерность матрицы СЛАУ  $128 \times 128$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 1.001 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 1.002 & 0.3 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.003 & 0.3 & \dots \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1.004 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

Метод простых итераций при определении  $x_1^{(k)}$  дает знакопеременную возрастающую по модулю последовательность чисел (табл. 4.11).

Таблица 4.11

**Определение  $x_i$  системы (4.2.3) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность, $x_{1Г} - x_{1Др}$
1	1	1	1	0.365783
2	-0.29539	-1.29539	0.435656	0.930127
3	56.52182	42.56574	0.971124	0.394658
4	-1978.3	8.292517	1.365772	1.08E-05
5	71007.93	-1.13E-05	1.36578	3.07E-06
6	-2546870	0.282856	1.365783	1.58E-09
7	91351436	-0.00027	1.365783	4.47E-10
...	...	...	...	...
256	-0.1210915759e396	0.280975	1.365783	0.7619730202e-1076
257	0.4343325314e397	<b>0.3525820043e-554</b>		

Можно отметить высокую скорость сходимости цепных дробей при нахождении решений СЛАУ (4.2.3): седьмая подходящая дробь обеспечивает определение  $x_1$  с погрешностью порядка  $10^{-10}$ .

Таблица 4.12

**Значения  $x_i$  системы (4.2.3), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	1.365783	1.365783	256	0.2930823777e-1074
2	0.650568	0.650568	256	0.3589340206e-1073
4	0.293098	0.293098	256	0.1064457355e-1073
8	0.114637	0.114637	256	0.1889599263e-1074
16	0.025941	0.025941	256	0.317533402e-1074
32	-0.01738	-0.01738	256	0.6300433613e-1074
64	-0.03713	-0.03713	256	0.5082709172e-1074
128	-0.0437	-0.0437	256	0.4917072795e-1074

Метод цепных дробей даёт точные решения СЛАУ размерности  $128 \times 128$  при построении цепных дробей, имеющих 256 звеньев, то есть при построении цепных дробей используются результаты  $2n$  итераций. Сам метод простых итераций, применительно к решению СЛАУ (3.2.3), генерирует расходящиеся последовательности, по которым, однако, строятся быстро сходящиеся конечные цепные дроби.

Система (4.2.4) относится к системам класса  $Ca$ , так как элементы главной диагонали матрицы уменьшаются, а элементы правой части постоянны.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.999 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.998 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.997 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.996 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Во второй колонке табл. 4.13 даны значения  $x_1^{(k)}$ , полученные методом простых итераций. Как и во всех рассмотренных ранее случаях, коэффициенты  $x_1^{(k)}$  образуют знакопеременную расходящуюся последовательность. Частный числитель  $\omega_{257}$  имеет значение, близкое к нулю. Соответствующая цепная дробь, построенная для  $x_1$  по значениям  $x_1^{(k)}$ , полученных методом простых итераций, дает приближения для  $x_1$  с высокой точностью: восьмая подходящая дробь обеспечивает погрешность порядка  $10^{-8}$ .

Таблица 4.13

**Определение  $x_1$  системы (4.2.4) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{иг} - x_{идр}$
1	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	-9.86548e-1
2	-6.25000000000e1	-6.35000000000e1	1.55038759690e-2	-2.05263e-3
3	4.24764021370e3	4.37622383768	7.80563093927e-2	-6.46050e-2
4	-2.88458023632e5	-5.38421009419e-1	5.70887534611e-2	-4.36375e-2
5	1.95893815348e7	-1.01542955147	1.35292596268e-2	-7.80229e-5
6	-1.33032818340e9	2.67713563364e-4	1.34933422052e-2	-4.21055e-5
7	9.03434891036e10	-5.38512137001e-1	1.34513550557e-2	-1.18358e-7
8	-6.13528761182e12	5.99204037991e-4	1.34513004153e-2	-6.37184e-8
...	...	...	...	...
255	-1.28373572384e467	9.45943691240e-6	1.34512366969e-2	-7.35756e-390
256	8.71793635768e468	-5.31654019406e-1	1.34512366969e-2	-7.18135e-955
257	-5.92040970153e470	-2.03267590476e-564		

Таблица 4.14

**Значения  $x_i$  системы (4.2.4), полученных методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{иг} - x_{идр}$
1	1.34512366969e-2	1.34512366969e-2	256	-3.26515e-953
2	1.34781930831e-2	1.34781930831e-2	256	-3.03523e-953
4	1.35324312846e-2	1.35324312846e-2	256	-3.00019e-953
8	1.36422278874e-2	1.36422278874e-2	256	-2.92893e-953
16	1.38672543267e-2	1.38672543267e-2	256	-2.70420e-953
32	1.43403376300e-2	1.43403376300e-2	256	-2.32103e-953
64	1.53904310033e-2	1.53904310033e-2	256	-4.15315e-953
128	1.80311483873e-2	1.80311483873e-2	256	-4.24686e-953

“Метод цепных дробей” для рассмотренных выше примеров, кроме примера (4.1.10) для СЛАУ со случайной матрицей, проявляет себя как эффективный итерационный алгоритм, когда несколько приближений обеспечивают получение решений с большой точностью. Но следует четко понимать, что матрица конкретной СЛАУ определяет, может ли быть “метод цепных дробей” итерационным или нет. Если критерии показывают, что матрица СЛАУ, условно говоря, “комплексная”, то “метод цепных дробей”, то есть цепная дробь, которая представляет неизвестную  $x_i$ , не может давать



приближения и процесс решения такой СЛАУ не может рассматриваться как итерационный. В этом случае “метод цепных дробей” будет оставаться “точным” методом, как и алгоритм Гаусса, когда после выполнения определённого числа операций получаем точное решение СЛАУ.

Система (4.2.5) относится к системам класса С<sub>b</sub>, так как диагональные элементы матрицы уменьшаются, элементы правой части возрастают. Размерность СЛАУ 64х64.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1/3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

В табл. 4.15 и 4.16 приведены результаты решения системы (4.2.5) методом цепных дробей.

Таблица 4.15

**Определение  $x_1$  системы (4.2.5) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	8255
2	-707262	-707263	-707263	0.1413899195e-5	8255.999999
3	5,77E+09	5,77E+09	-699104.362	-85.67823258	8341.678233
4	-0.4714070356e14	-0.4714647315e14	0.1388644187	7.763144453	8248.236856
5	0.385160465e18	0.3852076057e18	-52.09777283	-69.34370065	8325.343701
6	-0.314693227e22	-0.314731743e22	23.16786096	33.04420256	8222.955797
7	0.2571183597e26	0.257149829e26	-35.87744664	-61.32155419	8317.321554
8	-0.2100771329e30	-0.2101028448e30	33.9657584	89.84877705	8166.151223
9	0.1716423589e34	0.1716633666e34	-26.88465606	-52.52415955	8308.52416
10	-0.1402394395e38	-0.1402566038e38	40.81998601	193.3529	8062.6471
...	...	...	...	...	...
255	0.4436749673e996	0.4437292698e996	-0.2489803051	8256	0.2363024969e-67
256	-0.36250217e1000	-0.3625465444e1000	64.25304146	8256	0.2961847665e-932
257	0.2961803976e1004	0.2962166478e1004	<b>-0.2474761787e-859</b>		

Из данных колонки 5 табл. 4.15 следует, что матрица СЛАУ не обеспечивает условия, которые позволяли бы построить цепную дробь, подходящие которой быстро сошлись к решению  $x_1$ . Можно сказать, что существует СЛАУ с “комплексными” матрицами, которые в принципе не позволяют получить сходящиеся итерационные процессы, так как решения подобных СЛАУ – комплексные. Следовательно, конечные СЛАУ “точные” решения имеют всегда, если матрица не вырожденная, в то время, как построить сходящиеся итерационные процессы при решении конкретной СЛАУ можно, если такие процессы допускает матрица СЛАУ.

Таблица 4.16

**Значения  $x_i$  системы (4.2.5), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	8256	8256	256	0.2431725232e-928
2	-2	-2	256	0.1803439731e-927
4	-4	-4	256	0.3651883648e-929
8	-8	-8	256	0.1761602653e-927
16	-16	-16	256	0.8055785034e-928
32	-32	-32	256	0.1028577631e-926
64	-64	-64	256	0.7477114705e-927
128	-128	-128	256	0.6574103665e-926

Интересно отметить, что решениями системы (4.2.5) для  $x_i$ , где  $i = 2, 4, 8, \dots, 128$  являются отрицательные числа  $-2, -4, -8, \dots, -128$ . СЛАУ (3.2.5) можно использовать как тестовую.

В заключение параграфа рассмотрим решение системы Сс.

$$\begin{pmatrix} 128 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 127 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 126 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 125 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

В табл. 4.17 и 4.18 показаны результаты решения системы (4.2.6) размерностью  $128 \times 128$ .

Таблица 4.17

**Определение  $x_1$  системы (4.2.6) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	0.0078125	0.0078125	0.0078125	0.0078125	0.5531102548e-1507
2	0.007215450479	-0.0005970495207	-0.07642233864	0.007257838972	0.0005546610278
3	0.01068200622	0.003466555743	5.729722082	0.007724777865	0.8772213515e-4
4	-0.007146781858	-0.01782878808	0.671904034	0.007780296643	0.3220335692e-4
5	0.08476950384	0.0919162857	-0.08744679499	0.007786317985	0.2618201487e-4
6	-0.3889546451	-0.4737241489	0.6270736955	0.007800044159	0.1245584094e-4
7	2.052676456	2.441631101	-0.09418069857	0.007806178575	0.6321424865e-5
8	-10.53168194	-12.5843584	0.3130545296	0.007811258053	0.1241946736e-5
9	54.32917576	64.86085771	-0.08358923861	0.007812174207	0.3257925097e-6
10	-279.9691486	-334.2983243	0.2031804752	0.007812463245	0.3675516652e-7
...	...	...	...	...	...
254	-0.1629651238e177	-0.1945837609e177	0.01011599864	0.0078125	0.7929660755e-561
255	0.8399360029e177	0.1002901127e178	-0.8697177171e-5	0.0078125	0.7976296439e-563
256	-0.4329101052e178	-0.5169037055e178	0.01005872332	0.0078125	0.1042021781e-1003
257	0.2231255221e179	0.2664165326e179	<b>-0.8544188441e-759</b>		

Можно заметить, что для матрицы СЛАУ (4.2.6) метод цепных дробей приводит к быстросходящемуся итерационному процессу. Из колонки 4 таблицы 4.17 следует, что цепная дробь, построенная по “итерационному” ряду является знакоположительной, что гарантируют “вилку” при вычислении значений подходящих дробей. Наличие “вилки” упрощает оценку погрешности при определении значения цепной дроби. Результат находится между значениями соседних подходящих. Значения подходящих с чётными номерами, т. е. подходящие  $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ , дают монотонно возрастающую последовательность, иначе говоря, дают результат с “недостатком”, в то время как подходящие с нечётными номерами  $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$  приводят к монотонно убывающей последовательности, т. е. имеем результат с “избытком”, причём, значение  $\frac{P_n}{Q_n}$  ближе по модулю к истинному результату, нежели значение  $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ .

Таблица 4.18

**Значения  $x_i$  системы (4.2.6), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	0.0078125	0.0078125	256	0.1042021781e-1003
2	0.00390625	0.00390625	256	0.155055258e-1321
4	0.001953125	0.001953125	256	0.1478551712e-1322
8	0.0009765625	0.0009765625	256	0.4233789785e-1322

Окончание табл. 4.18

16	0.00048828125	0.00048828125	256	0.3577060005e-1322
32	0.000244140625	0.000244140625	256	0.2196197039e-1323
64	0.0001220703125	0.0001220703125	256	0.1687095936e-1321
128	-0.0345729265	-0.0345729265	256	0.9087055719e-1321

Приведенные примеры решения систем линейных алгебраических уравнений показывают, что на основе методов теории цепных дробей могут быть построены эффективные итерационные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений.

### 4.3. Решение СЛАУ с симметричной матрицей

Рассмотрим решения систем класса  $Aa$ . В системе (4.3.1) размерностью  $128 \times 128$  диагональные элементы имеют величину  $10^{-7}$ :

$$\begin{pmatrix} 1E-07 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1E-07 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1E-07 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1E-07 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1E-07 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

В табл. 4.19 и 4.20 приведены результаты решения системы (4.3.1). Из колонки 2 табл. 4.19 видно, что значения  $x_1^{(k)}$  с каждой итерацией растут в геометрической прогрессии со знаменателем  $q \approx 10^9$ , в то время как четвертый коэффициент соответствующей цепной дроби близок к нулю.

Таблица 4.19

*Определение  $x_1$  системы (4.3.1) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значения $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{it} - x_{идр}$
1	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	-9.92125e-1
2	-1.259999999999e9	-1.260000000099e9	7.93650792392e-10	7.87402e-3
3	1.60020000001e18	9.99999000000e6	7.87401574184e-3	-1.16087e-1498
4	-2.03225400001e27	-2.24695932663e-1494		

Используя данные третьей колонки табл. 4.19 можно записать цепную дробь для определения  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1,2600 \dots e9}{1} + \frac{9,9999 \dots e6}{1}} = 0,007874 \dots$$

В табл. 4.20 приведены результаты решения системы (4.3.1) методом цепных дробей.

Таблица 4.20

*Значения  $x_i$  системы (4.3.2), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{it} - x_{идр}$
1	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	-1.16087e-1498
2	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	-4.26309e-1501
4	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39654e-1503
8	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39553e-1503
16	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39549e-1503
32	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39556e-1503
64	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39544e-1503
128	7.87401574184e-3	7.87401574184e-3	3	3.39541e-1503

Следует обратить внимание: для точного определения  $x_i$  СЛАУ с симметричной матрицей методом цепных дробей требуется всего три итерации, причём, число итераций не зависит от разрядности СЛАУ.

Система (4.3.2) относится к системам класса  $Ab$ , то есть к системам, имеющим постоянные элементы по диагоналям и «возрастающую» правую часть. Размерность СЛАУ (4.2.2) 128x128.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 & 1000 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1 & 1000 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

В табл. 4.21 и табл. 4.22 приведены результаты решения СЛАУ (4.3.2).

Таблица 4.21

**Определение  $x_1$  системы (4.3.2) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{иг} - x_{идр}$
1	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	-9.35928e-1
2	-1.26999000000e5	-1.27000000000e5	7.87395374840e-6	6.40636e-2
3	1.61207450010e10	-6.40000000000e1	-4.96309192749e-4	6.45678e-2
4	-2.04734275125e15	1.27936000000e5	7.87789269451e-6	6.40636e-2
5	2.60012521274e20	1.27000000000e5	6.40714335804e-2	-3.94045e-1502
6	-3.30215902098e25	1.14634386448e-3002		

Для определения значения  $x_1$  системы (4.3.2) можно записать цепную конечную дробь, содержащую всего пять звеньев:

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1,2700 \dots e5}{1} - \frac{64,0000 \dots}{1} - \frac{1,2793 \dots e5}{1} + \frac{1,2700 \dots e5}{1}} = 0,064071 \dots$$

Таблица 4.22

**Значения  $x_i$  системы (4.3.2), полученных методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{иг} - x_{идр}$
1	6.40714335804e-2	6.40714335804e-2	5	-3.94045e-1502
2	6.30704325794e-2	6.30704325794e-2	5	4.20941e-1505
4	6.10684305774e-2	6.10684305774e-2	5	-5.36571e-1505
8	5.70644265734e-2	5.70644265734e-2	5	3.51914e-1505
16	4.90564185654e-2	4.90564185654e-2	5	-5.74578e-1505
32	3.30404025494e-2	3.30404025494e-2	5	8.06627e-1504
64	1.00837051728e-3	1.00837051728e-3	5	5.96745e-1508
128	-6.30556935467e-2	-6.30556935467e-2	5	-1.04474e-1505

Из табл. 4.21 видно, что значения  $x_1^{(k)}$ , получаемые методом простых итераций, растут по модулю чрезвычайно быстро, как элементы геометрической прогрессии со знаменателем  $q \approx 10^5$ . В табл. 4.22 приведены погрешности в определении  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 128$ ) для системы (4.3.2). Необходимо ещё раз отметить высокую эффективность метода цепных дробей при решении СЛАУ с симметричной матрицей. Для точного определения значения  $x_i$  СЛАУ класса  $Ab$  требуется всего пять итераций, опять-таки вне зависимости от размерности системы.

Система (4.3.3) относится к системам класса Ас, когда элементы матрицы по диагоналям имеют одинаковые значения, а элементы правой части образуют «ниспадающую» последовательность.

$$\begin{pmatrix} 1E-10 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1E-10 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1E-10 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1E-10 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1E-10 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

Диагональные элементы матрицы системы (4.3.3) близки к нулю. Система (4.3.3), очевидно, не может быть решена методом простых итераций. Данные второй колонки табл. 4.23, где помещены значения  $x_1^{(i)}$ , полученные по методу простых итераций, образуют знакопеременную возрастающую по модулю последовательность чисел. На пятой итерации метод цепных дробей позволяет определить  $x_1$  с абсолютной погрешностью, которая составляет величину  $10^{-1495}$ .

Таблица 4.23

**Определение  $x_1$  системы (4.3.3) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-1.95721
2	-1.259999999999e12	-1.260000000000e12	7.93650793650e-13	-9.57219e-1
3	1.61245668530e24	1.97275280076e10	1.54154127162e-2	-9.72634e-1
4	-2.04769742346e36	6.35957056925e11	7.69031571189e-13	-9.57219e-1
5	2.60057695348e48	6.16229528917e11	-9.57219314327e-1	-4.83329e-1495
6	-3.30273271865e60	2.78558702194e-1491		

Используя данные третьей колонки табл. 4.23, запишем цепную дробь для  $x_1$  системы (4.3.3):

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1,2600 \dots e12}{1} + \frac{1,9727 \dots e10}{1} - \frac{6,3595 \dots e11}{1} + \frac{6,1622 \dots e11}{1}} = 0,957219 \dots$$

Из табл. 4.24 видно, что методом цепных дробей неизвестные системы (4.3.3) ( $x_i = 2, 4, \dots, 128$ ) находятся с погрешностью порядка  $10^{-1495}$  при числе звеньев цепной дроби, равном 5.

Таблица 4.24

**Значения  $x_i$  системы (4.3.3), полученные методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	-9.57219314327e-1	-9.57219314327e-1	5	-4.83329e-1495
2	-4.57219314277e-1	-4.57219314277e-1	5	-1.20787e-1496
4	-2.07219314252e-1	-2.07219314252e-1	5	9.60186e-1499
8	-8.22193142398e-2	-8.22193142398e-2	5	9.60185e-1499
16	-1.97193142335e-2	-1.97193142335e-2	5	9.60186e-1499
32	1.15306857696e-2	1.15306857696e-2	5	9.60186e-1499
64	2.71556857712e-2	2.71556857712e-2	5	9.60185e-1499
128	3.49681857719e-2	3.49681857719e-2	5	9.60186e-1499

Для построения конечных цепных дробей, точно определяющих решения системы (4.3.3), потребовались данные, как и других аналогичных случаях, всего пяти итераций.

Систему (4.3.4) можно отнести к классу Ас. В матрице СЛАУ значения диагональных элементов чередуется, то есть элементы равны “2000” или “2”. Цепные дроби, которыми точно представляются  $x_i$ , имеют семь звеньев.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2000 & 2 & 2000 & 2 & \dots \\ 2000 & 1 & 2000 & 2 & 2000 & \dots \\ 2 & 2000 & 1 & 2000 & 2 & \dots \\ 2000 & 2 & 2000 & 1 & 2000 & \dots \\ 2 & 2000 & 2 & 2000 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.4)$$

Таблица 4.25

**Определение  $x_1$  системы (4.3.4) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-1.95216
2	-1.2812500000e5	-1.2812600000e5	7.80475621844e-6	-9.52176e-1
3	1.64162671290e10	9.62942624394e-1	1.53201735150e-5	-9.52183e-1
4	-2.10335046552e15	1.29557687301e5	7.80469820929e-6	-9.52176e-1
5	2.69493904288e20	1.26731620466e5	-3.29453428334e-4	-9.51838e-1
6	-3.45291730982e25	-2.78560852718e3	7.80205907562e-6	-9.52176e-1
7	4.42408520098e30	-1.27836504634e5	-9.52168435189e-1	-7.64591e-1495
8	-5.66840293327e35	-1.56026724926e-1494		

Можно обратить внимание, что цепная дробь, представляющая  $x$ , не сходится. Точное решение даёт конечная цепная дробь:

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{1,2812 \dots e5}{1} + \frac{0,2629 \dots}{1} - \frac{1,2955 \dots e5}{1} + \frac{1,2673 \dots e5}{1} + \frac{2,7856 \dots e3}{1} - \frac{1,2783 \dots e5}{1}} = -0,952168 \dots$$

Таблица 4.26

**Значения  $x_i$  системы (4.3.4), полученных методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	-9.52168435189e-1	-9.52168435189e-1	7	-7.64591e-1495
2	-4.62937978919e-1	-4.62937978919e-1	7	-1.57038e-1495
4	-2.12937978919e-1	-2.12937978919e-1	7	-2.24625e-1495
8	-8.79379789198e-2	-8.79379789198e-2	7	-3.33035e-1495
16	-2.54379789198e-2	-2.54379789198e-2	7	-1.57037e-1495
32	5.81202108013e-3	5.81202108013e-3	7	-3.25654e-1495
64	2.14370210802e-2	2.14370210802e-2	7	-2.49093e-1495
128	2.92495210802e-2	2.92495210802e-2	7	-2.67615e-1496

Следует обратить внимание на чрезвычайно высокую эффективность “метода цепных дробей” при решении СЛАУ с симметрической матрицей произвольной разрядности. Так, значения неизвестных  $x_i$  СЛАУ с симметричной матрицей произвольной разрядности, например, системы (4.3.3) устанавливаются точно цепными дробями, имеющих всего 5 звеньев.

Система (4.3.5) размерностью 128x128 имеет несимметричную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 & 10 & 10 & \dots \\ 10.001 & 1 & 10 & 10 & 10 & \dots \\ 10.001 & 10.001 & 1 & 10 & 10 & \dots \\ 10.001 & 10.001 & 10.001 & 1 & 10 & \dots \\ 10.001 & 10.001 & 10.001 & 10.001 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

В табл. 4.27 и 4.28 приведены результаты решения системы (4.3.5) методом цепных дробей. Решения  $x_i$  СЛАУ с несимметричной СЛАУ определяется цепными дробями,

содержавшими 256 звеньев, т.е. цепные дроби имеют  $2n$  звеньев, как при решении СЛАУ с матрицами общего вида размерностью  $n \times n$ .

Таблица 4.27

**Определение  $x_i$  системы (4.3.5) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значения $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-9.99218e-1
2	-1.2690000000e3	-1.2700000000e3	7.86782061370e-4	-5.57686e-6
3	1.61171228001e6	6.4000000001e-2	8.37093962224e-4	-5.58887e-5
4	-2.04697692953e9	1.00220000001e1	7.81205169873e-4	3.10378e-11
5	2.59979068144e12	4.50508880463e-5	7.81204890778e-4	3.10133e-10
6	-3.30189924935e15	9.99204505089	7.81205200911e-4	-6.23438e-17
...	...	...	...	...
255	-2.98622488788e791	9.91998592473e-11	7.81205200911e-4	-3.18080e-1080
256	3.79269522972e794	1.00004980239e1	7.81205200911e-4	-1.36495e-1508
257	-4.81696377383e797	-1.35079358444e-1383		

Матрица СЛАУ (4.3.5) обеспечивает, как то следует из табл. 4.27, итерационное решение. Метод простых итераций приводит к быстро расходящемуся процессу. Однако цепные дроби, которым представляются неизвестные по расходящемуся итерационномц процессу, дают быстро сходящиеся цепные дроби.

Таблица 4.28

**Значения  $x_i$  системы (4.3.5), полученных методом цепных дробей**

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	7.81205200911e-4	7.81205200911e-4	256	-1.36495e-1508
2	7.81292001489e-4	7.81292001489e-4	256	-1.04115e-1508
4	7.81465631579e-4	7.81465631579e-4	256	-1.57800e-1508
8	7.81813007528e-4	7.81813007528e-4	256	-1.36446e-1508
16	7.82508222740e-4	7.82508222740e-4	256	-4.37742e-1509
32	7.83900508342e-4	7.83900508342e-4	256	-7.63920e-1509
64	7.86692515668e-4	7.86692515668e-4	256	-1.16896e-1508
128	7.92306398498e-4	7.92306398498e-4	256	-4.77321e-1509

Система (4.3.6) отличается от системы (4.3.5) правой частью

$$\begin{pmatrix} 1 & 10.0 & 10.0 & 10.0 & 10.0 & \dots \\ 10.1 & 1 & 10.0 & 10.0 & 10.0 & \dots \\ 10.1 & 10.1 & 1 & 10.0 & 10.0 & \dots \\ 10.1 & 10.1 & 10.1 & 1 & 10.0 & \dots \\ 10.1 & 10.1 & 10.1 & 10.1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

В табл. 4.29 и 4.30 приведены результаты решения системы (4.3.6) методом цепных дробей.

Таблица 4.29

**Определение  $x_i$  системы (4.3.6) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДр}$
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	-1.10614
2	-1.2690000000e3	-1.2700000000e3	7.86782061370e-4	-1.06931e-1
3	1.61366946853e6	1.60509332998	2.04705555843e-3	-1.08191e-1
4	-2.05037115430e9	7.74678733184e2	7.85151065130e-4	-1.06929e-1
5	2.60527327034e12	7.63689480914e2	-1.06148306464e-1	4.08662e-6
6	-3.31035112273e15	4.03644726300e-6	-1.06185327228e-1	4.11074e-5
7	4.20624764595e18	-1.00521404594e1	-1.06144218311e-1	-1.54059e-9

Окончание табл. 4.29

8	-5.34460502918e21	-3.04367354960e-3	-1.06144204489e-1	-1.53623e-8
9	6.79104164149e24	-9.96739012667	-1.06144219852e-1	1.64174e-13
10	-8.62893447216e27	-8.64197840446e-4	-1.06144219853e-1	1.64427e-12
...				
250	1.01149687704e776	-1.00049885307e1	-1.06144219852e-1	-1.27546e-807
251	-1.28524322651e779	-3.05136472920e-8	-1.06144219852e-1	-1.27609e-806
252	1.63307489011e782	-1.00049886842e1	-1.06144219852e-1	3.16289e-816
253	-2.07504193889e785	-2.00985659189e-8	-1.06144219852e-1	3.16446e-815
254	2.63662069282e788	-1.00049888344e1	-1.06144219852e-1	-3.87506e-825
255	-3.35018225293e791	-9.92992187975e-9	-1.06144219852e-1	-3.87699e-824
256	4.25685846981e794	-1.00049889814e1	-1.06144219852e-1	-7.34522e-959
257	-5.40891290797e797	2.64312741488e-131		

Из колонки 2 табл. 4.29 следует, что метод простых итераций применительно к системе (4.3.6) даёт быстро расходящуюся последовательность. Тем не менее, для быстро расходящегося ряда, построенного по значениям “расходящихся” итераций, имеем конечную цепную дробь, точно представляющего  $x_1$ . Можно также обратить внимание на закономерности в образовании величин “чётных” и “нечётных” коэффициентов  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби.

Таблица 4.30

Значения  $x_i$  системы (4.3.6), полученных методом цепных дробей

Номер $x_i$	Значения $x_i$ по методу Гаусса	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Погрешность, $x_{iГ} - x_{iДР}$
1	-1.06144219852e-1	-1.06144219852e-1	256	-1.13870e-955
2	-5.07066023187e-2	-5.07066023187e-2	256	-1.26770e-955
4	-2.30209923484e-2	-2.30209923484e-2	256	-1.16506e-955
8	-9.20487605854e-3	-9.20487605854e-3	256	-1.29197e-955
16	-2.30858182982e-3	-2.30858182982e-3	256	-1.31331e-955
32	1.15838845565e-3	1.15838845565e-3	256	-1.07161e-955
64	2.97377656092e-3	2.97377656092e-3	256	-1.46239e-955
128	4.09924787476e-3	4.09924787476e-3	256	-3.03485e-956

#### 4.4. Решение СЛАУ различной размерности

В этом параграфе будет рассмотрено решения СЛАУ различной размерности. Метод цепных дробей обеспечивает точное решение СЛАУ размерности  $n$  при использовании результатов  $2n$  итераций, то есть конечные цепные дроби, представляющие  $x_i$ , имеют  $2n$  звеньев.

Ранее уже отмечалось, что СЛАУ с симметричной матрицей решается методом цепных дробей чрезвычайно эффективно – цепные дроби, представляющие неизвестные  $x_i$ , содержат всего несколько звеньев, причем, независимо от размерности СЛАУ. Так, цепные дроби, представляющие  $x_i$  системы класса  $Aa$  имеют всего три звена. Цепные дроби, определяющие  $x_i$  систем классов  $Ab$  и  $Ac$ , то есть СЛАУ с симметричными матрицами, и, соответственно, возрастающими и убывающими правыми частями, содержат 5 звеньев.

В этом параграфе будут рассмотрены СЛАУ различных классов с размерностью,  $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$ . Представляются результаты решения СЛАУ различных классов. СЛАУ (4.4.1) принадлежит к СЛАУ класса  $Bc$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$



В табл. 4.31 и 4.32 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.1) размерность 64x64.

Таблица 4.31

*Определение  $x_1$  системы (4.4.1-64) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	3.743890904
2	0.3705694986	-0.6294305014	-0.6294305014	0.6137113544	4.130179549
3	6.269042806	5.898473307	8.741696722	0.9393093453	3.804581558
4	-17.22742562	-23.49646842	5.775572022	4.130373083	0.6135178203
5	89.00728169	106.2347073	-0.009723850291	4.504837941	0.239052963
6	-379.3914428	-468.3987245	0.3213723548	4.714638876	0.02925202757
7	1695.767027	2075.158469	-0.06113402036	4.73676097	0.007129933968
8	-7489.336323	-9185.103349	0.2046152327	4.74322743	0.0006634738904
9	33173.20673	40662.54305	-0.06017632431	4.743772707	0.0001181968101
10	-146834.0533	-180007.2601	0.1543423068	4.743882305	0.859885556e-5
...	...	...	...	...	...
124	-0.6637432703e79	-0.8136779917e79	0.02040845419	4.743890904	0.3819547296e-233
125	0.2938312918e80	0.3602056188e80	-0.7073041561e-4	4.743890904	0.7706782875e-235
126	-0.130075636e81	-0.1594587652e81	0.02017504887	4.743890904	0.2766806884e-239
127	0.5758294489e81	0.7059050849e81	-0.3447487848e-4	4.743890904	0.5519388098e-241
128	-0.2549128833e82	-0.3124958282e82	0.01994788264	4.743890904	0.8897758596e-1420
129	0.1128469171e83	0.1383382054e83	<b>0.2644562103e-1178</b>		

Система (4.4.1) решается методом цепных дробей, причём, цепные дроби, представляющие  $x_i$ , являются сходящимися, то есть система (4.4.1) допускает итерационные приближения, что, как отмечалось выше, определяется элементами матрицы системы или типом матрицы. Матрицы СЛАУ приводящие к сходящимся цепным дробям будем называть “вещественными”, а матрицы СЛАУ, которые порождают “расходящиеся” цепные дроби для  $x_i$ , будем называть “комплексными” матрицами. Такие определения матриц СЛАУ будут обоснованы далее.

Таблица 4.32

*Значения  $x_i$  системы (4.4.2-64), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	4.743890904	4.743890904	128	0.237912268e-1419
2	-0.5	-0.5	128	0.1831519586e-1419
4	-0.25	-0.25	128	0.9677367497e-1420
8	-0.125	-0.125	128	0.3169793434e-1420
16	-0.0625	-0.0625	128	0.1486083367e-1419
32	-0.03125	-0.03125	128	0.6869504082e-1420
64	-0.015625	-0.015625	128	0.1077691912e-1420

Можно обратить внимание, что значения неизвестных системы (4.4.1)  $x_i$  уменьшатся по квадратичному закону.

В табл. 4.33 и 4.34 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.1) размерность 128x128.

Таблица 4.33

*Определение  $x_1$  системы (4.4.1-128) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	4.433147
2	0.362848	-0.637152	-0.63715	0.610817	4.82233
3	7.418557	7.055709	10.43667	0.947229	4.485918
4	-25.72424	-33.142793	6.765805	4.684109	0.749038
5	147.87393	173.59817	-0.00894	5.137832	0.295315

Окончание табл. 4.33

6	-744.4633	-892.33728	0.323127	5.395674	0.037473
7	3856.7998	4601.2632	-0.0632	5.42404	0.009107
8	-19856.69	-23713.494	0.202198	5.432249	0.000898
9	102366.22	122222.91	-0.06427	5.432991	0.000156
10	-527579.6	-629945.86	0.149145	5.433135	1.24E-05
...	...	...	...	...	...
255	1.58E+180	1.89E+180	-8.56E-06	5.433147	0.6570021388e-564
256	-8.16E+180	-9.74E+180	0.009981	5.433147	0.1065655322e-1318
257	4.20E+181	5.02E+181	<b>0.3465922286e-754</b>		

При решении СЛАУ (4.4.1) размерностью 128x128 методом цепных дробей точные значения  $x_i$  получаем, как и следовало ожидать, на 256-й итерации. Точнее сказать: после 256-й итерации цепная дробь, которая строится по алгоритму Рутисхаузера по расходящемуся ряду, генерируемому итерационным процессом, обрывается, то есть становится конечной, и значение этой конечной цепной дроби, представляющей неизвестную  $x_i$ , совпадает с точным значением неизвестной, которое даёт метод Гаусса.

Таблица 4.34

Значения  $x_i$  системы (4.4.1-128), полученные методом цепных дробей

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев	Абсолютная погрешность
1	5.433147	5.433147	256	0.4955447067e-1318
2	-0.5	-0.5	256	0.8238733016e-1319
4	-0.25	-0.25	256	0.4788239861e-1319
8	-0.125	-0.125	256	0.2406313254e-1319
16	-0.0625	-0.0625	256	0.139598807e-1319
32	-0.03125	-0.03125	256	0.8562984217e-1320
64	-0.01563	-0.01563	256	0.4974554771e-1320
128	-0.00781	-0.00781	256	0.3058367421e-1320

Можно обратить внимание, что СЛАУ вида (4.4.1) можно использовать в качестве тестовой системы, так как известна закономерность, которой подчиняются значения неизвестных  $x_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , начиная с  $x_2$ . Тестовыми системами являются СЛАУ с матрицей Гильберта. Все неизвестные СЛАУ с матрицей Гильберта имеют единичные значения.

СЛАУ (4.4.2) – это СЛАУ класса  $Bb$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

В табл. 4.35 и 4.36 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.2) размерность 64x64.

Таблица 4.35

Определение  $x_1$  системы (4.4.2-64) методом цепных дробей

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	63
2	-62	-63	-63	0.015625	62.015625
3	173.8651269	235.8651269	-59.2561091	-12.28023795	49.71976205
4	-905.3991816	-1079.264309	0.05255931329	-42.24975426	19.75024574
5	3842.909136	4748.308318	-0.08470163111	-54.55933391	7.440666087
6	-17202.26999	-21045.17913	0.2309953103	-60.50979996	1.490200043

Окончание табл. 4.35

7	75940.97727	93143.24726	-0.1072519113	-61.63562026	0.3643797408
8	-336411.3065	-412352.2838	0.1855215399	-61.95431117	0.04568883215
9	1489007.958	1825419.265	-0.08166737509	-61.9916141	0.00838590466
10	-6591920.376	-8080928.334	0.1523028292	-61.99926149	0.0007385083039
...	...	...	...	...	...
124	-0.2979688441e81	-0.3652778138e81	0.02044607108	-62	0.2498793754e-230
125	0.1319072815e82	0.1617041659e82	-0.7142504503e-4	-62	0.5050891541e-232
126	-0.5839379267e82	-0.7158452081e82	0.02021112728	-62	0.1831023026e-236
127	0.2585024105e83	0.3168962031e83	-0.3480899158e-4	-62	0.3658972398e-238
128	-0.1144359583e84	-0.1402861993e84	0.01998250352	-62	0.3502995058e-1418
129	0.5065944463e84	0.6210304046e84	<b>-0.3159548444e-1178</b>		

Решение СЛАУ (4.4.2) находится на 128-й итерации. Так как цепная дробь, представляющая  $x_1$ , является сходящейся, то матрицу коэффициентов СЛАУ (4.4.2) будем называть “вещественной”. СЛАУ (4.4.2) можно называть тестовой, так как все решения системы, кроме  $x_1$ , имеющие номера  $x_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , имеют единичные значения.

Таблица 4.36

*Значения  $x_i$  системы (4.4.2-64), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	-62	-62	128	0.1144613164e-1416
2	1	1	128	0.1155704209e-249
4	1	1	128	0.139924017e-249
8	1	1	128	0.2418530758e-249
16	1	1	128	0.5293114865e-249
32	1	1	128	0.7175030164e-250
64	1	1	128	0.2629283345e-250

В табл. 4.37 и 4.38 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.2) размерность 128x128.

Таблица 4.37

*Определение  $x_1$  системы (4.4.2-128) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	127
2	-126	-127	-127	0.007813	126.0078
3	437.00968	563.00968	-122.567	-22.375	103.625
4	-2540.986	-2977.996	0.030971	-82.7825	43.21749
5	12742.829	15283.816	-0.08366	-109.85	16.14994
6	-66087.26	-78830.08	0.219883	-122.495	3.505173
7	340161.22	406248.48	-0.1191	-125.172	0.827779
8	-1753720	-2093881	0.173421	-125.885	0.115463
9	9038282.9	10792003	-0.09326	-125.98	0.020104
10	-46584641	-55622924	0.140621	-125.998	0.002015
...	...	...	...	...	...
252	-1.02E+180	-1.22E+180	0.010104	-126	0.1743976154e-551
253	5.26E+180	6.28E+180	-1.74E-05	-126	0.1752091096e-553
254	-2.71E+181	-3.24E+181	0.010046	-126	0.1537386043e-558
255	1.40E+182	1.67E+182	-8.60E-06	-126	0.1535813792e-560
256	-7.20E+182	-8.60E+182	0.00999	-126	0.3148852994e-1318
257	3.71E+183	4.43E+183	<b>-0.2427202619e-755</b>		

Решения СЛАУ (4.4.2) размерности 128x128 имеем после 256-ти итераций. Коэффициент  $\omega_{257} = -0,242 \dots e-775$ , то есть имеет значение, близкое к нулевому. Метод простых итераций даёт быстро расходящиеся “отсчёты”, по которым строится так же быстро расходящийся знакопеременный ряд, данные которого, тем не менее, приводят к сходящейся конечной цепной дроби. Если размерность СЛАУ  $n \times n$ , то метод цепных

дробей порождает конечную цепную дробь, имеющую  $2l$  звеньев. Значение  $x_i$  этой конечной цепной дроби совпадает с точным решением СЛАУ.

Таблица 4.38

*Значения  $x_i$  системы (4.4.2-128), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	-126	-126	256	0.3906251155e-1316
2	1	1	256	0.1084231043e-999
4	1	1	256	0.1195098272e-999
8	1	1	256	0.1502339451e-999
16	1	1	256	0.3092308086e-999
32	1	1	256	0.2769255173e-999
64	1	1	256	0.5780046548e-1000
128	1	1	256	0.2238110939e-1000

СЛАУ (4.4.2) имеет единичные значения для  $x_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Так же известно значение  $x_1$  для СЛАУ (4.4.2) различной размерности.  $x_1 = -(n - 2)$ , где  $n$  – размерность СЛАУ.

Приведём решения СЛАУ (4.4.3) различной размерности, полученные методом цепных дробей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1/3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

Можно заметить, что СЛАУ (4.4.3) имеет диагональными элементами элементы гармонического ряда:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , а элементами правой части – элементы натурального ряда:  $1, 2, 3, \dots$ . В СЛАУ (4.4.1) мы наблюдаем обратную картину: диагональными элементами были элементы натурального ряда, а элементы, стоящие в правой части – элементы гармонического ряда.

В табл. 4.39 и 4.40 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.3) размерность 64x64.

Таблица 4.39

*Определение  $x_1$  системы (4.4.3-64) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	1	1	1	1	2079
2	-89438	-89439	-89439	0.1118067979e-4	2079.999989
3	1,82E+08	1,82E+08	-87408.34938	-43.0228251	2123.022825
4	-3,7E+11	-3,7E+11	0.1523369573	7.539440696	2072.460559
5	0.7533533805e15	0.7537231953e15	-23.83887823	-33.25721646	2113.257216
6	-0.1534664884e19	-0.1535418237e19	14.09076215	31.23785223	2048.762148
7	0.3126283511e22	0.3127818176e22	-14.71338576	-26.5015945	2106.501595
8	-0.6368588152e25	-0.6371714436e25	20.46290506	81.73525128	1998.264749
9	0.1297352429e29	0.1297989287e29	-11.12074324	-16.41043626	2096.410436
10	-0.2642851577e32	-0.2644148929e32	22.98365388	167.6157895	1912.384211
...	...	...	...	...	...
124	-0.4464373245e409	-0.4466564767e409	31.76145976	2080	0.1389177494e-29
125	0.9094426165e412	0.9098890538e412	-0.4956590647	2080	0.4339859794e-28
126	-0.185263603e416	-0.1853545473e416	32.00883696	2080	0.1128830189e-31
127	0.3774026198e419	0.3775878834e419	-0.2478694691	2080	0.361182565e-30
128	-0.7688112242e422	-0.7691886268e422	32.2563113	2080	0.4823244011e-1257
129	0.1566154201e426	0.1566923012e426	<b>0.5230587965e-1222</b>		

Таблица 4.40

Значения  $x_i$  системы (4.4.3-64), полученные методом цепных дробей

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	2080	2080	128	0.6090111805e-1254
2	-2	-2	128	0.5415641895e-1254
4	-4	-4	128	0.2184133347e-1253
8	-8	-8	128	0.6676691358e-1254
16	-16	-16	128	0.1140097583e-1252
32	-32	-32	128	0.2068907607e-1252
64	-64	-64	128	0.1329618908e-1252

Связанными, оказываются и решения СЛАУ (4.4.1) и (4.4.3). Значения  $x_{2i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) системы (4.4.3) можно получить как  $1/x_{2i}$ , где  $x_{2i}$  – решения системы (4.4.3).

Решение СЛАУ с матрицей Гильберта. Выше уже отмечалось, что СЛАУ с матрицей Гильберта часто рассматривают как тестовые СЛАУ при сравнении эффективности различных алгоритмов решения СЛАУ. В матрице Гильберта по первой строке идут члены гармонического ряда, во второй строке элементы начинаются с элемента  $1/2$ , в третьей с элемента  $1/3$  и т.д. Матрица Гильберта – это частный случай матрицы Ганкеля. Элементы правой части формируются как суммы элементов по строкам матрицы Гильберта.

В табл. 4.41 и 4.42 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.4) размерностью  $128 \times 128$ . Разрядность переменных 15000 бит.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.433147093 \\ 4.440899031 \\ 3.948591338 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Таблица 4.41

Определение  $x_1$  системы (4.4.4-128) методом цепных дробей

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	5.433147093	5.433147093	5.433147093	5.433147093	4.433147093
2	-326.6673662	-332.1005133	-61.12488906	0.08745524016	0.9125447598
3	34645.14489	34971.81226	44.18001371	2.309109493	1.309109493
4	-3820322.98	-3854968.125	-11.74089599	0.3700576428	0.6299423572
5	423047298.8	426867621.8	4.398477219	1.065730696	0.06573069623
6	-4.7E+10	-4.7E+10	-1.688012562	0.7041296031	0.2958703969
7	5.19E+12	5.24E+12	1.038717268	0.8244713557	0.1755286443
8	-0.5752510253e15	-0.5804433295e15	0.5933148396	0.9033241408	0.09667585916
9	0.6373160863e17	0.6430685965e17	-0.1329328209	0.925569308	0.07443069204
10	-0.7060775139e19	-0.7124506748e19	0.5379329422	0.9750108862	0.02498911377
...	...	...	...	...	...
252	-0.4142362412e514	-0.4179751992e514	1	1	0.6833091054e-23
253	0.4589290987e516	0.4630714611e516	0.1179476326e-28	1	0.6833091054e-23
254	-0.5084439666e518	-0.5130332576e518	1	1	0.1868379127e-25
255	0.5633011024e520	0.568385542e520	-0.9152324988e-35	1	0.1868379127e-25
256	-0.6240768949e522	-0.6297099059e522	1	1	0.2126390236e-457
257	0.6914099212e524	0.6976506901e524	<b>-0.1157881962e-445</b>		

Следует обратить внимание, что СЛАУ (4.4.4) с матрицей Гильберта решалась при длине разрядной сетки в 15000 бит. Большая размерность данных обусловлена особенностями алгоритма Рунтисхаузера, когда вычитаются очень близкие между собой числа

и нельзя допускать потери мантиссы разности с тем, чтобы избежать деления на ноль или потери точности вычислений.

Таблица 4.42  
Значения  $x_i$  системы (4.4.4-128), полученные методом цепных дробей

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	1	1	256	0.1584646052e-454
2	1	1	256	0.7712064429e-455
4	1	1	256	0.3418593724e-454
8	1	1	256	0.4952417998e-454
16	1	1	256	0.1789292408e-454
32	1	1	256	0.8368570254e-454
64	1	1	256	0.5286349612e-454
128	1	1	256	0.9552304129e-454

Из третьей колонки табл. 4.42 следует, что неизвестные  $x_1$  СЛАУ с матрицей Гильберта имеют единичные значения.

В табл. 4.43 и 4.44 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.5) размерностью 256 x 256.

Решение СЛАУ с матрицей Гильберта размерности 256x256 потребовало чрезвычайно длинной разрядной сетки – 30000 бит. Как уже отмечалось, большая длина разрядной сетки обусловлена особенностями алгоритма Рутисхаузера, который позволяет по коэффициентам ряда найти коэффициенты соответствующей цепной дроби. Эта особенность алгоритма Рутисхаузера серьезно сказывается на эффективности предложенного метода решения систем линейных алгебраических уравнений, который был назван “методом цепных дробей”, ибо требует при решении СЛАУ большой размерности, вычислительных средств очень высокой производительности.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.058495 \\ 3.088798 \\ 2.618209 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Таблица 4.43

Определение  $x_1$  системы (4.4.5) методом цепных дробей

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу простых итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты цепной дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	6.124344963	6.124344963	6.124344963	6.124344963	5.124344963
2	-676.1613829	-682.2857279	-111.4055025	0.05448438758	0.9455156124
3	142681.3633	143357.5247	98.70811837	2.89250362	1.89250362
4	-31581016.57	-31723697.94	-23.79209174	0.262125896	0.737874104
5	7.02E+09	7.06E+09	10.06123352	1.377415957	0.3774159566
6	-0.15634502e13	-1.6E+12	-4.532900484	0.5709906334	0.4290093666
7	0.3479776921e15	0.3495411423e15	2.069753773	0.8648110363	0.1351889637
8	-0.7744999096e17	-0.7779796865e17	-0.2844497486	0.8198200171	0.1801799829
9	0.1723818829e20	0.1731563828e20	1.817948912	0.8470950856	0.1529049144
...	...	...	...	...	...
510	-0.2084986269e1196	-0.2094353968e1196	1	1	0.6728349722e-42
511	0.4640593013e1198	0.4661442876e1198	0.1602257391e-32	1	0.6728349722e-42
512	-0.1032865484e1201	-0.1037506077e1201	1	1	0.3680547381e-449
513	0.2298868064e1203	0.2309196719e1203	<b>0.7641538433e-420</b>		

Таблица 4.44

*Значения  $x_i$  системы (4.4.5), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Значение $x_1$ по методу Гаусса	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	1	1	512	0.1755289189e-446
2	1	1	512	0.1433017049e-446
4	1	1	512	0.1447135102e-444
8	1	1	512	0.7368712724e-445
16	1	1	512	0.1353786127e-444
32	1	1	512	0.2854199931e-444
64	1	1	512	0.1786605345e-444
128	1	1	512	0.160858509e-444
256	1	1	512	0.2338567748e-444

Рассмотрим решение СЛАУ со “случайной” матрицей методом цепных дробей.

В табл. 4.45 и 4.46 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.6) размерностью 32x32.

Элементы матрицы СЛАУ, как и элементы правой части, получены программой “Генератор случайных чисел”. Решение СЛАУ со “случайными” матрицами снимает все вопросы относительно универсальности рассматриваемого в этой главе алгоритма решения СЛАУ, названного “методом цепных дробей”. Точные решения СЛАУ с матрицей размерности  $n \times n$  имеет место при использовании “отсчётов”, полученных после  $2n$  итераций.

$$\begin{pmatrix} 41 & 18467 & 6334 & 26500 & 19169 & \dots \\ 11538 & 1869 & 19912 & 25667 & 26299 & \dots \\ 9040 & 8942 & 19264 & 22648 & 27446 & \dots \\ 16541 & 4833 & 31115 & 4639 & 29658 & \dots \\ 16941 & 21724 & 13966 & 3430 & 31107 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14771 \\ 30106 \\ 22929 \\ 1150 \\ 21548 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

Таблица 4.45

*Определение  $x_1$  системы (4.4.6-32) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	360.2682927	360.2682927	360.2682927	360.2682927	362.9063118
2	-19842.48184	-20202.75013	-56.07695859	6.311974246	8.949993394
3	7196144.28	7215986.762	301.1014808	303.8641435	306.5021626
4	-761910203.2	-769106347.5	297.2653891	-0.1049014843	2.533117664
5	1.67E+11	1.67E+11	-0.6073565451	3.825004266	6.463023414
6	-0.227284751e14	-0.2289517959e14	22.01557969	-0.294468585	2.343550563
7	0.4161860364e16	0.4184588839e16	11.34989137	-5.278509298	2.64049015
8	-0.6301512181e18	-0.6343130785e18	3.053699875	0.5725789277	3.210598076
9	0.1076037775e21	0.1082339288e21	-2.802696744	-1.345191037	1.292828111
10	-0.1701174948e23	-0.1711935325e23	-0.9654714112	-0.5903926528	2.047626495
...	...	...	...	...	...
60	-0.6760837709e133	-0.6802344327e133	-1.892216715	0.6647146413	3.302733789
61	0.1101244293e136	0.1108005131e136	-3.387836319	0.4268639083	3.064883056
62	-0.1793770308e138	-0.1804782751e138	-0.1824858799	-0.2071976774	2.430821471
63	0.2921796677e140	0.293973438e140	-0.3388521938	3.045188524	5.683207672
64	-0.4759191176e142	-0.4788409143e142	-0.5661720373	-2.638019148	0.3048840933e-1395
65	0.7752045456e144	0.7799637367e144	<b>0.8225131531e-1394</b>		

Можно обратить внимание, что цепная дробь, представляющая  $x_1$ , не даёт приближений к  $x_1$ . Значение предпоследней подходящей дроби  $P_{63}/Q_{63}$  равно положительному числу: 3,045..., в то время, как “точное” значение  $x_1$ , устанавливаемое последней подходящей дробью, отрицательно:  $P_{64}/Q_{64} = -2,638 \dots$

Таблица 4.46

*Значения  $x_i$  системы (4.4.6-32), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_i$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев дроби	Абсолютная погрешность
1	-2.638019148	-2.638019148	64	0.3524202259e-1393
2	0.5384000343	0.5384000343	64	0.2558247907e-1394
4	1.593959563	1.593959563	64	0.3213671876e-1394
8	2.050367669	2.050367669	64	0.1417044573e-1394
16	-4.090583318	-4.090583318	64	0.321839823e-1394
32	-0.07653688927	-0.07653688927	64	0.4249811768e-1394

Решение СЛАУ (4.4.7) размерностью матрицы размером 128x128.

$$\begin{pmatrix} 41 & 18467 & 6334 & 26500 & 19169 & \dots \\ 12052 & 27350 & 1150 & 16941 & 21724 & \dots \\ 18875 & 28433 & 29869 & 20142 & 23844 & \dots \\ 4414 & 9314 & 25824 & 29334 & 25874 & \dots \\ 4940 & 20851 & 18662 & 13829 & 30900 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4031 \\ 4886 \\ 26477 \\ 21763 \\ 875 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

В табл. 4.47 и 4.48 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.7) размерностью 128x128.

Таблица 4.47

*Определение  $x_1$  системы (4.4.7-128) методом цепных дробей*

Номер итерации	Значение $x_1$ по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Абсолютная погрешность
1	98.31707317	98.31707317	98.31707317	98.31707317	97.54971934
2	-231919.1883	-232017.5054	-2359.89028	0.04164406707	0.7257097636
3	257085501.5	257317420.7	-1250.847149	-110.6995847	111.4669385
4	-2.1E+11	-2.1E+11	-257.2258527	-0.1604090968	0.9277629274
5	0.2079303966e15	0.208140864e15	-1023.85713	-238.0369995	238.8043533
6	-0.1901935135e18	-0.1904014439e18	-101.6390577	1.888753542	1.121399711
7	0.178223278e21	0.1784125213e21	-29.6662173	-46.94583247	47.7131863
8	-0.1659479655e24	-0.1661261879e24	-116.0181169	1.365920248	0.5985664174
9	0.1547202432e27	0.1548861912e27	-153.5426781	-121.9803901	122.747744
10	-0.1442294139e30	-0.1443841342e30	73.60718179	0.2963358027	0.4710180279
...	...	...	...	...	...
252	-0.6010960066e748	-0.6017408291e748	-1.352417456	0.9111730609	0.1438192303
253	0.5603347282e751	0.5609358242e751	0.1891538488	0.7006242298	0.06672960083
254	-0.522337537e754	-0.5228978718e754	0.7591783028	0.6126176745	0.1547361561
255	0.486916996e757	0.4874393335e757	-0.702135484	-19.3857386	20.15309243
256	-0.4538983783e760	-0.4543852953e760	0.5706418404	0.7673538306	0.1062078104e-941
257	0.4231188057e763	0.4235727041e763	<b>-0.3245564651e-938</b>		

Из табл. 4.47 следует, что цепная дробь для  $x_1$  не является сходящейся, то есть не даёт приближений для неизвестной  $x_1$ , как то имело место при решении, например, систем (4.4.1) или (4.4.2). И дело здесь не в том, что СЛАУ имеет “случайную” матрицу коэффициентов. Мы можем столкнуться с вполне регулярными матрицами коэффициентов СЛАУ, и, тем не менее, цепные дроби для  $x_i$  не будут сходящимися. “Метод цепных дробей” помог глубже понять природу итерационных, то есть приближающих, алгоритмов решения СЛАУ. Оставим за скобками рассмотрение классических линейных итерационных алгоритмов типа алгоритмов Якоби и Зейделя. Эти итерационные алгоритмы имеют очень жёсткие условия для их сходимости и их можно соотнести с бесконечными рядами, сходящимися или расходящимися. Речь идёт о точных алгоритмах



СЛАУ с фиксированным числом итераций, например, о методе сопряжённых градиентов или методе ортогонализации, которые иногда рассматриваются как итерационные. Подобные алгоритмы могут быть итерационными или приближёнными, но это определяется только лишь свойствами исходных матриц СЛАУ, о чём речь будет идти в параграфах 5 и 6.

Таблица 4.48

*Значения  $x_i$  системы (4.4.7-128), полученные методом цепных дробей*

Номер $x_1$	Метод Гаусса	Метод цепных дробей	Число звеньев	Абсолютная погрешность
1	0.7673538306	0.7673538306	256	0.3252242892e-938
2	0.2572005359	0.2572005359	256	0.2359404968e-940
4	0.09976408429	0.09976408429	256	0.6660324837e-941
8	0.001468178484	0.001468178484	256	0.6728981073e-940
16	-0.4550907521	-0.4550907521	256	0.5057527008e-941
32	-0.1776123293	-0.1776123293	256	0.1184805636e-940
64	-1.017731413	-1.017731413	256	0.3118202042e-940
128	0.4093949489	0.4093949489	256	0.8483896938e-940

Ранее уже отмечалось, что метод цепных дробей решения СЛАУ базируется на итерационных алгоритмах решения СЛАУ. Выше в качестве исходного алгоритма использовался итерационный метод Якоби. Приведён пример использования в методе цепных дробей алгоритма Зейделя.

Рассмотрим решения СЛАУ со “случайной” матрицей при исходном итерационном алгоритме Зейделя. Размерность матрицы СЛАУ (3.4.8) 32 x 32 элементов.

$$\begin{pmatrix} 131 & 983 & 91 & 657 & 118 & \dots \\ 735 & 311 & 980 & 996 & 562 & \dots \\ 780 & 191 & 234 & 54 & 430 & \dots \\ 138 & 736 & 344 & 268 & 313 & \dots \\ 967 & 136 & 741 & 324 & 581 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 594 \\ 566 \\ 402 \\ 366 \\ 879 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.4.8)$$

В табл. 4.49 и 4.50 показаны результаты решения СЛАУ (4.4.8).

Таблица 4.49

*Определение  $x_1$  системы (4.4.8) методом цепных дробей*

$n_{\text{итер}}$	Значение $x_1$ по методу Зейделя	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Погрешность абсолютная
1	9.2662317870e+05	9.2662317870e+05	9.2662317870e+05	9.2662317870e+05	9.2662591676e+05
2	1.8569985008e+11	1.8569892346e+11	1.8569892346e+11	1.8569985008e+11	1.8569985009e+11
3	3.7228139816e+16	3.7227954117e+16	2.0047479772e+05	3.2295604743e+02	3.2569410602e+02
4	7.4632994230e+21	7.4632621949e+21	1.1754597333e-01	-1.0856051219e+05	1.0855777413e+05
5	1.4962025663e+27	1.4961951030e+27	-3.3420661725e+02	-1.8686994151e+00	8.6935917727e-01
6	2.9995073124e+32	2.9994923504e+32	1.2995862659e+00	-4.2112171316e+02	4.1838365457e+02
...	...	...	...	...	...
60	6.1413596259e+318	6.1413289918e+318	-6.0008579120e-05	-2.7380585924e+00	1.1625028404e-21
61	1.2311871080e+324	1.2311809666e+324	-7.0636637923e-04	-2.7380585924e+00	9.8883277905e-28
62	2.4682184195e+329	2.4682061076e+329	-8.5119633007e-07	-2.7380585924e+00	1.3138788417e-32
63	4.9481529871e+334	4.9481283050e+334	1.3287157869e-05	-2.7380585924e+00	3.3624526866e-299
64	9.9197938849e+339	9.9197444034e+339	<b>1.7130296979e-262</b>		

Таблица 4.50

Значения  $x_i$  системы (4.4.8), полученные методом цепных дробей

$i$	Значение $x_1$ по методу Гаусса	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Номер итерации	Погрешность абсолютная
1	-2.7380585924e+00	-2.7380585924e+00	63	6.4415593072e-294
2	1.0830060139e+00	1.0830060139e+00	63	1.1966758048e-293
4	4.9933052122e-01	4.9933052122e-01	63	4.3428174663e-293
8	-2.2894570026e+00	-2.2894570026e+00	63	1.3583525229e-293
16	5.3703652116e-01	5.3703652116e-01	63	1.8794825842e-291
32	6.9018435486e-01	6.9018435486e-01	63	1.5203766704e-290

Следует обратить внимание, что конечные цепные дроби, которыми представляются решения  $x_i$  при использовании в качестве исходного итерационного алгоритма метод Зейделя, содержат  $2n - 1$  звеньев, где  $n$ -разрядность решаемой СЛАУ. Длина конечных цепных дробей для  $x_i$  в случае метода простых итераций, или метода Якоби, составляет  $2n$  звеньев, где  $n$ -разрядность СЛАУ.

#### 4.5. Итерационный алгоритм решения СЛАУ

Итерационные, методы решения СЛАУ эффективны для СЛАУ большей размерности, когда прямые методы, обеспечивающие точные решения СЛАУ, оказываются неприемлемы по временным характеристикам. В то же время классические итерационные алгоритмы, такие как алгоритмы Якоби или Зейделя, накладывают жёсткие ограничения на матрицы СЛАУ, когда требуется, так называемое, диагональное преобладание, и выполнение других критериев сходимости итерационных процессов. Как уже отмечалось выше, предложенный алгоритм решения СЛАУ, определённый как “метод цепных дробей”, являясь по сути точным алгоритмом решения СЛАУ, требующий для реализации  $2n$  итераций, где  $n$  – разрядность матрицы СЛАУ, можно, при определённых условиях, использовать как итерационный. В этом параграфе приведены примеры применения предложенного алгоритма решения СЛАУ в качестве итерационного для решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности.

Пример 1.

Решение СЛАУ размерности  $4096 \times 4096$ . Разрядность переменных 500 бит.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

Можно обратить внимание, что структура матрицы (4.5.1) подобна структуре матрицы СЛАУ (4.4.1). Отличие СЛАУ (4.3.1) и СЛАУ (4.5.1) в том, что если СЛАУ (4.4.1) была размерности  $64 \times 64$  и  $128 \times 128$ , то размерность СЛАУ (4.5.1) гораздо более –  $4096 \times 4096$ . Ранее уже отмечалось, что “метод цепных дробей” даёт точное решение СЛАУ размерности  $n \times n$ , если при построении цепных дробей для  $x_i$  использовать “итерационные” ряды с  $2n$  членами. Звенья, так называемой, соответствующей цепной дроби, определённой по итерациям, а точнее, по коэффициентам ряда, построенного по значениям “соседних” итераций, в том числе и по “расходящимся” итерациям, находят по рекуррентному алгоритму Рутисхаузера, который был рассмотрен в параграфе 4.1. Специфика алгоритма Рутисхаузера такова, что для вычисления значений “удалённых” коэффициентов  $\omega_i$  цепной дроби, то есть при больших индексах  $i$ , требуется длин-

ная разрядная сетка. В предыдущем параграфе уже отмечалось, что при точном решении СЛАУ с матрицей Гильберта размерности всего лишь  $256 \times 256$  потребовалась разрядная сетка длиной 30000 бит. Естественно, вычисления со столь длинной разрядной сеткой чрезвычайно замедляет вычислительный процесс и делает решение СЛАУ большой размерности трудно реализуемым на “обычных” вычислительных машинах. Но всегда ли надо использовать цепную дробь с  $2n$ -звеньями, гарантирующую точные решения СЛАУ? Очевидно, что нет, если матрица СЛАУ допускает “сходящуюся” цепную дробь для  $x_i$ .

В табл. 4.51 и 4.52 приведены результаты решения СЛАУ (4.5.1) методом цепных дробей, однако, по “итерационному” ряду строились “короткие” цепные дроби. Так, из табл. 4.51 следует, что использование цепной дроби с 16-ю звеньями, обеспечивает погрешность порядка  $10^{-10}$ . Использование цепных дробей с 50-ю звеньями приводит к “невязке” невообразимой малости ( $\varepsilon = 10^{-59}$ )

Таблица 4.51

**Результат решения системы (4.5.1) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значения $x_i$ по методу простых итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей
1	1	1	1	1
2	0.355310044	-0.644689956	-0.644689956	0.6080173326
3	13.13825125	12.78294121	19.18335465	0.9690470244
4	-91.89630001	-105.0345513	12.00148653	7.510985049
5	829.9237782	921.8200782	-0.00576991481	8.322199953
6	-7203.839546	-8033.763324	0.3387756263	8.82105397
7	62862.17182	70066.01137	-0.06196050788	8.87652095
8	-548168.3444	-611030.5162	0.2080965111	8.893204686
9	4780538.497	5328706.841	-0.06594895535	8.894770208
10	-41690288.3	-46470826.8	0.149250992	8.895075655
11	363574627.2	405264915.5	-0.06205250116	8.895100121
12	-3,2E+09	-3,5E+09	0.1159496732	8.895103624
13	2,77E+10	3,08E+10	-0.0568711721	8.895103868
14	-2,4E+11	-2,7E+11	0.0946431209	8.895103895
15	2,1E+12	2,34E+12	-0.0518968082	8.895103897
16	-0.1833946173e14	-0.2044240704e14	0.07989609152	8.895103897

Таблица 4.52

**Результаты решения системы (4.5.1)**

$x_i$	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число итераций	Невязка метода цепных дробей
1	8.895103897	50	-0.3843056634e-59
2	-0.5	50	-0.3812833051e-59
4	-0.25	50	-0.3743085771e-59
8	-0.125	50	-0.3541647964e-59
16	-0.0625	50	-0.1331348849e-59
32	-0.03125	50	-0.4497981394e-59
64	-0.015625	50	-0.5343302606e-59
128	-0.0078125	50	-0.2671567775e-59
256	-0.00390625	50	-0.3634724026e-59
512	-0.001953125	50	-0.5932271324e-59
1024	-0.0009765625	50	-0.5121913752e-59
2048	-0.00048828125	50	-0.5986636179e-59
4096	-0.000244140625	50	-0.5220710433e-59

Пример 2.

Решение СЛАУ размерности  $4096 \times 4096$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.5.2)$$

В табл. 4.53 и 4.54 показаны результаты решения СЛАУ (4.5.2) также с использованием “коротких” цепных дробей, обеспечивающих, тем не менее высокую точность в определении неизвестных системы.

Таблица 4.53

**Определение  $x_1$  системы (4.5.2) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_l$ по методу простых итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_l$ по методу цепных дробей
1	1	1	1	1
2	-4094	-4095	-4095	0.000244140625
3	28236.45046	32330.45046	-4087.104896	-459.3656177
4	-256706.26	-284942.7105	0.001773973051	-2508.490932
5	2225542.61	2482248.87	-0.05927538031	-3489.223067
6	-19424202.5	-21649745.11	0.2157222492	-3948.560889
7	169377676.4	188801878.9	-0.1340291105	-4061.110138
8	-1,5E+09	-1,6E+09	0.1578727244	-4088.644301
9	1,29E+10	1,44E+10	-0.1129683757	-4093.149148
10	-1,1E+11	-1,3E+11	0.1222081977	-4093.895946
11	9,8E+11	1,09E+12	-0.09347748221	-4093.98728
12	-8,5E+12	-9,5E+12	0.09947927517	-4093.998759
13	0.7450972716e14	0.8305359198e14	-0.07881477751	-4093.999877
14	-0.6497878372e15	-0.7242975644e15	0.08391024906	-4093.99999
15	0.5666699497e16	0.6316487334e16	-0.06778885934	-4093.999999
16	-0.4941841221e17	-0.5508511171e17	0.07261281629	-4094

Таблица 4.54

**Результаты решения системы (4.5.2)**

$x_i$	Значения $x_i$ по методу цепных дробей	Число итераций	Невязка метода цепных дробей
1	-4094	50	0.1748419405e-53
2	1	50	0.1747810665e-53
4	1	50	0.1746401199e-53
8	1	50	0.1742284132e-53
16	1	50	0.1510836211e-53
32	1	50	0.1737503139e-53
64	1	50	0.1755400246e-53
128	1	50	0.1785909148e-53
256	1	50	0.1784241946e-53
512	1	50	0.1774433805e-53
1024	1	50	0.1763396968e-53
2048	1	50	0.1777077235e-53
4096	1	50	0.1775449832e-53

СЛАУ (4.5.2) имеет матрицу, аналогичную матрице в СЛАУ (4.4.2). СЛАУ (4.5.2), как и СЛАУ (4.4.2) относится к классу сходящихся СЛАУ, что позволяет использовать для приближённого вычисления  $x_i$  “короткую” цепную дробь, которая, тем не менее, обеспечивает достаточно высокую точность решений. При решении СЛАУ (4.5.1) и (4.5.2) использовались цепные дроби с 50-ю звеньями. Для точного решения СЛАУ (4.5.1) и (4.5.2) размерностью 4096x4096 требуется генерация цепной дроби с 8192 зве-

ниями. Из табл. 4.53 видно, что цепная дробь с 16-ю звеньями обеспечивает погрешность  $10^{-7}$ . Использование цепных дробей с 50-ю звеньями позволяет иметь погрешность при вычислении неизвестных системы (4.5.2) порядка  $10^{-53}$ .

Пример 3.

Решение СЛАУ (4.5.3) размерности  $4096 \times 4096$ . Разрядность данных, как и в других примерах этого параграфа – 500 бит, что достаточно при вычислении по алгоритму Рутисхаузера цепных дробей, содержащих 50 звеньев.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.9999 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.9998 & 0.5 & 0.5 & \dots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.9997 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.5.3)$$

В табл. 4.55 и 4.56 приведены результаты решения СЛАУ (4.5.3) методом цепных дробей, причём, в режиме итерационного процесса, когда используется сходящаяся цепная дробь.

Таблица 4.55

**Определение  $x_i$  системы (4.5.3) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу простых итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей
1	1	1	1	1
2	-2633.101595	-2634.101595	-2634.101595	0.0003794920097
3	6935441.226	6938074.327	-0.1582638111	0.0003194513442
4	-1,8E+10	-1,8E+10	0.5630321002	0.0002420784547
5	0.4811571686e14	0.4813398442e14	-0.01269807794	0.0002397625575
6	-0.1267340731e18	-0.1267821889e18	0.6713650834	0.0002345724644
7	0.333810371e21	0.3339371051e21	-0.01085988035	0.0002343831208
8	-0.8792376118e24	-0.8795714222e24	0.6672413317	0.0002339585428
9	0.2315862073e28	0.2316741311e28	-0.01107480246	0.000233942729
10	-0.6099849541e31	-0.6102165404e31	0.6649745352	0.0002339075728
11	0.1606665822e35	0.1607275807e35	-0.01118297889	0.0002339062582
12	-0.4231866782e38	-0.4233473448e38	0.6639184359	0.0002339033494
13	0.1114649743e42	0.111507293e42	-0.01123883993	0.0002339032404
14	-0.2935924294e45	-0.2937038944e45	0.6633469987	0.0002339029999
15	0.7733058314e48	0.7735994238e48	-0.01127127153	0.0002339029909
16	-0.2036843763e52	-0.2037617069e52	0.6630030641	0.000233902971
17	0.5364931115e55	0.5366967959e55	-0.01129175406	0.0002339029703
18	-0.1413092471e59	-0.1413628964e59	0.6627799735	0.0002339029686
19	0.3722005538e62	0.3723418631e62	-0.01130550911	0.0002339029686

Систему (4.5.3) будем называть “сходящейся” или “вещественной”, так как при её решении генерируются сходящиеся цепные дроби для определения неизвестных  $x_i$ , что даёт возможность определять неизвестные  $x_i$  итерационно, последовательно увеличивая точность нахождения  $x_i$ . Как следует из данных пятой колонки табл. 4.55, цепная дробь с 19-ю звеньями обеспечивает погрешность порядка  $10^{-13}$ .

Таблица 4.56

**Результаты решения системы (4.5.3)**

$x_i$	Значение $x_i$ по методу цепных дробей	Число итераций	Невязка метода цепных дробей
1	0.0002339029684	50	-0.1714366171e-17
2	0.0002339497584	50	-0.1714365677e-17
4	0.0002340433945	50	-0.1714364113e-17
8	0.0002342308917	50	-0.1714360769e-17

Окончание табл. 4.56

16	0.0002346067888	50	-0.1714351231e-17
32	0.0002353622141	50	-0.1714225695e-17
64	0.0002368877541	50	-0.17143831e-17
128	0.0002399989415	50	-0.1714332745e-17
256	0.0002464730963	50	-0.1714386389e-17
512	0.0002605290359	50	-0.1714411497e-17
1024	0.0002940696108	50	-0.171424749e-17
2048	0.0003960429536	50	-0.1714455909e-17
4096	0.001292281593	50	-0.171389289e-17

Цепные дроби с 50-ю звеньями обеспечивают невязку при решении СЛАУ (4.5.3), составляющую величину порядка  $10^{-17}$ . Скорость сходимости цепных дробей, представляющих решения СЛАУ, зависит от матриц СЛАУ. Так же характером матрицы СЛАУ определяется сама сходимость цепных дробей, представляющих решение СЛАУ.

Пример 4.

Решение СЛАУ с матрицей Гильберта размером 4096x4096. Разрядность переменных 1000 бит. Система (4.5.4) имеет матрицу Гильберта, что требует при решении СЛАУ методом цепных дробей “длинную” разрядную сетку. При решении СЛАУ (4.5.4) будем использовать сетку в 1000 бит, что достаточно при определении алгоритмом Рутисхаузера 50-ти звеньев дроби. Цепные дроби при решении СЛАУ с матрицей Гильберта являются сходящимися, однако, как видно из табл. 4.57 и 4.58 скорость сходимости не высока: 50 звеньев цепной дроби обеспечивают погрешность в определении неизвестных порядка  $10^{-6}$  и  $10^{-7}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.124344963 \\ 5.128236013 \\ 4.632111982 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

Таблица 4.57

**Определение  $x_i$  системы (4.5.4) методом цепных дробей**

Номер итерации	Значение $x_i$ по методу простых итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение $x_i$ по методу цепных дробей
1	8.895103897	8.895103897	8.895103897	8.895103897
2	-11296.52914	-11305.42424	-1270.971578	0.006993162464
3	37724070.91	37735367.44	2066.83925	5.509040768
4	-1,3E+11	-1,3E+11	-346.0039547	0.0484193921
5	0.4788533001e15	0.4789873008e15	223.7686214	3.475143864
6	-0.1712296802e19	-0.1712775655e19	-83.27585264	0.1554462004
7	0.612331525e22	0.6125027547e22	45.97173994	2.112285299
8	-0.2189765608e26	-0.219037794e26	-23.84475847	0.336817141
9	0.7830852139e29	0.7833041905e29	12.44679253	1.287881618
10	-0.2800402517e33	-0.2801185602e33	-7.15595913	0.556831983
11	0.1001456061e37	0.1001736102e37	4.175057012	0.9160048311
12	-0.358132175e40	-0.3582323206e40	-1.655740074	0.7517955237
13	0.1280721738e44	0.128107987e44	2.129504047	0.8398381893
14	-0.4580007844e47	-0.4581288566e47	0.6881871157	0.8811193809
15	0.1637863341e51	0.1638321342e51	-0.6662938805	2.778271554
16	-0.5857187184e54	-0.5858825047e54	-0.5728380861	0.9491209493
17	0.2094597323e58	0.2095183042e58	0.1097167799	0.9562862543
18	-0.7490520295e61	-0.7492614892e61	0.7686705998	0.9796974179
19	0.2678695979e65	0.2679445031e65	-0.01137937502	0.9808922648
20	-0.9579324089e68	-0.9582002785e68	0.8607674967	0.9922350166

Таблица 4.58

*Результаты решения системы (4.5.4)*

$x_1$	Значение $x_1$ по методу цепных дробей	Число итераций	Невязка метода цепных дробей
1	0.999999998	50	-0.6264223569e-6
2	1.000000112	50	-0.5752283692e-6
4	1.000007429	50	-0.4864054082e-6
8	1.00000114	50	-0.3467333e-6
16	1.00000369	50	-0.1591335705e-6
32	1.000006515	50	0.3854935238e-7
64	1.000003719	50	0.1832097728e-6
128	1.000001697	50	0.2369613618e-6
256	1.000000526	50	0.2169983412e-6
512	0.9999970388	50	0.1649247084e-6
1024	0.9999986871	50	0.1104104021e-6
2048	0.9999991925	50	0.6668573398e-7
4096	0.9999947678	50	0.3713570959e-7

**4.6. Решение комплексных СЛАУ**

В предыдущем параграфе рассматривались примеры решения таких СЛАУ, которые допускали итерационную схему решения. Уже отмечалось, что изложенный в этой главе метод решения СЛАУ, названный как “метод цепных дробей”, позволяет представить каждую неизвестную  $x_i$  системы  $n \times n$  конечной цепной дробью, длиной  $2n$  звеньев. Но, как известно, цепные дроби могут быть сходящимися и расходящимися. Понятия “сходящиеся” и “расходящиеся” цепные дроби традиционно относят только к бесконечным цепным дробям. Даже если принять во внимание, что конечные цепные дроби могут содержать сколь угодно большое число звеньев, всё же термины “сходящиеся” и “расходящиеся” цепные дроби, прилагаемые к конечным цепным дробям, будем заключать в кавычки. Иногда вместо “сходящихся” и “расходящихся” цепных дробей будем употреблять выражения: “вещественные” цепные дроби и “комплексные” цепные дроби. Естественно считать, что под словосочетаниями “вещественные” и “комплексные” цепные дроби подразумеваются цепные дроби, элементами которых являются, соответственно, вещественные и комплексные числа. Но это не так. Элементами звеньев цепных дробей, которые именуется “вещественными” или “комплексными” являются в обоих случаях действительные числа. Тем не менее, расходящиеся в классическом смысле цепные дроби могут иметь комплексные значения, которые по вещественным подходящим дробям определяет  $r/\varphi$ -алгоритм. Именно такие цепные дроби мы будем называть *комплексными*. Если устанавливаемые значения цепной дроби вещественные, то цепные дроби определяются как *вещественные*. Обычно  $r/\varphi$ -алгоритм применяется к бесконечным цепным дробям. Но как показывает практика, некоторые важные задачи решаются в конечных цепных дробях. Конечные цепные дроби появляются в случае, если ряд Тейлора представляет рациональную функцию. В главах 1 и 2 было рассмотрено множество примеров, когда ряды суммировались конечными цепными дробями. Такие цепные дроби возникали при суммировании расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана. Появлялись они и при вычислении значений в рациональных точках функции Вейерштрасса и её производной. Причём, если суммировался конечной цепной дробью сходящийся ряд Вейерштрасса, то имели “сходящуюся” или “вещественную” цепную дробь.

В главе 3 рассматривалась «обобщённая» функция Вейерштрасса

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

при  $b > 1$ . Цепные дроби, суммирующие

обобщённую функцию Вейерштрасса, оказывались «расходящиеся», или «комплексные», что можно видеть из табл. 21 и 22 Приложения 2. Если находилось значение производной функции Вейерштрасса в точке  $x_0$  по расходящемуся тригонометрическому ряду, то имели так же конечную цепную дробь, причём, с тем же числом звеньев, что и в случае, когда находилось в той же точке  $x_0$  значение функции Вейерштрасса. Однако в смысле сходимости конечные цепные дроби для функции Вейерштрасса и её производной отличны между собой. Если конечная цепная дробь для функции Вейерштрасса была «сходящаяся», обеспечивавшая с ростом числа учитываемых подходящих дробей уточнение значения функции в точке  $x_0$ , то есть была в нашей классификации «вещественной» цепной дробью, то конечная цепная дробь для производной функции, построенной по расходящемуся тригонометрическому ряду, была «расходящейся» или «комплексной». Здесь следует заметить, что расходимость ряда, по которой строится цепная дробь, является необходимым, но недостаточным условием, чтобы соответствующая цепная дробь была «комплексной», то есть представляла комплексное число. В качестве примера приведём «вещественную» и «комплексную» цепные дроби, построенные по расходящимся рядам [55]:

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \dots + \frac{n}{1} + \frac{n}{1} + \dots = 0,596347 \dots$$

$$1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{1} - \dots - \frac{n}{1} - \frac{n}{1} - \dots = 1,349728 \dots e^{i1,028001 \dots}$$

Соответствующая цепная дробь для знакопеременного ряда – сходящаяся, имеющая действительное значение, в то время, как построенная для знакопостоянного ряда соответствующая цепная дробь, расходящаяся, которая, однако, суммируется  $r/\varphi$ -алгоритмом и имеет комплексное значение.

Возвратимся к алгоритму решения СЛАУ, который был назван «методом цепных дробей». Напомним схему этого алгоритма. На первом этапе методом простых итераций «решаем» исходную систему. Так как в методе простых итераций весьма жёсткие условия сходимости, когда должно выполняться «диагональное преобладание», то будем полагать, что в общем случае, имеем дело с расходящимися итерационными процессами. По результатам итерационных вычислений каждой компоненты  $x_i^{(k)}$  строим ряд, который в случае расходящегося итерационного процесса также будет расходящимся. Для этого ряда по алгоритму Рутисхаузера строим соответствующую цепную дробь, которая будет конечной. Это объясняется тем, что «итерационные» ряды связаны с рациональными функциями, определяемыми формулами Крамера. В параграфе 5 этой главы рассматривались СЛАУ, матрицы которых приводят к сходящимся конечным цепным дробям, то есть реализуется итерационный процесс, приводящий к точным решениям, если используется вся конечная цепная дробь, имеющая  $2n$  звеньев, где  $n$  – размерность системы. В этом параграфе будут рассмотрены системы, неизвестные которых представляются «расходящимися» конечными цепными дробями. По подходящим этим цепным дробям при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма можно определить комплексные значения, которые представляются этими цепными дробями с последующей проверкой на «невязку» подстановкой найденных комплексных корней. В принципе, вопрос суммирования расходящихся цепных дробей при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма уже хорошо отработан. Своеобразие использования  $r/\varphi$ -алгоритма для нахождения комплексных решений в том, что решается необычная задача – отыскание комплексных решений конечных СЛАУ при действительных элементах матрицы системы. Насколько известно, такая задача не ставилась ранее, хотя решением СЛАУ специалисты занимаются длительное время. Вторая особенность, пусть не такая существенная, это применение  $r/\varphi$ -алгоритма к конечным цепным дробям. Как уже отмечалось в предисловии,  $r/\varphi$ -алгоритм основывается на



“наблюдениях” за подходящими дробями. Чтобы с большой точностью установить модуль и аргумент комплексного числа, которые определяются формулами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|} = r_0, \quad (4.6.1)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (4.6.2)$$

очевидно, что надо использовать достаточно большое число “отсчётов” или подходящих дробей.

Ранее было показано, что “метод цепных дробей”, – это точный метод решения СЛАУ, дающий результат для каждой компоненты  $x_i$  после  $2n$  итераций, проведённый по методу простых итераций, то есть по алгоритму Якоби. Если матрица СЛАУ, условно говоря, “вещественная”, то соответствующая цепная дробь, построенная по “итерационному” ряду одним из алгоритмов, например, алгоритмом Рутисхаузера, будет сходящейся и её можно использовать для итерационного, то есть приближённого, решения СЛАУ. В предыдущем параграфе приводились примеры, из которых следовало, что “сходящаяся” цепная дробь для компоненты  $x_i$ , содержащая порядка десяти звеньев, обеспечивала значительную точность при определении “действительных” неизвестных. Поэтому нет необходимости строить цепную дробь, содержащую  $2n$  звеньев, где  $n$  – размерность СЛАУ, которая может достигать очень больших значений, чтобы получить “точное” значение  $x_i$ . Часто оказывается возможным ограничиться незначительным числом “сходящейся” цепной дроби, чтобы иметь приемлемую точность решения СЛАУ. Следует заметить, что скорость сходимости “вещественных” цепных дробей определяется матрицей СЛАУ, также, как матрицей СЛАУ определяется “сходимость” и “расходимость” построенных цепных дробей.

Однако дело не только в том, что нецелесообразно использовать сходящиеся цепные дроби с большим числом звеньев. Как уже отмечалось, определение коэффициентов соответствующей цепной дроби по ряду весьма трудоёмкая вычислительная процедура. Например, при решении СЛАУ с матрицей Гильберта размерности  $256 \times 256$ , требовалась разрядная сетка длиной 30000 бит. Естественно, использование разрядной сетки такой длины значительно увеличивало время решения задачи на компьютере. В случае СЛАУ, порождающей сходящуюся цепную дробь, как правило, нет необходимости строить “длинную” цепную дробь, то есть цепную дробь с большим числом звеньев, соизмеримой с размерностью СЛАУ. Совсем иная ситуация возникает, когда матрица СЛАУ порождает расходящуюся цепную дробь. В этом случае мы предполагаем, что “истинными” решениями СЛАУ будут не действительные решения, определяемые “по Гауссу” или методом цепных дробей, обеспечивающим “точное” решение СЛАУ. Если построенные цепные дроби не сходятся, мы считаем, что “истинными” решениями данной СЛАУ будут комплексные решения и именно они отвечают физическому смыслу задачи, когда эти комплексные решения с некоторой точностью удовлетворяют СЛАУ, размерность которой несколько отличается от исходной. “Комплексные” СЛАУ соседних размерностей, то есть размерностей  $n \times n$  и  $(n + 1)(n + 1)$  могут иметь точные решения “по Гауссу”, сильно отличающихся друг от друга, что должно насторожить исследователя.

При решении “комплексных” СЛАУ короткими “приближающими” цепными дробями не обойтись: определение параметров комплексного числа – модуля  $r_0$  и аргумента  $\varphi_0$  с достаточной точностью требует значительного числа подходящих дробей, что, в свою очередь, влечёт использование длинной разрядной сетки, а это обстоятельство приводит к недопустимо большим временным затратам, и в конечном счёте ограничивает размерность СЛАУ, а это, зачастую, приводит к и невозможности решить задачу.

Поэтому при решении “комплексных” СЛАУ был выбран не “метод цепных дробей”, связанный с построением соответствующих цепных дробей алгоритмом Рутисхаузера, а модифицированный метод прогонки, который, как известно, эквивалентен представлению решений в виде цепных дробей [67].

Представим решение трёхдиагональной системы алгебраических уравнений

$$AX = B, \quad (4.6.3)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$X = [x_1, x_1, \dots, x_n]^T, \quad B = [b_1, b_1, \dots, b_n]^T,$$

в виде цепных дробей, частными числителями и знаменателями которых были бы некоторые выражения из элементов исходной матрицы  $A$ .

Как показано выше, решение системы алгебраических уравнений (4.6.3) может быть представлено [67] цепными дробями:

$$x_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1 + t_2 + \dots + t_n} \frac{s_2}{s_n}, \quad (4.6.4)$$

$$x_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2 + t_3 + \dots + t_n} \frac{s_3}{s_n}, \quad (4.6.5)$$

.....

$$x_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1} + t_n} \frac{s_n}{s_n}, \quad (4.6.6)$$

$$x_n = \frac{\beta_n}{\gamma_n}, \quad (4.6.7)$$

где

$$\gamma_1 = a_{11}, \quad \gamma_n = a_{nn} - \frac{a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n}}{\gamma_{n-1}}, \quad (4.6.8)$$

$$\beta_1 = b_1, \quad \beta_n = b_n - \beta_{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\gamma_{n-1}}, \quad (4.6.9)$$

$$s_n = \frac{a_{n-1,n} \cdot \gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}, \quad n \geq 2 \quad (4.6.10)$$

$$t_n = \gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}, \quad n \geq 2. \quad (4.6.11)$$

Следует обратить внимание, что цепные дроби (4.6.4) – (4.6.7), представляющие неизвестные трёхдиагональной системы (4.6.3), укорачиваются. Если цепная дробь для  $x_1$  имеет  $n$  звеньев, то цепная дробь для  $x_n$  содержит всего одно звено. При нахождении вещественных значений неизвестных укорачивание цепных дробей не имеет каких-либо негативных последствий. Но если мы описываем комплексные решения СЛАУ, то уменьшение числа подходящих делает невозможным использование формул (4.6.4) –

(4.6.7) в  $r/\varphi$ -алгоритме. Следует преобразовывать цепные дроби (4.6.4 – 4.6.7) таким образом, чтобы все цепные дроби, представляющие  $x_i$ , имели одинаковое число звеньев, а именно,  $n$  звеньев, как у цепной дроби для  $x_1$ . Поэтому “развернём” отношения  $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ , стоящие в качестве первых звеньев цепных дробей для  $x_i$ .

Используя (4.6.8) и (4.6.9), можно записать:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_{11}, \\ \gamma_2 &= a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \\ \gamma_3 &= a_{33} - \frac{a_{23}a_{32}}{a_{22}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \\ \gamma_4 &= a_{44} - \frac{a_{33}a_{43}}{a_{33}} - \frac{a_{23}a_{32}}{a_{22}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_n &= a_{nn} - \frac{a_{n-1,n}a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-2,n-1}a_{n-1,n-2}}{a_{n-2,n-2}} - \dots - \frac{a_{33}a_{43}}{a_{33}} - \frac{a_{23}a_{32}}{a_{22}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \\ \beta_2 &= b_2 - b_1 \frac{a_2}{\gamma_1}, \\ \beta_3 &= b_3 - b_2 \frac{a_{32}}{\gamma_2} + b_1 \frac{a_{21}a_{32}}{\gamma_1\gamma_2}, \\ \beta_4 &= b_4 - b_3 \frac{a_{42}}{\gamma_3} + b_2 \frac{a_{32}a_{43}}{\gamma_2\gamma_3} - b_1 \frac{a_{21}a_{32}a_{43}}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_n &= b_n - b_{n-1} \frac{a_{n,n-1}}{\gamma_{n-1}} + b_{n-2} \frac{a_{n-1,n-2}a_{n,n-1}}{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}} - \dots + (-1)^n b_1 \frac{a_{21}a_{32} \dots a_{n,n-1}}{\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

В качестве примера покажем преобразование цепной дроби (4.6.5) для  $x_2$ , содержащей  $n - 1$  звено к цепной дроби размерности  $n$ .

Используя (4.6.12) и (4.6.13) запишем:

$$\frac{\beta_2}{\gamma_2} = \frac{b_2 - \beta_1 \frac{a_{21}}{\gamma_1}}{a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{\gamma_1}} = \frac{b_2 - \beta_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}}{a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}}.$$

Подставляя вместо  $\frac{\beta_2}{\gamma_2}$ , мы удлинняем на одно недостающее звено цепную дробь (4.6.5):

$$x_2 = \frac{b_2 - \beta_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}}{a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}} + \frac{s_3}{t_3} + \frac{s_4}{t_4} + \dots + \frac{s_n}{t_n}.$$

Подходящие цепной дроби имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{b_2}{a_{22}}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{b_2 - \beta_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}}{a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{b_2 - \beta_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}}{a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}}} - \frac{\beta_2}{\gamma_3 - \frac{a_{23} \beta_3}{\beta_2}}$$

.....

**Пример 1.**

Решить СЛАУ (4.5.16) размерностью 4096x4096.

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.14)$$

На рис. 4.1 показаны значения первых 220-ти подходящих цепной дроби, которой представляется корень  $x_1$  трёхдиагональной системы (4.6.14). Цепная дробь для  $x_1$  имеет вид (4.6.4). Эта цепная дробь получена из решения трёхдиагональной системы алгоритмом “прогонка”. Из рис. 1 видно, что цепная дробь для  $x_1$  – расходящаяся, так как значения подходящих постоянно изменяются, более того, подходящие дроби меняют свой знак. Можно заметить, что число положительных подходящих существенно превышает число подходящих с отрицательными значениями. Сравнивая рис. 4.1 и рис. 4.2 на которых показано распределение подходящих дробей с большими номерами ( $n = 3880 - 4100$ ), можно заключить, что графики рис. 4.1 и рис. 4.2 имеют одну и ту же структуру и мало отличаются между собой. Графики для модулей  $r_n$  и аргументов  $\varphi_n$ , построенные по формулам  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формулам (4.6.1) и (4.6.2), с учётом всех подходящих цепной дроби, которая получена из алгоритма “прогонки” для  $x_1$  системы (4.6.14) показаны на рис. 4.3. и рис. 4.4.

На рис. 4.5 и рис. 4.6 показано распределение подходящих цепной дроби, представляющей комплексный корень  $x_2$  системы (4.6.14), причём, показаны первые и последние 220 подходящих дробей. Также, как и для  $x_1$ , распределения подходящих на начальном и конечном участке цепной дроби, представляющей  $x_2$ , близки между собой, однако, характер графиков подходящих для  $x_1$  и  $x_2$  существенно разный. Беглого взгляда достаточно, чтобы заметить, что доля отрицательных подходящих у цепной дроби для  $x_1$  значительно выше, чем аналогичная характеристика подходящих для  $x_2$ , что находит количественное подтверждение в табл. 4.59. Из данных четвёртой колонки следует, что аргумент  $\varphi_1$  комплексного корня  $x_1$  равен  $0,656544\dots$ , а модуль аргумента  $\varphi_2$ , комплексного корня  $x_2$  существенно меньший:  $0,254641\dots$ . Формула (4.6.2) определяет модуль аргумента комплексного числа, сам же знак определяется анализом распределения подходящих, о чём подробно шла речь в главе 2.

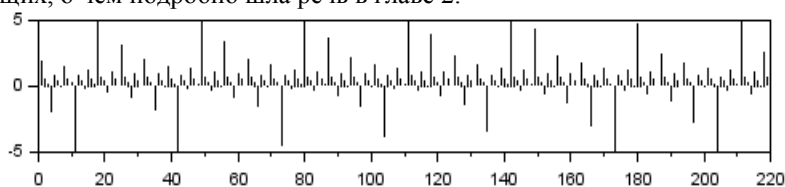


Рис. 4.1. Значения подходящих дробей для  $x_1$  системы (4.6.14).

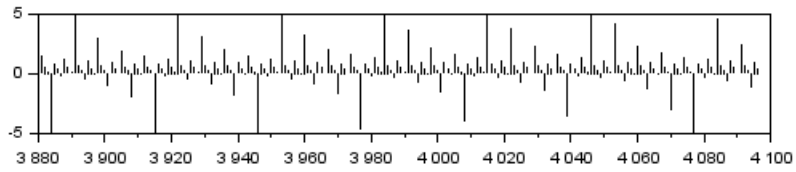


Рис. 4.2. Значения подходящих дробей для  $x_1$  системы (4.6.14).

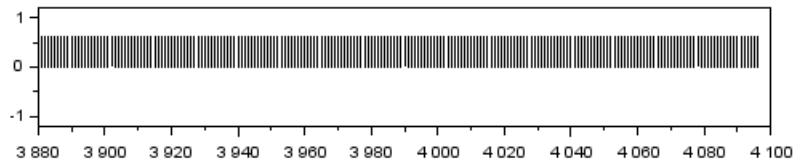


Рис. 4.3. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_1$ .

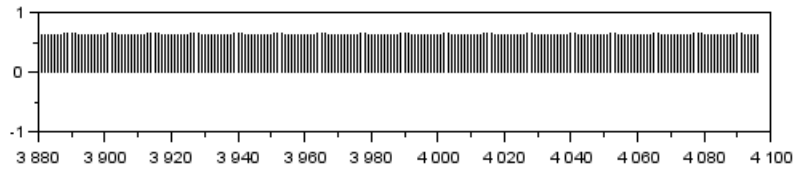


Рис. 4.4. Значения аргумента  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_1$ .

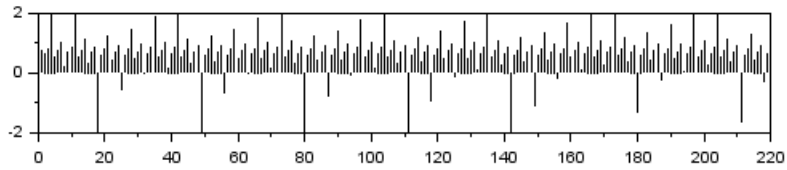


Рис. 4.5. Значения подходящих дробей для  $x_2$  системы (4.6.14).

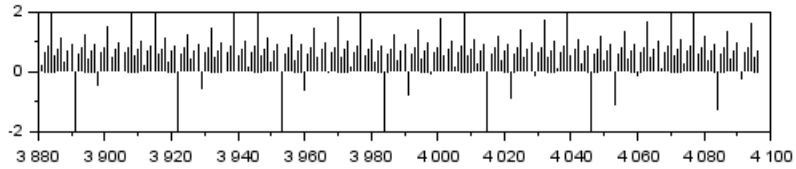


Рис. 4.6. Значения подходящих дробей для  $x_2$  системы (4.6.14).

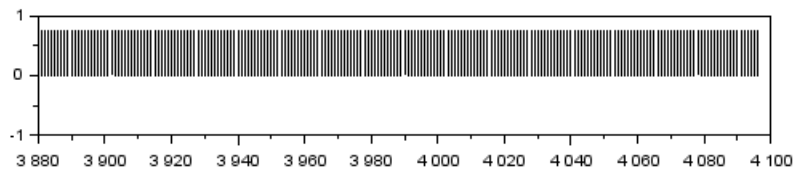


Рис. 4.7. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_2$ .

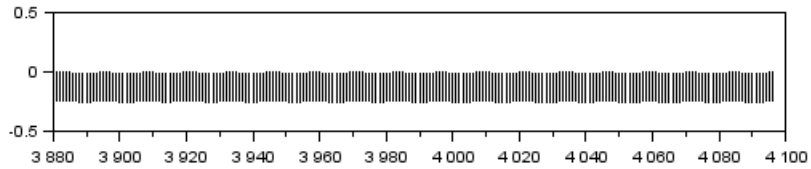
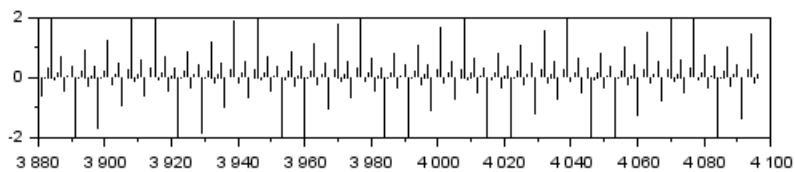
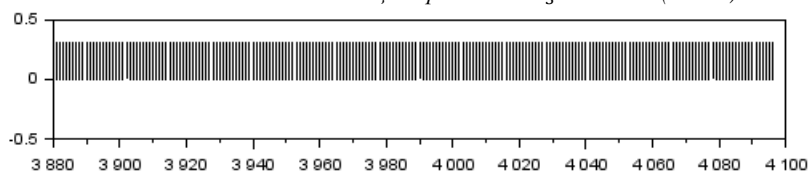
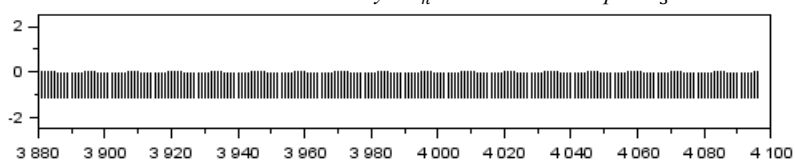
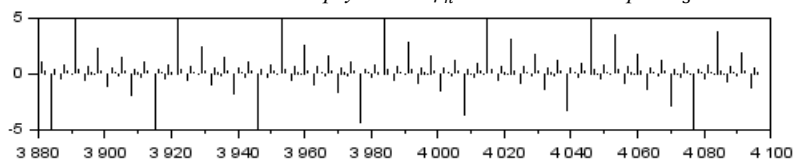
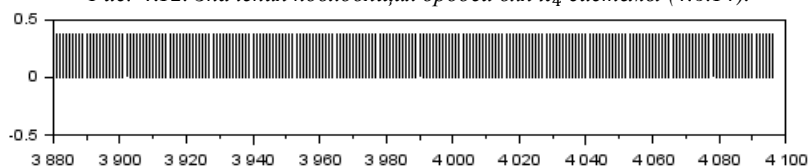
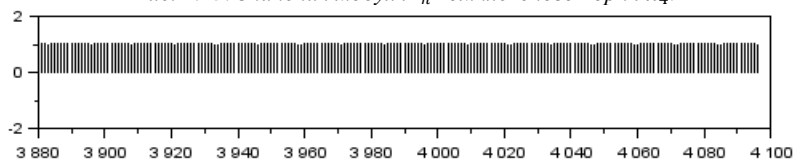


Рис. 4.8. Значения аргумента  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_2$ .

Рис. 4.9. Значения подходящих дробей для  $x_3$  системы (4.6.14).Рис. 4.10. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_3$ .Рис. 4.11. Значения аргумента  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_3$ .Рис. 4.12. Значения подходящих дробей для  $x_4$  системы (4.6.14).Рис. 4.13. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_4$ .Рис. 4.14. Значения аргумента  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_4$ .

Результаты решения системы (4.6.14) приведены в табл. 4.59 и табл. 4.60, которые имеют схожий характер. В табл. 4.59 показаны результаты определения при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма первых и последних неизвестных, имеющих комплексные значения, а также невязки по первым и последним десяти строкам. В табл. 4.60 приведены результаты определения комплексных неизвестных с номерами, равными степени “2”: 1, 2, 4, ... 4096.

В колонке 2 табл. 4.59 и табл. 4.60 приведены значения неизвестных системы (4.6.14), найденные “прогонкой”, то есть прямым методом решения СЛАУ, обеспечивающих точное решение. Известно, что алгоритм “прогонки” – представляет собой адаптированный для трёхдиагональной системы алгоритмом Гаусса. Формулы (4.6.4) – (4.6.11) – это алгоритм прогонки, записанный в форме цепных дробей. Следует отметить, что цепные дроби (4.6.4) – (4.6.7), удобные для нахождения действительных реше

ний системы, оказываются требуют модификации, если их применять для нахождения комплексных решений СЛАУ. Можно напомнить, что  $r/\varphi$ -алгоритм использует значения подходящих цепных дробей, которыми в случае прогонки, представляются неизвестные. Как видно из (4.6.4) – (4.6.7) цепная дробь для  $x_1$  содержит  $n$  звеньев, цепная дробь для  $x_2$  на одно звено короче, то есть имеет  $(n - 1)$ -звеньев. Цепная дробь для  $x_3$  уже на два звена короче, чем цепная дробь для  $x_1$  и т.д. Цепная дробь для  $x_{n-1}$  имеет всего два звена, а цепная дробь для  $x_n$  – одно звено. Укорачивающиеся цепные дроби дают верные вещественные значения. О том, что значения  $x_i$  по прогонке верные, свидетельствуют данные пятых колонок табл. 4.59 и табл. 4.60, в которых показана “невязка” – погрешность, возникающая при подстановке, найденных вещественных значений решений СЛАУ в соответствующие строки. Однако, укорачивающиеся цепные дроби оказываются малоприспособны при определении комплексных значений неизвестных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, так как высокая точность в определении комплексных чисел “по подходящим” возможно лишь при достаточно большом числе подходящих дробей. Выше было показано, что “короткие” цепные дроби, включающие отношения коэффициентов  $\frac{\beta_n}{\beta_n}$ , могут быть развернуты до цепной дроби стандартной длины, то есть цепных дробей, содержащих  $n$  звеньев, как то имеет место для цепной дроби, представляющей  $x_1$ .

Таблица 4.59

**Определение комплексных корней системы (4.6.14)**

№	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	0.485232	0.633934	0.656544	5.70655e-014	-0.0022778+i0.002061
2	0.757384	0.776237	-0.254641	-1.12466e-013	-0.00242723+i 0.00229857
3	0.136076	0.317022	-1.16659	2.28706e-014	-0.00230467+i 0.00202374
4	0.174578	0.388224	1.06305	-1.46105e-013	-0.00220215+i 0.00261265
5	0.776635	0.792168	0.151097	2.20823e-013	-0.00239098+i 0.00235343
6	0.437105	0.582334	-0.760087	7.93254e-014	-0.00217712+i 0.00258255
7	0.0048127	0.0791932	1.46955	2.22045e-013	-0.00252703+i 0.00233463
8	0.560489	0.67937	0.557602	-7.66054e-015	-0.0024451+i 0.00212437
9	0.714943	0.752777	-0.353583	-5.07372e-014	-0.00252236+i 0.00235669
10	0.0820397	0.242741	-1.26553	1.03473e-013	-0.0024752+i 0.00208262
...	...	...	...	...	...
4087	0.0820397	0.242741	-1.26553	-2.22045e-016	-0.0024752+i 0.00208262
4088	0.714943	0.752777	-0.353583	0	-0.00252236+i 0.00235669
4089	0.560489	0.67937	0.557602	-1.38778e-016	-0.0024451+i 0.00212437
4090	0.0048127	0.0791932	1.46955	3.33067e-016	-0.00252703+i 0.00233463
4091	0.437105	0.582334	-0.760087	1.11022e-016	-0.00217712+i 0.00258255
4092	0.776635	0.792168	0.151097	0	-0.00239098+i 0.00235343
4093	0.174578	0.388224	1.06305	-2.22045e-016	-0.00220215+i 0.00261265
4094	0.136076	0.317022	-1.16659	-3.33067e-016	-0.00230467+i 0.00202374
4095	0.757384	0.776237	-0.254641	1.11022e-016	-0.00242723+i 0.00229857
4096	0.485232	0.633934	0.656544	0	-0.0022778+i 0.002061

Таблица 4.60

**Определение комплексных корней системы (4.6.14)**

№	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	0.485232	0.633934	0.656544	5.70655e-014	-0.0022778+i 0.002061
2	0.757384	0.776237	-0.254641	-1.12466e-013	-0.00242723+i 0.00229857
4	0.174578	0.388224	1.06305	-1.46105e-013	-0.00220215+i 0.00261265
8	0.560489	0.67937	0.557602	-7.66054e-015	-0.0024451+i 0.00212437
16	0.660199	0.721805	-0.452524	-2.06085e-013	-0.00241547+i 0.00241191
32	0.477042	0.628683	0.667282	2.07612e-014	-0.00235544+i 0.0019239

Окончание табл. 4.60

64	0.764604	0.780654	-0.232398	1.99063e-013	-0.00281205+i 0.00150624
128	0.147752	0.357842	1.1083	5.77316e-014	-0.00261216+i 0.000278126
256	0.497242	0.640606	0.644272	1.07692e-014	-0.00290305+i (-0.000900876)
512	0.7456	0.771546	-0.279185	-2.28872e-013	-0.00337213+i 0.000665732
1024	0.216958	0.424638	1.01243	3.94129e-013	-0.00319548+i 0.000911788
2048	0.645127	0.720481	0.455592	-2.53131e-013	-0.00304281+i 0.00054667
4096	0.485232	0.633934	0.656544	0	-0.0022778+i 0.002061

В третьей и четвертой колонках табл. 4.59 и табл. 4.60 помещены значения модулей и аргументов комплексных корней системы (4.6.14), найденные при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (4.6.1) и (4.6.2). Как уже отмечалось, формула (4.6.2) устанавливает не аргумент комплексного числа, а модуль аргумента. Знак устанавливается дополнительно по алгоритму “Определение знака аргумента”, приведенного во второй главе. В последней, шестой колонке, приведены результаты проверки найденных комплексных решений системы (4.6.14). После подстановки в трёхчленные уравнения

$$ax_{i-1} + bx_i + cx_{i+1} = 1$$

в левой части должны иметь значения, определяемые коэффициентами правой части, то есть единицу. Найденные комплексные решения, естественно, не дают нулевой “невязки”, однако можно заключить, что точность решений СЛАУ (4.6.14) достаточно высока: погрешность по вещественной и мнимой частям порядка  $10^{-3}$ .

В табл. 4.61 даны результаты проверки решения системы (4.6.14). В первой колонке указаны номера строк, по которым осуществляется проверка, во второй – значения левой части после подстановки комплексных значений  $x_i$ , в третьей колонке – коэффициенты правой части системы (4.6.14). Эти коэффициенты имеют единичные значения. В четвертой колонке приведены значения “невязки” по строкам, то есть разность между значениями правой и левой частями системы для выделенных для проверки строк.

Таблица 4.61

**Проверка результатов решения системы (4.6.3)**

Номер строки	Значение левой части системы	Значения правой части системы	Погрешность
1	1.0022778-i 0.002061	1	-0.0022778+i 0.002061
2	1.00242723-i 0.00229857	1	-0.00242723+i 0.00229857
3	1.00230467i 0.00202374	1	-0.00230467+i 0.00202374
4	1.00220215-i 0.00261265	1	-0.00220215+i 0.00261265
5	1.00239098-i 0.00235343	1	-0.00239098+i 0.00235343
6	1.00217712-i 0.00258255	1	-0.00217712+i 0.00258255
7	1.00252703-i 0.00233463	1	-0.00252703+i 0.00233463
8	1.0024451-i 0.00212437	1	-0.0024451+i 0.00212437
9	1.00252236-i 0.00235669	1	-0.00252236+i 0.00235669
10	1.0024752-i 0.00208262	1	-0.0024752+i 0.00208262
...	...		...
4087	1.0024752-i 0.00208262	1	-0.0024752+i 0.00208262
4088	1.00252236-i 0.00235669	1	-0.00252236+i 0.00235669
4089	1.0024451-i 0.00212437	1	-0.0024451+i 0.00212437
4090	1.00252703-i 0.00233463	1	-0.00252703+i 0.00233463
4091	1.00217712-i 0.00258255	1	-0.00217712+i 0.00258255
4092	1.00239098-i 0.00235343	1	-0.00239098+i 0.00235343
4093	1.00220215-i 0.00261265	1	-0.00220215+i 0.00261265
4094	1.00230467-i 0.00202374	1	-0.00230467+i 0.00202374
4095	1.00242723-i 0.00229857	1	-0.00242723+i 0.00229857
4096	1.0022778-i 0.002061	1	-0.0022778+i 0.002061

На рис. 4.15 показано расположение на комплексной плоскости решений  $x_i$  системы (4.6.14), полученные при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.



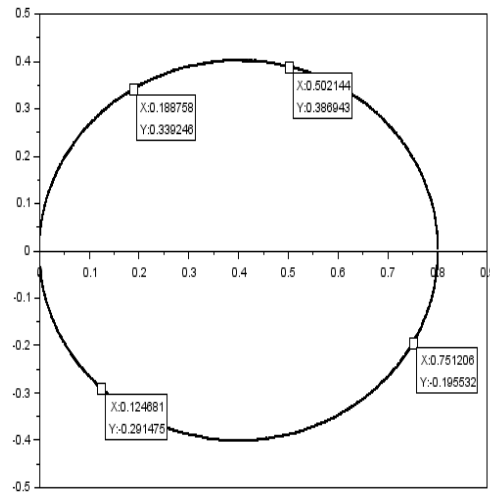


Рис. 4.15. Расположение  $x_i$  системы (4.6.14) на комплексной плоскости.

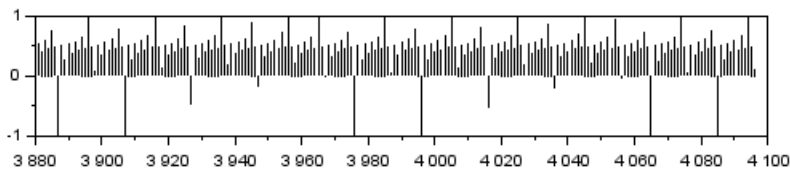
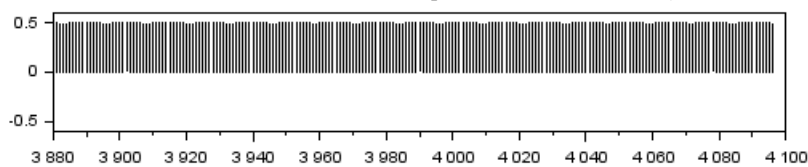
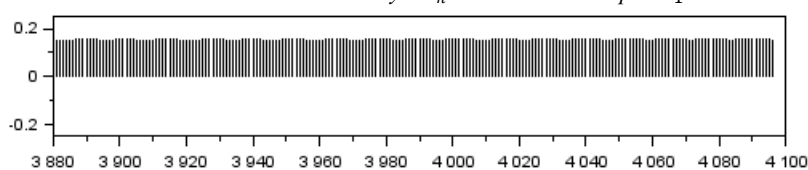
**Пример 2.**

Размер матрицы СЛАУ (4.6.15) 4096x4096

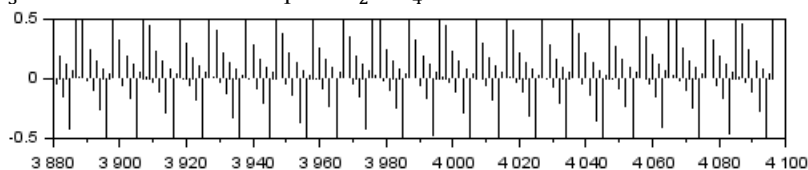
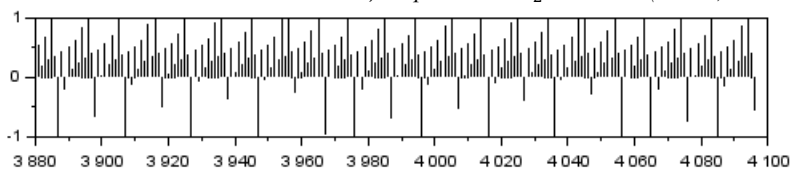
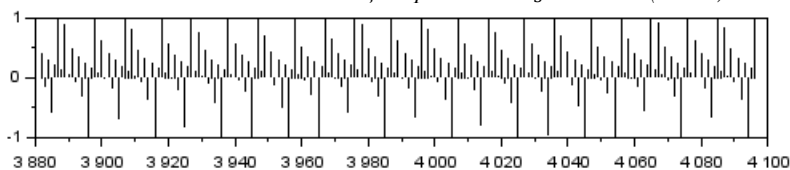
$$\begin{pmatrix} 1.9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1.9 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1.9 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1.9 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.15)$$

СЛАУ (4.6.15) будем решать методом прогонки. В отличие от “метода цепных дробей”, которым решались СЛАУ в предыдущих параграфах, “метод прогонки” требует минимальных вычислительных затрат для построения цепных дробей, представляющих неизвестные системы, что весьма важно при решении “комплексных” СЛАУ, то есть СЛАУ с матрицей действительных коэффициентов, имеющих, тем не менее, комплексные решения  $x_i$ . Однако, известно, что для определения комплексных решений СЛАУ с высокой точностью, что устанавливается проверкой, то есть для получения малой невязки, необходимо большое число подходящих расходящихся цепных дробей, представляющих комплексные числа. Если процедура определения коэффициентов  $\omega_i$  звеньев цепных дробей требует больших временных затрат, как в случае “метода цепных дробей”, который включает в себя метод Рутисхаузера для определения коэффициентов цепной дроби по расходящимся, как правило, рядам, сгенерированным итерационными алгоритмами решения СЛАУ, то решение комплексных СЛАУ большой размерности весьма проблематично.

На рис. 4.16 показаны подходящие дроби для  $x_1$  системы (4.6.15). На рис. 4.16 и рис. 4.17 показаны значения модуля и аргумента комплексного корня  $x_1$ , установленного с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Рис. 4.15. Значения подходящих дробей для  $x_1$  системы (4.6.15).Рис. 4.16. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_1$ .Рис. 4.17. Значения аргумента  $\varphi_n$  для комплексного корня  $x_1$  системы (4.6.15).

На рис. 4.18 – рис. 4.20 приведены значения подходящих дробей для  $x_2 - x_4$  системы (4.6.15). Из графика рис. 19 можно заключить, что знак аргумента комплексного корня  $x_3$  отличается от знака корней  $x_2$  и  $x_4$ .

Рис. 4.18. Значения подходящих дробей для  $x_2$  системы (4.6.15).Рис. 4.19. Значения подходящих дробей для  $x_3$  системы (4.6.15).Рис. 4.20. Значения подходящих дробей для  $x_4$  системы (4.6.15).

В табл. 4.62 и 4.63 приведены результаты решение СЛАУ (4.6.15).

Таблица 4.62

**Определение комплексных корней системы (4.6.15)**

Номер	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	0.129563	0.506747	0.159534	-9.00391e-014	-0.000907972+i (-0.000643018)
2	0.75383	0.160404	-1.25173	-3.03091e-013	-0.00113241+i (-0.000568983)
3	-0.56184	0.456152	0.477068	-3.39284e-013	-0.00128773+i (-0.000355707)
4	1.31367	0.30488	-0.934961	-2.85105e-013	-0.00168276+i (-0.000144379)

Окончание табл. 4.62

5	-0.934125	0.360086	0.793835	-3.1819e-013	-0.00188036+i 7.95997e-005
6	1.46117	0.418627	-0.618194	-3.73035e-013	-0.00189545+i (-3.57579e-005)
7	-0.842102	0.227975	1.1106	-3.71481e-013	-0.00146237+i 1.4283e-005
8	1.13882	0.490034	-0.301427	-1.62537e-013	-0.000748413+i 5.11091e-005
9	-0.321659	0.0728567	1.42737	6.87228e-014	0.00119985+i (-0.00210861)
10	0.47233	0.511184	0.0207087	4.70735e-014	0.00238456+i (-0.00353025)
...	...	...	...	...	...
4087	0.47233	0.511184	0.0207087	1.11022e-016	0.00238456+i (-0.00353025)
4088	-0.321659	0.0728567	1.42737	4.44089e-016	0.00119985+i (-0.00210861)
4089	1.13882	0.490034	-0.301427	-4.44089e-016	-0.000748413+i 5.11091e-005
4090	-0.842102	0.227975	1.1106	-1.55431e-015	-0.00146237+i 1.4283e-005
4091	1.46117	0.418627	-0.618194	-1.11022e-015	-0.00189545+i (-3.57579e-005)
4092	-0.934125	0.360086	0.793835	0	-0.00188036+i 7.95997e-005
4093	1.31367	0.30488	-0.934961	-1.11022e-016	-0.00168276+i (-0.000144379)
4094	-0.56184	0.456152	0.477068	0	-0.00128773+i (-0.000355707)
4095	0.75383	0.160404	-1.25173	-1.11022e-016	-0.00113241+i (-0.000568983)
4096	0.129563	0.506747	0.159534	0	-0.000907972+i (-0.000643018)

Таблица 4.63

**Определение комплексных корней системы (4.6.15)**

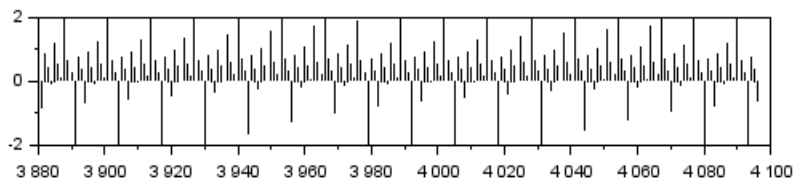
Номер	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	0.129563	0.506747	0.159534	-9.00391e-014	-0.000907972+i (-0.000643018)
2	0.75383	0.160404	-1.25173	-3.03091e-013	-0.00113241+i (-0.000568983)
4	1.31367	0.30488	-0.934961	-2.85105e-013	-0.00168276+i (-0.000144379)
8	1.13882	0.490034	-0.301427	-1.62537e-013	-0.000748413+i 5.11091e-005
16	-0.942644	0.290726	0.968709	-1.02141e-013	-0.00153884+i 0.000323274
32	-0.351192	0.472827	0.377359	5.17364e-014	0.00886337+i (-0.00169686)
64	1.41254	0.347044	-0.829117	-1.38778e-013	-0.000232553+i (-0.000187339)
128	0.735572	0.492759	-0.131155	7.54952e-014	0.0307649+i 0.0274906
256	-0.427716	0.108742	1.31692	1.77636e-013	0.050164+i 0.0320553
512	-0.75479	0.213435	1.11137	9.57012e-014	0.0363193+i 0.0208102
1024	-0.936435	0.337736	0.84599	-4.9738e-014	0.0118057+i 0.0103801
2048	0.448319	0.22024	-0.705631	-1.91513e-014	0.401039+i (-0.0119311)
4096	0.129563	0.506747	0.159534	0	-0.000907972+i (-0.000643018)

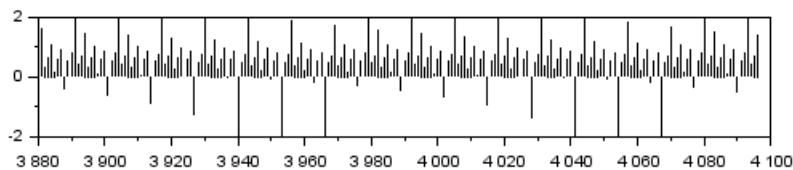
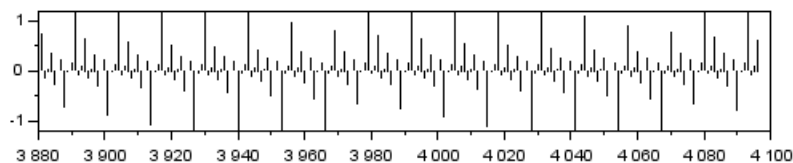
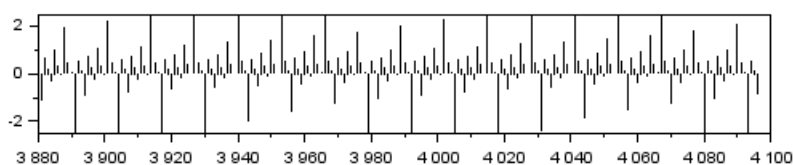
**Пример 3.**

Размер матрицы СЛАУ (4.6.16) 4096x4096.

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.7 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0.7 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.16)$$

На рис. 4.21 – рис. 4.24 показаны графики подходящих дробей, представляющих комплексные корни  $x_1 \div x_4$  системы (4.6.16).

Рис. 4.21. Значение подходящих дробей для  $x_1$  системы (4.6.16).

Рис. 4.22. Значение подходящих дробей для  $x_2$  системы (4.6.16).Рис. 4.23. Значение подходящих дробей для  $x_3$  системы (4.6.16).Рис. 4.24. Значение подходящих дробей для  $x_4$  системы (4.6.16).

Из графиков, показанных на рис. 4.21 – рис. 4.24 следует, что аргументы комплексных корней  $x_1$  и  $x_4$  отличаются знаками от аргументов комплексных корней  $x_2$  и  $x_3$ .

В табл. 4.64 и 4.65 приведены результаты решения СЛАУ (4.6.16) размерностью  $8192 \times 8192$ .

Таблица 4.64

**Определение комплексных корней системы (4.6.16)**

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	-0.653865	0.610118	0.606689	1.59428e-013	-0.00247137+i (-0.000154366)
2	1.45771	0.695563	-0.357418	5.16365e-013	-0.00268872+i (-2.5062e-005)
3	0.633471	0.183188	-1.32076	5.61107e-013	-0.00264127+i (-0.00028488)
4	-0.901136	0.487123	0.855961	6.48814e-013	-0.00208074+i 0.000154363
5	0.997324	0.737609	-0.108913	-6.21281e-013	-0.00288129+i (-6.18452e-005)
6	1.20301	0.355185	-1.07072	6.62581e-013	-0.0026797+i (-8.60558e-005)
7	-0.83943	0.334122	1.10447	8.82627e-014	-0.000918826+i (-0.00142249)
8	0.384592	0.732898	0.14266	8.7419e-013	-0.00179569+i (-0.0013417)
9	1.57022	0.505074	-0.822214	2.80664e-013	-0.000884636+i (-0.00184574)
10	-0.483743	0.160495	1.3522	-5.19362e-013	0.000642181+i (-0.00109698)
...	...	...	...	...	...
4087	-0.483743	0.160495	1.3522	0	0.000642181+i (-0.00109698)
4088	1.57022	0.505074	-0.822214	-1.66533e-016	-0.000884636+i (-0.00184574)
4089	0.384592	0.732898	0.14266	2.22045e-015	-0.00179569+i (-0.0013417)
4090	-0.83943	0.334122	1.10447	6.66134e-016	-0.000918826+i (-0.00142249)
4091	1.20301	0.355185	-1.07072	4.44089e-016	-0.0026797+i (-8.60558e-005)
4092	0.997324	0.737609	-0.108913	-5.10703e-015	-0.00288129+i (-6.18452e-005)
4093	-0.901136	0.487123	0.855961	-3.9968e-015	-0.00208074+i 0.000154363
4094	0.633471	0.183188	-1.32076	-4.44089e-015	-0.00264127+i (-0.00028488)
4095	1.45771	0.695563	-0.357418	-5.55112e-016	-0.00268872+i (-2.5062e-005)
4096	-0.653865	0.610118	0.606689	-4.44089e-016	-0.00247137+i (-0.000154366)

Таблица 4.65

**Определение комплексных корней системы (4.6.16)**

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	-0.653865	0.610118	0.606689	1.59428e-013	-0.00247137+i (-0.000154366)
2	1.45771	0.695563	-0.357418	5.16365e-013	-0.00268872+i (-2.5062e-005)
4	-0.901136	0.487123	0.855961	6.48814e-013	-0.00208074+i 0.000154363
8	0.384592	0.732898	0.14266	8.7419e-013	-0.00179569+i (-0.0013417)
16	0.713413	0.20694	-1.28471	7.32303e-013	-0.00171525+i 0.001052
32	1.32128	0.397755	-1.00246	1.54321e-013	-0.000355127+i 0.00494246
64	1.56232	0.666952	-0.451757	-7.07712e-013	0.0125967+i 0.00343919
128	-0.753398	0.566057	0.693359	-3.21743e-013	0.0217532+i 0.0158971
256	1.22246	0.694494	-0.268447	1.44884e-012	0.0199697+i 0.0307037

В табл. 4.64 и 4.65 даны результаты проверки, то есть приведены погрешности решения СЛАУ (4.6.16) установленные после подстановки найденных комплексных корней. Из колонок 6 таблиц следует, что “невязки” составляют незначительные величины порядка  $10^{-3}$ –  $10^{-5}$ .

**Пример 4.** Размер матрицы СЛАУ (4.6.17) 8192x8192.

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.7 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0.7 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.17)$$

В табл. 4.66 и 4.67 приведены результаты решение СЛАУ (4.6.17) размерностью 8192x8192.

Таблица 4.66

**Определение комплексных корней системы (4.6.17)**

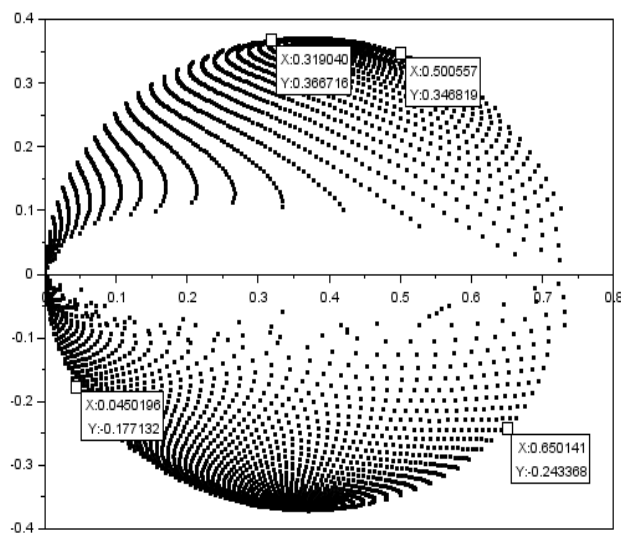
Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	15.9506	0.608967	0.605922	4.9738e-014	-0.000530533+i 0.000594647
2	-10.1654	0.694198	-0.358185	4.21885e-013	-0.000675045+i 0.000670543
3	-7.83479	0.182764	-1.32191	4.15668e-013	-0.000694015+i 0.00064418
4	16.6497	0.486073	0.854811	5.86198e-013	0.000256039+i 0.000973136
5	-2.82004	0.735818	-0.10968	8.93507e-013	-0.000288345+i 0.000871287
6	-13.6757	0.354264	-1.07264	3.64153e-013	2.97228e-005+i 0.000791026
7	13.393	0.333301	1.1037	1.83853e-013	0.000288833+i (-0.000165409)
8	5.30059	0.732665	0.141126	9.80549e-013	2.28765e-005+i (-2.42647e-005)
9	-16.1035	0.503723	-0.824131	2.8777e-013	0.000394344+i (-0.000342958)
10	6.97183	0.159904	1.35182	-5.40012e-013	3.88476e-005+i 2.93982e-005
...	...	...	...	...	...
8183	6.97183	0.159904	1.35182	1.06581e-014	3.88476e-005+i 2.93982e-005
8184	-16.1035	0.503723	-0.824131	3.55271e-015	0.000394344+i (-0.000342958)
8185	5.30059	0.732665	0.141126	1.77636e-015	2.28765e-005+i (-2.42647e-005)
8186	13.393	0.333301	1.1037	-1.77636e-015	0.000288833+i (-0.000165409)
8187	-13.6757	0.354264	-1.07264	-2.66454e-014	2.97228e-005+i 0.000791026
8188	-2.82004	0.735818	-0.10968	1.27898e-013	-0.000288345+i 0.000871287
8189	16.6497	0.486073	0.854811	-8.88178e-016	0.000256039+i 0.000973136
8190	-7.83479	0.182764	-1.32191	9.76996e-014	-0.000694015+i 0.00064418
8191	-10.1654	0.694198	-0.358185	-7.99361e-014	-0.000675045+i 0.000670543
8192	15.9506	0.608967	0.605922	0	-0.000530533+i 0.000594647

Таблица 4.67

**Определение комплексной корневой системы (4.6.17)**

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Вещественная невязка	Погрешность
1	15.9506	0.608967	0.605922	4.9738e-014	-0.000530533+i 0.000594647
2	-10.1654	0.694198	-0.358185	4.21885e-013	-0.000675045+i 0.000670543
4	16.6497	0.486073	0.854811	5.86198e-013	0.000256039+i 0.000973136
8	5.30059	0.732665	0.141126	9.80549e-013	2.28765e-005+i (-2.42647e-005)
16	-8.7329	0.206037	-1.28854	-4.33431e-013	0.000386534+i 0.00157717
32	-14.665	0.395713	-1.00744	1.1191e-013	0.00815319+i 0.00365528
64	-12.2496	0.664445	-0.452524	-6.96332e-013	0.00500608+i 0.00214178
128	16.5603	0.575912	0.679553	-2.98428e-013	0.0165673+i 0.00912029
256	-6.19928	0.68814	-0.252723	1.52056e-012	0.0196447+i 0.0166907
512	12.6728	0.325904	1.09258	-7.57616e-013	0.0487415+i (-0.0363732)
1024	16.7186	0.554649	0.722888	-1.08509e-011	0.128307+i 0.0679864
2048	-4.38014	0.4447	-0.477068	-4.81393e-013	0.135462+i 0.0882883
4096	9.77566	0.403563	0.773126	-2.50466e-013	0.152704+i (-0.114008)
8192	15.9506	0.608967	0.605922	0	-0.000530533+i 0.000594647

На рис. 4.25 показано расположение корней системы (4.6.17) на комплексной плоскости.

Рис. 4.25. Расположение решений  $x_i$  системы (4.6.17).

Пример 5. Размер матрицы СЛАУ (4.6.18) 4096x4096

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.01 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0.01 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.18)$$

В табл. 4.68 и 4.69 приведены результаты решение СЛАУ (4.6.16) размерностью 8192x8192.

Таблица 4.68

**Определение комплексных корней системы (4.6.18)**

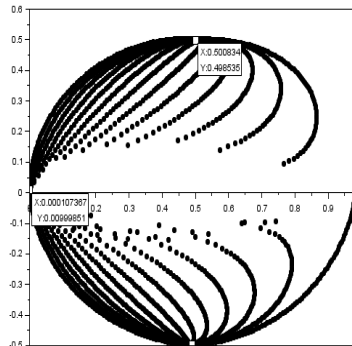
Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	$x = a + ib$	Погрешность
1	15.8656	0.706662	0.783097	0.500834+i 0.498535	0.000213736+i 0.0003556
2	0.841344	0.994792	-0.00536893	0.994778+i 0.00534095	-0.00183768+i (-0.00059893)
3	-14.874	0.699301	-0.792301	0.491056+i 0.497882	0.000204154+i 0.000321258
4	0.307397	0.00999909	1.56006	0.000107367+i 0.00999851	-0.00153452+i (-0.000317661)
5	15.871	0.713226	0.773126	0.510478+i 0.4981	0.00461487+i 0.00173004
6	0.533894	0.990314	-0.0168738	0.990173+i (-0.0167096)	-0.00138391+i (-0.000415574)
7	-14.8763	0.692018	-0.802272	0.481004+i (-0.497517)	0.00457084+i 0.00163081
8	0.61487	0.0200589	1.54855	0.000446127+i 0.0200539	-0.00145388+i (-0.000476065)
9	15.8702	0.720181	0.763155	0.520445+i 0.497793	0.0101945+i 0.00290464
10	0.226429	0.984551	-0.0283786	0.984155+i (-0.0279365)	-0.00157473+i (-0.000217775)
...	...	...	...	...	...
4087	0.226429	0.984551	-0.0283786	0.984155+i (-0.0279365)	-0.00157473+i (-0.000217775)
4088	15.8702	0.720181	0.763155	0.520445+i 0.497793	0.0101945+i 0.00290464
4089	0.61487	0.0200589	1.54855	0.000446127+i 0.0200539	-0.00145388+i (-0.000476065)
4090	-14.8763	0.692018	-0.802272	0.481004+i (-0.497517)	0.00457084+i 0.00163081
4091	0.533894	0.990314	-0.0168738	0.990173+i (-0.0167096)	-0.00138391+i (-0.000415574)
4092	15.871	0.713226	0.773126	0.510478+i 0.4981	0.00461487+i 0.00173004
4093	0.307397	0.00999909	1.56006	0.000107367+i 0.00999851	-0.00153452+i (-0.000317661)
4094	-14.874	0.699301	-0.792301	0.491056+i (-0.497882)	0.000204154+i 0.000321258
4095	0.841344	0.994792	-0.00536893	0.994778+i (-0.00534095)	-0.00183768+i (-0.00059893)
4096	15.8656	0.706662	0.783097	0.500834+i 0.498535	0.000213736+i 0.0003556

Таблица 4.69

**Определение комплексных корней системы (4.6.18)**

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	$x = a + ib$	Погрешность
1	15.8656	0.706662	0.783097	0.500834+i 0.498535	0.000213736+i 0.0003556
2	0.841344	0.994792	-0.00536893	0.994778+i (-0.00534095)	-0.00183768+i (-0.00059893)
4	0.307397	0.00999909	1.56006	0.000107367+i 0.00999851	-0.00153452+i (-0.000317661)
8	0.61487	0.0200589	1.54855	0.000446127+i 0.0200539	-0.00145388+i (-0.000476065)
16	1.22955	0.0403821	1.52631	0.00179582+i 0.0403422	-0.0028709+i (-0.00169281)
32	2.45442	0.0814409	1.48643	0.00686294+i 0.0811512	-0.00438076+i (-0.0070703)
64	4.85885	0.164037	1.40666	0.0268037+i 0.161833	-0.00432933+i (-0.0163223)
128	9.27489	0.326258	1.24713	0.103766+i 0.309317	0.00494694+i (-0.0291338)
256	15.0756	0.609877	0.928058	0.365554+i 0.488181	0.0928411+i (-0.0537632)
512	9.35439	0.836488	0.436418	0.758086+i 0.35358	0.0357121+i (-0.0215566)
1024	-13.8065	0.607713	-0.875903	0.389121+i (-0.466798)	0.294398+i 0.0285875
2048	-10.3462	0.581601	-0.773126	0.41627+i (-0.406176)	0.151865+i (-0.0274209)
4096	15.8656	0.706662	0.783097	0.500834+i 0.498535	0.000213736+i 0.0003556

На рис. 4.26 показано размещение в комплексной плоскости решений системы (4.6.18), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом на основе “отсчетов”, полученных “прогонкой”.

Рис. 4.26. Расположение решений  $x_i$  системы (4.6.18).

Можно обратить внимание на взаимное расположение на комплексной плоскости корней  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ . Такое расположение не случайно. Запишем цепную дробь Никиторца:

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots \quad (4.6.19)$$

Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то получим цепную дробь, представляющую мнимую единицу:

$$i = 0 - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \dots - \frac{1}{0} - \dots \quad (4.6.20)$$

Определить значение цепной дроби (4.6.20) на компьютере нельзя, но можно определить значение “близкой” цепной дроби

$$\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} - \dots - \frac{1}{\varepsilon} - \dots \quad (4.6.21)$$

В табл. 4.70 приведены результаты определения значения цепной дроби (4.6.21) при  $\varepsilon = 10^{-4}$ :

$$10^{-4} - \frac{1}{10^{-4}} - \frac{1}{10^{-4}} - \dots - \frac{1}{10^{-4}} - \dots \quad (4.6.22)$$

Как следует из данных колонок 3 и 5 табл. 4.70 значение цепной дроби (4.6.22)

есть комплексное число  $x_1 = 0,999999e^{i1.570746}$  весьма близкое значению  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ .

Таблица 4.70

$$10^{-4} - \frac{1}{10^{-4}} - \frac{1}{10^{-4}} - \dots - \frac{1}{10^{-4}} - \dots$$

**Определение значения цепной дроби (4.6.18)**

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	-9.9999990000E+03	0.99999995000	0.00000005000	1.570796326794	0.000050000000
4	-4.9999987500E+03	0.99999991755	0.00000008244	1.570796326794	0.000050000000
8	-2.4999981250E+03	0.99999986527	0.00000013472	1.570796326794	0.000050000000
16	-1.2499968125E+03	0.99999976685	0.00000023314	1.570796326794	0.000050000000
32	-6.24999415625E+02	0.99999956937	0.00000043062	1.570796326794	0.000050000000
64	-3.1249882812E+02	0.99999917139	0.00000082860	1.570796326794	0.000050000000
128	-1.56247816400E+02	0.99999837281	0.00000162718	1.570796326794	0.000050000000
256	-7.81206831565E+01	0.99999677361	0.00000322638	1.570796326794	0.000050000000
512	-3.90539162287E+01	0.99999357354	0.00000642645	1.570796326794	0.000050000000
1024	-1.95141303174E+01	0.99998716895	0.00001283104	1.570796326794	0.000050000000
2048	-9.73141776564E+00	0.99997432983	0.00002567016	1.570796326794	0.000050000000
4096	-4.81430417209E+00	0.99994841267	0.00005158732	1.570796326794	0.000050000000
8192	-2.30327099634E+00	0.99989457566	0.00010542433	1.570796326794	0.000050000000
16384	-9.34532635581E-01	0.99976709365	0.00023290634	1.570796326794	0.000050000000
32768	6.77568511412E-02	0.99917785467	0.00082214532	1.570700452995	0.000045873799
65536	-7.35087359954E+00	0.99999860013	0.00000139986	1.570748389895	0.000002063100
131072	-3.60739313625E+00	0.99999717502	0.00000282497	1.570748389895	0.000002063100
262144	-1.66506924513E+00	0.99999412477	0.00000587522	1.570748389895	0.000002063100
524288	-5.32230828595E-01	0.99998559161	0.00001440838	1.570748389895	0.000002063100
1048576	6.73263347635E-01	0.99999444472	0.00000555527	1.570745393839	0.00000932955
2097152	-4.06049929532E-01	0.99999533854	0.00000466145	1.570746891867	0.00000565072
4194304	1.02822408214E+00	0.99999920657	0.00000079342	1.570746142853	0.00000183941
8388608	2.78380692760E-02	0.99999572866	0.00000427133	1.570746142853	0.00000183941

Размер матрицы СЛАУ (4.6.23) 4096x4096



$$\begin{pmatrix} 1 & 1.3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1.3 & 1 & 1.3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1.3 & 1 & 1.3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1.3 & 1 & 1.3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.23)$$

В табл. 4.71 и 4.72 приведены результаты решение СЛАУ (4.6.23) размерностью 8192x8192.

Таблица 4.71

**Определение комплексных  $x_i$  системы (4.6.23)**

Номер	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Мнимая невязка
1	0.79827	0.462806	0.588282	-0.000789137+i (-9.91745e-005)
2	0.155177	0.513197	-0.395	-0.000988638+i (-1.37775e-005)
3	-0.148406	0.106913	-1.37675	-0.00122999+i 0.000144605
4	0.728212	0.39507	0.780796	-0.000680329+i 0.000631218
5	0.357473	0.544383	-0.202485	-0.00110424+i 0.000507877
6	-0.233961	0.209786	-1.18347	-0.00116473+i 0.000488015
7	0.591727	0.312695	0.973311	-0.00083578+i 0.001195
8	0.548017	0.555345	-0.00997088	-0.00108046+i 0.000348792
9	-0.244048	0.304416	-0.990185	-0.000870277+i 0.000511872
10	0.408943	0.21862	1.16583	-0.000664095+i (-0.00211685)
...	...	...	...	...
4087	0.408943	0.21862	1.16583	-0.000664095+i (-0.00211685)
4088	-0.244048	0.304416	-0.990185	-0.000870277+i 0.000511872
4089	0.548017	0.555345	-0.00997088	-0.00108046+i 0.000348792
4090	0.591727	0.312695	0.973311	-0.00083578+i 0.001195
4091	-0.233961	0.209786	-1.18347	-0.00116473+i 0.000488015
4092	0.357473	0.544383	-0.202485	-0.00110424+i 0.000507877
4093	0.728212	0.39507	0.780796	-0.000680329+i 0.000631218
4094	-0.148406	0.106913	-1.37675	-0.00122999+i 0.000144605
4095	0.155177	0.513197	-0.395	-0.000988638+i (-1.37775e-005)
4096	0.79827	0.462806	0.588282	-0.000789137+i (-9.91745e-005)

Таблица 4.82

**Определение комплексных  $x_i$  системы (4.6.24)**

Номер	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Мнимая невязка
1	0.79827	0.462806	0.588282	-0.000789137+i (-9.91745e-005)
2	0.155177	0.513197	-0.395	-0.000988638+i (-1.37775e-005)
4	0.728212	0.39507	0.780796	-0.000680329+i 0.000631218
8	0.548017	0.555345	-0.00997088	-0.00108046+i 0.000348792
16	0.0151527	0.00944697	1.55085	0.00473796+i (-0.00289012)
32	0.0305997	0.019076	1.53015	0.00994466+i (-0.0055081)
64	0.0623068	0.038692	1.48873	0.0172073+i (-0.00974153)
128	0.12847	0.0787805	1.40589	0.0242078+i (-0.0156258)
256	0.267583	0.159301	1.24022	0.0243644+i (-0.032892)
512	0.538021	0.308478	0.908884	0.00329256+i (-0.067502)
1024	0.804941	0.486408	0.505447	0.283838+i 0.100753
2048	-0.0146799	0.0657936	-1.06228	0.376734+i (-0.173616)
4096	0.79827	0.462806	0.588282	-0.000789137+i (-9.91745e-005)

**Пример 7.** Размер матрицы СЛАУ (4.6.24) 4096x4096.

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0.1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0.1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.6.24)$$

На рис. 4.27 – 4.30 показаны значения подходящих дробей для определения комплексных  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ .

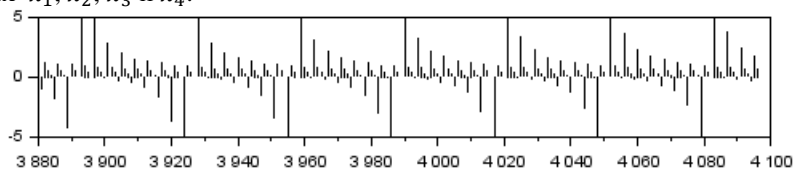


Рис. 4.27. Значения подходящих дробей для  $x_1$  системы (4.6.24).

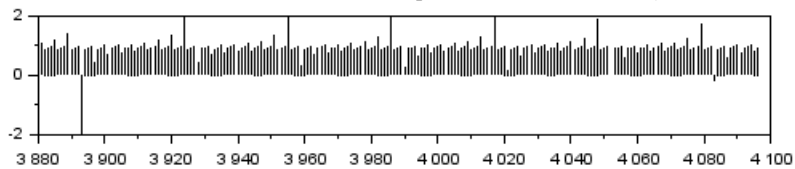


Рис. 4.28. Значения подходящих дробей для  $x_2$  системы (4.6.24).

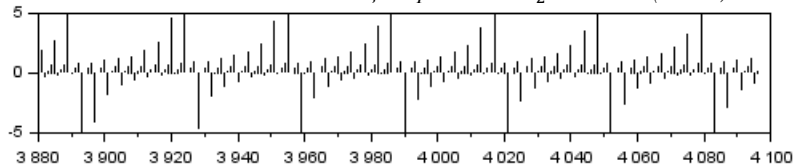


Рис. 4.29. Значения подходящих дробей для  $x_3$  системы (4.6.24).

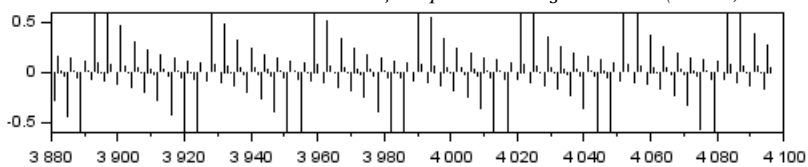


Рис. 4.30. Значения подходящих дробей для  $x_4$  системы (4.6.24).

На рис. 4.31 и 4.32 показаны вычисления модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_1$  по подходящим дробям при помощи  $\gamma/\varphi$ -алгоритма.

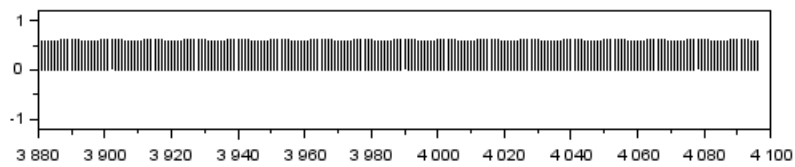


Рис. 4.31. Значения модуля  $r_n$  комплексного корня  $x_1$ .

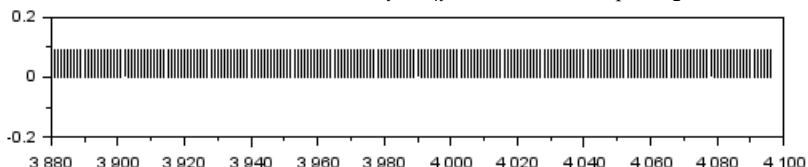


Рис. 4.32. Значения модуля  $\varphi_n$  комплексного корня  $x_1$ .

Таблица 4.73

**Определение комплексных  $x_i$  системы (4.6.24)**

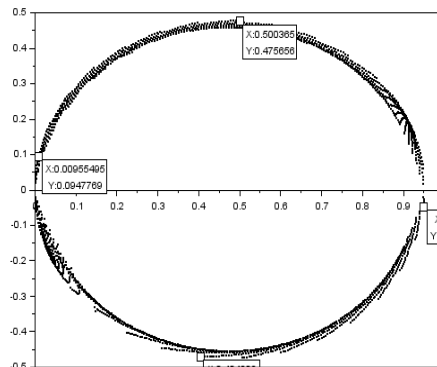
Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Мнимая невязка
1	0.712065	0.690372	0.760087	6.25177e-005+i (-0.000169555)
2	0.928794	0.951083	-0.0498544	-0.000157145+i (-0.000179212)
3	0.195056	0.620853	-0.860563	6.37667e-005+i (-0.000307195)
4	0.0517009	0.0952573	1.47032	-0.000149122+i 0.000318829
5	0.799774	0.752175	0.659612	0.000468152+i 8.03707e-005
6	0.868322	0.941152	-0.15033	0.000543359+i (-0.00019372)
7	0.113394	0.544838	-0.961039	0.000407944+i (-0.000210537)
8	0.120339	0.189643	1.36984	0.00031374+i 0.000127325
9	0.874572	0.806745	0.559136	0.000488493+i 0.000235037
10	0.792204	0.92212	-0.250806	0.000940659+i (-0.000620272)
...	...	...	...	...
4087	0.792204	0.92212	-0.250806	0.000940659+i (-0.000620272)
4088	0.874572	0.806745	0.559136	0.000488493+i 0.000235037
4089	0.120339	0.189643	1.36984	0.00031374+i 0.000127325
4090	0.113394	0.544838	-0.961039	0.000407944+i (-0.000210537)
4091	0.868322	0.941152	-0.15033	0.000543359+i (-0.00019372)
4092	0.799774	0.752175	0.659612	0.000468152+i 8.03707e-005
4093	0.0517009	0.0952573	1.47032	-0.000149122+i 0.000318829
4094	0.195056	0.620853	-0.860563	6.37667e-005+i (-0.000307195)
4095	0.928794	0.951083	-0.0498544	-0.000157145+i (-0.000179212)
4096	0.712065	0.690372	0.760087	6.25177e-005+i (-0.000169555)

Таблица 4.74

**Определение комплексных  $x_i$  системы (4.6.25)**

№	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Мнимая невязка	$x = a + ib$
1	0.712065	0.690372	0.760087	6.25177e-005+i (-0.000169555)	0.500365+i 0.475656
2	0.928794	0.951083	-0.0498544	-0.000157145+i (-0.000179212)	0.949901+i (-0.047396)
4	0.0517009	0.0952573	1.47032	-0.000149122+i 0.000318829	0.00955495+i 0.0947769
8	0.120339	0.189643	1.36984	0.00031374+i 0.000127325	0.0378531+i 0.185827
16	0.296905	0.372443	1.16966	0.000636711+i (-0.00354661)	0.145426+i 0.342878
32	0.702649	0.68521	0.767757	0.000611487+i 0.00237921	0.492988+i 0.475895
64	0.938854	0.951149	-0.0352816	0.0020275+i (-0.00222191)	0.950558+i (-0.0335511)
128	0.028705	0.060659	1.4987	0.00476812+i (-0.00193932)	0.00436955+i 0.0605014
256	0.0637909	0.124413	1.4243	0.0114355+i (-0.00429465)	0.0181607+i 0.12308
512	0.15102	0.253707	1.27857	0.0256303+i (-0.0213535)	0.0730884+i 0.242951
1024	0.374914	0.500973	0.988651	0.017164+i (-0.0476304)	0.275444+i 0.418455
2048	0.83553	0.851545	0.404971	0.0469428+i 0.0535305	0.782667+i 0.335502
4096	0.712065	0.690372	0.760087	6.25177e-005+i (-0.000169555)	0.500365+i 0.475656

На рис. 4.33 показано распределение на комплексной плоскости решений системы (4.6.24)

Рис. 4.33. Расположение решений  $x_i$  системы (4.6.24).

#### 4.7. Решение комплексных СЛАУ “методом цепных дробей”

Ранее уже отмечалось, что решение СЛАУ “методом цепных дробей”, когда по итерационным рядам строятся соответствующие цепные дроби для определения неизвестных системы, имеет существенный недостаток, – существуют технические трудности при вычислении значений значительного числа коэффициентов соответствующей цепной дроби алгоритмом Рутисхаузера. Это ограничивает размерность систем, которые могут быть эффективно решены методом цепных дробей. Как известно, точное решение компонент  $x_i$ , системы размерности  $n \times n$  определяет цепная дробь с числом звеньев  $2n$ . Если матрица решаемой СЛАУ “вещественна”, то есть построенные для нахождения  $x_i$  цепные дроби сходятся, то нет необходимости строить цепную дробь с  $2n$  звеньями для достижения приемлемой точности, возможно использование цепных дробей с незначительным числом звеньев, то есть имеет место аналог сходящегося итерационного алгоритма решения СЛАУ. Иное дело, если матрица решаемой СЛАУ – комплексная, когда цепная дробь, представляющая  $x_i$  не сходится. В этом случае надо строить цепную дробь, содержащую  $2n$  звеньев, что гарантирует получение точного значения  $x_i$ , совпадающего со значением  $x_i$ , полученного прямым методом решения СЛАУ, например, методом Гаусса. Если мы ищем комплексные решения подобных СЛАУ, то есть решения, удовлетворяющие математической модели, описывающей некоторый периодический процесс, то нам надо строить цепные дроби с максимально возможным числом звеньев, что требует специфика  $r/\varphi$ -алгоритма.

В табл. 4.75 приведены результаты решения СЛАУ (4.7.1) методом цепных дробей, то есть через построение по “итерационным” рядам соответствующей цепной дроби. Решалась СЛАУ размерности  $512 \times 512$ . Число звеньев конечной цепной дроби – 1024. Разрядность данных – 2000 бит.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,1 & 1 & 1,2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,2 & 1 & 1,3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,3 & 1 & 1,4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.7.1)$$

Таблица 4.75

Определение комплексных  $x_i$  системы (4.7.1)

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Погрешность
1	-1.22567	0.624675	-0.671884	-0.0140843+i (-0.0726873)
2	2.02334	0.635597	0.720971	-0.0617431+i (-0.000195702)
4	-1.49904	0.249404	-1.09526	0.356375+i (-0.699886)
8	0.437028	0.293387	0.0337476	-0.0369369+i 0.0404686
16	1.0675	0.381781	2.55254	0.345391+i (-0.123494)
32	-0.985285	0.0682409	-1.3315	-0.0166895+i (-0.0454532)
64	0.69188	0.00184795	0.00306796	-0.0116174+i (-0.004522)
128	-0.50265	0.000426528	0.141126	-0.00316675+i (-0.000701541)
256	0.380104	4.46883e-005	-0.076699	2.9238e-005+i 2.51468e-005
512	-0.279361	2.78798e-005	0.690291	-1.06895e-005+i 2.99284e-005

Опишем алгоритм определения комплексных значений неизвестных СЛАУ методом “уточнения”. Итак, метод цепных дробей позволяет представить каждую компоненту  $x$ : СЛАУ размерности  $n \times n$  конечной цепной дробью, имеющей  $2n$  звеньев. Используя  $r/\varphi$ -алгоритм, можем по подходящим цепным дробям, представляющим неизвестные  $x_i$  исходной СЛАУ, определить значения этих неизвестных, которые, в случае осцилляции подходящих дробей, имеют комплексные величины. По  $r/\varphi$ -алгоритму

комплексную величину по вещественным подходящим можно установить приближённо. Пусть “методом цепных дробей” найдено некоторое значение  $x_1$ . Полагая, что точное значение  $x_1$  лежит в некоторой окрестности  $x_1$ , поместим  $x_1$  в центр квадратной области со стороной  $\Delta_1$ . Каждую область квадратной плоскости разделим на  $k$  частей, в результате чего получим сетку с  $k^2$  узлами.

Находим решение исходной СЛАУ, перебирая все комплексные значения  $x_1$ , которые имеются в узлах сетки. Перебор вершин идёт в некотором порядке, начиная с верхнего левого узла 1 к нижнему правому узлу  $N$ , номер которого будет  $k^2$ .

Для каждого комплексного значения  $x_1$ , если СЛАУ имеет трёхдиагональную матрицу или матрицу Хоссенберга, методом деления, решая уравнение с одним неизвестным, устанавливаем “точно” последовательность комплексных неизвестных СЛАУ, после чего по последней строке устанавливаем невязку. Некоторое значение  $x_1$  из массива в  $k^2$  комплексных точек даёт минимальную невязку по последней строке СЛАУ. Если эта невязка, то есть погрешность в решении системы, удовлетворяет выбранной точности, то решение СЛАУ заканчивается. Если точность решений ниже установленной, то точка  $x_1^{(1)}$ , в которой был достигнут минимум погрешности, если она находится внутри исходного квадрата, а не на границе, вновь ограничивается квадратной областью, но уже меньших размеров, и эта область накрывается уже более плотной сеткой, т.е. сеткой с меньшим шагом. Процесс решения повторяется до достижения удовлетворительной невязки. Если точка  $x_1^{(1)}$  попала на границу исходного квадрата, то точка  $x_1^{(1)}$  ограничивается квадратом со стороной  $\Delta_1$  (Рис. 4.34).

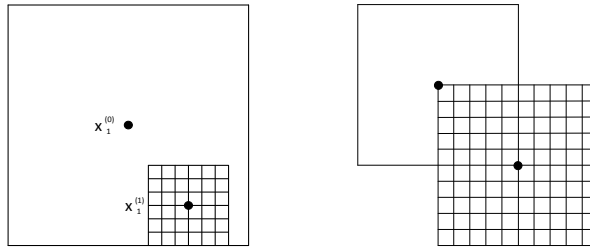


Рис. 4.34. Процесс поиска оптимального значения  $x_1$ .

**Пример 1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} + 0,001 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{2}{3} + 0,001 & 1 & \frac{2}{3} + 0,002 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{3} + 0,002 & 1 & \frac{2}{3} + 0,003 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} + 0,003 & 1 & \frac{2}{3} + 0,004 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} + 0,004 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.7.2)$$

Рассмотрим пример решения “комплексной” СЛАУ с уточнением координаты  $x_1$ . В табл. 4.76 приведены результаты решения СЛАУ методом цепных дробей. Размер СЛАУ 512x512. Число подходящих дробей — 1024. Разрядность данных — 2000 бит.

Таблица 4.76

**Определение комплексных  $x_i$  системы (4.7.2)**

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_i$	Погрешность
1	0.969225	0.820541	-0.187146	0.05686720+i 0762078
2	0.0460937	0.234879	0.509282	0.0433664+i (-0.153209)
3	0.458804	0.382055	0.582913	0.00749288+i (-0.250617)
4	0.762132	0.802852	-0.0674952	0.0427637+i (-0.167117)
5	-0.103446	0.147323	2.19052	0.0234905+i (-0.295375)

Окончание табл. 4.76

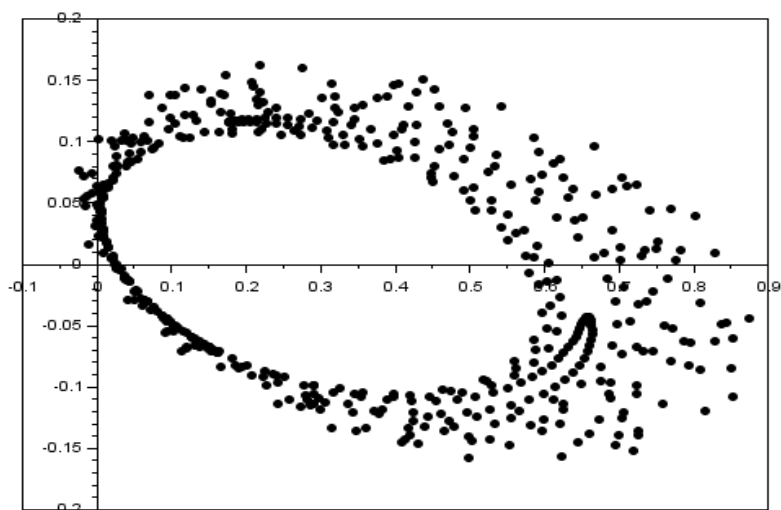
...	...	...	...	...
123	0.39034	0.451696	-0.0368155	0.0153333+i 0.0434166
124	0.0295984	0.081272	-0.125786	0.117158+i 0.0534575
125	0.837474	0.56507	-0.0674952	0.120456+i 0.0843448
126	0.175735	0.321959	-0.15033	0.0275529+i 0.0860423
127	0.203446	0.262319	-0.0368155	0.0251767+i 0.0591771
...	...	...	...	...
508	0.434967	0.530431	0.190214	0.00334808+i 0.0464097
509	0.531469	0.499176	-0.460194	-0.0221429+i 0.0377317
510	-0.0360733	0.0644526	2.08008	-0.0108962+i 0.340502
511	0.349498	0.453951	-0.257709	-0.0028925+i (-0.184435)
512	0.588408	0.54755	0.371223	-0.0272014+i (-0.0623751)

Таблица 4.77

Определение комплексных  $x_i$  системы (4.7.2)

Номер $x_i$	Значения $x_i$	Модуль $r_i$	Аргумент $\varphi_n$	Погрешность
1	0.969225	0.969225	-1.55586e-011	0+i 0
2	0.0460937	0.0460937	4.89996e-010	0+i 0
3	0.458804	0.458804	-4.08019e-011	0+i 0
4	0.762132	0.762132	7.08843e-012	0+i (-4.86119e-019)
5	-0.103446	0.103446	3.14159	0+i (-7.24829e-019)
...	...	...	...	...
123	0.39034	0.39034	3.90734e-011	0+i 0
124	0.0295984	0.0295984	-1.31043e-011	0+i 0
125	0.837474	0.837474	-1.7603e-011	0+i 0
126	0.175735	0.175735	1.08168e-010	0+i 0
127	0.203446	0.203446	-4.55036e-011	0+i 8.07794e-028
...	...	...	...	...
508	0.434967	0.434967	-3.26655e-011	0+i (-5.18226e-018)
509	0.531469	0.531469	4.95517e-012	1.11022e-016+i 5.06013e-019
510	-0.0360733	0.0360733	3.14159	0+i 4.30405e-019
511	0.349498	0.349498	-3.66024e-011	-2.22045e-016+i 5.06443e-019
512	0.588408	0.588408	-1.84161e-012	-1.36535e-012+i 1.61489e-011

На рис. 4.34 и 4.35 показаны расположения в комплексной плоскости решений системы (4.7.2) исходных решений и после поиска оптимального значения  $x_i$  в области  $0,1 \times 0,1$ .

Рис. 4.34. Расположение  $x_i$  системы (4.7.2)

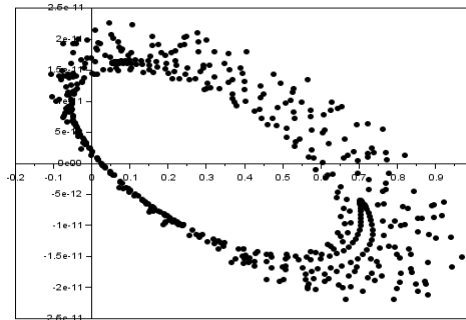


Рис. 4.35. Расположение  $x_i$  системы (4.7.2) после уточнений.

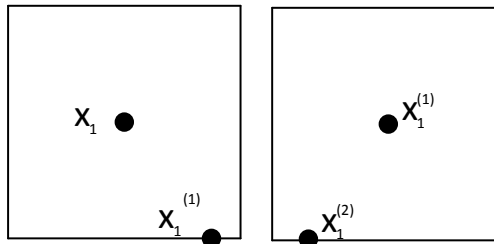


Рис. 4.36. Последовательные уточнения координаты  $x_1$ .

На практике возникает ситуация, когда перебор окрестности  $x_1$  приводит к точке  $x_1^{(1)}$ , с минимумом невязки по последней строке, которая расположена на границе квадрата (рис. 4.36). Устанавливаем область вокруг точки  $x_1^{(1)}$  (рис. 4.36). Поиск минимума невязки в узлах сетки наложенной на область вокруг первого минимума невязки, имевшего место, т.е. вокруг точки  $x_1^{(1)}$  приводит к точке  $x_1^{(2)}$ , в которой располагается следующий минимум невязки. Может возникнуть ситуация, когда перебор, т.е. поиск минимума по последней строке приведёт к точке  $x_1^{(n)}$ , расположенной “почти” на действительной оси (рис. 4.37).

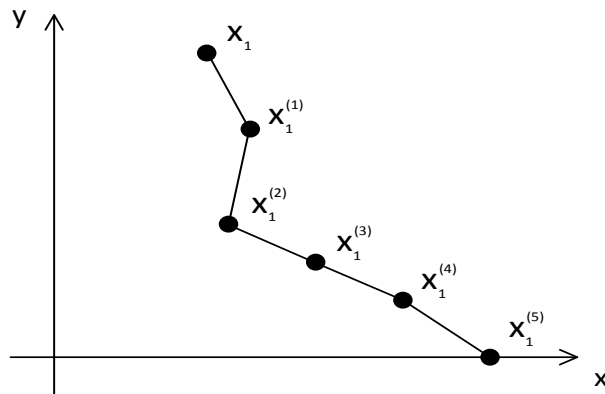


Рис. 4.37. Траектория поиска оптимальной координаты  $x_1$ .





## ГЛАВА 5

### РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

#### 5.1. Метод цепных дробей

Трехдиагональные матрицы являются интересным математическим объектом. В книге “Трехдиагональные матрицы” [18] отмечается: “Будучи простой по своей структуре, трехдиагональная матрица привлекает внимание широкого круга специалистов по вычислительной математике. Именно для трехдиагональных матриц получены самые глубокие результаты линейной алгебры. Именно для них классические численные методы обретают наиболее изящную и законченную форму. Трехдиагональные матрицы служат тем оселком, на котором выверяются новые гипотезы или алгоритмы. Но главное, при всей своей простоте они имеют приложения в самых разных областях. Эти матрицы играют большую роль в такой области, как разностные методы решения задач математической физики. Что же касается собственно линейной алгебры, то здесь один из эффективных подходов к решению проблемы собственных значений для матриц общего вида основан на предварительном преобразовании их к трехдиагональному виду”.

Основываясь на методах теории цепных дробей, построим алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, который эквивалентен классическому алгоритму, известному как “прогонка”. Для нас важно то обстоятельство, что в построении алгоритма решения  $x_i$  записываются непрерывными дробями.

Представим решение трехдиагональной системы алгебраических уравнений

$$AX = B, \quad (5.1.1)$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix},$$
$$X = [x_1, x_1, \dots, x_n]^T, \quad B = [b_1, b_1, \dots, b_n]^T,$$

в виде цепных дробей, частными числителями и знаменателями которых были бы некоторые выражения из элементов исходной матрицы  $A$ .

Запишем решение системы (5.1.1) по формуле Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}.$$

Неизвестные величины  $x_i$  представляются отношением определителей. Например:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{vmatrix}}. \quad (5.1.2)$$

Приведем структуру определителей (5.1.2) к виду, соответствующему цепной дроби, то есть к виду, когда в числителе находится трехдиагональный определитель  $n$ -го порядка, а в знаменателе – определитель  $(n - 1)$ -го порядка. Поэтому отношение определителей (5.1.2) представим следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ -1 & a_{11} & a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}}. \quad (5.1.3)$$

Определители (5.1.3) эквивалентными преобразованиями можно привести к виду:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ -1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & \gamma_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & \gamma_n \end{vmatrix}}, \quad (5.1.4)$$

где

$$\gamma_n = a_{nn} - \frac{a_{n-1,n}a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-2,n-1}a_{n-1,n-2}}{a_{n-2,n-2}} - \dots - \frac{a_{34}a_{43}}{a_{33}} - \frac{a_{23}a_{32}}{a_{22}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}, \quad (5.1.5)$$

Формулы для  $\gamma_T$  и  $\beta_n$  можно записать в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_{11}, & \beta_1 &= b_1, \\ \gamma_n &= a_{nn} - \frac{a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n}}{\gamma_{n-1}}, & \beta_n &= b_n - \beta_{n-1} \frac{a_{n,n-1}}{\gamma_{n-1}}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Кроме того, имеет место формула:

$$x_i = \frac{\beta_i - a_{i,i+1}x_{i+1}}{\gamma_i}. \quad (5.1.7)$$

Формулы (5.1.6) и (5.1.7) совпадают с формулами прямого и обратного хода прогонки. Для решения системы (5.1.1), содержащей  $n$  уравнений, необходимо выполнить  $9n$  операций:  $3n$  операций умножения,  $3n$  операций деления,  $3n$  операций вычитания. Решение системы (5.1.1) представим в виде обыкновенной цепной дроби, то есть отношением трехдиагональных определителей. Для этого отношение определителей (5.1.4) запишется следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \gamma_1 & -\frac{\gamma_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & \gamma_2 - \frac{a_{12} \cdot \beta_2}{\beta_1} & -\frac{\gamma_2 \cdot \beta_3}{\beta_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \gamma_3 - \frac{a_{23} \cdot \beta_3}{\beta_2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} - \frac{a_{n-2,n-1} \cdot \beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} & \frac{\gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} & \gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & -\frac{a_1 \cdot \beta_2}{\beta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & \gamma_2 - \frac{a_{12} \cdot \beta_2}{\beta_1} & -\frac{\gamma_{21} \cdot \beta_3}{\beta_2} & \dots & 0 & 0 \\ & a_{23} & \gamma_3 - \frac{a_{23} \cdot \beta_3}{\beta_2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} - \frac{a_{n-2,n-1} \cdot \beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} & \frac{\gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} & \gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}} \end{vmatrix}}. \quad (5.1.8)$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\frac{a_{12}\gamma_1\beta_2}{\beta_1}}{\gamma_2 - \frac{a_{12}\beta_2}{\beta_1}} + \frac{\frac{a_{23}\gamma_2\beta_3}{\beta_2}}{\gamma_3 - \frac{a_{23}\beta_3}{\beta_2}} + \dots + \frac{\frac{a_{n-2,n-1}\gamma_{n-2}\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}}{\gamma_{n-1} - \frac{a_{n-2,n-1}\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}} + \frac{\frac{a_{n-1,n}\gamma_{n-1}\beta_n}{\beta_{n-1}}}{\gamma_n - \frac{a_{n-1,n}\beta_n}{\beta_{n-1}}},$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{\frac{a_{23}\gamma_2\beta_3}{\beta_2}}{\gamma_3 - \frac{a_{23}\beta_3}{\beta_2}} + \frac{\frac{a_{34}\gamma_3\beta_4}{\beta_3}}{\gamma_4 - \frac{a_{34}\beta_4}{\beta_3}} + \dots + \frac{\frac{a_{n-2,n-1}\gamma_{n-2}\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}}{\gamma_{n-1} - \frac{a_{n-2,n-1}\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}} + \frac{\frac{a_{n-1,n}\gamma_{n-1}\beta_n}{\beta_{n-1}}}{\gamma_n - \frac{a_{n-1,n}\beta_n}{\beta_{n-1}}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{n-1} &= \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} + \frac{\frac{a_{n-1,n}\gamma_{n-1}\beta_n}{b_{n-1}}}{\gamma_n - \frac{a_{n-1,n}\beta_n}{\beta_{n-1}}}, \\
 x_n &= \frac{\beta_n}{\gamma_n},
 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

где коэффициенты  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  определяются по формулам (5.1.7). Все коэффициенты  $\gamma_n$  и  $\beta_n$  вычисляются за  $b(n-1)$  арифметических операций.

То есть, решение системы алгебраических уравнений (5.1.1) может быть представлено конечными цепными дробями:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\beta_1}{\gamma_1 + t_2 + \dots + t_n}, \\
 x_2 &= \frac{\beta_2}{\gamma_2 + t_3 + \dots + t_n}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{n-1} &= \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1} + t_n}, \\
 x_n &= \frac{\beta_n}{\gamma_n},
 \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= a_{11}, \quad \gamma_n = a_{nn} - \frac{a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n}}{\gamma_{n-1}}, \\
 \beta_1 &= b_1, \quad \beta_n = b_n - \beta_{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\gamma_{n-1}}, \\
 s_n &= \frac{a_{n-1,n} \cdot \gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}, \quad n \geq 2 \\
 t_n &= \gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}, \quad n \geq 2.
 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Неизвестные  $x_i$  ( $i = n-1, n-2, \dots, 1$ ) можно находить по рекуррентным формулам:

$$x_i = \frac{\beta_i}{\gamma_i + x_i^*} \quad i = (\overline{1, n}), \quad x_n^* = 0. \tag{5.1.12}$$

$$x_i^* = \frac{\frac{a_{i,i+1} \cdot \gamma_i \cdot \beta_{i+1}}{\beta_i}}{\gamma_{i+1} - \frac{a_{i,i+1} \cdot \beta_{i+1}}{\beta_i}} + \frac{\frac{a_{i+1,i+2} \cdot \gamma_{i+1} \cdot \beta_{i+2}}{\beta_{i+1}}}{\gamma_{i+2} - \frac{a_{i+1,i+2} \cdot \beta_{i+2}}{\beta_{i+1}}} + \dots + \frac{\frac{a_{n-2,n-1} \cdot \gamma_{n-2} \cdot \beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}}{\gamma_{n-1} - \frac{a_{n-2,n-1} \cdot \beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}} + \frac{\frac{a_{n-1,n} \cdot \gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}}{\gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}}, \tag{5.1.13}$$

Так как решение системы (5.1.1) представлено в виде цепных дробей, то распараллеливание алгоритма сводится к построению параллельного метода вычисления значений обыкновенных цепных дробей. Различные параллельные алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений (5.1.1) приведены в [68].

## 5.2. Об одном подходе к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Известно, что при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений встречаются принципиальные трудности. В [10] отмечается: «Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что, казалось бы, разумная разностная схема имеет решение, не сходящееся при измельчении сетки к истинному решению дифференциального уравнения».

Разработанный способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей [65], так называемый  $r/\varphi$ -алгоритм, помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Поясним примером. Как известно, удобный метод решения разностной краевой задачи, представляющий один из вариантов исключения неизвестных и носящий название «прогонки», фактически эквивалентен записи решения обыкновенной цепной дробью, что было показано в первом параграфе этой главы. Следовательно, для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений решения могут представляться как сходящимися цепными дробями, так и расходящимися.

Можно, пожалуй, высказать предположение: скольнибудь общих подходов к созданию теории решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений не было найдено именно потому, что до последнего времени расходящиеся непрерывные дроби в каком-либо позитивном смысле не рассматривались вовсе, то есть расходящиеся непрерывные дроби не изучались. И это в отличие от расходящихся рядов, имеющих чрезвычайно развитую теорию и давние традиции их исследований.

Довольно часто возникает следующая ситуация: решения  $x_i$  системы существуют, но при измельчении шага сетки значения решений  $x_i$  системы изменяются, причем скачкообразно, то есть с ростом размерности СЛАУ не могут быть найдены пределы, к которым бы значения  $x_i$  стремились. В этом случае говорят, что система является «расходящейся» и решения не могут быть записаны. Возникает вопрос: что это означает для рассматриваемой СЛАУ? Ответ состоит в следующем: если решаемая система «расходится», то возможно существование комплексных решений данной СЛАУ, которые в силу особенностей традиционных методов решения СЛАУ не могут быть установлены.

Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX=B, \quad (5.2.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], \quad B = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T.$$

где  $A$  – матрица коэффициентов,  $X$  – вектор искомых решений,  $B$  – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, «расходится» данная система или нет, решаем одним из классических методов подсистемы смежных порядков и строим последовательности, состоящие из их решений  $\{\bar{x}_i\}$ , то есть последовательности вида

$$\begin{aligned} & \{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)}\}, \\ & \{\bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)}\}, \\ & \{\bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Если эти последовательности стремятся к некоторым пределам с ростом размерности  $m$  системы, то последовательность корней  $\{\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \bar{x}_3^{(m)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\}$ ,  $m \rightarrow \infty$ , будет являться искомым решением рассматриваемой БСЛАУ. В случае, если пределы последовательностей (5.2.2) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше  $r/\varphi$ -алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении расходящихся СЛАУ  $m \gg n$ , что обусловлено особенностями  $r/\varphi$ -алгоритма, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных «отсчетов». Этот алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае «по Гауссу» вещественные решения расширяющейся системы (5.2.1) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

Отметим, что термин «расширяющиеся СЛАУ» встречается в литературе. С термином «расширяющиеся СЛАУ» связаны выражения: «измельчение шагов сетки», «неограниченно сгущение сетки», «бесконечное дробление сетки» и другие подобные словосочетания.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль  $r_i$  комплексного корня  $x_i$  находится по формуле

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.3)$$

где  $\bar{x}_i^{(m)}$  – значение вещественной неизвестной  $\bar{x}_i$ , полученное «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ размерности  $m$ .

Модуль аргумента  $\varphi_i$  комплексного корня  $x_i$  БСЛАУ определяется следующим образом:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (5.2.4)$$

где  $k_i^{(m)}$  – количество отрицательных значений  $\bar{x}_i$ , полученных «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ из общего количества  $m$  значений  $\bar{x}_i$ , найденных из «расширяющейся» системы.

Таким образом, коэффициенты  $r_i$  и  $|\varphi_i|$  комплексных решений  $x_i$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= |\bar{x}_1^{(1)}| & |\varphi_1^{(1)}| &= \pi k_1^{(1)}, \\ r_1^{(2)} &= \sqrt{|\bar{x}_1^{(1)} \bar{x}_1^{(2)}|}, & |\varphi_1^{(2)}| &= \pi k_1^{(2)} / 2, \\ r_1^{(3)} &= \sqrt[3]{|\bar{x}_1^{(1)} \bar{x}_1^{(2)} \bar{x}_1^{(3)}|}, & |\varphi_1^{(3)}| &= \pi k_1^{(3)} / 3, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_2^{(1)} &= \left| \bar{x}_2^{(2)} \right|, & \left| \varphi_2^{(1)} \right| &= \pi k_2^{(1)}, \\
 r_2^{(2)} &= \sqrt{\left| \bar{x}_2^{(2)} \bar{x}_2^{(3)} \right|}, & \left| \varphi_2^{(2)} \right| &= \pi k_2^{(2)} / 2, \\
 r_2^{(3)} &= \sqrt[3]{\left| \bar{x}_2^{(2)} \bar{x}_2^{(3)} \bar{x}_2^{(4)} \right|}, & \left| \varphi_2^{(3)} \right| &= \pi k_2^{(3)} / 3, \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим решение при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма бесконечной системы:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 \dots
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 \dots
 \end{pmatrix}. \quad (5.2.5)$$

В табл. 5.1 – 5.3 приведены результаты решения системы (5.2.5) с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (5.2.3) и (5.2.4). В первой колонке таблиц указана размерность решаемых систем. Во второй колонке помещены значения неизвестных  $\bar{x}_i$  ( $i=1, 1024, 2048$ ), полученные по методу прогонки. Как видно из таблиц, значения  $\bar{x}_i$ , полученные «по прогонке» для расходящихся систем, не стремятся к каким-либо пределам. В то же время в колонках 3 и 4 табл. 5.1 – 5.3 с ростом размерности системы (5.2.5) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма устанавливаются значения, соответственно, модулей и аргументов комплексных решений  $x_i$  системы (5.2.5).

Как отмечалось выше, для достижения необходимой точности при определении модуля и аргумента комплексного числа, необходимо брать значительное число подходящих расходящихся цепных дробей. Классические алгоритмы, – обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) и прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм), оказываются неэффективными при вычислении значений длинных серий подходящих дробей. BR-алгоритм требует недопустимо больших затрат машинного времени, так как каждую подходящую дробь приходится вычислять заново, а FR-алгоритм приводит к переполнению разрядной сетки компьютера или появлению «машинного нуля». В первой главе были рассмотрены алгоритмы, эффективные при вычислении значений длинных последовательностей подходящих цепных дробей.

Таблица 5.1

**Определение  $x_1$  системы (5.2.5) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма**

Размерность системы, $m$	Значение $\bar{x}_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(m)}$
1	1.000000000000E+00	---	---
2	2.500000000000E-01	5.000000000000E-01	0.000000000000E+00
3	1.176470588235E-01	3.086789594993E-01	0.000000000000E+00
4	-2.000000000000E-01	2.769413275131E-01	7.853981633974E-01
7	5.511811023622E-02	2.22264956834E-01	4.487989505128E-01
8	-4.250000000000E+0	3.213623350779E-01	7.853981633974E-01
15	-4.316594612571E-01	2.586318164389E-01	8.377580409573E-01
16	3.566826367091E-01	2.638802890571E-01	7.853981633974E-01
31	2.368807660622E-01	2.338062307929E-01	7.093918895203E-01
...	...	...	...

Окончание табл. 5.1

512	2,021042090470E-01	2,190659250807E-01	7,056311624274E-01
1023	-1,468533026117E-02	2,191323997622E-01	7,063209289596E-01
1024	8,316406972992E-01	2,194179980411E-01	7,056311624274E-01
2047	7,182382967496E-01	2,184842239440E-01	7,029064168755E-01
2048	2,349945882313E-01	2,184919957063E-01	7,025632008516E-01
4095	8,970276633117E-02	2,184996917478E-01	7,027347669568E-01
4096	-5,225224025607E-01	2,185462070065E-01	7,033301912456E-01

Таблица 5.2

**Определение  $x_{1024}$  системы (5.2.5) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма**

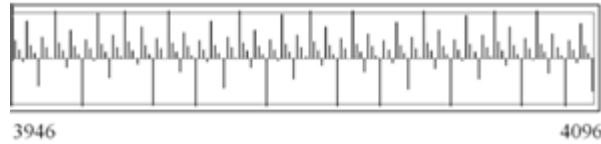
Размерность системы, $m$	Значение $\bar{x}_{1024}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{1024}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{1024}^{(m)}$
1024	8,316406972992E-01	---	---
2047	7,202060392628E-01	2,256697856946E-01	6,626797003666E-01
2048	2,453475076446E-01	2,256881929093E-01	6,620331835858E-01
4095	1,025767690142E-01	2,257655616882E-01	6,616570465080E-01
4096	-4,990251548082E-01	2,258238406288E-01	6,624640545155E-01

Таблица 5.3

**Определение  $x_{2048}$  системы (5.2.5) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма**

Размерность системы, $m$	Значение $\bar{x}_{2048}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{2048}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{2048}^{(m)}$
2048	2,349945882313E-01	---	---
4095	3,056479485523E-01	2,768277496489E-01	-2,454369260617E-01
4096	6,033643987254E-01	2,769330325520E-01	-2,453171423008E-01

На рис. 5.1 показаны вещественные значения  $\bar{x}_1^{(m)}$ , полученные методом прогонки из решения «расширяющейся» системы (5.2.5). Как видно из графика, значения  $\bar{x}_1^{(m)}$  с расширением системы (5.2.5) не стремятся к каким-либо пределам, а осциллируют. Для  $\bar{x}_1^{(m)}$  приведены значения последних 150 «подходящих», полученных из расширяющихся СЛАУ.

Рис. 5.1. Значения  $\bar{x}_1^{(m)}$  расширяющейся системы (5.2.5).

На рис. 5.2 показаны значения модуля  $r_1^{(m)}$  комплексной неизвестной  $x_1$ , полученные при решении «расширяющейся» системы (5.2.5) с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма. Алгоритм позволяет устанавливать комплексное число, являющееся значением расходящейся цепной дроби, по вещественным подходящим дробям. Для определения модуля комплексного числа используется формула (5.2.3).

Рис. 5.2. Значения модуля  $r_1^{(m)}$  комплексного  $x_1^{(m)}$  системы (5.2.5).

По «отсчетам», приведенным во вторых колонках табл. 5.1 – 5.3, можно, помимо модулей, найти аргументы  $\varphi_i$  комплексных  $x_i$  расширяющейся системы (5.2.5). Для этого надо использовать формулу (5.2.4). Формула (5.2.4) определяет модуль аргумента комплексного  $x_i$ , но не знак аргумента. Знак аргумента определяется из динамики распределения на «периоде» отсчетов  $\bar{x}_1^{(m)}$  полученных по прогонке. Алгоритм определения знака угла  $\varphi$  был рассмотрен в гл. 2. График значений аргумента  $\varphi_1$  комплексного  $x_1$  БСЛАУ (5.2.5) приведен на рис. 5.3.





Рис. 5.3. Значения аргумента  $\varphi_1^{(n)}$  комплексного  $x_1$  системы (5.2.5).

Запишем значения неизвестных  $x_i$  ( $i=1,2,\dots, 2048$ ) системы (5.2.5), которые получены при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,218546e^{i0,703330}, & x_{64} &= 0,228523e^{-i0,644988}, \\ x_2 &= 0,282089e^{-i0,65710}, & x_{128} &= 0,275002e^{i0,279410}, \\ x_4 &= 0,094043e^{i1,238062}, & x_{256} &= 0,51392e^{-i1,010936}, \\ x_8 &= 0,177653e^{i0,902756}, & x_{512} &= 0,256909e^{-i0,453931}, \\ x_{16} &= 0,278352e^{i0,232482}, & x_{1024} &= 0,2258232e^{i0,662464}, \\ x_{32} &= 0,127645e^{-i1,106706}, & x_{2048} &= 0,276933e^{-i0,245317}. \end{aligned}$$

На рис. 5.4 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных  $x_i$  ( $i=1,2,\dots, 2048$ ) бесконечной системы (5.2.5).

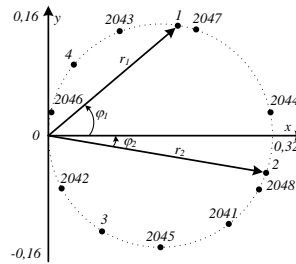


Рис. 5.4. Расположение  $x_i$  БСЛАУ (5.2.5) на комплексной плоскости.

Для  $x_1$  и  $x_2$  на рис. 5.4 показаны модули и аргументы комплексных неизвестных. Все значения неизвестных  $x_i$  ( $i=1,2,\dots, 2048$ ) системы (5.2.5) расположены на окружности, что имеет место для неизвестных  $x_i$  системы с трехдиагональной матрицей, содержащих одинаковые элементы по диагоналям и с постоянной правой частью. Если смотреть на процесс размещения  $x_i$  из центра этой окружности, то можно заметить, что неизвестные  $x_i$  укладываются на окружности, двигаясь по часовой стрелке с постоянным «шагом», несколько превышающим угол  $\pi/2$ .

В табл. 5.4 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (5.2.5), полученного при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. В первой колонке табл. 5.4 указаны номера строк системы (5.2.5), по которым проводилась проверка. Во второй колонке приведены значения проверяемых строк системы (5.2.5) после подстановки найденных комплексных  $x_i$  из решаемой системы (5.2.5) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (5.2.5), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (5.2.5) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.4

Результаты проверки решения системы (5.2.5)

Номер строки, $l$	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1,001299469052E+00 + i1,762678328659E-03	1	1,299469051622E-03 + i1,762678328659E-03
2	1,001615385287E+00 + i1,823158910945E-03	1	1,615385286690E-03 + i1,823158910945E-03
4	1,001420584071E+00 + i1,786263723479E-03	1	1,420584071188E-03 + i1,786263723479E-03
8	1,000966887833E+00 + i1,224856975491E-03	1	9,668878325528E-04 + i1,224856975491E-03
16	1,001094874798E+00 + i1,078635879098E-03	1	1,094874797582E-03 + i1,078635879098E-03

Окончание табл. 5.4

32	1,001217090677E+00 + i1,378751449401E-03	1	1,217090677040E-03 + i1,378751449401E-03
64	1,000939873348E+00 + i9,321736272402E-04	1	9,398733476283E-04 + i9,321736272402E-04
128	1,001321599553E+00 + i3,972567037168E-04	1	1,321599553336E-03 + i3,972567037168E-04
256	1,000792866804E+00 + i1,707477617846E-03	1	7,928668038036E-04 + i1,707477617846E-03
512	1,001030405321E+00 + i1,250966938645E-03	1	1,030405321258E-03 + i1,250966938645E-03
1024	1,000587637913E+00 + i2,199988158475E-03	1	5,876379127570E-04 + i2,199988158475E-03
2048	1,000849453587E+00 + i4,776958470371E-03	1	8,494535870614E-04 + i4,776958470371E-03

Из табл. 5.4 можно заключить, что погрешности, допущенные при решении системы (5.2.5) с использованием  $r/\varphi$  – алгоритма, весьма невелики ( $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$ ).

Рассмотрим бесконечную систему с периодическими решениями.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

Можно обратить внимание, что диагональные элементы коррелирующей цепной дроби равны  $2\cos(\pi/4)$ , то есть аргумент  $\varphi$  в цепной дроби Никипорца равен  $\pi/4$ :

$$e^{i\pi/4} = 2\cos(\pi/4) - \frac{1}{2\cos(\pi/4)} - \dots - \frac{1}{2\cos(\pi/4)}. \quad (5.2.7)$$

Цепная дробь (5.2.7) – это так называемая ультрапериодическая цепная дробь, значения подходящих дробей которой периодически повторяются. Всё бесконечное число неизвестных  $x_m$  системы (5.2.6) имеет всего восемь различных значений:

$$x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2, x_3 = \mu_3, x_4 = \mu_4, x_5 = \mu_5, x_6 = \mu_6, x_7 = \mu_7, x_8 = \mu_8,$$

$$x_9 = \mu_1, x_{10} = \mu_2, x_{11} = \mu_3, x_{12} = \mu_4, x_{13} = \mu_5, x_{14} = \mu_6, x_{15} = \mu_7, x_{16} = \mu_8, \dots$$

На рис. 5.5 показаны периодические решения БСЛАУ (5.2.6).

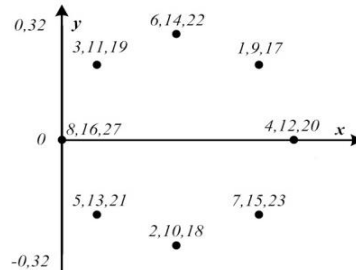


Рис 5.5. Периодические решения  $x_m$  системы (5.2.6).

В табл. 5.5 приведены координаты повторяющихся решений системы (5.2.6).

Таблица 5.5

Значения решений системы (5.2.6)

Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината	Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината
1	5,004507623426E-01	2,072934930623E-01	17	4,988854495747E-01	2,066451192844E-01
2	2,936795223060E-01	-2,933417600438E-01	18	2,927713886138E-01	-2,924333507771E-01
3	8,584683057662E-02	2,075904234946E-01	19	8,557475634773E-02	2,069338306435E-01
4	5,853235887030E-01	0,000000000000E+00	20	5,837234066470E-01	0,000000000000E+00
5	8,581759884916E-02	-2,069572717352E-01	21	8,558747637480E-02	-2,064014305697E-01
6	2,926406495846E-01	2,927530346079E-01	22	2,918342731793E-01	2,919467886589E-01
7	4,997115561655E-01	-2,068748897515E-01	23	4,983489847105E-01	-2,063103604465E-01

Окончание табл. 5.5

8	2,266080741264E-09	-5,898921163212E-06	24	6,806276868718E-09	-1,764835060981E-05
9	4,996017649621E-01	2,069418268328E-01	25	4,982300985196E-01	2,063736639893E-01
10	2,931865204047E-01	-2,928486654918E-01	26	2,923920325582E-01	-2,920537696908E-01
11	8,569940539425E-02	2,072345886892E-01	27	8,546057442922E-02	2,066583845904E-01
12	5,844878309598E-01	0,000000000000E+00	28	5,830054707995E-01	0,000000000000E+00
13	8,569730966872E-02	-2,066667437691E-01	29	8,548445596424E-02	-2,061525465810E-01

Рассмотрим решение бесконечной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 41 & 1 & 41,01 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 41,01 & 1 & 41,02 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 41,02 & 1 & 41,03 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 41,03 & 1 & 41,04 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41,04 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 41 \\ 41 \\ 41 \\ 41 \\ 41 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Ранее рассматривались системы, где по диагоналям матриц располагались элементы, имеющие одинаковые значения. Матрица расходящейся бесконечной системы (5.2.8) имеет иную структуру: значения элементов поддиагонали и наддиагонали возрастают. Все решения системы (5.2.8) укладываются не на окружности, а на сжимающейся во внутрь спирали (рис. 5.6).

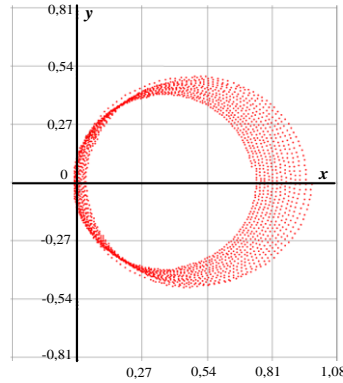


Рис. 5.6. Размещение значений  $x_m$  БСЛАУ (5.2.8) на комплексной плоскости.

В табл. 5.6 приведены значения решений  $x_m$  системы (5.2.8), полученные с использованием  $r/\varphi$  – алгоритма.

Таблица 5.6

**Определения решений системы (5.2.8) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма**

Номер $x_m$	Модуль комплексного числа, $r_m$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_m$
1	7,036936754629E-01	7,829627046113E-01
2	9,879084779324E-01	-1,225515867912E-02
4	2,419607853077E-02	1,558784008882E+00
8	4,831584312299E-02	1,534527004099E+00
16	9,626930798810E-02	1,486050560399E+00
32	1,906387557360E-01	1,389297051480E+00
64	3,702587112970E-01	1,196488216900E+00
128	6,724667528646E-01	8,133850357888E-01
256	9,432356508145E-01	5,714522212004E-02
512	1,814318450197E-01	-1,511735018779E+00
1024	5,483009908881E-01	-9,274879606085E-01
2048	4,811378999411E-01	9,831466625925E-01

В табл. 5.7 даны результаты проверки решений системы (5.2.8) по строкам с номерами  $m = 1, 2, \dots, 2048$ .

Таблица 5.7

**Результаты проверки решения системы (5.2.8)**

Номер строки,	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	4,100000293329E+01 - i3,125664454516E-07	41	2,933289575197E-06 - i3,125664454516E-07
2	4,099999345813E+01 - i4,614962896317E-06	41	-6,541873078539E-06 - i4,614962896317E-06
4	4,100000963965E+01 - i8,121838156398E-06	41	9,639645628244E-06 - i8,121838156398E-06
8	4,099999979865E+01 + i8,332574897994E-06	41	-2,013533719272E-07 + i8,332574897994E-06
16	4,099999079192E+01 + i7,394602494900E-06	41	-9,208082419061E-06 + i7,394602494900E-06
32	4,099998730268E+01 + i3,549516833916E-06	41	-1,269731974171E-05 + i3,549516833916E-06
64	4,100001163173E+01 + i3,292237468088E-06	41	1,163172945207E-05 + i3,292237468088E-06
128	4,09998293668E+01 - i1,002825944692E-07	41	-1,706331903056E-05 - i1,002825944692E-07
256	4,099999473890E+01 + i1,527271221604E-06	41	-5,261097508383E-06 + i1,527271221604E-06
512	4,099999438334E+01 + i7,378172459120E-06	41	-5,616663815204E-06 + i7,378172459120E-06
1024	4,099999705781E+01 - i3,231509443982E-06	41	-2,942191617498E-06 - i3,231509443982E-06
2048	4,09998751709E+01 - i2,684388279901E-06	41	-1,248290596281E-05 - i2,684388279901E-06

**5.3. Решение БСЛАУ класса Ас**

Далее будут рассмотрены решения бесконечных СЛАУ различных классов. Приведём таблицу, по которой определялись классы системы:

$Aa$	$Ba$	$Ca$
$Ab$	$Bb$	$Cb$
$Ac$	$Bc$	$Cc$

Здесь  $A, B, C$  – матрицы коэффициентов системы;  $a, b, c$  – векторы столбцы правой части системы.

В матрицах типа  $A$  диагональные элементы постоянны, в матрицах  $B$  диагональные элементы возрастают, в матрицах  $C$  диагональные элементы уменьшаются. Соответственно, “ $a$ ” означает вектор-столбец с постоянными элементами, “ $b$ ” – вектор столбец с возрастающими элементами, “ $c$ ” – вектор-столбец с уменьшающимися элементами.

В четвёртой главе системы разных классов решались “методом цепных дробей”, при котором определялись вещественные решения СЛАУ. Так как “точные” решения  $x_1$ , определялись конечными цепными дробями, имеющими  $2n$  звеньев, то никакой специфики при решении СЛАУ с матрицами класса  $B$  и  $C$  не было. СЛАУ с симметричными матрицами  $A$ , то есть с матрицами класса  $A$ , решались чрезвычайно эффективно. Решения СЛАУ класса  $Aa$  определялись цепными дробями, имеющими всего три звена, для получения которых использовались, вне зависимости от размерности исходных СЛАУ. СЛАУ классов  $Ab$  и  $Ac$  решались конечными цепными дробями, содержащими всего 5 звеньев, что требовало всего 5 итераций, опять-таки вне зависимости от размерности СЛАУ.

В этой главе будет рассмотрено решение БСЛАУ методом “расширения”, когда надятся комплексные значения  $x_i$  систем, причём размерность систем увеличивается.

При решении таких задач определяющим является тип правой части системы. И это легко объяснимо. Чтобы БСЛАУ имели решения, надо, чтобы значения  $x_i$  вещественные или комплексные, стремились к пределам. Но если коэффициенты правой части неограниченно увеличиваются, пределов  $x_i$  не будет, то есть цепные дроби, представляющие  $x_i$  с растущими коэффициентами правой части, будут расходящимися в том смысле, что модули комплексных чисел, которые определяются из подходящих дробей с использованием г/ф-алгоритма будут неограниченно расти. Другими словами, цепные дроби, которые представляют комплексные корни систем с “нарастающей” правой

частью, будут расходящимися. БСЛАУ, неизвестные которых представляются расходящимися в смысле г/ф-алгоритма, не имеют решений.

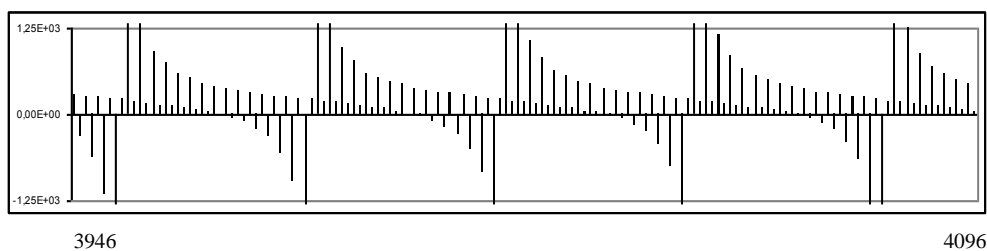
БСЛАУ (5.3.1) относится к  $A_c$ , то есть матрица симметричная, а правая часть – “ниспадающая”.

**Пример 1.**

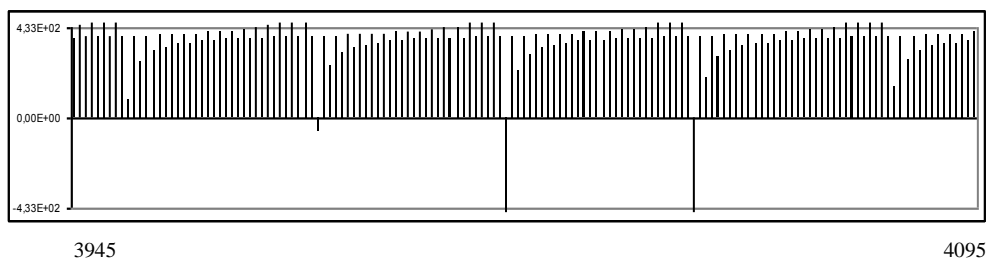
$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410,6 \\ 410,5 \\ 410,4 \\ 410,3 \\ 410,2 \\ 410,1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.3.1)$$

На рис 5.7а, 5.7б, 5.7в показаны значения подходящих дробей для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные при решении СЛАУ увеличивающейся размерности методом “прогонки”. Из рис. 5.7б следует, что аргумент комплексного  $x_2$  весьма мал.

а)  $x_1^{(n)}$ :



б)  $x_2^{(n)}$ :



в)  $x_4^{(n)}$ :

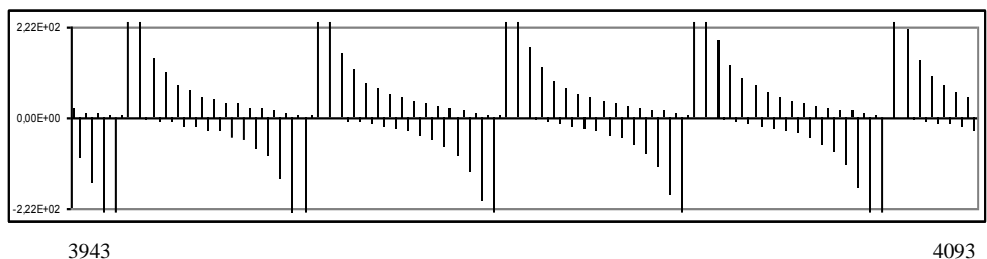


Рис. 5.7. Значения подходящих дробей для  $x_i$  ( $i=1,2,4$ ) системы (5.3.1).

В табл. 5.8 и 5.9 приведены результаты определения комплексных значений  $x_1$  и  $x_2$  системы 5.3.1. В первой колонке указаны размерности “расширяющихся” СЛАУ. Во

второй колонке даны действительные значения  $x_1$  и  $x_2$ , установленные методом прогонки. Как и следовало ожидать, вещественные значения  $x_1$  и  $x_2$  СЛАУ “соседних” размерностей, то есть отличающихся всего на единицу, имеют далёкие друг от друга значения, которые могут быть разных знаков.

Таблица 5.8

**Определение комплексного значения  $x_1$** 

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	4,106000000000E+03	---	---
2	3,731717171717E+02	1,237838063200E+03	0,000000000000E+00
3	1,866532663317E+02	6,588518252454E+02	0,000000000000E+00
4	-4,594825275745E+01	3,385774777908E+02	7,853981633974E-01
7	1,666673616027E+02	3,788082607177E+02	4,487989505128E-01
8	-1,055627502203E+02	3,228909316221E+02	7,853981633974E-01
15	1,237415391456E+02	3,121827118995E+02	6,283185307180E-01
16	-3,120548287858E+02	3,121747176697E+02	7,853981633974E-01
31	5,574615787639E+00	2,707828836597E+02	7,093918895203E-01
32	5,072810198579E+03	2,967500598843E+02	6,872233929728E-01
...	...	...	...
1023	1,637473054616E+02	2,844588349404E+02	7,615982190521E-01
1024	-3,766909164815E+02	2,845368597110E+02	7,639224323670E-01
2047	3,209225246169E+01	2,844838395183E+02	7,612261632538E-01
2048	9,360088816617E+02	2,846493200537E+02	7,608544707913E-01
4095	4,467359329219E+02	2,836788587658E+02	7,595059162525E-01
4096	3,046101814136E+01	2,835243599350E+02	7,593204900034E-01

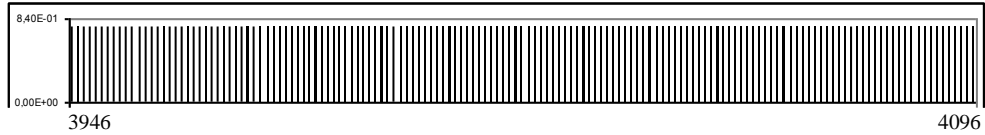
Таблица 5.9

**Определение комплексного значения  $x_2$** 

Размерность системы, n	Значение $x_2^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_2^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_2^{(n)}$
2	3,732828282828E+02	---	---
3	3,919346733668E+02	3,824950762774E+02	0,000000000000E+00
4	4,151948252757E+02	3,930983401643E+02	0,000000000000E+00
7	3,939332638397E+02	3,646470046469E+02	0,000000000000E+00
8	4,211562750220E+02	3,722299476385E+02	0,000000000000E+00
15	3,982258460854E+02	3,734145387366E+02	0,000000000000E+00
16	4,418054828786E+02	3,776248347463E+02	0,000000000000E+00
31	4,100425384212E+02	3,950632210081E+02	0,000000000000E+00
32	-9,668101985794E+01	3,775256176976E+02	-1,013416985029E-01
...	...	...	...
1024	4,482690916482E+02	3,916579656791E+02	-4,299344784971E-02
2047	4,073907747538E+02	3,914822300192E+02	-4,759988869075E-02
2048	3,169991118338E+02	3,914418711514E+02	-4,757663520336E-02
4095	3,659264067078E+02	3,904258606049E+02	-5,064609553906E-02
4096	4,075538981859E+02	3,904299541482E+02	-5,063372775017E-02

В колонках 3 и 4 табл. 5.8. и 5.9 показаны значения модуля и аргумента комплексного  $x_1$  системы (5.3.1), полученные по подходящим дробям при помощи г/φ-алгоритма. Из таблиц видно, что с ростом размерности СЛАУ, значения модуля и аргумента комплексных  $x_1$  и  $x_2$  всё более стабилизируются. Таким образом, можно сделать вывод, что БСЛАУ (5.3.1) имеют решения, причём, эти решения – комплексные.

На рис 5.8. и 5.9 показаны значения модуля и аргумента  $x_1$  БСЛАУ (5.3.1), имеющего комплексное значение, полученное при помощи г/φ-алгоритма из “расширяющей” системы. На рис. 5.8 и рис. 5.9 указаны размерности расширяющихся систем (3946 ÷ 4096), из решения которых устанавливались “значения модуля  $r_1^{(n)}$ ” и аргумента  $\varphi_1^{(n)}$ , комплексного  $x_1$  системы (5.3.1).

г)  $r_1^{(n)}$ :Рис. 5.8. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.3.1).д)  $\varphi_1^{(n)}$ :Рис. 5.9. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.3.1).

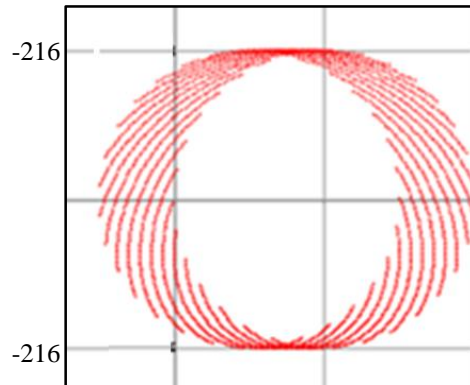
В табл. 5.10 показаны результаты проверки решения системы (5.3.1). В первой колонке указаны номера строк, по которым осуществлялась проверка. Во второй колонке табл. 5.10 даны значения левой части системы (5.3.1) после подстановки комплексных значений  $x_i$ . В третьей колонке приведены значения правой части системы (5.3.1). В четвёртой колонке указаны погрешности в решении системы (5.3.1), то есть разности между вещественными значениями правой части и результатами подстановки в строки системы комплексных  $x_i$ , найденных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.10

Результаты проверки решения системы (5.3.1)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	4,104937083616E+02 - i2,418457603845E-01	4,106000000000E+02	-1,062916383568E-01 - i2,418457603845E-01
2	4,106945575188E+02 - i3,624614670093E-01	4,105000000000E+02	1,945575188091E-01 - i3,624614670093E-01
4	4,111810158737E+02 - i8,263469086784E-01	4,103000000000E+02	8,810158737087E-01 - i8,263469086784E-01
8	4,101516425387E+02 - i7,054354993235E-03	4,099000000000E+02	2,516425387019E-01 - i7,054354993235E-03
16	4,092701581943E+02 + i2,745213675867E-01	4,091000000000E+02	1,701581943076E-01 + i2,745213675867E-01
32	4,072212630181E+02 - i2,773557495817E-02	4,075000000000E+02	-2,787369819356E-01 - i2,773557495817E-02
64	4,046322017791E+02 - i2,769951082735E-01	4,043000000000E+02	3,322017790538E-01 - i2,769951082735E-01
128	3,981562037515E+02 + i6,337092302056E-01	3,979000000000E+02	2,562037515280E-01 + i6,337092302056E-01
256	3,844085555561E+02 - i1,201759803497E+00	3,851000000000E+02	-6,914444439456E-01 - i1,201759803497E+00
512	3,597410542783E+02 + i1,229139646088E-02	3,595000000000E+02	2,410542782882E-01 + i1,229139646088E-02
1024	3,082630851679E+02 - i7,506815216960E-01	3,083000000000E+02	-3,691483214456E-02 - i7,506815216960E-01
2048	2,057743564643E+02 + i1,096047306952E+00	2,059000000000E+02	-1,256435357148E-01 + i1,096047306952E+00

На рис. 5.10 показано расположение значений  $x_1 \div x_{2048}$  системы (5.3.1) на комплексной плоскости.

Рис. 5.10. Расположение  $x_i$  системы (5.3.1) на комплексной плоскости.

Решим при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма ещё несколько систем класса  $A_c$  с тем, чтобы определить характерные свойства графиков, на которых показано расположение в комплексной плоскости решений  $x_i$  систем класса  $A_c$ .

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4096 \\ 4095 \\ 4094 \\ 4093 \\ 4092 \\ 4091 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.3.2)$$

Определение комплексных решений системы осуществляются в два этапа. На первом этапе решаются, то есть находятся значения неизвестных  $x_1 \div x_{2048}$ , одним из классических методов, например, методом прогонки, расширяющиеся СЛАУ, то есть СЛАУ, размерность, которых увеличивается. Из расширяющихся СЛАУ мы устанавливаем для каждого  $x_i$  последовательность их вещественных значений в зависимости от размерности системы. Эти значения  $x_i$  в зависимости от размерности СЛАУ мы назвали “отсчётами” или “подходящими дробями”. Термин “подходящая дробь” для обозначения значения  $x_i$  СЛАУ конкретной размерности был выбран “по аналогии”. Как известно,  $r/\varphi$ -алгоритм первоначально использовался для определения значений расходящихся цепных дробей, когда модуль  $r$  и  $\varphi_0$  комплексного числа, которое представляла расходящаяся дробь, устанавливались по формулам:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i/Q_i|} = r_0,$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|,$$

где

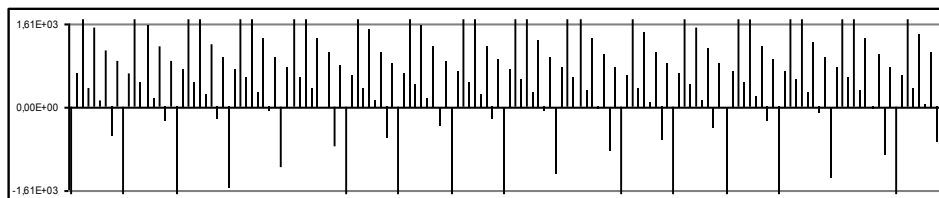
$P_i/Q_i$  – подходящие суммируемой цепной дроби;

$k_n$  – число «подходящих» дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа  $n$  подходящих дробей.

При решении БСЛАУ при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма мы в качестве подходящих дробей используем вещественные значения  $x_i$  расширяющихся систем, причём, эти значения для  $x$  с конкретным индексом  $i$ , получены в результате решения СЛАУ одним из известных прямых или “точных” методов, например, прогонкой. Так как последовательность значений  $x_i$  генерирует ни как какая-то одна цепная дробь, а серия цепных дробей с различным числом звеньев, каждая из которых даёт одну “подходящую дробь”, то есть одно значение  $x_i^{(k)}$ , то такие “подходящие дроби” следует называть иным термином, например, употреблять термин “отсчёт”.

На рис. 5.11 показаны значения “отсчётов”, полученных для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$  из решения “прогонкой” расширяющихся СЛАУ (5.3.2).

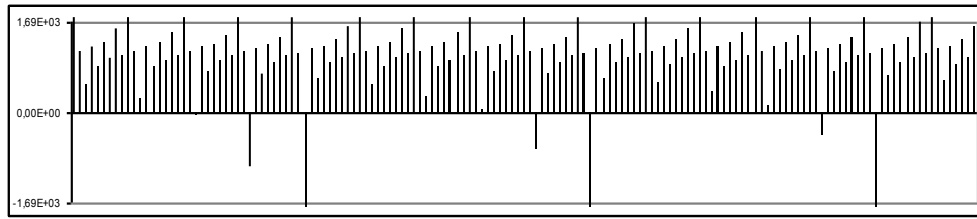
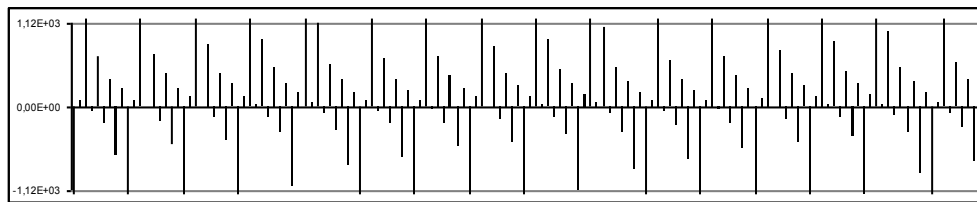
а)  $x_1^{(n)}$ :



3946

4096



б)  $x_2^{(n)}$ :в)  $x_4^{(n)}$ :Рис. 5.11. Значения подходящих дробей для  $x_i$  ( $i=1,2,4$ ) системы (5.3.2).

В табл. 5.11 и 5.12 приведены результаты определения комплексных значений  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.3.2). В первой колонке указаны размерности “расширяющихся” СЛАУ. Во второй колонке даны вещественные значения  $x_1$  и  $x_2$ , установленные из “расширяющихся” систем методом прогонки. Как и следовало ожидать, вещественные значения  $x_1$  и  $x_2$  СЛАУ “соседних” размерностей, то есть размерностей, отличающихся всего на единицу, имеют “далёкие” друг от друга значения, которые могут быть разных знаков.

Таблица 5.11

**Определение комплексного значения  $x_1$  системы (5.3.2)**

Размерность системы, $n$	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	4,096000000000E+03	---	---
2	1,023625000000E+03	2,047624965661E+03	0,000000000000E+00
3	4,827647058824E+02	1,264965792500E+03	0,000000000000E+00
4	-8,184909090909E+02	1,134521031261E+03	7,853981633974E-01
7	2,268337193145E+02	9,104726813379E+02	4,487989505128E-01
8	-1,739249764151E+04	1,316448271382E+03	7,853981633974E-01
15	-1,763599770522E+03	1,059497910689E+03	8,377580409573E-01
16	1,458683208555E+03	1,080883555512E+03	7,853981633974E-01
31	9,647128971684E+02	9,574874376070E+02	7,093918895203E-01
32	4,405239552404E+02	9,345374799086E+02	6,872233929728E-01
...	---	---	---
1023	8,856021069763E+01	8,964075024056E+02	7,032499683989E-01
1024	3,050998087621E+03	8,974803566608E+02	7,025632008516E-01
2047	2,340834516502E+03	8,957916323052E+02	7,013716867076E-01
2048	5,951305868126E+02	8,956127862133E+02	7,010292200637E-01
4095	1,052965214674E+03	8,935509309793E+02	7,019675892637E-01
4096	-6,701384541316E+02	8,934881666856E+02	7,025632008516E-01

Таблица 5.12

**Определение комплексного значения  $x_2$  системы (5.3.2)**

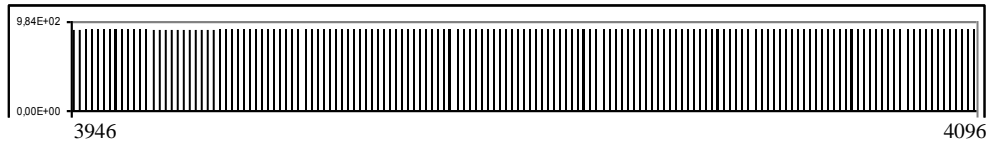
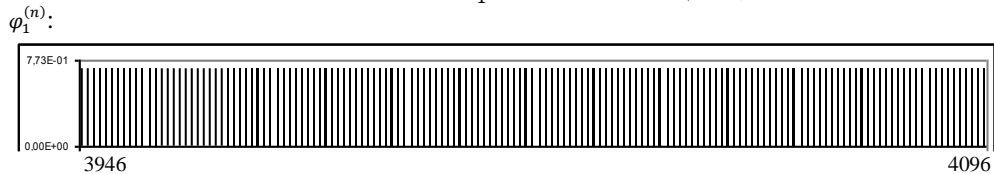
Размерность системы, $n$	Значение $x_2^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_2^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_2^{(n)}$
2	1,024125000000E+03	---	---
3	1,204411764706E+03	1,110616134643E+03	0,000000000000E+00
4	1,638163636364E+03	1,264236756111E+03	0,000000000000E+00

Окончание табл. 5.12

7	1,289722093562E+03	1,145410463422E+03	0,000000000000E+00
8	7,162832547170E+03	1,488308960350E+03	0,000000000000E+00
15	1,953199923507E+03	1,288776882476E+03	0,000000000000E+00
16	8,791055971484E+02	1,256324872135E+03	0,000000000000E+00
31	1,043762367611E+03	1,168527822011E+03	-1,047197551197E-01
32	1,218492014920E+03	1,170107130475E+03	-1,013416985029E-01
...	...	...	...
1023	1,335813263101E+03	1,156871371156E+03	-1,752160286249E-01
1024	3,483339707929E+02	1,155514779528E+03	-1,750447519595E-01
2047	5,850551611661E+02	1,154843775629E+03	-1,750447519595E-01
2048	1,166956471062E+03	1,154849662119E+03	-1,749592391349E-01
4095	1,014344928442E+03	1,154312317149E+03	-1,718897787992E-01
4096	1,588712818044E+03	1,154402359663E+03	-1,718478032733E-01

В колонках 3 и 4 табл. 5.11 и 5.12 показаны значения модуля и аргумента комплексных  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.3.2), полученные по подходящим дробям при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. Из таблиц видно, что с ростом размерности СЛАУ, значения модуля и аргумента комплексных  $x_1$  и  $x_2$  всё более стабилизируются. Таким образом, можно сделать вывод, что БСЛАУ (5.3.2) имеют решения, причём, решения комплексные.

На рис. 5.12 и 5.13 показаны значения модуля и аргумента  $x_1$  БСЛАУ (5.3.2) имеющего комплексное значение, полученное при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма из расширяющейся системы. На рис. 5.12 и 5.13 указаны размерности расширяющихся систем  $3946 \div 4096$ , из решения которых устанавливались значения модуля  $r_1^{(n)}$  и аргумента  $\varphi_1^{(n)}$  комплексного  $x_1$  системы (5.3.2).

Рис. 5.12. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.3.2).Рис. 5.13. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.3.2).

В табл. 5.13 показаны результаты проверки решения системы (5.3.2). В первой колонке указаны номера строк, по которым осуществлялась проверка. Во второй колонке табл. 5.13 даны значения левой части системы (5.3.2) после достановки комплексных значений  $x_i$ . В третьей колонке приведены значения правой части системы (5.3.2). В четвёртой колонке указаны погрешности в решении системы (5.3.2), то есть разности между вещественными значениями правой части и результатами подстановок в строки системы комплексных  $x_i$ , найденных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.13

Результаты проверки решения системы (5.3.2)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	4,094095482080E+03 - i1,486896148824E+01	4,096000000000E+03	-1,904517919865E+00 - i1,486896148824E+01
2	4,079068740538E+03 + i9,519532108990E-01	4,095000000000E+03	-1,593125946175E+01 + i9,519532108990E-01
4	4,077315218977E+03 + i1,666454015655E-01	4,093000000000E+03	-1,568478102275E+01 + i1,666454015655E-01
8	4,080519294010E+03 - i4,989833574781E+00	4,089000000000E+03	-8,480705989859E+00 - i4,989833574781E+00

Окончание табл. 5.12

16	4,086584359462E+03 - i9,565298388082E+00	4,081000000000E+03	5,584359461928E+00 - i9,565298388082E+00
32	4,068759950402E+03 - i5,135494806485E+00	4,065000000000E+03	3,759950402336E+00 - i5,135494806485E+00
64	4,033119647773E+03 - i1,045920528050E+01	4,033000000000E+03	1,196477730591E-01 - i1,045920528050E+01
128	3,972607315061E+03 - i1,512897176947E+01	3,969000000000E+03	3,607315061193E+00 - i1,512897176947E+01
256	3,841605646598E+03 - i1,205415911062E+00	3,841000000000E+03	6,056465975102E-01 - i1,205415911062E+00
512	3,590150349534E+03 - i6,033004800329E+00	3,585000000000E+03	5,150349534092E+00 - i6,033004800329E+00
1024	3,072388623404E+03 + i3,732313126712E+00	3,073000000000E+03	-6,113765961000E-01 + i3,732313126712E+00
2048	2,049244001148E+03 + i3,731728458572E+00	2,049000000000E+03	2,440011476854E-01 + i3,731728458572E+00

На рис. 5.14 показано расположение значений  $x_1 \div x_{2048}$  системы (5.3.2) на комплексной плоскости.

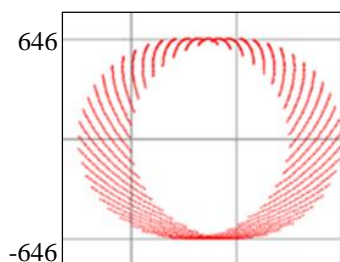


Рис. 5.14. Расположение  $x_i$  системы (5.3.2) на комплексной плоскости.

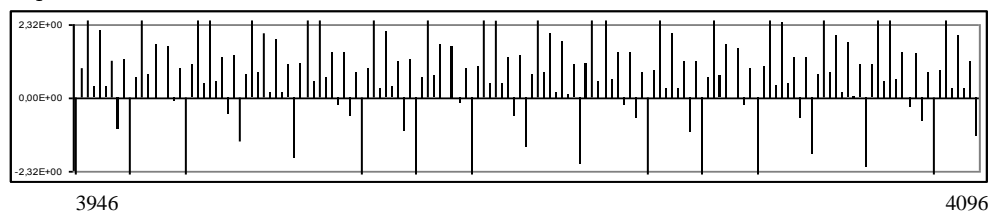
Продолжим рассмотрение решений БСЛАУ. Система (5.3.3) также относится к классу Ас, то есть систем, матрица коэффициентов которой – симметричная, а коэффициенты правой части образуют “убывающую” последовательность.

Пример 3.

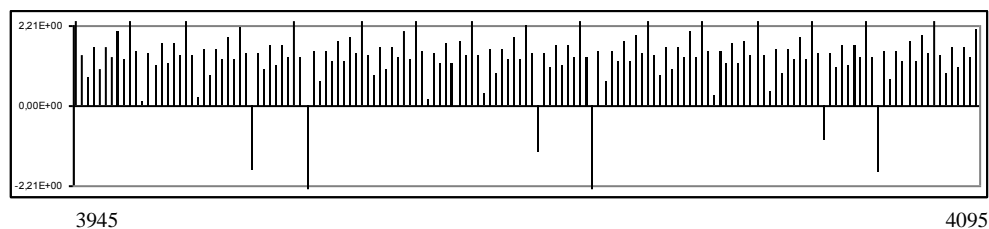
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,096 \\ 5,095 \\ 5,094 \\ 5,093 \\ 5,092 \\ 5,091 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

На рис. 5.15 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные “прогонкой” при решении СЛАУ возрастающих размерностей.

а)  $x_1^{(n)}$ :



б)  $x_2^{(n)}$ :



в)  $x_4^{(n)}$ :

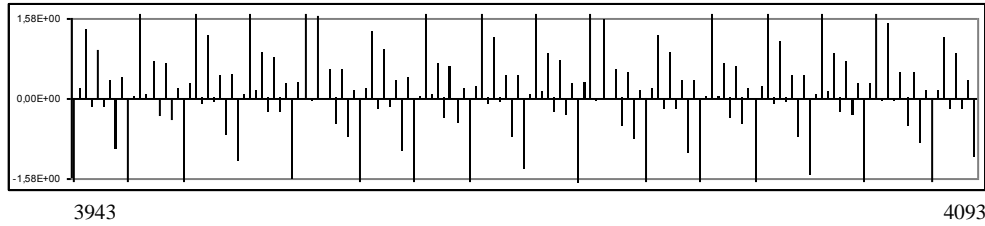


Рис. 5.15. Значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$  “расширяющейся” системы (5.3.3).

Из графиков видно, что вещественные  $x_1^{(n)}$ ,  $x_2^{(n)}$  и  $x_4^{(n)}$  не стремятся с ростом  $n$ , то есть с увеличением размерности СЛАУ, к некоторым пределам. Более того, значения  $x_1^{(n)}$ ,  $x_2^{(n)}$  и  $x_4^{(n)}$  с некоторой периодичностью меняют знак, что свидетельствует, что “отсчёты”, показанные на рис. 5.15 представляют некоторые комплексные числа, которые могут быть установлены при помощи г/ф-алгоритма. Даже беглого взгляда на графики “отсчётов”  $x_1^{(n)}$  и  $x_2^{(n)}$ , приведённых на рисю 5.15.а и 5.15.б, соответственно, чтобы заключить, что значение аргумента комплексного числа, представляющего  $x_i$ , значительно больше значения аргумента комплексного корня  $x_2$ . Анализ распределения отсчётов для  $x_1^{(n)}$  и  $x_2^{(n)}$  позволяет утверждать, что комплексные  $x_1$  и  $x_2$  имеют аргументы разных знаков, что подтверждается данными, приведёнными в табл. 5.14 и 5.15, из которых следуют значения  $x_1$  и  $x_2$ :

$$x_1 = 1,11212e^{i0,69949},$$

$$x_2 = 1,43461e^{-i0,16801}.$$

В табл. 5.14 и 5.15 приведены результаты вычислений модулей и аргументов комплексных решений  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.3.3), которые устанавливаются по формулам г/ф-алгоритма, исходя из вещественных значений  $x_1^{(n)}$  и  $x_2^{(n)}$ , полученных “прогонкой” из расширяющейся СЛАУ (5.3.3).

Таблица 5.14

**Определение комплексного значения  $x_1$  системы (5.3.3).**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_1^{(n)}$
1	5,096000000000E+00	---	---
2	1,273625000000E+00	2,547624972401E+00	0,000000000000E+00
3	6,004117647059E-01	1,573644866425E+00	0,000000000000E+00
4	-1,018490909091E+00	1,411462473994E+00	7,853981633974E-01
7	2,819518295507E-01	1,132699636459E+00	4,487989505128E-01
8	-2,164249764151E+01	1,637811206320E+00	7,853981633974E-01
15	-2,195259231779E+00	1,318131414459E+00	8,377580409573E-01
16	1,815365845264E+00	1,344765476410E+00	7,853981633974E-01
31	1,201593663231E+00	1,191311766827E+00	7,093918895203E-01
32	5,465209387873E-01	1,162652284693E+00	6,872233929728E-01
...	...	...	...
1023	7,387488043646E-02	1,117700489578E+00	7,001790078382E-01
1024	3,882638784920E+00	1,119060502982E+00	6,994952392759E-01
2047	3,059072813251E+00	1,116698738829E+00	6,967674962041E-01
2048	8,301251750439E-01	1,116537049748E+00	6,964272777001E-01
4095	1,142667981006E+00	1,112104371952E+00	6,988988784909E-01
4096	-1,192660856692E+00	1,112123359551E+00	6,994952392759E-01

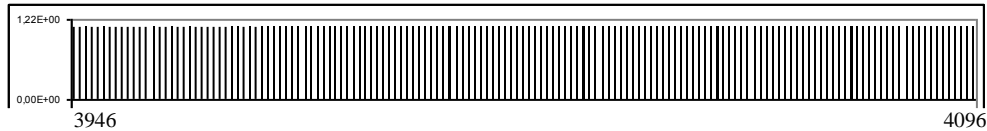
Таблица 5.15

**Определение комплексного значения  $x_2$  системы (5.3.3).**

Размерность системы, $n$	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
2	1,274125000000E+00	---	---
3	1,498529411765E+00	1,381779210570E+00	0,000000000000E+00
4	2,038163636364E+00	1,572915718574E+00	0,000000000000E+00
7	1,604682723483E+00	1,425027629176E+00	0,000000000000E+00
8	8,912832547170E+00	1,851676287712E+00	0,000000000000E+00
15	2,430419743926E+00	1,603435053735E+00	0,000000000000E+00
16	1,093544718245E+00	1,563041054768E+00	0,000000000000E+00
31	1,298135445590E+00	1,453800831479E+00	-1,047197551197E-01
32	1,516493020404E+00	1,455782118989E+00	-1,013416985029E-01
...	...	...	...
1023	1,674041706521E+00	1,446733554761E+00	-1,690680977959E-01
1024	4,044537383598E-01	1,444932233469E+00	-1,689028308382E-01
2047	6,789757289162E-01	1,438301128460E+00	-1,689028308382E-01
2048	1,421958274985E+00	1,438293098970E+00	-1,688203184635E-01
4095	1,31777339665E+00	1,434478113787E+00	-1,680529533796E-01
4096	2,096220285564E+00	1,434611000872E+00	-1,680119148074E-01

На рис. 5.16 и 5.17 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  комплексного  $x_i$  системы (5.3.3), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом.

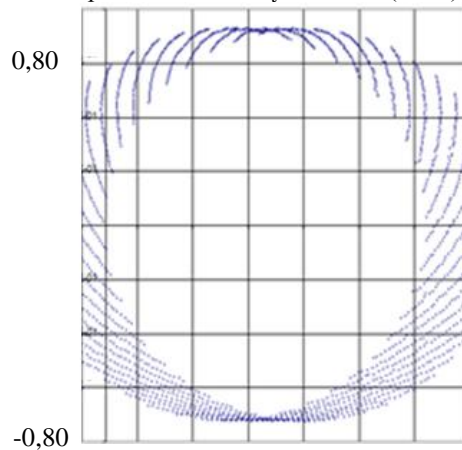
$r_1^{(n)}$ :

Рис. 5.16. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_i$  системы (5.3.3).

$\varphi_1^{(n)}$ :

Рис. 5.17. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_i$  системы (5.3.3).

На рис. 5.18 показано расположение  $x_i$  системы (5.3.3) на комплексной плоскости.

Рис. 5.18. Расположение  $x_i$  системы (5.3.3).

В табл. 5.16 приведены результаты проверки решений БСЛАУ (5.3.3). В четвёртой колонке показаны значения “невязок”, то есть разности между коэффициентами правой части, имеющими единичные значения и значениями левой части, после подстановки в систему найденных комплексных неизвестных  $x_i$ . Из колонки “невязок” следует, что система (5.3.3) решена  $r/\varphi$ -алгоритмом с достаточно высокой точностью. Погрешности как по вещественной, так и по мнимой частям составляют величины порядка  $10^{-2} \div 10^{-4}$ .

Таблица 5.16

**Результаты проверки решения системы (5.3.3)**

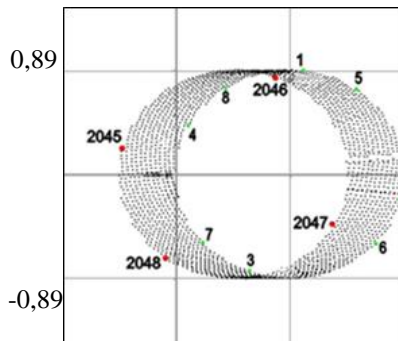
Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	5,094191842603E+00 - i3,678001144923E-03	5,096000000000E+00	-1,808157397287E-03 - i3,678001144923E-03
2	5,097565184004E+00 - i2,960293630563E-03	5,095000000000E+00	2,565184004450E-03 - i2,960293630563E-03
4	5,094566580845E+00 + i4,458209042989E-04	5,093000000000E+00	1,566580844679E-03 + i4,458209042989E-04
8	5,095020827963E+00 - i1,779685138704E-03	5,089000000000E+00	6,020827963500E-03 - i1,779685138704E-03
16	5,076963971672E+00 - i1,183402473100E-02	5,081000000000E+00	-4,036028328309E-03 - i1,183402473100E-02
32	5,067159881622E+00 - i1,931550340556E-02	5,065000000000E+00	2,159881622441E-03 - i1,931550340556E-02
64	5,026517164730E+00 - i3,540426541789E-03	5,033000000000E+00	-6,482835270163E-03 - i3,540426541789E-03
128	4,968170232459E+00 - i2,369970302529E-02	4,969000000000E+00	-8,297675406335E-04 - i2,369970302529E-02
256	4,846232437498E+00 - i5,412970026451E-03	4,841000000000E+00	5,232437497995E-03 - i5,412970026451E-03
512	4,589311332696E+00 - i3,493822484817E-03	4,585000000000E+00	4,311332696140E-03 - i3,493822484817E-03
1024	4,072548592078E+00 + i6,477002494282E-03	4,073000000000E+00	-4,514079219511E-04 + i6,477002494282E-03
2048	3,046665862193E+00 + i3,463235068005E-03	3,049000000000E+00	-2,334137807208E-03 + i3,463235068005E-03

**Пример 4**

Рассмотрим результаты решения БСЛАУ (5.3.4). Эта система также относится к классу  $A_c$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 4,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4,1 & 1 & 4,1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4,1 & 1 & 4,1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4,1 & 1 & 4,1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4,1 & 1 & 4,1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 4,099 \\ 4,098 \\ 4,097 \\ 4,096 \\ 4,095 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.3.4)$$

На рис. 5.19 показано расположение  $x_i$  системы (5.3.4) на комплексной плоскости, причём, с обозначением первых и последних  $x_i$  системы. Из рис. 5.19 видно, что комплексные  $x_i$  располагаются на смещающихся влево окружностях. Шаг “по углу” для соседних  $x_i$  составляет примерно  $90^\circ$ .

Рис. 5.19. Расположение  $x_i$  системы (5.3.4).

В табл. 5.17 приведены результаты проверки полученных комплексных  $x_i$  системы (5.3.4). “Невязки” по строкам, помещённые в четвёртой колонке таблицы, свидетельствуют, что комплексные  $x_i$  системы (5.3.4) получены с достаточно высокой точностью.

Таблица 5.17

**Результаты проверки решения системы (5.3.4)**

Номер строки, n	Значение левой части системы a+ib	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	4,110812514195E+00 + i1,230916363303E-03	4,100000000000E+00	1,081251419520E-02 + i1,230916363303E-03
2	4,097258132174E+00 + i7,005609102125E-03	4,099000000000E+00	-1,741867825700E-03 + i7,005609102125E-03
4	4,103714121863E+00 - i3,991039326058E-03	4,097000000000E+00	6,714121863210E-03 - i3,991039326058E-03
8	4,096889321641E+00 - i3,025267473950E-03	4,093000000000E+00	3,889321640685E-03 - i3,025267473950E-03
16	4,087487347953E+00 - i5,909972997400E-04	4,085000000000E+00	2,487347952949E-03 - i5,909972997400E-04
32	4,076231861909E+00 - i4,369448129659E-03	4,069000000000E+00	7,231861908583E-03 - i4,369448129659E-03
64	4,041259281532E+00 - i4,351459606369E-03	4,037000000000E+00	4,259281532307E-03 - i4,351459606369E-03
128	3,976002858387E+00 - i2,962486718658E-03	3,973000000000E+00	3,002858386830E-03 - i2,962486718658E-03
256	3,855594783751E+00 - i4,124579863071E-03	3,845000000000E+00	1,059478375060E-02 - i4,124579863071E-03
512	3,594438454980E+00 - i7,248439613171E-03	3,589000000000E+00	5,438454980306E-03 - i7,248439613171E-03
1024	3,083734513022E+00 - i5,430598679391E-03	3,077000000000E+00	6,734513021854E-03 - i5,430598679391E-03
2048	2,038858505132E+00 + i8,613183269686E-03	2,053000000000E+00	-1,414149486843E-02 + i8,613183269686E-03

Совершенно иной характер расположения комплексных решений БСЛАУ получен для системы (5.3.5).

Пример 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

Система (5.3.5) относится также к классу  $A_c$ , однако особенность этой системы в том, что коэффициенты правой части быстро убывают, как убывают коэффициенты гармонического ряда. Решения системы (5.3.5) расположены на окружности (рис. 5.20) как и решения систем класса  $A_a$ .

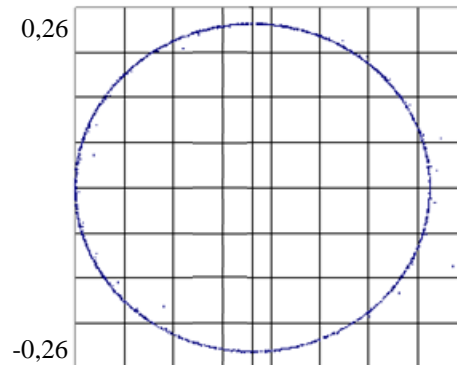


Рис. 5.20. Расположение  $x_i$  системы (5.3.4) на комплексной плоскости.

Разница в том, что решения систем класса  $A_c$  с быстрым убыванием коэффициентов правой части лежат на окружности, центр которой находится на пересечении осей координат, в то время как решения систем класса  $A_a$  расположены на окружности, полностью расположенной в правой полуокружности, прилегая к оси ординат.

#### 5.4. Решение БСЛАУ класса $V_a$

Рассмотрим несколько примеров решения БСЛАУ иного класса, а именно, класса  $V_a$ , когда диагональные элементы матрицы системы увеличиваются, а коэффициенты

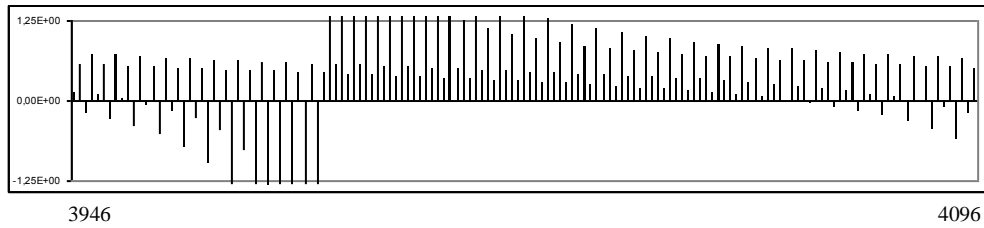
правой части имеют постоянную величину. Анализ графиков позволит зафиксировать типовую картину в расположении  $x_i$  на комплексной плоскости для систем этого класса.

**Пример 1**

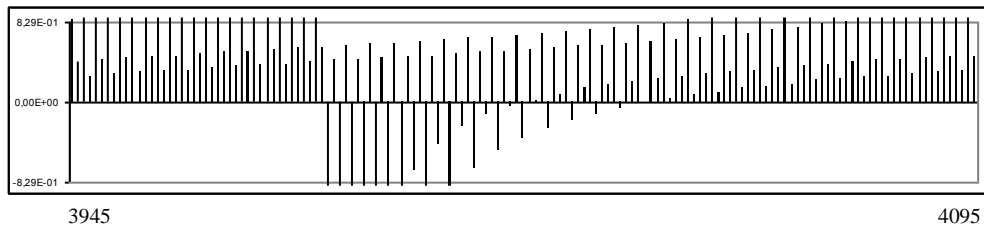
$$\begin{pmatrix} 1 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,01 & 1 & 1,02 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,02 & 1 & 1,03 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,03 & 1 & 1,04 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,04 & 1 & 1,05 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,05 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.4.1)$$

На рис. 5.21 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные “прогонкой” при решении СЛАУ возрастающих размерностей.

а)  $x_1^{(n)}$ :



б)  $x_2^{(n)}$ :



в)  $x_4^{(n)}$ :

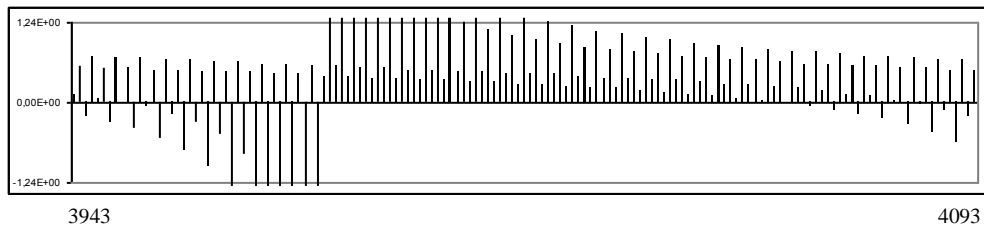


Рис. 5.21. Значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$  “расширяющейся” системы (5.4.1).

Из графиков видно, что вещественные значения  $x_1^{(n)}$ ,  $x_2^{(n)}$  и  $x_4^{(n)}$  не стремятся с ростом  $n$ , то есть с увеличением размерности СЛАУ, к некоторым пределам. Из рассмотрения графиков, показанных на рис. 5.21.а. и рис. 5.21.б. можно заключить, что аргументы комплексных  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.4.1) разных знаков. Это подтверждается данными, помещёнными в табл. 5.18 и 5.19, из которых следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,5743e^{i0,5146}, \\ x_2 &= 0,5670e^{-i0,5255}. \end{aligned}$$



В табл. 5.18 и 5.19 приведены результаты вычислений модулей и аргументов комплексных  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.4.1), которые устанавливались по г/ф-алгоритму, исходя из вещественных значений  $x_1^{(n)}$  и  $x_2^{(n)}$ , полученных “прогонкой” для расширяющихся СЛАУ (5.4.1).

Таблица 5.18

**Определение комплексного значения  $x_1$  системы (5.4.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	1,000000000000E+00	---	---
2	4,975124378109E-01	7,053456158586E-01	0,000000000000E+00
3	1,904761904762E-02	2,116158596846E-01	0,000000000000E+00
4	1,030332775901E+00	3,143442630394E-01	0,000000000000E+00
7	1,097889519417E+00	3,183532950593E-01	0,000000000000E+00
8	5,234354753947E-01	3,387689318635E-01	0,000000000000E+00
15	2,389267325754E-01	3,795268887215E-01	0,000000000000E+00
16	2,124310413674E+00	4,226598693543E-01	0,000000000000E+00
31	1,143470095776E-01	4,889750895910E-01	3,040250955087E-01
32	1,291033702943E+00	5,040380512992E-01	2,945243112740E-01
...	---	---	---
1023	-1,477759235152E+00	5,732713251478E-01	5,067084925145E-01
1024	6,808560103700E-01	5,733676202691E-01	5,062136600023E-01
2047	9,341078933690E-01	5,779528731095E-01	5,033914950549E-01
2048	3,445442244083E-01	5,778069161466E-01	5,031456984265E-01
4095	-1,960836568236E-01	5,744103140377E-01	5,147762321267E-01
4096	5,093725096442E-01	5,743934628057E-01	5,146505543356E-01

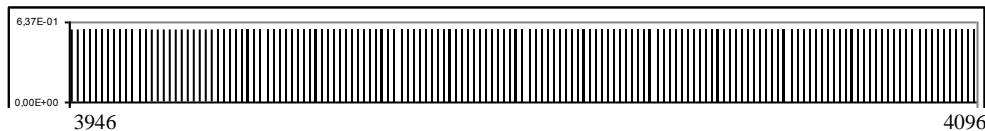
Таблица 5.19

**Определение комплексного значения  $x_2$  системы (5.4.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
2	4,975124378109E-01	---	---
3	9,712399811410E-01	6,951287439870E-01	0,000000000000E+00
4	-3,003245138737E-02	2,439160765797E-01	-1,047197551197E+00
7	-9,692031625459E-02	2,934148662629E-01	-1,047197551197E+00
8	4,718460639656E-01	3,140191588673E-01	-8,975979010257E-01
15	7,535378885392E-01	4,051003292448E-01	-8,975979010257E-01
16	-1,113178627400E+00	4,333406333255E-01	-1,047197551197E+00
31	8,768841489330E-01	5,064378000935E-01	-6,283185307180E-01
32	-2,881521811321E-01	4,973086096739E-01	-7,093918895203E-01
...	---	---	---
1023	2,453226965497E+00	5,662487712920E-01	-5,287220512891E-01
1024	3,159841481485E-01	5,659259734186E-01	-5,282052164393E-01
2047	6,523970953562E-02	5,646682168395E-01	-5,374180981214E-01
2048	6,489661144472E-01	5,647066007342E-01	-5,371555587476E-01
4095	1,184241244380E+00	5,670639779542E-01	-5,256450824888E-01
4096	4,857697924315E-01	5,670425507770E-01	-5,255167198313E-01

На рис. 5.22 и 5.23 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  комплексного  $x_1$  системы (5.4.1), полученные и использованием г/ф-алгоритма.

$r_1^{(n)}$ :

Рис. 5.22. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.4.1).

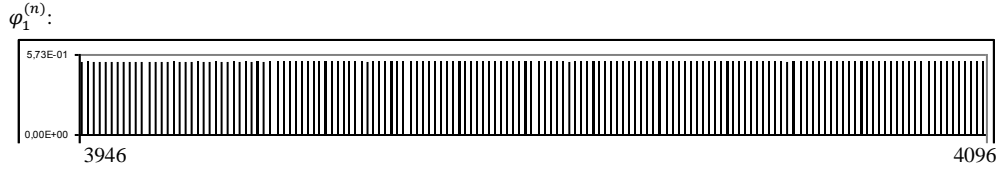


Рис. 5.23. Значения  $\varphi_i^{(n)}$  для  $x_i$  системы (5.4.1).

В табл. 5.20 приведена проверка комплексных решений БСЛАУ (5.4.1), полученных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. В четвёртой колонке показаны значения погрешностей, то есть разности между коэффициентами правой части, имеющих единичное значение и значениями строк, расположенных в левой части системы после подстановки в систему найденных комплексных неизвестных  $x_i$ . Из колонки “Погрешность” следует, что система (5.4.1) решена при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма методом “расширения СЛАУ” с достаточно высокой точностью. Погрешности мнимой части составляют величины порядка  $10^{-2} \div 10^{-4}$ .

Таблица 5.20

Результаты проверки решения системы (5.4.1)

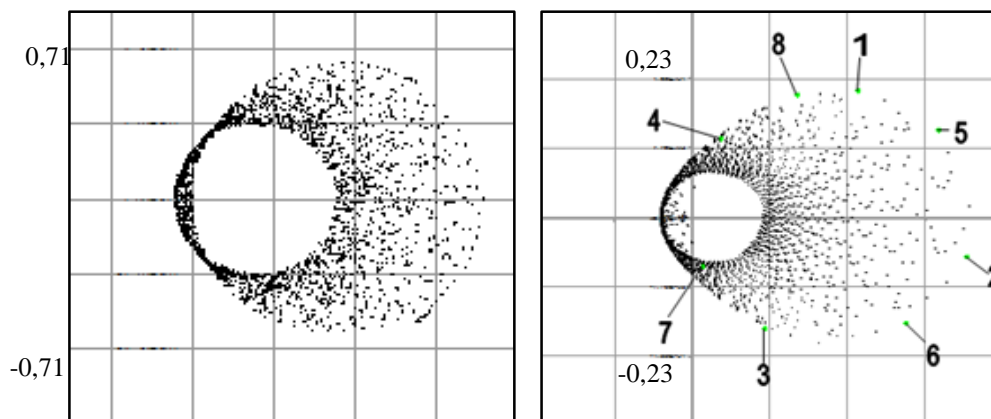
Номер строки, n	Значение левой части системы a+ib	Значение правой части системы	Погрешность
1	9,954231400053E-01 - i4,573134833309E-03	1,000000000000E+00	-4,576859994749E-03 - i4,573134833309E-03
2	9,955045715288E-01 - i4,624446795594E-03	1,000000000000E+00	-4,495428471196E-03 - i4,624446795594E-03
4	9,939198918399E-01 - i7,602133430403E-03	1,000000000000E+00	-6,080108160108E-03 - i7,602133430403E-03
8	9,924719491939E-01 - i1,312331538837E-03	1,000000000000E+00	-7,528050806127E-03 - i1,312331538837E-03
16	9,953314968383E-01 - i3,510201169404E-03	1,000000000000E+00	-4,668503161662E-03 - i3,510201169404E-03
32	9,973339745459E-01 + i2,457367291962E-04	1,000000000000E+00	-2,666025454089E-03 + i2,457367291962E-04
64	9,940007960977E-01 - i3,440627339491E-03	1,000000000000E+00	-5,999203902275E-03 - i3,440627339491E-03
128	9,998133543198E-01 - i1,848487409087E-03	1,000000000000E+00	-1,866456801970E-04 - i1,848487409087E-03
256	1,001630984364E+00 - i6,679015231516E-03	1,000000000000E+00	1,630984363951E-03 - i6,679015231516E-03
512	9,874475553857E-01 - i3,017620664872E-03	1,000000000000E+00	-1,255244461432E-02 - i3,017620664872E-03
1024	9,907687203609E-01 + i6,131092716452E-03	1,000000000000E+00	-9,231279639134E-03 + i6,131092716452E-03
2048	9,824710257508E-01 - i3,457388478164E-03	1,000000000000E+00	-1,752897424915E-02 - i3,457388478164E-03

Приведём несколько рисунков, на которых показано расположение комплексных  $x_i$  БСЛАУ класса Ва. Из рис. 5.24 и 5.25 видно что, чем выше скорость роста диагональных элементов матриц БСЛАУ, тем симметричнее, относительно начала координат располагаются в комплексной плоскости решения БСЛАУ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,001 & 1 & 1,002 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,002 & 1 & 1,003 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,003 & 1 & 1,004 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,004 & 1 & 1,005 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,005 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3,01 & 1 & 3,02 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3,02 & 1 & 3,03 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3,03 & 1 & 3,04 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3,04 & 1 & 3,05 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,05 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

На рис. 5.24 и 5.25 показано расположение решений  $x_i$  системы (5.4.2) и (5.4.3) на комплексной плоскости.

Рис. 5.24. Расположение  $x_i$  системы (5.4.2)Рис. 5.24. Расположение  $x_i$  системы (5.4.3)

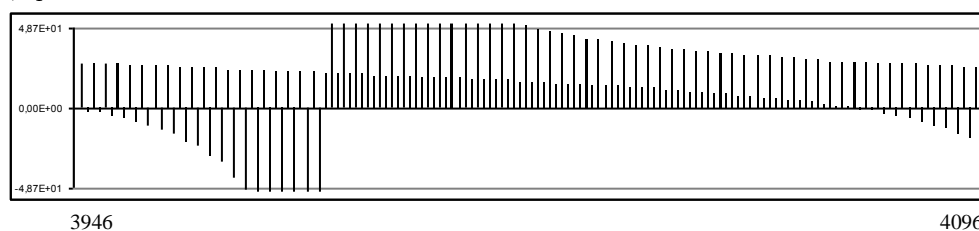
### 5.5. Решение БСЛАУ класса $Bc$

СЛАУ (5.5.1) принадлежит к классу  $Bc$

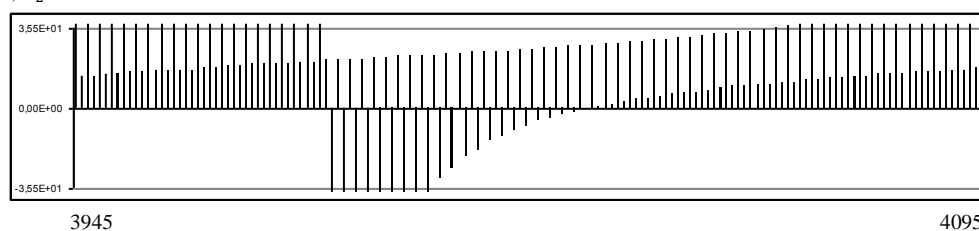
$$\begin{pmatrix}
 1 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1,01 & 1 & 1,02 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 1,02 & 1 & 1,03 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 1,03 & 1 & 1,04 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 1,04 & 1 & 1,05 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1,05 & 1 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41,96 \\ 41,95 \\ 41,94 \\ 41,93 \\ 41,92 \\ 41,91 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.5.1)$$

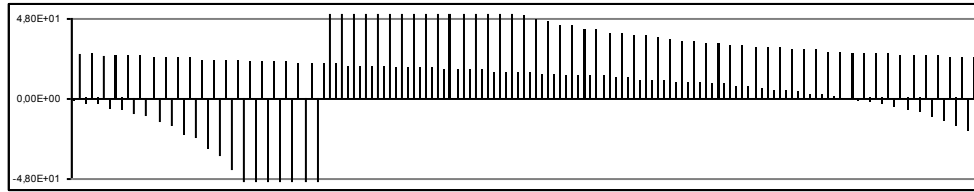
На рис. 5.26 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные методом “прогонки” для “расширяющейся” СЛАУ (5.5.1) различной размерности. На рис. 5.26 показаны 150 значений  $x_i$ . Из графиков видно, что на некоторых участках значения  $x_i$  меняли свой знак на противоположный с ростом размерности СЛАУ всего на единицу.

а)  $\bar{x}_1$ :



б)  $\bar{x}_2$ :



в)  $\bar{x}_4$ :

3943

4093

Рис. 5.26. Значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные из “расширяющихся” СЛАУ.

Во вторых колонках табл. 5.21 и табл. 5.22 результаты определения  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.5.1) методом “прогонки” при решении СЛАУ различной размерности. В третьей и четвёртой колонках этих же таблиц даны значения их модулей  $r_n$  и аргументов  $\varphi_n$ , комплексных корней  $x_1$  и  $x_2$ , полученных с использованием г/ф-алгоритма.

Таблица 5.21

**Определение значений модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  для  $x_1$  системы (5.5.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	4,196000000000E+01	---	---
2	2,037313432836E+01	2,923793283421E+01	0,000000000000E+00
3	8,091428571429E-01	8,843812185229E+00	0,000000000000E+00
4	4,322254932757E+01	1,314943909490E+01	0,000000000000E+00
7	4,604561290935E+01	1,332953845833E+01	0,000000000000E+00
8	2,183219026787E+01	1,417752384724E+01	0,000000000000E+00
15	1,007039311244E+01	1,590862751027E+01	0,000000000000E+00
16	8,901193790121E+01	1,771622489399E+01	0,000000000000E+00
31	4,890210085200E+00	2,047433895089E+01	3,040250955087E-01
32	5,403514825010E+01	2,110477446974E+01	2,945243112740E-01
...	...	...	...
1023	-5,554961943728E+01	2,431037814075E+01	5,220632953180E-01
1024	2,719666056921E+01	2,431304176515E+01	5,215534678811E-01
2047	3,633002222884E+01	2,428046375733E+01	5,187387967334E-01
2048	1,159614659523E+01	2,427170398844E+01	5,184855063053E-01
4095	-1,808594914983E+01	2,403708093386E+01	5,239823644449E-01
4096	2,439669619630E+01	2,403716808043E+01	5,238544390629E-01

Таблица 5.22

**Определение значений модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  для  $x_2$  системы (5.5.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
2	2,137313432836E+01	---	---
3	4,074342291372E+01	2,950956880288E+01	0,000000000000E+00
4	-1,250048839181E+00	1,028689332213E+01	-1,047197551197E+00
7	-4,045161296388E+00	1,235140905398E+01	-1,047197551197E+00
8	1,992852448726E+01	1,322501918107E+01	-8,975979010257E-01
15	3,157386820550E+01	1,702863016292E+01	-8,975979010257E-01
16	-4,658607712991E+01	1,821034366557E+01	-1,047197551197E+00
31	3,670276229188E+01	2,133647896735E+01	-6,283185307180E-01
32	-1,195559232683E+01	2,094151911013E+01	-7,093918895203E-01
...	...	...	...
1023	9,654417766068E+01	2,374613335959E+01	-5,410179129470E-01
1024	1,461716775326E+01	2,373487291195E+01	-5,404890586821E-01
2047	5,574235416989E+00	2,370967321043E+01	-5,404890586821E-01
2048	3,006322119284E+01	2,371242331464E+01	-5,402250190833E-01
4095	5,945143480181E+01	2,385930484851E+01	-5,264124475727E-01
4096	1,738940970664E+01	2,385746193901E+01	-5,262838975244E-01

На рис. 5.27 и 5.28 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$ , определённые из значений  $x_1$ ,  $r/\varphi$ -алгоритмом при учёте различного числа “отсчётов”  $x_1$ , найденных “прогонкой” из расширяющихся СЛАУ.

а)  $r_1^{(n)}$ :



Рис. 5.27. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.5.1).

б)  $\varphi_1^{(n)}$ :

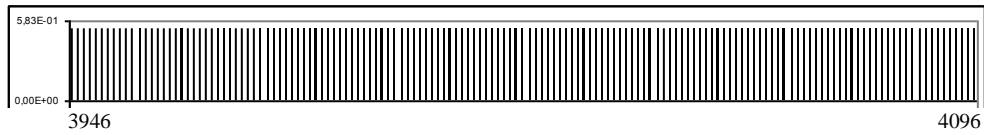


Рис. 5.28. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.5.1).

В табл. 5.23 помещены результаты проверки комплексных решений системы (5.5.1).

Таблица 5.23

Результаты проверки решения системы (5.5.1)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	4,164907900343E+01 - i8,010157045992E-02	4,196000000000E+01	-3,109209965700E-01 - i8,010157045992E-02
2	4,163966572474E+01 - i8,039345558619E-02	4,195000000000E+01	-3,103342752570E-01 - i8,039345558619E-02
4	4,177251058464E+01 + i5,357249369140E-02	4,193000000000E+01	-1,574894153588E-01 + i5,357249369140E-02
8	4,174061290957E+01 - i2,434532259285E-01	4,189000000000E+01	-1,493870904257E-01 - i2,434532259285E-01
16	4,160370170327E+01 - i3,915122532546E-02	4,181000000000E+01	-2,062982967312E-01 - i3,915122532546E-02
32	4,149425454352E+01 + i1,350664788544E-02	4,165000000000E+01	-1,557454564753E-01 + i1,350664788544E-02
64	4,096415448134E+01 - i3,120869371167E-01	4,133000000000E+01	-3,658455186558E-01 - i3,120869371167E-01
128	4,062753500855E+01 - i6,629062276616E-02	4,069000000000E+01	-6,246499145450E-02 - i6,629062276616E-02
256	3,936478860900E+01 - i6,261387572654E-02	3,941000000000E+01	-4,521139100004E-02 - i6,261387572654E-02
512	3,661670868549E+01 - i1,817350894603E-01	3,685000000000E+01	-2,332913145057E-01 - i1,817350894603E-01
1024	3,158057762412E+01 + i2,743188756347E-01	3,173000000000E+01	-1,494223758796E-01 + i2,743188756347E-01
2048	2,088768898467E+01 - i3,102950356022E-01	2,149000000000E+01	-6,023110153268E-01 - i3,102950356022E-01

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,001 & 1 & 1,002 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,002 & 1 & 1,003 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,003 & 1 & 1,004 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,004 & 1 & 1,005 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,005 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,096 \\ 5,095 \\ 5,094 \\ 5,093 \\ 5,092 \\ 5,091 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.5.2)$$

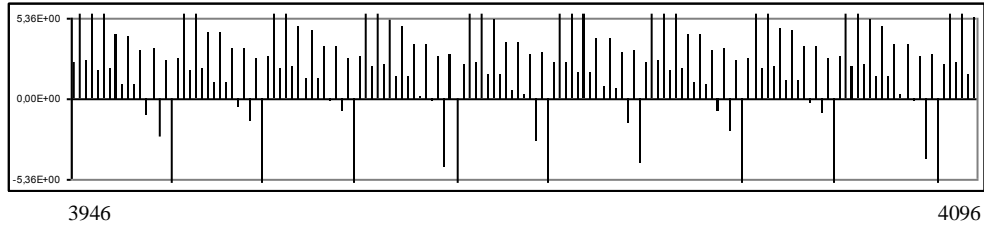
На рис. 5.29 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные методом “прогонки” для “расширяющихся” СЛАУ (5.5.2). Из рис. 5.29а и 5.29б следует, что модули  $r_n$  комплексных  $x_1$  и  $x_2$  близки, а аргументы  $\varphi_n$  должны иметь противоположные знаки, причём, аргумент комплексного  $x_1$  имеет положительный знак, а аргумент комплексного  $x_2$  – отрицателен. Данные, приведённые в табл. 5.24 и 5.25, подтверждают эти выводы, сделанные из рассмотрения “отсчётов”  $x_1$  и  $x_2$ , приведённых на рис. 5.29а и 5.29б:

$$x_1 = 2,926e^{i0,516},$$

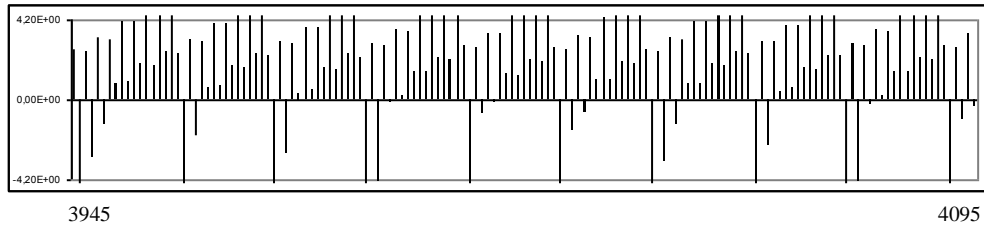
$$x_2 = 2,872e^{-i0,533}.$$

Сравнивая “отсчёты” для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные при решении системы (5.5.1) с “отсчётами” для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , найденными “прогонкой” для “расширяющейся” системы (5.5.2) можно обратить внимание, что “картинки” этих отсчётов весьма различны, – “период” отсчётов на рис. 5.26 значительно больший, нежели “период” отсчётов на рис. 5.29.

а)  $\bar{x}_1$ :



б)  $\bar{x}_2$ :



в)  $\bar{x}_4$ :

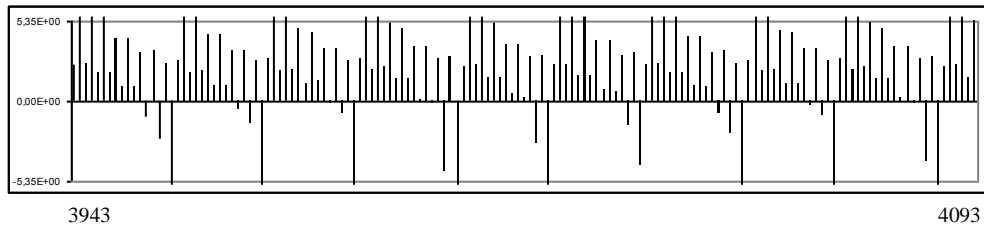


Рис. 5.29. Значения подходящих дробей для  $x_i$  системы (5.5.2).

В табл. 5.24 во второй колонке приведены результаты определения  $x_1$  системы (5.5.2) методом “прогонки”. Значения  $x_1$  СЛАУ “соседних” размерностей значительно отличаются друг от друга, вплоть до знака, что хорошо видно из рис. 5.29. В третьей и четвертой колонках табл. 5.27 даны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  комплексного  $x_1$ , полученные с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.24

**Определение значений модуля и аргумента  $x_1$  системы (5.5.2)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	5,096000000000E+00	---	---
2	2,046476761619E+00	3,229372319385E+00	0,000000000000E+00
3	1,114029850746E-02	4,879526582478E-01	0,000000000000E+00
4	5,110301442040E+00	8,777986242988E-01	0,000000000000E+00
7	5,140204975177E+00	8,278465911961E-01	0,000000000000E+00
8	2,435055776849E+00	9,473702572992E-01	0,000000000000E+00
15	1,951397005694E-01	9,031119267752E-01	0,000000000000E+00
16	5,333500749087E+00	1,009127407641E+00	0,000000000000E+00
31	6,175553510855E+00	1,358460420474E+00	0,000000000000E+00
32	2,733484305099E+00	1,388470523582E+00	0,000000000000E+00
...	...	...	...

Окончание табл. 5.24

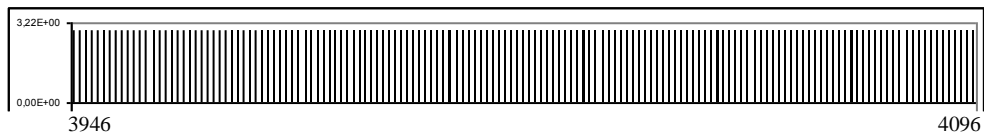
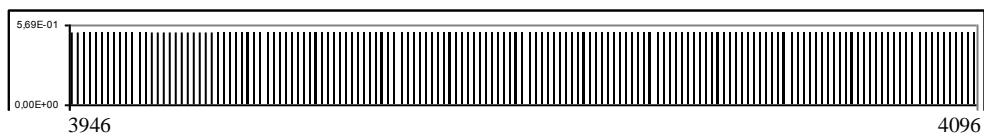
1023	-1,888447692269E+01	2,911770651201E+00	4,821408080289E-01
1024	3,411925553527E+00	2,912221428878E+00	4,816699673961E-01
2047	1,355679207443E+00	2,924587151435E+00	5,003220347192E-01
2048	6,964716642746E+00	2,925826512985E+00	5,000777368507E-01
4095	1,647892788428E+00	2,925628776259E+00	5,170777652062E-01
4096	5,376370157411E+00	2,926063441578E+00	5,169515255175E-01

Таблица 5.25

Определение значений модуля и аргумента  $x_2$  системы (5.5.2)

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Размерность системы, n
2	3,046476761619E+00	---	---
3	5,079779921571E+00	3,933882495094E+00	0,000000000000E+00
4	-1,428715488472E-02	6,046854331167E-01	-1,047197551197E+00
7	-4,416081436279E-02	7,165046752601E-01	-1,047197551197E+00
8	2,658285937214E+00	8,640908558870E-01	-8,975979010257E-01
15	4,895964335096E+00	1,106103180897E+00	-8,975979010257E-01
16	-2,372634856015E-01	9,982163038796E-01	-1,047197551197E+00
31	-1,078475035819E+00	1,38599575904E+00	-1,047197551197E+00
32	2,360155539362E+00	1,410004299631E+00	-1,013416985029E+00
...	...	...	...
1023	2,395652040228E+01	2,895586505638E+00	-5,625356708483E-01
1024	1,682392054418E+00	2,894050041795E+00	-5,619857826070E-01
2047	3,736584208349E+00	2,875119939499E+00	-5,404890586821E-01
2048	-1,866849792953E+00	2,874513458531E+00	-5,417597492512E-01
4095	3,444662549023E+00	2,874245056956E+00	-5,325513682441E-01
4096	-2,800900673441E-01	2,872611213757E+00	-5,331884967631E-01

На рис. 5.30 и 5.31 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$ , определённые из значений  $x_1$   $r/\varphi$ -алгоритмом при учёте различного числа “отсчётов”  $x_1$ , найденных “прогонкой” из расширяющихся СЛАУ.

 $r_1^{(n)}$ :Рис. 5.30. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.5.2). $\varphi_1^{(n)}$ :Рис. 5.31. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.5.2).

В табл. 5.26 помещены результаты проверки комплексных решений системы (5.5.2).

Таблица 5.26

Результаты проверки решения системы (5.5.2)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	5,020054559217E+00 - i1,540107482602E-02	5,096000000000E+00	-7,594544078299E-02 - i1,540107482602E-02
2	5,019123188163E+00 - i9,614781284900E-03	5,095000000000E+00	-7,587681183654E-02 - i9,614781284900E-03
4	5,015146608514E+00 - i4,928160298148E-03	5,093000000000E+00	-7,785339148578E-02 - i4,928160298148E-03
8	5,030436807115E+00 - i7,046553799660E-03	5,089000000000E+00	-5,856319288486E-02 - i7,046553799660E-03
16	5,025655802804E+00 + i1,658857172676E-02	5,081000000000E+00	-5,534419719563E-02 + i1,658857172676E-02

Окончание табл. 5.26

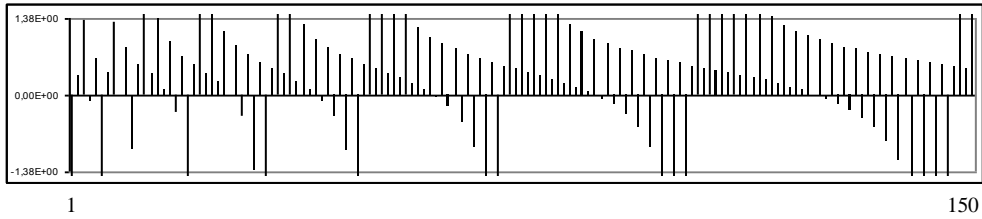
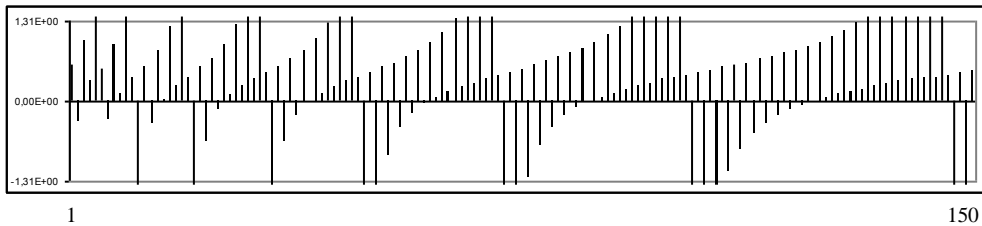
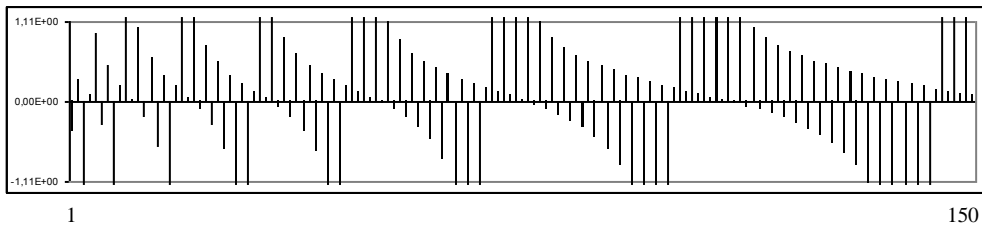
32	5,040872000532E+00 + i2,598132456617E-02	5,065000000000E+00	-2,412799946807E-02 + i2,598132456617E-02
64	4,973529210217E+00 - i5,454636280912E-02	5,033000000000E+00	-5,947078978281E-02 - i5,454636280912E-02
128	4,904391385464E+00 + i7,047600493852E-03	4,969000000000E+00	-6,460861453645E-02 + i7,047600493852E-03
256	4,810049005670E+00 + i2,520418957636E-02	4,841000000000E+00	-3,095099432961E-02 + i2,520418957636E-02
512	4,540773818889E+00 + i4,424207448142E-02	4,585000000000E+00	-4,422618111093E-02 + i4,424207448142E-02
1024	4,004730412336E+00 - i6,291012083906E-02	4,073000000000E+00	-6,826958766373E-02 - i6,291012083906E-02
2048	3,048096708083E+00 - i2,941967825678E-03	3,049000000000E+00	-9,032919170787E-04 - i2,941967825678E-03

**Пример 3**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,1 & 1 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,2 & 1 & 1,3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,3 & 1 & 1,4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,4 & 1 & 1,5 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,33 \\ 0,25 \\ 0,20 \\ 0,16 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.5.3)$$

На рис. 5.32 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные методом “прогонки” для расширяющихся СЛАУ (5.5.3), причём, показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , из систем малых размерностей ( $\leq 150$ ). Из графиков 5.32а и 5.32б можно заключать, что модули  $r_n$  комплексных  $x_1$  и  $x_2$  близки, а аргументы  $\varphi_n$  для тех же  $x_1$  и  $x_2$  противоположного знака, что подтверждается данными табл. 5.27 и 5.28:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,751e^{i0,734}, \\ x_2 &= 0,651e^{-i0,842}. \end{aligned}$$

а)  $\bar{x}_1$ :б)  $\bar{x}_2$ :в)  $\bar{x}_4$ :Рис. 5.32. Значения подходящих дробей для  $x_i$  системы (5.5.3).

Во вторых колонках табл. 5.27 и табл. 5.28 приведены результаты определения  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.5.3) методом “прогонки” при решении “расширяющихся” СЛАУ, то



есть, СЛАУ, размерность коорых увеличивается. В третью и четвёртую колонки этих же таблиц даны значения модулей  $r_n$  и аргументов  $\varphi_n$  комплексных корней  $x_1$  и  $x_2$ , полученных с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.27

**Определение значений модуля и аргумента  $x_1$  системы (5.5.3)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	1,00000000000E+00	---	---
2	-2,142857142857E+00	1,463850109423E+00	1,570796326795E+00
3	3,33333333333E-01	8,939035350966E-01	1,047197551197E+00
4	1,343139525905E+00	9,896879294596E-01	7,853981633974E-01
7	-3,991858114516E+01	1,126899886720E+00	1,346396851538E+00
8	4,144237836637E-01	9,944438179313E-01	1,178097245096E+00
15	3,750196091113E-01	7,455405757139E-01	1,047197551197E+00
16	1,396060366770E+00	7,753509829363E-01	9,817477042468E-01
31	7,183840440308E-01	6,433320613726E-01	9,120752865261E-01
32	-1,357127566881E+00	6,585154848676E-01	9,817477042468E-01
...	...	...	...
1023	5,282481725410E-01	7,250131021419E-01	8,322303119480E-01
1024	-8,708962486329E+01	7,284114006586E-01	8,344855486098E-01
2047	3,729195703807E-01	7,582773964768E-01	7,842471157716E-01
2048	2,185549753221E+00	7,586694373789E-01	7,838641826096E-01
4095	1,774656804014E-01	7,511950560528E-01	7,349562300706E-01
4096	1,249192200445E+00	7,512883352975E-01	7,347767973972E-01

Таблица 5.28

**Определение значений модуля и аргумента  $x_2$  системы (5.5.3)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
2	2,857142857143E+00	---	---
3	6,06060606060E-01	1,315903389920E+00	0,00000000000E+00
4	-3,119450235503E-01	8,144079873691E-01	-1,047197551197E+00
7	3,719871013197E+01	1,363912211765E+00	-5,235987755983E-01
8	5,323420148512E-01	1,192382537932E+00	-4,487989505128E-01
15	5,681639917170E-01	8,881245351443E-01	-6,731984257692E-01
16	-3,600548788815E-01	8,362449794865E-01	-8,377580409573E-01
31	2,560145054265E-01	6,492546525679E-01	-7,330382858376E-01
32	2,142843242619E+00	6,747506428164E-01	-7,093918895203E-01
...	...	...	...
1023	4,288652976900E-01	6,286137511342E-01	-7,500475611310E-01
1024	8,008147714844E+01	6,315993806966E-01	-7,493143768093E-01
2047	5,700731178357E-01	6,573151146899E-01	-7,938433049394E-01
2048	-1,07772502928E+00	6,574739196755E-01	-7,949902269465E-01
4095	7,477584723624E-01	6,517298863567E-01	-8,417994970660E-01
4096	-2,265383640413E-01	6,515617289767E-01	-8,423611071164E-01

В табл. 5.29 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.5.3).

Таблица 5.29

**Результаты проверки решения системы (5.5.3)**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	1,034562331547E+00 - i3,114718031402E-02	1,000000000000E+00	3,456233154688E-02 - i3,114718031402E-02
2	5,318771842216E-01 - i3,178746584102E-02	5,000000000000E-01	3,187718422160E-02 - i3,178746584102E-02
4	2,314228141657E-01 - i4,414762401661E-02	2,500000000000E-01	-1,857718583429E-02 - i4,414762401661E-02
8	1,145521047727E-01 + i2,376490026975E-02	1,250000000000E-01	-1,044789522732E-02 + i2,376490026975E-02
16	7,737334088420E-02 + i3,690779491206E-02	6,250000000000E-02	1,487334088420E-02 + i3,690779491206E-02
32	1,259623656404E-02 + i5,999534626887E-03	3,125000000000E-02	-1,865376343596E-02 + i5,999534626887E-03
64	2,973233272504E-02 - i1,534131942647E-02	1,562500000000E-02	1,410733272504E-02 - i1,534131942647E-02

Окончание табл. 5.29

128	-5,849702005036E-03 + i1,297699204807E-02	7,812500000000E-03	-1,366220200504E-02 + i1,297699204807E-02
256	1,163949101831E-02 - i2,854896896072E-03	3,906250000000E-03	7,733241018308E-03 - i2,854896896072E-03
512	-9,476880403385E-03 + i4,926010114098E-03	1,953125000000E-03	-1,143000540338E-02 + i4,926010114098E-03
1024	9,523668558549E-03 + i3,134514560568E-03	9,765625000000E-04	8,547106058549E-03 + i3,134514560568E-03
2048	5,913247720527E-04 - i2,839512325029E-04	4,882812500000E-04	1,030435220527E-04 - i2,839512325029E-04

Приведём ещё один пример решения системы класса  $W_c$ .

**Пример 4**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3,001 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3,001 & 1 & 3,002 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3,002 & 1 & 3,003 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3,003 & 1 & 3,004 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,004 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,096 \\ 5,095 \\ 5,094 \\ 5,093 \\ 5,092 \\ 5,091 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.5.4)$$

В табл. 5.30 показаны комплексные решения системы (5.5.4), полученные при помощи г/ф-алгоритма.

Таблица 5.30

**Значений комплексных  $x_i$  системы (5.5.4)**

Номер $x_i, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\phi_1^{(n)}$
1	1,113640099670E+00	6,984807666481E-01
2	1,451443207903E+00	-1,665599306171E-01
3	7,494056142765E-01	-1,033225602548E+00
4	4,778243629240E-01	1,243219515234E+00
7	2,886623512517E-01	-1,380873724824E+00
8	9,054817685818E-01	8,984975982201E-01
15	6,565035532827E-01	1,111025399260E+00
16	1,420133984462E+00	2,441706853041E-01
...	...	...
256	1,349058179693E+00	-1,545045567339E-01
511	1,060921642848E+00	6,030848547855E-01
512	1,193952038040E+00	-3,155476751295E-01
1023	6,347108913498E-01	1,205494855447E+00
1024	1,065312031122E+00	1,366600749665E-01
2047	6,783086758487E-01	9,484053293856E-01
2048	8,447662291492E-01	-2,109778906923E-01

На рис. 5.33 показано расположение на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.5.4). На рисунке видно регулярные области, в которых нет точек принадлежащих  $x_i$ .

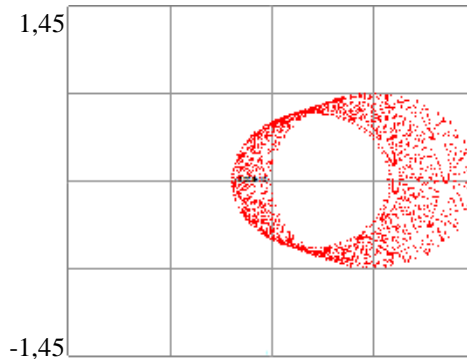


Рис. 5.33. Расположение  $x_i$  системы (5.5.4) на комплексной плоскости.

В табл 5.31 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.5.4)

Таблица 5.31

**Результаты проверки решения системы (5.5.4)**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	5,146917649289E+00 - i5,776315702368E-03	5,096000000000E+00	5,091764928865E-02 - i5,776315702368E-03
2	5,141485357091E+00 - i2,400172525431E-02	5,095000000000E+00	4,648535709126E-02 - i2,400172525431E-02
3	5,140761845142E+00 - i7,701870539422E-03	5,094000000000E+00	4,676184514170E-02 - i7,701870539422E-03
4	5,149383784899E+00 + i3,474759848518E-02	5,093000000000E+00	5,638378489918E-02 + i3,474759848518E-02
7	5,155707633583E+00 + i2,347663611635E-03	5,090000000000E+00	6,570763358287E-02 + i2,347663611635E-03
8	5,097320466829E+00 - i5,987384957423E-03	5,089000000000E+00	8,320466828860E-03 - i5,987384957423E-03
15	5,109905167197E+00 + i5,504146247310E-02	5,082000000000E+00	2,790516719726E-02 + i5,504146247310E-02
16	5,069630295888E+00 + i5,328235399441E-02	5,081000000000E+00	-1,136970411169E-02 + i5,328235399441E-02
31	5,146641119176E+00 + i2,850888909263E-02	5,066000000000E+00	8,064111917611E-02 + i2,850888909263E-02
32	5,155350539293E+00 + i4,443452674377E-02	5,065000000000E+00	9,035053929341E-02 + i4,443452674377E-02
...	...	...	...
1023	4,063938138222E+00 - i1,558520033582E-02	4,074000000000E+00	-1,006186177783E-02 - i1,558520033582E-02
1024	4,08724428029E+00 + i1,844691985379E-02	4,073000000000E+00	1,422442802935E-02 + i1,844691985379E-02
2047	3,125911649439E+00 - i4,419601728704E-02	3,050000000000E+00	7,591164943853E-02 - i4,419601728704E-02
2048	3,125364922533E+00 - i1,577766048052E-02	3,049000000000E+00	7,636492253333E-02 - i1,577766048052E-02

### 5.6. Решения БСЛАУ класса Ca

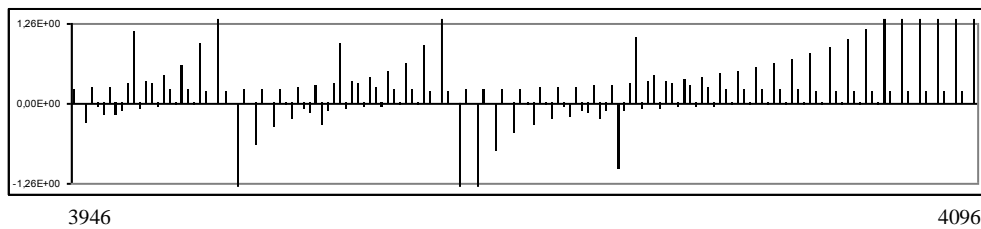
БСЛАУ класса Ca называем систему, диагональные элементы матрицы которой уменьшаются, а элементы правой части – постоянные.

**Пример 1**

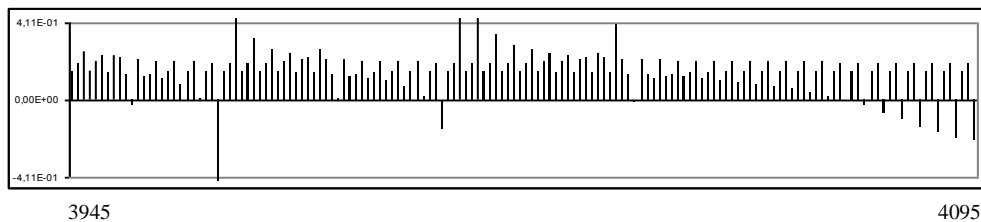
$$\begin{pmatrix} 1 & 5,096 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5,096 & 1 & 5,095 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5,095 & 1 & 5,094 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5,094 & 1 & 5,093 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 5,093 & 1 & 5,092 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,092 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.1)$$

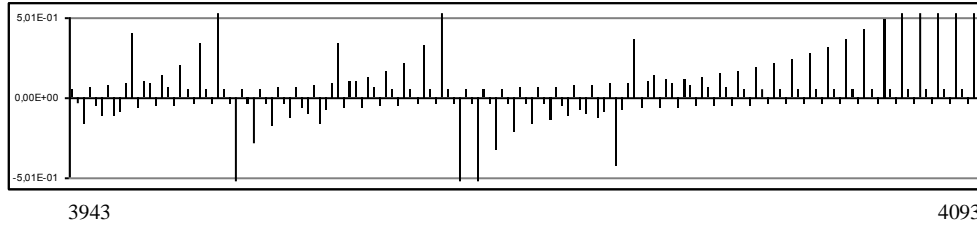
На рис. 5.34 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные методом “прогонки” для расширяющихся СЛАУ (5.6.1). Из рис. 5.34а и 5.34б видно, что аргумент комплексного  $x_1$  по модулю значительно больше аргумента комплексного  $x_2$ . Кроме того, можно обратить внимание, что графики “отсчетов” для  $x_1$  и  $x_4$ , показанные на рис. 5.34а и 5.34в весьма схожи.

а)  $\bar{x}_1$ :



б)  $\bar{x}_2$ :



в)  $\bar{x}_4$ :Рис. 5.34. Значения подходящих дробей для  $x_i$  ( $i=1,2,4$ ).

Во вторых колонках табл. 5.32 и 5.33 приведены результаты определения  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.6.1) методом “прогонки”. Как видно из графиков и таблиц, значения  $x_1$  и  $x_2$  систем “соседних” размеров, то есть размерность СЛАУ порядков  $n$  и  $n + 1$ , значительно отличается друг от друга и, следовательно, можно говорить о БСЛАУ (5.6.1) как о расходящейся в классическом смысле. Если при решении БСЛАУ использовать  $r/\phi$ -алгоритм, то из данных 3-й и 4-й колонок табл. 5.32 и 5.33 следует, что значения  $x_1$  и  $x_2$  с ростом размерности стремятся к пределам, только эти пределы – комплексные числа:

$$x_1 = 0,134e^{i1,012},$$

$$x_2 = 0,176e^{-i0,138}.$$

Таблица 5.32

**Определение комплексного значения  $x_1$  системы (5.6.1)**

Размерность системы, $n$	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_1^{(n)}$
1	1,000000000000E+00	---	---
2	1,640419947507E-01	4,050209806302E-01	0,000000000000E+00
3	8,032684655258E-02	2,361956635294E-01	0,000000000000E+00
4	-5,036182537284E-02	1,605015776247E-01	7,853981633974E-01
7	6,113822479120E-02	1,557440410228E-01	4,487989505128E-01
8	-1,510211954593E-01	1,551457013658E-01	7,853981633974E-01
15	8,766612200753E-03	1,276532672988E-01	6,283185307180E-01
16	1,838021141486E+00	1,508088560175E-01	5,890486225481E-01
31	1,469397292952E+01	1,535880272557E-01	6,080501910174E-01
32	1,778799409762E-01	1,542943995313E-01	5,890486225481E-01
...	...	...	...
1023	1,449971225866E-01	1,330642405012E-01	7,554562979307E-01
1024	4,232821066004E-02	1,329154869073E-01	7,547185476397E-01
2047	-2,061812192422E+01	1,323478273363E-01	8,118722587929E-01
2048	-2,623153573480E-02	1,322432782508E-01	8,130098175794E-01
4095	-1,271009991331E-02	1,348786572311E-01	1,012674555003E+00
4096	2,099781335782E+00	1,349690856358E-01	1,012427320005E+00

Таблица 5.33

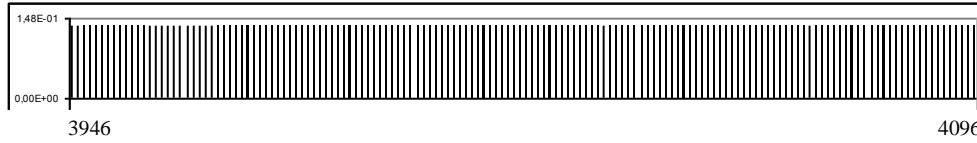
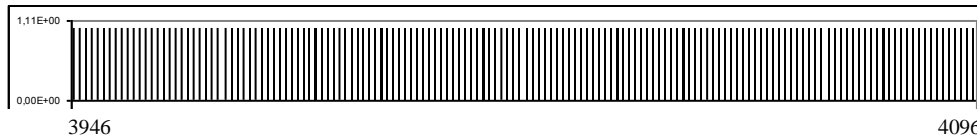
**Определение комплексного значения  $x_2$  системы (5.6.1)**

Размерность системы, $n$	Значение $x_2^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_2^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\phi_2^{(n)}$
2	1,640419947507E-01	---	---
3	1,804696140988E-01	1,720598601901E-01	0,000000000000E+00
4	2,061149578832E-01	1,827354808750E-01	0,000000000000E+00
7	1,842350422309E-01	1,682364724305E-01	0,000000000000E+00
8	2,258675815265E-01	1,754673847742E-01	0,000000000000E+00
15	1,945120462714E-01	1,801622535475E-01	0,000000000000E+00
16	-1,644468488002E-01	1,790693493341E-01	-2,094395102393E-01
31	-2,687200339387E+00	1,943779294858E-01	-2,094395102393E-01
32	1,613265421946E-01	1,932128237458E-01	-2,026833970058E-01
...	...	...	...

Окончание табл. 5.33

1023	1,677792145631E-01	1,788646003603E-01	-1,229586165789E-01
1024	1,879261753022E-01	1,788732413385E-01	-1,228384224278E-01
2047	4,242174631911E+00	1,793066397087E-01	-1,243739027081E-01
2048	2,013798147046E-01	1,793168093499E-01	-1,243131435959E-01
4095	1,987264717255E-01	1,766064520869E-01	-1,373583500226E-01
4096	-2,158126640074E-01	1,766150987655E-01	-1,380919847732E-01

На рис. 5.35 и 5.36 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$ , определённые из значений  $x_1$  при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

 $r_1^{(n)}$ :Рис. 5.35. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.6.1). $\varphi_1^{(n)}$ :Рис. 5.36. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.6.1).

В табл. 5.34 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.6.1).

Таблица 5.34

## Результаты проверки комплексных решений системы (5.6.1)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	9,629697629295E-01 - i9,422340075064E-03	1,000000000000E+00	-3,703023707049E-02 - i9,422340075064E-03
2	6,881062190427E-01 - i8,918191252644E-02	1,000000000000E+00	-3,118937809573E-01 - i8,918191252644E-02
4	7,618065490473E-01 - i9,371995279000E-02	1,000000000000E+00	-2,381934509527E-01 - i9,371995279000E-02
8	8,320953805840E-01 - i1,311515365421E-01	1,000000000000E+00	-1,679046194160E-01 - i1,311515365421E-01
16	9,583098121338E-01 - i2,411502085905E-02	1,000000000000E+00	-4,169018786615E-02 - i2,411502085905E-02
32	6,672123657062E-01 - i6,060062164476E-03	1,000000000000E+00	-3,327876342938E-01 - i6,060062164476E-03
64	7,039896900415E-01 - i2,380200800705E-02	1,000000000000E+00	-2,960103099585E-01 - i2,380200800705E-02
128	7,259938462382E-01 - i5,595138306265E-02	1,000000000000E+00	-2,740061537618E-01 - i5,595138306265E-02
256	7,943798338311E-01 - i1,153614467970E-01	1,000000000000E+00	-2,056201661689E-01 - i1,153614467970E-01
512	7,235809423555E-01 + i1,121439791185E-01	1,000000000000E+00	-2,764190576445E-01 + i1,121439791185E-01
1024	7,557212732451E-01 + i9,775638219430E-02	1,000000000000E+00	-2,442787267549E-01 + i9,775638219430E-02
2048	7,331862118381E-01 - i8,260794456169E-03	1,000000000000E+00	-2,668137881619E-01 - i8,260794456169E-03

Из данных “невязки”, приведённых в 4-й колонке табл. 5.34 можно заключить, что погрешности по некоторым строкам весьма значительны, то есть комплексные корни не всегда определяются с высокой точностью. Имеется несколько схем уточнения комплексных корней трёхдиагональной системы. Самая простая схема состоит в следующем. Принимаем, как исходное значение, комплексный  $x_1$ , найденный при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма из “отсчётов”, полученных из расширяющихся СЛАУ методом прогонки. Все остальные комплексные  $x_i$  находятся из уравнений с одним неизвестным. В табл. 5.35 приведены комплексные значения  $x_i$ , полученные методом “расширения”. В табл. 5.36 приведены результаты определения комплексных  $x_i$  системы (5.6.1) методом “деления”, отправляясь от полученного  $r/\varphi$ -алгоритмом значения  $x_1$ .

Таблица 5.35

**Определение  $x_1$   $r/\varphi$ -алгоритмом**

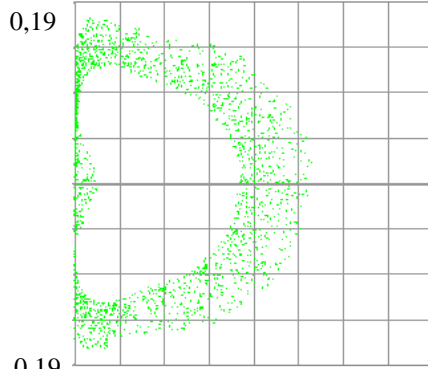
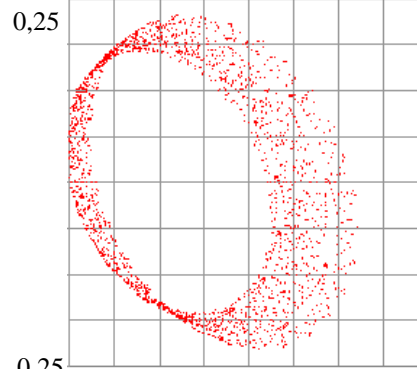
Номер $X1, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	1,349690856311E-01	1,012427320005E+00
2	1,766150987655E-01	-1,380919847732E-01
3	1,305324683870E-01	-1,345190992121E+00
4	6,197655038938E-02	1,545850868392E+00
7	1,142474252797E-01	-1,503970272794E+00
8	1,066540267834E-01	1,488972013367E+00
15	1,577400962562E-02	-1,589267229217E+00
16	1,346115804820E-01	1,096978566862E+00
...	...	...
511	1,336861412753E-01	1,426244517581E+00
512	1,903859671908E-01	2,269658290878E-01
1023	1,939070750463E-01	-4,537628946629E-01
1024	1,235398132121E-01	-1,568240524115E+00
2047	1,922201076314E-01	-9,532051856258E-01
2048	2,495217930380E-02	7,666160696900E-03

Таблица 5.36

**Определение  $x_1$   $r/\varphi$ -алгоритмом**

Номер $Xкон, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	1,349690856311E-01	1,012427320005E+00
2	1,835797741310E-01	-1,226668522544E-01
3	1,415538178110E-01	-8,909685529909E-01
4	4,420823495391E-02	1,647692766198E+00
7	1,036617929786E-01	-1,030532960833E+00
8	8,182115696499E-02	1,480461194202E+00
15	1,133612108666E-02	-1,298666626432E+00
16	1,313635472066E-01	1,069416520025E+00
...	...	...
511	1,088664294326E-01	1,304226420159E+00
512	1,817911980486E-01	2,747847356673E-01
1023	2,207343277591E-01	-3,797683507892E-01
1024	1,042408031895E-01	-1,002523765330E+00
2047	2,425895696589E-01	-6,442232723753E-01
2048	2,483534076437E-02	2,378791948699E-18

На рис 5.37 и 5.38 показано расположение на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.6.1), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом и “методом перебора”, соответственно.

Рис. 5.37. Расположение  $x_i$  на комплексной плоскости ( $r/\varphi$ -алгоритм).Рис. 5.38. Расположение  $x_i$  на комплексной плоскости (метод перебора).

В табл. 5.37 показаны результаты проверки комплексных решений системы (5.6.1), которые получены “методом деления”. Из четвёртой колонки табл. 5.37 следует, что “невязки”, то есть погрешности в решении системы (5.6.1), найденные “методом деления”, исходя из найденного  $r/\varphi$ -алгоритмом комплексного значения  $x_1$ , чрезвычайно малы и составляют величины порядка  $10^{-9} \div 10^{-10}$ . Тем не менее, следует иметь в виду, что эффективность “метода деления” полностью определяется тем, насколько точно установлено комплексное исходное значение  $x_1$  и для конечных СЛАУ с квадратными матрицами этот метод может приводить к существенным “невязкам” по последней строке системы.

Таблица 5.37

**Результаты проверки комплексных решений, полученные “ $r/\varphi$ -алгоритмом”**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	9,999999840720E-01 + i3,0933392254352E-09	1,000000000000E+00	-1,592802079104E-08 + i3,0933392254352E-09
2	1,000000004886E+00 + i1,205238965004E-08	1,000000000000E+00	4,886181410001E-09 + i1,205238965004E-08
3	1,000000000856E+00 - i8,257890975302E-10	1,000000000000E+00	8,560730856838E-10 - i8,257890975302E-10
4	9,99999863838E-01 - i1,465743090919E-09	1,000000000000E+00	-1,361618591337E-08 - i1,465743090919E-09
7	1,00000001430E+00 - i1,377420150324E-09	1,000000000000E+00	1,430119066464E-09 - i1,377420150324E-09
8	1,000000007584E+00 - i9,091176197810E-11	1,000000000000E+00	7,584477155586E-09 - i9,091176197810E-11
15	9,99999955235E-01 - i9,331343292301E-09	1,000000000000E+00	-4,476463047953E-09 - i9,331343292301E-09
16	1,000000011168E+00 - i1,615220358902E-09	1,000000000000E+00	1,116769512044E-08 - i1,615220358902E-09
31	1,000000009699E+00 + i7,129378691350E-03	1,000000000000E+00	9,699167971273E-09 + i7,129378691350E-03
32	1,000000004358E+00 + i6,024926758452E-09	1,000000000000E+00	4,357600961818E-09 + i6,024926758452E-09

Окончание табл. 5.37

...	...	...	...
1023	1,000000008982E+00 - i1,749893156809E-09	1,000000000000E+00	8,982294944296E-09 - i1,749893156809E-09
1024	9,999999912912E-01 + i4,389842922004E-09	1,000000000000E+00	-8,708774626247E-09 + i4,389842922004E-09
2047	9,99999995253E-01 + i4,322895806096E-03	1,000000000000E+00	-4,746968301837E-10 + i4,322895806096E-03
2048	1,000000001221E+00 - i9,832047025225E-10	1,000000000000E+00	1,221269789291E-09 - i9,832047025225E-10

**Пример 2.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,999999 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,999998 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,999997 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,999996 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,999995 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.2)$$

В табл. 5.38 и 5.39 приведены решения БСЛАУ (5.6.2), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом и “методом деления”, соответственно. Значение  $x_1$  в обеих таблицах одинаковые. В методе “ $r/\varphi$ -алгоритма” комплексные значения каждого  $x_i$  находились независимо из “отсчётов”, получаемых для  $x_i$  “прогонкой” при увеличении размерности решаемых СЛАУ. В “методе деления” для начала счёта бралось комплексное значение  $x_1$  и затем последовательным решением трёхчленных уравнений с одним неизвестным, то есть “методом деления” однозначно устанавливались все остальные неизвестные трёхдиагональной системы (5.6.2).

Следует заметить, что СЛАУ (5.6.2) весьма незначительно отличается от СЛАУ (5.6.3), не имеющей комплексных решений.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.3)$$

Таблица 5.38

**Определение  $x_i$   $r/\varphi$ -алгоритмом**

Номер $X_i, n$	Модуль комплексного числа, $\gamma_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	4,988353297510E-01	7,669903939428E-03
2	1,408118083693E-02	-1,571179915641E+00
3	4,956917354942E-01	2,378831760168E-02
4	2,820465995253E-02	-1,571180103078E+00
7	4,921688202154E-01	5,453620498897E-02
8	5,654486080970E-02	-1,571180478501E+00
15	4,859432161002E-01	1,262178332162E-01
16	1,135067099058E-01	-1,571181231555E+00
511	5,507188658274E-01	1,546266322807E+00
512	5,185223851410E-01	-1,529171319530E+00
1023	1,396511906060E-01	-1,236606086807E-01
1024	3,592335169289E-01	6,951783288126E-02
2047	3,167454942282E-01	-7,263975208788E-01
2048	2,374133009190E-01	1,481102246641E+00

Таблица 5.39

**Определение  $x_i$  “методом перебора”**

Номер $X_{кон}, n$	Модуль комплексного числа, $\gamma_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	4,988353297510E-01	7,669903939428E-03
2	8,007241442077E-03	-1,271791530280E+00
3	4,965945319166E-01	2,311535576202E-02
4	1,601480066626E-02	-1,271720251485E+00
7	4,924650032019E-01	5,440902595457E-02
8	3,203226007700E-02	-1,271356430740E+00
15	4,856017741640E-01	1,184303548411E-01
16	6,408077241304E-02	-1,269669745412E+00
511	3,868550925824E-01	9,751298378509E-01
512	4,286658750797E-01	-8,406374734575E-01
1023	1,413771855754E-01	-1,070366118744E-01
1024	3,594700433110E-01	6,602300565610E-02
2047	3,699777589385E-01	-5,125069373039E-01
2048	2,469962389775E-01	7,825427222883E-01

На рис 5.39 и 5.40. показано расположение на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.6.2), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом и “методом деления”, соответственно.

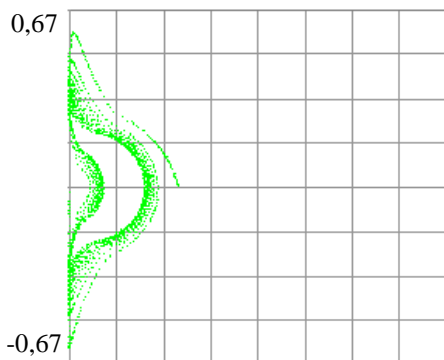


Рис. 5.39 Расположение  $x_i$  системы (5.6.2) на комплексной плоскости ( $r/\phi$ -алгоритм).

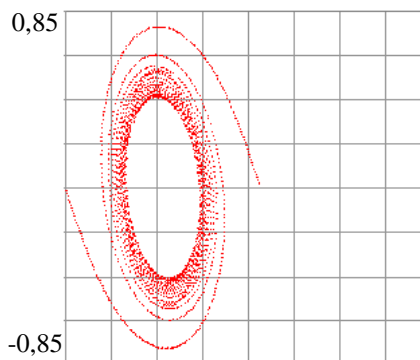


Рис. 5.40 Расположение  $x_i$  системы (5.6.2) на комплексной плоскости (метод перебора).

В табл. 5.40 и 5.41 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.6.2), полученные, соответственно,  $r/\phi$ -алгоритмом и “методом перебора”. Из сравнения данных, приведённых в колонках 4 табл. 5.38 и 5.39 видно, что “метод перебора” обеспечивает невязки чрезвычайной малости ( $\varepsilon = 10^{-8} \div 10^{-10}$ ).

Таблица 5.40

**Результаты проверки комплексных решений, полученные  $r/\phi$ -алгоритмом**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	9,976359130633E-01 - i6,429216704143E-03	1,000000000000E+00	-2,364086936653E-03 - i6,429216704143E-03
2	9,943613445448E-01 - i1,254580362433E-02	1,000000000000E+00	-5,638655455161E-03 - i1,254580362433E-02
3	9,910857634008E-01 - i1,870474056152E-02	1,000000000000E+00	-8,914236599182E-03 - i1,870474056152E-02
4	9,896202403612E-01 - i2,526279368287E-02	1,000000000000E+00	-1,037975963882E-02 - i2,526279368287E-02
7	9,828332604908E-01 - i4,525015526330E-02	1,000000000000E+00	-1,716673950921E-02 - i4,525015526330E-02
8	9,804672582947E-01 - i5,124802336712E-02	1,000000000000E+00	-1,953274170529E-02 - i5,124802336712E-02
15	9,640665544964E-01 - i9,040161043851E-02	1,000000000000E+00	-3,593344550356E-02 - i9,040161043851E-02
16	9,60090173805E-01 - i1,021582951058E-01	1,000000000000E+00	-3,999098261949E-02 - i1,021582951058E-01
31	9,108754301055E-01 - i1,987821684201E-01	1,000000000000E+00	-8,912456989452E-02 - i1,987821684201E-01
32	9,045043103720E-01 - i2,057302520746E-01	1,000000000000E+00	-9,549568962803E-02 - i2,057302520746E-01
...	...	...	...
1023	9,960190704982E-01 - i3,216086325582E-03	1,000000000000E+00	-3,980929501819E-03 - i3,216086325582E-03
1024	9,905253791989E-01 - i4,267266812679E-03	1,000000000000E+00	-9,474620801141E-03 - i4,267266812679E-03
2047	5,03919553764E-01 + i9,335658665971E-02	1,000000000000E+00	-4,96804446236E-01 + i9,335658665971E-02
2048	5,382121478922E-01 + i6,816596531233E-02	1,000000000000E+00	-4,617878521078E-01 + i6,816596531233E-02

Таблица 5.41

**Результаты проверки комплексных решений, полученные “методом перебора”**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	1,00000002004E+00 + i2,006926116311E-09	1,000000000000E+00	2,003852931894E-09 + i2,006926116311E-09
2	9,999998976885E-01 + i4,083638799676E-09	1,000000000000E+00	-1,023115087763E-07 + i4,083638799676E-09
3	9,99999896304E-01 + i5,127636564472E-10	1,000000000000E+00	-1,036959436926E-08 + i5,127636564472E-10
4	9,99999885568E-01 - i6,003406409316E-10	1,000000000000E+00	-1,144319637111E-08 - i6,003406409316E-10
7	9,99999836917E-01 - i1,026041114959E-08	1,000000000000E+00	-1,630828761531E-08 - i1,026041114959E-08
8	9,999999075689E-01 - i7,503985307231E-09	1,000000000000E+00	-9,243107384756E-08 - i7,503985307231E-09
15	9,99999599923E-01 - i2,848894971168E-08	1,000000000000E+00	-4,000766239403E-08 - i2,848894971168E-08
16	1,00000037822E+00 + i4,449703588379E-08	1,000000000000E+00	3,782209500789E-08 + i4,449703588379E-08
31	9,99999611206E-01 - i3,765943503025E-08	1,000000000000E+00	-3,887941250896E-08 - i3,765943503025E-08
32	1,000000081764E+00 + i4,827430635145E-08	1,000000000000E+00	8,176352231045E-08 + i4,827430635145E-08
...	...	...	...
1023	9,99999836357E-01 - i1,832338070094E-08	1,000000000000E+00	-6,136429942666E-08 - i1,832338070094E-08
1024	9,99999980121E-01 - i1,492254008346E-08	1,000000000000E+00	-1,987947197807E-09 - i1,492254008346E-08
2047	1,000000061210E+00 - i5,155638048528E-08	1,000000000000E+00	6,121047673401E-08 - i5,155638048528E-08
2048	9,99999647923E-01 - i4,180453001129E-09	1,000000000000E+00	-3,520770134853E-08 - i4,180453001129E-09



**Пример 3.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 41,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 41,96 & 1 & 41,95 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 41,95 & 1 & 41,94 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 41,94 & 1 & 41,93 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 41,93 & 1 & 41,92 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41,92 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.3)$$

В табл. 5.45 приведены комплексные значения  $x_i$ , полученные методом “расширения” с использованием г/ф-алгоритма. В табл. 5.46 приведены результаты определения комплексных  $x_i$  системы (5.6.3) методом перебора. Когда перебором устанавливаются значения комплексных  $x_i$ , на строке, обеспечивающие минимум невязки.

Таблица 5.41

**Определение  $x_i$  г/ф-алгоритмом**

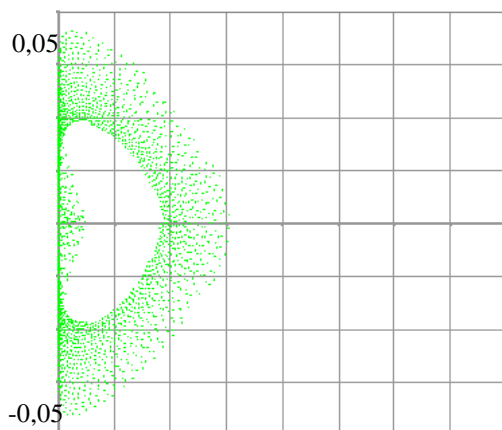
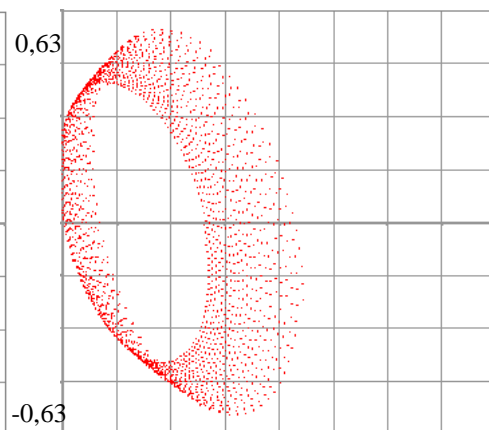
Номер $x_i, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	2,483306944833E-02	1,266301140400E+00
2	2,349931533694E-02	-1,687790925006E-02
3	2,481925829674E-02	-1,292242801330E+00
4	1,390794895019E-03	1,570412550512E+00
7	2,476424979069E-02	-1,313477613115E+00
8	2,780138483636E-03	1,570412175089E+00
15	2,466334839816E-02	-1,356841707075E+00
16	5,535449181493E-03	1,570411422035E+00
...	...	...
511	2,785021009156E-02	-1,398210227309E+00
512	7,091544158278E-03	1,565976589112E+00
1023	5,597082358446E-03	-1,439981798604E+00
1024	3,232407239642E-02	1,407736115845E+00
2047	2,176939096583E-02	1,529419252821E+00
2048	4,106096986987E-02	1,080928658263E+00

Таблица 5.42

**Определение  $x_i$  “методом перебора”**

Номер $x_{\text{кон}}, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	2,483306944833E-02	1,266301140400E+00
2	2,366152560788E-02	-2,386387196457E-02
3	2,848461656167E-02	-9,816715995906E-01
4	1,145998651320E-03	1,741090803253E+00
7	2,812986654316E-02	-9,971361601975E-01
8	2,287182190803E-03	1,729527519585E+00
15	2,728939947263E-02	-1,026995248892E+00
16	4,546456133565E-03	1,706147434578E+00
...	...	...
511	2,916935483954E-02	-1,012211822828E+00
512	5,545903007148E-03	1,555982965811E+00
1023	5,511967609058E-03	-9,881688232900E-01
1024	2,818945661784E-02	1,269889160897E+00
2047	1,566688282165E-02	1,23210070013E+00
2048	3,832690072067E-02	8,688644811417E-01

На рис. 5.41 и рис. 5.42 показано расположение на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.6.3).

Рис. 5.41. Расположение  $x_i$  системы (5.6.3) на комплексной плоскости (г/ф-алгоритм).Рис. 5.42. Расположение  $x_i$  системы (5.6.3) на комплексной плоскости (метод перебора).

В табл. 5.45 и 5.46 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.6.3), полученные, соответственно,  $r/\varphi$ -алгоритмом и “методом перебора”. Из сравнения “невязок”, приведённых в колонках 4 табл. 5.45 и 5.46, видно, что “метод перебора” обеспечивает малую погрешность в определении комплексных решений системы (5.6.3), составляющие величины порядка  $10^{-7} \div 10^{-9}$ .

Таблица 5.44

**Результаты проверки комплексных решений, полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом**

Номер строки, п	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	9,933360753862E-01 + i7,049352888772E-03	1,000000000000E+00	-6,663924613835E-03 + i7,049352888772E-03
2	6,221833119196E-01 - i7,369656454470E-03	1,000000000000E+00	-3,778166880804E-01 - i7,369656454470E-03
3	9,925026912783E-01 + i1,782996391123E-02	1,000000000000E+00	-7,497308721729E-03 + i1,782996391123E-02
4	6,243878431069E-01 - i1,499614688800E-02	1,000000000000E+00	-3,756121568931E-01 - i1,499614688800E-02
7	9,803581602336E-01 + i3,187503573957E-02	1,000000000000E+00	-1,964183976642E-02 + i3,187503573957E-02
8	6,292473297853E-01 - i2,946679144949E-02	1,000000000000E+00	-3,707526702147E-01 - i2,946679144949E-02
15	9,760333003898E-01 + i7,208432933740E-02	1,000000000000E+00	-2,396669961018E-02 + i7,208432933740E-02
16	6,348681529470E-01 - i5,854979161426E-02	1,000000000000E+00	-3,651318470530E-01 - i5,854979161426E-02
31	9,298580500500E-01 + i1,378136755873E-01	1,000000000000E+00	-7,014194995001E-02 + i1,378136755873E-01
32	6,652070786858E-01 - i1,109977826513E-01	1,000000000000E+00	-3,347929213142E-01 - i1,109977826513E-01
...	...	...	...
1023	5,084658171502E-01 + i6,292228958897E-02	1,000000000000E+00	-4,915341828498E-01 + i6,292228958897E-02
1024	9,332795381844E-01 - i4,201736919624E-02	1,000000000000E+00	-6,672046181557E-02 - i4,201736919624E-02
2047	4,411579602947E-01 - i1,837487724222E-01	1,000000000000E+00	-5,588420397053E-01 - i1,837487724222E-01
2048	7,659962160014E-01 + i1,433495332990E-01	1,000000000000E+00	-2,340037839986E-01 + i1,433495332990E-01

Таблица 5.45

**Результаты проверки комплексных решений, полученные “методом перебора”**

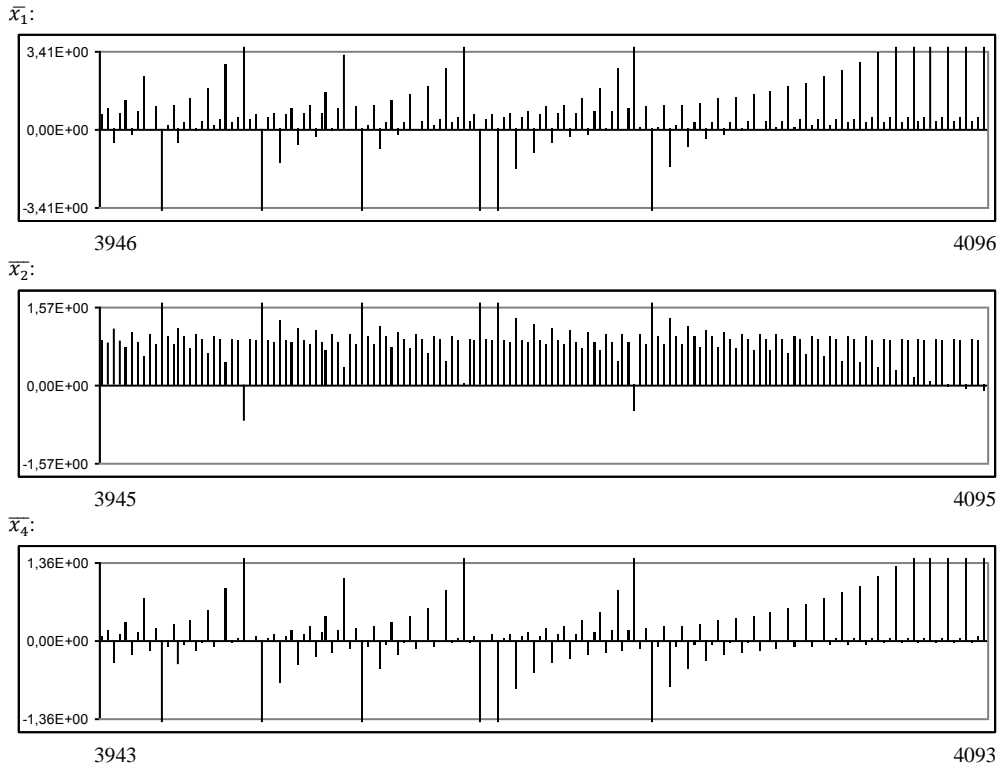
Номер строки, п	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	1,000000167995E+00 + i8,110451404357E-09	1,000000000000E+00	1,679953528102E-07 + i8,110451404357E-09
2	1,000000141691E+00 + i3,727665786201E-07	1,000000000000E+00	1,416906138553E-07 + i3,727665786201E-07
3	9,999999933883E-01 + i1,259303583026E-09	1,000000000000E+00	-6,611740137428E-09 + i1,259303583026E-09
4	9,999999606657E-01 + i5,937780753308E-07	1,000000000000E+00	-3,933427940772E-08 + i5,937780753308E-07
7	1,000000078289E+00 - i8,131165485907E-09	1,000000000000E+00	7,828860939130E-08 - i8,131165485907E-09
8	1,000000708787E+00 + i4,205375285530E-07	1,000000000000E+00	7,087866211481E-07 + i4,205375285530E-07
15	1,000000116101E+00 + i5,191258676319E-08	1,000000000000E+00	1,161012869738E-07 + i5,191258676319E-08
16	1,000000410305E+00 - i8,658864141075E-07	1,000000000000E+00	4,103045700731E-07 - i8,658864141075E-07
31	1,000000359807E+00 + i1,400018284604E-07	1,000000000000E+00	3,598066798524E-07 + i1,400018284604E-07
32	1,000000227011E+00 - i6,071350055788E-07	1,000000000000E+00	2,270109901742E-07 - i6,071350055788E-07
...	...	...	...
1023	1,000000749600E+00 + i1,708896091379E-07	1,000000000000E+00	7,496000817166E-07 + i1,708896091379E-07
1024	9,999999724559E-01 + i4,513273044379E-08	1,000000000000E+00	-2,754406663895E-08 + i4,513273044379E-08
2047	1,000000346414E+00 + i2,855075345226E-07	1,000000000000E+00	3,464140902591E-07 + i2,855075345226E-07
2048	9,999994144639E-01 + i3,883413103451E-08	1,000000000000E+00	-5,855361345557E-07 + i3,883413103451E-08

**5.7. Решение БСЛАУ класса  $Cc$** 

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 5,096 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5,096 & 1 & 5,095 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5,095 & 1 & 5,094 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5,094 & 1 & 5,093 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 5,093 & 1 & 5,092 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,092 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,096 \\ 5,095 \\ 5,094 \\ 5,093 \\ 5,092 \\ 5,091 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.7.1)$$

На рис. 5.43 показаны значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ , полученные методом “прогонки” для “расширяющихся” СЛАУ (5.7.1).

Рис. 5.43. Значения подходящих дробей для  $x_i$  ( $i=1,2,4$ ).

Во вторых колонках табл. 5.46 и табл. 5.47 приведены результаты определения  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.7.1) методом “прогонки” при “расширяющихся” СЛАУ (5.7.1), то есть систем изменяющейся размерности. В третьих и четвертых колонках этих же таблиц даны значения модулей  $r_n$  и аргументов  $\varphi_n$  комплексных корней  $x_1$  и  $x_2$ , полученных по вещественным “отсчетам” с помощью  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.46

**Определение значения модуля и аргумента комплексного  $x_1$  системы (5.7.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
1	5,096000000000E+00	---	---
2	8,357539139395E-01	2,063734950384E+00	0,000000000000E+00
3	4,102651831231E-01	1,204455706631E+00	0,000000000000E+00
4	-2,562791746353E-01	8,180341878404E-01	7,853981633974E-01
7	3,125374760250E-01	7,939347832950E-01	4,487989505128E-01
8	-7,685800390535E-01	7,907202541794E-01	7,853981633974E-01
15	4,601836306177E-02	6,506402553411E-01	6,283185307180E-01
16	9,353466578477E+00	7,685867780369E-01	5,890486225481E-01
31	7,466125099133E+01	7,827551205521E-01	6,080501910174E-01
32	9,036049360223E-01	7,862749478776E-01	5,890486225481E-01
...	...	...	...
1023	5,923094605412E-01	6,863314731116E-01	7,186047712024E-01
1024	3,382010902592E-01	6,858572907586E-01	7,179030087305E-01
2047	1,352433428822E+02	6,825376792571E-01	7,228579090575E-01
2048	9,051919470193E-02	6,818647198701E-01	7,225049510941E-01
4095	5,473700306468E-01	6,712149754679E-01	7,303531639115E-01
4096	5,715499554258E+00	6,715660536109E-01	7,301748550336E-01

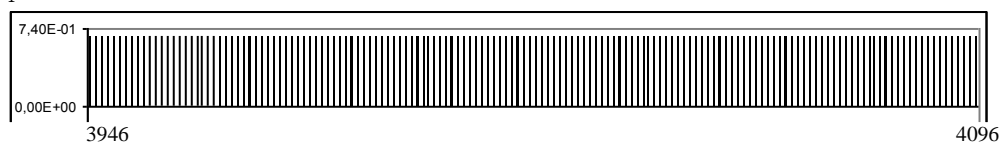
Таблица 5.47

**Определение значения модуля и аргумента комплексного  $x_1$  системы (5.7.1)**

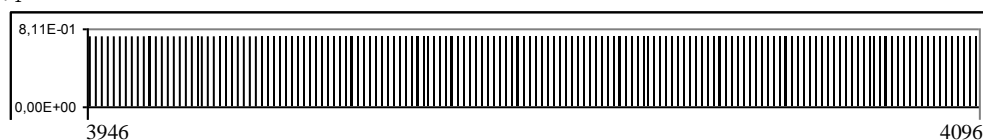
Размерность системы, n	Значение $x_1^{(n)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(n)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(n)}$
2	8,359980545645E-01	---	---
3	9,194927034688E-01	8,767520238278E-01	0,000000000000E+00
4	1,050290261899E+00	9,311528230692E-01	0,000000000000E+00
7	9,386700400265E-01	8,573278617719E-01	0,000000000000E+00
8	1,150820258841E+00	8,941548410581E-01	0,000000000000E+00
15	9,909697089753E-01	9,182975647798E-01	0,000000000000E+00
16	-8,354526252898E-01	9,125275652573E-01	-2,094395102393E-01
31	-1,365095192138E+01	9,905376299424E-01	-2,094395102393E-01
32	8,226834897915E-01	9,846224792075E-01	-2,026833970058E-01
...	---	---	---
1023	8,837697290932E-01	9,152318559633E-01	-1,198846511644E-01
1024	9,336340089758E-01	9,152496661016E-01	-1,197674618671E-01
2047	-2,553911752006E+01	9,151043735261E-01	-1,197674618671E-01
2048	9,822372066911E-01	9,151360226053E-01	-1,197089530923E-01
4095	8,925882985387E-01	9,003774048869E-01	-1,097332070013E-01
4096	-1,215658465970E-01	8,999372492959E-01	-1,104735878185E-01

На рис. 5.44 и 5.45 показаны значения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$ , определённые  $r/\varphi$ -алгоритмом при учёте различного числа “отсчётов”  $x_1$ , полученных “прогонкой” из “расширяющихся” СЛАУ (5.7.1).

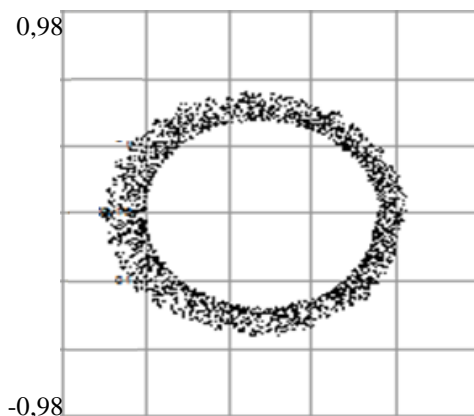
$r_1^{(n)}$ :

Рис. 5.44. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.7.1).

$\varphi_1^{(n)}$ :

Рис. 5.45. Значения  $\varphi_1^{(n)}$  для  $x_1$  системы (5.7.1).

На рис. 5.46 показано расположение на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.7.1).

Рис. 5.46. Расположение  $x_i$  системы (5.7.1) на комплексной плоскости

В табл. 5.48 приведены результаты проверки комплексных решений системы (5.7.1).

Таблица 5.48

*Результаты проверки решений системы (5.6.1)*

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	5,058478979509E+00 - i5,767631710639E-02	5,096000000000E+00	-3,752102049140E-02 - i5,767631710639E-02
2	5,094446060355E+00 - i5,802825400138E-02	5,095000000000E+00	-5,539396453067E-04 - i5,802825400138E-02
4	5,098665235968E+00 - i8,465747217947E-02	5,093000000000E+00	5,665235967693E-03 - i8,465747217947E-02
8	5,105059785410E+00 - i5,372387134910E-02	5,089000000000E+00	1,605978541037E-02 - i5,372387134910E-02
16	5,051597717081E+00 - i3,352396471457E-02	5,081000000000E+00	-2,940228291890E-02 - i3,352396471457E-02
32	5,081097523632E+00 - i7,385480581442E-02	5,065000000000E+00	1,609752363195E-02 - i7,385480581442E-02
64	5,020261279432E+00 - i9,088649652199E-02	5,033000000000E+00	-1,273872056781E-02 - i9,088649652199E-02
128	4,970175991501E+00 - i6,873056272823E-02	4,969000000000E+00	1,175991500847E-03 - i6,873056272823E-02
256	4,832449364198E+00 - i6,103349633745E-02	4,841000000000E+00	-8,550635802012E-03 - i6,103349633745E-02
512	4,563287843481E+00 - i2,394736632764E-02	4,585000000000E+00	-2,171215651940E-02 - i2,394736632764E-02
1024	4,043448271699E+00 - i6,240832234304E-02	4,073000000000E+00	-2,955172830087E-02 - i6,240832234304E-02
2048	3,034176612028E+00 - i6,791665031093E-02	3,049000000000E+00	-1,482338797225E-02 - i6,791665031093E-02

**5.8. О некоторых особенностях решения СЛАУ методом цепных дробей**

В четвертой главе рассматривался алгоритм решения СЛАУ, использующий цепные дроби. Этот алгоритм реализуется в два этапа. На первом этапе СЛАУ решается классическим итерационным методом, называемым методом простых итераций. Полагая полученные значения для каждой неизвестной  $x_i$  частичными суммами ряда, который сходится, когда сходится итерационный процесс, и расходится – в противном случае. Затем по этим частичным суммам определяются коэффициенты рядов, которыми представляются неизвестные  $x_i$  системы. Эти ряды могут сходиться медленно и даже расходиться. Для суммирования, то есть определения их значений по коэффициентам рядов, строятся, так называемые, соответствующие цепные дроби. После того как найдены коэффициенты соответствующих цепных дробей, следует просуммировать ряд, то есть для каждого  $x_i$  получим его значение. Было установлено, что соответствующие цепные дроби, представляющие  $x_i$  СЛАУ с матрицей размерности  $n \times n$  – конечные и содержат  $2n$  звеньев. Значения  $x_i$ , устанавливаемые конечными цепными дробями, совпадают со значением  $x_i$  исходной СЛАУ, получаемые точными алгоритмами, например, алгоритмом Гаусса. Таким образом, “метод цепных дробей” – это точный метод решения СЛАУ, который базируется на итерационном алгоритме, например, на алгоритме “простых итераций”. Неизвестные  $x_i$  представляются конечными цепными дробями, имеющим  $2n$  звеньев:

$$x_i = \omega_0^{(i)} + \frac{\omega_1^{(i)}}{1} + \frac{\omega_2^{(i)}}{1} + \frac{\omega_3^{(i)}}{1} + \dots + \frac{\omega_{2n-1}^{(i)}}{1} + \frac{\omega_{2n}^{(i)}}{1}. \quad (5.8.1)$$

Здесь надо отметить, что конечность цепных дробей не имеет для дальнейшего обсуждения принципиального значения, так как на практике размерность решаемых СЛАУ может достигать очень значительных величин, порядка  $10^5$ - $10^6$ , причем, эти границы имеют тенденцию к постоянному росту. Существенно то, что цепные дроби, которые определяют неизвестные  $x_i$ , содержат значительное число звеньев. Цепные дроби, включающие достаточно большое число звеньев, будем рассматривать как “бесконечные”. Именно для бесконечных цепных дробей определяются понятия сходимости и расходимости.

Выше уже обсуждался вопрос об уместности использования в практических исследованиях понятий сходимости и расходимости для конечных цепных дробей, имеющих больше число звеньев. Следует отметить одну особенность конечных “расходящихся” цепных дробей, представляющих  $x_i$  системы. Особенность эта заключается в том, что значение последней подходящей “расходящейся” цепной дроби, т.е. значение  $P_{2n}/Q_{2n}$ ,

совпадает с точным значением  $x_i$ , полученным прямым методом решения СЛАУ, например, методом Гаусса. Расходящаяся бесконечная цепная дробь, по определению, не может иметь вещественного значения, так как предела значений её подходящих не существует.

Итак, при решении СЛАУ размерностью  $n \times n$  конечные цепные дроби, т.е. подходящие с номером  $P_{2n}/Q_{2n}$ , вне зависимости, являются ли они “сходящимися” или “расходящимися”, определяют точные значения неизвестной  $x_i$  системы, полученные прямым методом. Однако между “сходящимися” и “расходящимися” цепными дробями есть принципиальное различие. “Сходящаяся” конечная цепная дробь допускает с ростом номера подходящих  $P_n/Q_n$  все более точное определение  $x_i$ . В этом смысле можем говорить о сходимости с итерационным алгоритмом, когда имеет место уточнение решения  $x_i$ . Если решение  $x_i$  представляет “расходящаяся” цепная дробь, то хотя значение  $P_{2n}/Q_{2n}$  такой конечной цепной дроби совпадает с точным значением  $x_i$ , получаемой прямым методом, сказать, что последовательность подходящих конечной цепной дроби, определяющей неизвестную  $x_i$ , то есть последовательность значений подходящих дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots, \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$$

даёт значения чисел, приближающихся к значению искомой  $x_i$ , нельзя. Более того, значения соседних подходящих могут не только заметно отличаться по величине, но иметь разные знаки (рис. 5.47).

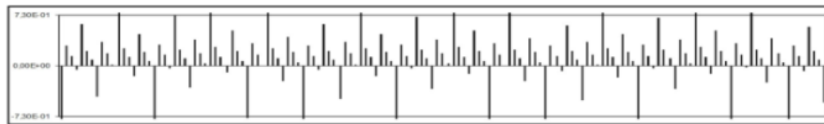


Рис. 5.47. Значения подходящих расходящихся цепных дробей.

Наличие подходящих с различными знаками – это основной признак “комплексности” цепной дроби, т.е. комплексного значения расходящейся цепной дроби, звенья которой имеют, тем не менее, вещественные значения. Процесс суммирования расходящихся в классическом смысле бесконечных непрерывных дробей, имеющих комплексные значения, достаточно хорошо отработан при решении различных задач вычислительной математики [74-77]. При решении СЛАУ  $r/\varphi$ -алгоритм должен быть распространён на конечные “расходящиеся” цепные дроби. Нелишне здесь отметить, что  $r/\varphi$ -алгоритм должен рассматриваться как некий алгоритм усреднения, поэтому этот алгоритм даёт “точное” комплексное значение цепной дроби при значительном числе подходящих дробей. Другими словами, для определения комплексных значений цепных дробей необходимо большое число подходящих дробей. Это замечание не относится к так называемым ультрапериодическим цепным дробям, то есть к расходящимся цепным дробям, значения подходящих дробей которых периодически повторяются [54]. Например, к ультрапериодическим цепным дробям относится цепная дробь:

$$e^{i\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots,$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/4}{\sin n\pi/4}, n = 1, 2, \dots,$$

$$(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\infty, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \infty),$$

В ультрапериодических цепных дробях вся информация о значении цепной дроби имеется в подходящих, составляющих один период.

Итак, рассмотрим два случая: “сходящейся” и “расходящейся” цепной дроби, представляющей  $x_i$  СЛАУ. Коэффициенты соответствующей цепной дроби по коэффициентам ряда определяются по формулам Хейлгермана-Стилтьеса [16]. Коэффициенты  $c_n$  ряда в методе цепных дробей определяются из последовательности  $\{\bar{x}_i\}$ , получаемой при итерационном процессе решения исходной СЛАУ, т.е. коэффициенты ряда определяются элементами матрицы исходной системы. В зависимости от элементов исходной матрицы цепная дробь, определяющая  $x_i$ , может быть как “сходящейся”, так и “расходящейся”.

Если конечная цепная дробь (5.8.1) – сходящаяся, то последовательность  $\{P_n/Q_n\}$  приближает с ростом числа подходящих  $m$  значение  $x_i$  все точнее и точнее, достигая при  $m = 2n$  точного значения. Скорость приближения зависит от скорости сходимости цепной дроби, которая определяется коэффициентами  $\omega_i$  соответствующей цепной дроби, а в конечном счете, – определяется элементами  $a_{ij}$  исходной матрицы СЛАУ, а также коэффициентами правой части системы. Таким образом, в случае “сходящейся” цепной дроби “метод цепных дробей” имеет признаки итерационного алгоритма, однако имеет и принципиальные от него отличия.

Если классические итерационные алгоритмы дают, в случае сходимости, бесконечную последовательность приближений, не достигая ни при каком значении  $n$  точного значения  $x_i$ , то “итерационный” алгоритм, порождаемый методом цепных дробей, в случае “сходящейся” цепной дроби дает фиксированное число приближений, а именно  $2n-1$  приближений, достигая при подходящей с номером  $2n$  точного значения  $x_i$ , который совпадает со значением  $x_i$ , получаемым при применении прямых методов решения СЛАУ, например, методом Гаусса или методом “прогонки”. “Метод прогонки”, как известно, представляет собой метод исключения Гаусса, применимый к ленточным системам линейных алгебраических уравнений.

Алгоритм “прогонки” можно записать в форме цепных дробей, если воспользоваться формулами Крамера. Так как квадратную матрицу общего вида можно эквивалентными преобразованиями привести к матрице Хессенберга или к трехдиагональной матрице, то можно записать цепными дробями Хессенберга или обыкновенными цепными дробями решения СЛАУ с матрицей общего вида. И здесь так же возможны два случая: цепные дроби оказываются сходящимися, которые обеспечивают все более точные приближения с ростом числа используемых подходящих дробей, и “расходящимися”, когда подходящие дроби не приближают решение. Точное решение  $x_i$  обеспечивается, как и в случае “сходящихся” цепных дробей, на последней  $2n$ -й подходящей конечной цепной дроби.

Алгоритм Гаусса с прямым и обратным ходом не позволяет строить цепные дроби размерности  $n$  для каждой неизвестной и поэтому не предполагает приближений к  $x_i$ . Хотя возможно построение из алгоритма Гаусса иных алгоритмов вычисления неизвестных, дающих приближения к  $x_i$ .

Рассмотрим второй случай, то есть случай “расходящихся” цепных дробей. Подходящие дроби вплоть до  $P_{2n}/Q_{2n}$  не дают приближений к неизвестной  $x_i$ , которая представляется цепной дробью. Если  $x_i$  не приближается цепными дробями, то из этого следует, что данная СЛАУ не может быть решена итерационным методом и для определения её значения следует использовать  $\tau/\varphi$  – алгоритм, который введен для определения значений расходящихся бесконечных цепных дробей.

Введем определение сходимости конечных цепных дробей по аналогии с тем, как было сделано для бесконечных цепных дробей:

Конечная цепная дробь:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (5.8.2)$$

сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное  $z = r_n e^{i\varphi_n}$ , причём, модуль  $r_n$  и аргумент  $\varphi_n$  определяются формулами:

$$\sqrt[m]{\prod_{i=1}^m |P_i/Q_i|} = r_0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (5.8.3)$$

$$\pi \frac{k_m}{m} = |\varphi_n|, \quad (5.8.4)$$

где

$P_m/Q_m$  – значение  $m$ -й подходящей дроби.

$k_m$  – число отрицательных подходящих дробей из совокупности, включающей  $m$  подходящих.

Если начиная с некоторого номера  $i$  все подходящие конечной цепной дроби имеют один и тот же знак, и притом, последовательность подходящих сходится к значению  $P_n/Q_n$ , то считаем, что цепная дробь имеет вещественное значение, равное значению последней подходящей дроби т.е. значению  $P_n/Q_n$ .

Если подходящие конечной цепной дроби не стремятся к значению последней подходящей, причем, подходящие меняют свой знак, то конечная цепная дробь (5.8.2) приближенно имеет комплексное значение  $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ , где значения  $r_n$  и  $\varphi_n$  определяются формулами (5.8.3) и (5.8.4). Комплексное число, соответствующее значению расходящейся конечной цепной дроби (5.8.2), может быть установлено тем точнее, чем большее число звеньев имеет эта цепная дробь.

Любой точный или прямой метод решения СЛАУ можно сделать по структуре итерационным, точнее, с одинаковым числом “отчетов” для  $x_i$ . Число итераций связано с размерностью СЛАУ. Метод “цепных дробей” – это итерационный метод с  $2n - 1$  “отсчётами”, так как на  $2n$ -й итерации метод обращается в точный метод. Построить “квазиитерационный” метод из точного метода, например, из метода Гаусса, – не тривиальная задача, допускающая не единственное решение.

Известны методы решения СЛАУ, которые допускают получение серии уточнений решений перед тем, как дать точные решения. Например, методы сопряженных градиентов и ортогонализации, приводят к итерационным процессам, которые обрываются после  $n$  шагов, давая точное решение. Можно предположить, что существуют “комплексные” СЛАУ, когда во всех, так называемых, точных методах с фиксированным числом итераций не имеет места последовательного приближения к точному значению  $x_i$ . Отсутствие приближений в точных методах с фиксированным числом итераций – признак того, что СЛАУ имеют “фактически” комплексные решения, устанавливаемые из приближений, или подходящих дробей, при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. Следует повторить, что с высокой точностью комплексные корни СЛАУ с вещественными коэффициентами могут быть найдены, если СЛАУ достаточно большой разрядности.

На практике следует пользоваться точными методами с ограниченным числом итераций. Дело в том, что используя прямые методы, в которых нет приближений к точному решению, например, методом Гаусса или методом прогонки, невозможно обнаружить не только приближения к  $x_i$ , но что еще более важно, в таких прямых методах отсутствует возможность найти комплексные решения СЛАУ. В этом слабость таких прямых методов и их бесперспективность, если речь идет о задачах, которые имеют комплексные решения. Такие задачи практика выдвигает постоянно, но специалисты по прикладной математике эти задачи решить не в состоянии, ибо наталкиваются на расходящиеся разностные схемы, которые как раз связаны с умением разбираться с комплексными СЛАУ, т.е. СЛАУ с вещественной матрицей, но имеющих комплексные ре



шения. Поэтому прямые методы СЛАУ, которые не позволяют в процессе решения получать “отчеты” значений неизвестных, или уйдут из профессиональных вычислительных пакетов, или должны быть переработаны таким образом, чтобы получать текущие приближения  $x_i$  или “отчеты”, без которых невозможно определить комплексные неизвестные.

Прямые методы решения СЛАУ, не дающих приближений или “отчетов”, такие как алгоритм Гаусса или “прогонки”, могут быть использованы при решении систем линейных алгебраических уравнений. В [67] был предложен способ решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, который был назван как “метод расширения”. Этот метод был описан в этой главе.

Сравним объём вычислений при нахождении комплексных решений СЛАУ достаточно большой размерностью, которой следует выполнить при использовании “метода цепных дробей” и алгоритма решения БСЛАУ, “методом расширения”, предполагающего многократные решения расходящихся СЛАУ одним из известных алгоритмов, например, алгоритмом Гаусса. Предположим “комплексная” СЛАУ содержит  $n$  уравнений. Конечная цепная дробь, представляющая  $x_i$  имеет  $2n$  звеньев. Граф алгоритма Рутисхаузера при вычислении  $2n$  коэффициентов цепных дробей содержит  $2n$  вершин. При вычислении одной вершины следует выполнить 2 операции. Следовательно, при определении конечной цепной дроби с  $2n$  звеньями надо выполнить  $n^2$  арифметических операций. Для нахождения цепных дробей для  $n$  неизвестных следует выполнить  $n^3$  операций. К этим вычислительным затратам следует добавить операции, необходимые при выполнении итераций для исходной СЛАУ по методу Якоби. Кроме того, необходимо выполнение операции вычитания для построения исходных  $n$  рядов, которые по алгоритму Рутисхаузера преобразуются в соответствующие цепные дроби.

Особенность “метода цепных дробей” в сравнении с «методом расширения» при решения БСЛАУ состоит в том, что в «методе цепных дробей» определение комплексных значений неизвестных  $x_i$  ведется непосредственно из системы размерности  $n$ . В методах «расширения» решаются подряд системы от размерности СЛАУ  $2 \times 2$  до СЛАУ больших размерностей, так как для определения комплексного значения  $x_i$  необходимо расширять систему с тем, что бы было достаточное число вещественных отсчетов  $x_i$  для определения с приемлемой точностью комплексного значения  $x_i$ .

Решением тестовых комплексных СЛАУ двумя описанными способами дают близкие результаты, однако “метод цепных дробей” существенно эффективней в смысле вычислительных затрат, нежели “метод расширения”. Очевидно, нужны более детальные сравнительные исследования двух алгоритмов решения “комплексных” СЛАУ.

Суть предложенной концепции решения СЛАУ, как конечных, так и «бесконечных», состоит в анализе решений СЛАУ, точнее, “отчетов” или “подходящих дробей” с тем, чтобы установить, какова природа решений СЛАУ – вещественная или комплексная. Современный подход к решению СЛАУ не рассматривает анализ “приближений” решений, если не брать итерационные алгоритмы, где имеют место приближения. В прямых методах приближения особое внимание не уделяется, отмечается лишь, что в некоторых прямых методах решения СЛАУ, например, в методах сопряженных градиентов или в методе ортогонализации, можно наблюдать приближения, которые обрываются на  $n$ -м шаге, давая точные решения. Следует отметить, что не все прямые методы можно рассматривать как итерационные с конечным числом итераций. Это замечание, например, относится к методу Гаусса или похожим алгоритмам. Исходя из формул Крамера, можно независимо для каждой неизвестной  $x_i$  построить конструкции, которые бы представляли неизвестные  $x_i$  в виде непрерывных дробей Хессенберга, когда  $x_i$  представляется отношением определителей от матриц Хессенберга порядка  $n$  и  $n-1$ . Эти непрерывные дроби дают  $n$  приближений к  $x_i$ , так как непрерывная дробь для каждой неизвестной  $x_i$  имеет  $n$  подходящих. Такой алгоритм решения СЛАУ, который

назовем *алгоритмом Хессенберга*, имеет некоторое сходство с прямым ходом алгоритма Гаусса. Но говорить, что алгоритм Хессенберга есть некоторая модификация метода Гаусса было бы большой натяжкой.

Алгоритм Хессенберга можно кратко записать следующим образом.

1 этап. По формулам Крамера записываются отношения определителей для неизвестных системы

$$AX=B \quad (5.8.4)$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

2 этап. Преобразование формул Крамера в непрерывные дроби Хессенберга

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(i)} & \alpha_{12}^{(i)} & \alpha_{13}^{(i)} & \dots & \alpha_{1n}^{(i)} \\ -1 & \alpha_{22}^{(i)} & \alpha_{23}^{(i)} & \dots & \alpha_{2n}^{(i)} \\ 0 & -1 & \alpha_{33}^{(i)} & \dots & \alpha_{3n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{22}^{(i)} & \alpha_{23}^{(i)} & \dots & \alpha_{2n}^{(i)} \\ -1 & \alpha_{33}^{(i)} & \dots & \alpha_{3n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \quad (5.8.5)$$

Отношение определительной (5.8.5) – это непрерывная дробь Хессенберга. Для определения числителей  $P_n$  знаменателей  $Q_n$  можно использовать линейные рекуррентные соотношения  $n$ -го порядка.

Если система имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов, то используется метод прогонки. Прогонка, также как и метод Гаусса, – эффективный последовательный алгоритм решения СЛАУ, где нет приближений для неизвестной  $x_i$ .

Рассмотрим алгоритм решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей, дающей приближение для  $x_i$ .

1 этап. Записывается решение СЛАУ с 3-х диагональной матрицей по формуле Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (5.8.6)$$

2. этап. Преобразование (5.8.6) к отношениям трехдиагональных определителей, которые эквивалентны обыкновенным цепным дробям:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(i)} & \alpha_{12}^{(i)} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & \alpha_{22}^{(i)} & \alpha_{23}^{(i)} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \alpha_{33}^{(i)} & \alpha_{34}^{(i)} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_{44}^{(i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{22}^{(i)} & \alpha_{23}^{(i)} & 0 & \dots \\ -1 & \alpha_{33}^{(i)} & \alpha_{34}^{(i)} & \dots \\ 0 & -1 & \alpha_{44}^{(i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \quad (5.8.7)$$

Формула (5.8.7) – это запись обыкновенной цепной дроби через отношения трехдиагональных определителей  $n$  и  $n-1$  порядков. Формулы Крамера могут быть приведены к отношению определителей, аналогичных по структуре определителям Хессенберга, что приводит к «восходящим» непрерывным дробям.

Прямые методы решения СЛАУ, описываемые формулами (5.8.5) и (5.8.6) – есть ни что иное как запись решения СЛАУ непрерывными дробями. Каждое неизвестное  $x_i$  записывается непрерывной дробью Хессенберга или непрерывной дробью Якоби с  $n$  звеньями, где  $n$ -размерность СЛАУ. Таким образом, прямые методы решения СЛАУ записаны непрерывными дробями. Несмотря на то, что понятия сходимости и расходимости относятся к бесконечным непрерывным дробям, мы определим эти понятия и для конечных непрерывных дробей, беря эти термины в кавычки с тем, чтобы указывать, что рассматриваются конечные непрерывные дроби.

Конечная цепная дробь с  $n$  звеньями

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \quad (5.8.8)$$

будет “сходящейся”, если последовательность значений подходящих сходится к значению цепной дроби  $P_n/Q_n$ . Если последовательность значений подходящих  $P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots, P_m/Q_m$  не приближается к значению последней подходящей дроби  $P_n/Q_n$  разложения (5.7.8), то такую конечную цепную дробь будем называть “расходящейся”. Для определения значений “расходящихся” конечных дробей, будем использовать несколько модифицированный  $r/\varphi$ -алгоритм, описываемый формулами (5.8.2) и (5.8.3).

Таким образом, предполагается, что СЛАУ (5.8.4) с действительными коэффициентами может иметь как действительные решения, так и комплексные. Следует заметить, что “точные” комплексные неизвестных  $x_i$  могут быть установлены, если имеем дело с бесконечными СЛАУ, т.е. если размерность СЛАУ неуклонно растет. Если цепные дроби, представляющие  $x_i$ , “сходятся”, то значение  $x_i$  определяются значением последней подходящей дроби, причем значение в этом случае будет установлено точно, как то имеет место в прямых алгоритмах решения СЛАУ.

Итак, можно сделать некоторые выводы.

- при решении СЛАУ с вещественными коэффициентами достаточно больших размерностей возможны как вещественные, так и комплексные решения СЛАУ;
- комплексные решения СЛАУ могут быть установлены из рассмотрения длинной последовательности “подходящих дробей”, или “отчетов”;
- в вычислительной практике, должны использоваться алгоритмы решения СЛАУ, которые допускают получение  $n$  приближений для каждой неизвестной  $x_i$ ;
- профессиональные пакеты решения СЛАУ должны разрабатываться из расчёта, что СЛАУ могут иметь как вещественные, так и комплексные решения.

Комплексные  $x_i$  могут определяться двумя подходами. В первом подходе рассматриваются значения подходящих “расходящихся” цепных дробей, фиксированной размерности, определяемой размерность решаемой СЛАУ. Во втором методе  $x_i$  устанавливается решением последовательно “расширяющихся” СЛАУ. Очевидно, первый подход более экономичный, так как результат берётся из СЛАУ фиксированной размерности.

Повысить точность определения комплексных  $x_i$  системы в методе “фиксированной размерности СЛАУ” можно увеличивая размерность решаемой СЛАУ.

### 5.9. Построение сходящихся разностных схем при помощи $r/\varphi$ -алгоритма

Если при измельчении сетки решение  $u^{(h)}$  разностной краевой задачи  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  сходится к решению  $u$  дифференциальной краевой задачи  $Lu = f$ , то бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к которой приводится дифференциальное уравнение при решении сеточным методом, является *сходящаяся*. Другими словами, если дифференциальное уравнение при замене его разностным уравнением приводит к сходящейся БСЛАУ, то такая разностная схема *сходится* и дифференциальное уравнение может быть решено с любой точностью разностной схемой при измельчении сетки. Таким образом,

есть классы дифференциальных уравнений, которые могут быть решены какой-либо разностной схемой, а есть дифференциальные уравнения, которые в принципе не могут быть решены непосредственно разностными схемами.

К “расходящимся” разностным уравнениям приводят исходные дифференциальные уравнения, которые имеют комплексные решения, и которые поэтому не могут быть решены классическими приемами теории разностных схем, сводящими исходную задачу к БСЛАУ с действительными коэффициентами. Если какая – либо разностная схема, которая строится по исходному дифференциальному уравнению, приводит к расходящимся БСЛАУ, то бесполезно менять разностные схемы для этого дифференциального уравнения в надежде найти сходящуюся разностную схему. “Виновата” в расходимости не разностная схема, а исходное дифференциальное уравнение, имеющее решение, лежащее в комплексной плоскости.

Ситуация в разностных схемах напоминает ситуацию с формулами Эйткена [68]. Все комплексные или действительные корни уравнения  $n$ -го порядка с действительными коэффициентами можно записать отношениями определителей матриц Тейлора, причем, элементы определителей – действительные числа, то есть коэффициенты исходного алгебраического уравнения  $n$ -го порядка. БСЛАУ, которые порождаются разностными схемами, – это аналог формул Эйткена. Чтобы найти комплексные корни БСЛАУ, элементы которой действительные числа, надо использовать, как и в случае формул Эйткена,  $r/\varphi$ -алгоритм.

В [10] отмечается, что обладание свойством сходимости – фундаментальное требование, которое предъявляется к разностной схеме

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (5.9.1)$$

при численном решении дифференциальной краевой задачи  $Lu = f$ . Если сходимость имеет место, то с помощью разностной схемы (5.9.1) можно найти решение  $u$  с любой наперед заданной точностью, выбирая для этого  $h$  достаточно малым. Далее в [10] следует фраза: “Точно сформулировав понятие сходимости, мы подошли к центральному вопросу, – как построить сходящуюся разностную схему для вычисления решения дифференциальной краевой задачи”. Постановка вопроса, по-видимому, не совсем точна: нельзя построить сходящуюся в классическом смысле разностную схему, если дифференциальное уравнение не допускает такого по своей природе. Аналогично, если полином имеет комплексные корни, то нельзя предложить “сходящиеся” формулы Эйткена, если при этом не использовать  $r/\varphi$ -алгоритм.

В [10] доказывается теорема о том, что если разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную задачу и устойчива, то при измельчении сетки решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной. И далее отмечается: “В этой теореме содержится указание на способы построения сходящихся разностных схем для численного решения дифференциальных краевых задач: надо строить аппроксимирующие разностные схемы и выбирать среди них устойчивые”. Здесь также можно добавить, что построение сходящейся в классическом смысле разностной схемы определяется не искусством программиста, а исходным дифференциальным уравнением. Обращает внимание то обстоятельство, что в литературе не обсуждается вопрос о природе самой расходимости разностных схем. Чем обуславливается возникновение расходящихся разностных схем?

Формулы Крамера – это аналог формул Эйткена, которые используются для определения нулей полинома через его коэффициенты. Будем рассматривать формулы Крамера для бесконечных систем алгебраических уравнений. Для разностных схем при исследовании аппроксимации и сходимости рассматриваются именно БСЛАУ, так как при  $h \rightarrow 0$  такие системы возникают автоматически. Уже отмечалось, что формулы Эйткена, как и формулы Крамера, в случае действительных коэффициентов, не могут дать комплексных корней непосредственно. Для этого надо использовать  $r/\varphi$ -алгоритм. Наличие у полинома комплексных корней известно, по крайней мере, со времен Кардано. Тот факт, что бесконечные СЛАУ с действительными элементами могут иметь комплексные корни, был обнаружен, по-видимому, недавно [67]. Впервые это было установлено для БСЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Выше было показано, что расходящиеся в классическом смысле разностные схемы можно зачастую перевести в разряд сходящихся, если при решении расходящихся бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, порождаемых расходящимися разностными схемами, использовать  $r/\varphi$ -алгоритм. Поэтому предлагается иное, отличное от традиционного, определение сходимости разностных схем:

Будем говорить, что решение  $u^{(h)}$  разностной краевой задачи

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

при измельчении сетки сходится к решению  $u$  дифференциальной краевой задачи

$$Lu = f,$$

если 
$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \rightarrow 0, \text{ при } h \rightarrow 0,$$

причем, каждая компонента  $u_i^{(h)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) находится из решений при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма “расширяющихся” СЛАУ,  $n \rightarrow \infty$ , порождаемых используемой разностной схемой. Компонента  $u_i^{(h)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) имеет в общем случае комплексное значение  $u_i^{(h)} = r_i e^{i\varphi_i}$ , если существуют пределы

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_i^m |\bar{u}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9.2)$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (5.9.3)$$

где  $\bar{u}_i^{(m)}$  – значение вещественной неизвестной  $\bar{u}_i$ , полученное из решения стандартным алгоритмом СЛАУ фиксированной размерности  $m$ ,

$k_i^{(m)}$  – число отрицательных значений  $\bar{x}_i$ , полученных стандартным алгоритмом решения СЛАУ из общего количества  $m$  значений  $\bar{x}_i$ , найденных из расширяющейся системы.

Аналогично введем определение аппроксимации разностной схемы.

Разностная задача

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

аппроксимирует задачу  $Lu = f$  на решении  $u$ , если в равенстве

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

невязка  $\delta f^{(h)}$ , возникающая при подстановке  $[u]_h$  в разностную краевую задачу  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ , стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ :

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} = \| L_h [u]_h - f^{(h)} \|_{F_h} \rightarrow 0,$$

причем, каждая компонента  $u_i^{(h)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) находится при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма из решений “расширяющихся” СЛАУ,  $m \rightarrow \infty$ , порождаемых используемой разностной схемой. Компонента  $u_i^{(h)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) имеет в общем случае комплексное значение  $u_i^{(h)} = r_i e^{i\varphi_i}$ , если существуют пределы (5.9.2) и (5.9.3).

Будем рассматривать “расширяющиеся” СЛАУ, то есть системы уравнений, размерность которых неограниченно возрастает. Решениями таких “расширяющихся” систем могут быть как вещественные, так и комплексные величины [67]. Чтобы найти комплексные решения СЛАУ, надо получить большое число “подходящих”, то есть решений  $\bar{u}_{i,n}^{(h)}$  “расширяющихся” СЛАУ. Решения  $\bar{u}_{i,n}^{(h)}$  этих расширяющихся, но всякий раз фиксированной размерности СЛАУ, могут находиться известными прямыми методами за конечное число арифметических операций, например, с использованием алгоритма

прогонки в случае СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Если получим из “расширяющейся” СЛАУ при помощи  $r/\varphi$  - алгоритма  $n$  первых комплексных неизвестных системы, то эти неизвестные будут с некоторой погрешностью, в зависимости от размерности “расширяющейся” СЛАУ, удовлетворять конечной системе линейных алгебраических уравнений, включающей первые  $n$  уравнений “расширяющейся” системы. Как и в случае нахождения комплексных нулей полинома, если комплексные неизвестные СЛАУ имеют аргумент кратный  $\pi$ , число арифметических операций для нахождения таких неизвестных будет фиксированным, как фиксированным будет и число различных по значениям комплексных неизвестных таких СЛАУ. В [67] приведены СЛАУ, имеющие периодические комплексные решения.

При расходящихся СЛАУ добавление лишь одного узла в цифровую сетку может привести к совершенно новому набору решений. И еще об одном аспекте решения расходящихся бесконечных СЛАУ. При решении систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f,$$

где  $A$  – матрица  $m \times m$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  – искомый вектор,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$  – заданный вектор, предполагается, что определитель матрицы  $A$  отличен от нуля, так что решение существует и единственно. Необходимо отметить, что если значение  $x_m$  – комплексная величина, причем, аргумент комплексного корня  $r; e^{i\varphi}$  кратен числу  $\pi$ , то есть  $\varphi_i = k/n$ , то определители матриц таких систем с периодичностью  $k$  при расширении исходной системы будут принимать нулевые, а также экстремальные значения ( $\pm \infty$ ).

Ультрапериодические непрерывные дроби, подходящие которых периодически принимают экстремальные значения ( $0, \pm \infty$ ) подробно рассматривались в публикациях [54, 55]. Так что хрестоматийное требование: “определитель матрицы  $A$  отличен от нуля” – не имеет места при решении расходящихся бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Если в дифференциальном уравнении производные заменяются разностными аналогами и затем “измельчается” шаг сетки, то нередко случаи, когда сходимости не наблюдаются. Уже отмечалось, что решения бесконечных систем могут быть комплексными, хотя известные методы решения СЛАУ не улавливают комплексность, когда та “прячется” в СЛАУ с действительными элементами, между тем как  $r/\varphi$  - алгоритм устанавливает комплексные корни БСЛАУ, если они имеются. Когда производные заменяем известными разностными формулами, то переходим через разностные схемы к СЛАУ с действительными коэффициентами, откуда комплексные корни без “спецсредств” уже не извлечь. В уже ставшем классическим учебнике по численным методам [10] авторы пишут: “Можно ли вообще путем измельчения сетки получить методом сеток приближенное решение, сколь угодно близкое к точному решению? Естественно, что интерес могут представлять только такие разностные схемы, с помощью которых можно получить приближенное решение, достаточно близкое к точному, – это так называемые *сходящиеся* разностные схемы. Разностная схема называется *сходящейся* при заданном способе стремления  $h$  к нулю, если решения системы разностных уравнений стремятся при этом к точному решению задачи для дифференциального уравнения”.

На рис. 5.48 показана схема решения задач математической физики методом конечных разностей с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Немного о терминологии. Термин “расширяющиеся системы линейных алгебраических уравнений” встречается в литературе. С термином “расширяющиеся” СЛАУ связаны выражения: “измельчение шагов сетки”, “неограниченно сгущенные сетки”, “бесконечное дробление сетки” и другие подобные словосочетания [10].

Как отмечалось в [10], к решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики. Об этом же писал и академик Г.И. Марчук [31]: “Предмет вычислительной математики, как правило, связан с методами сведения задач к системам алгебраических уравнений и их по-

следующему решению”. То есть, по мнению академика, вычислительная математика пойдёт на СЛАУ. Поэтому исследования бесконечных систем линейных алгебраических уравнениям нам представляются особенно актуальными.

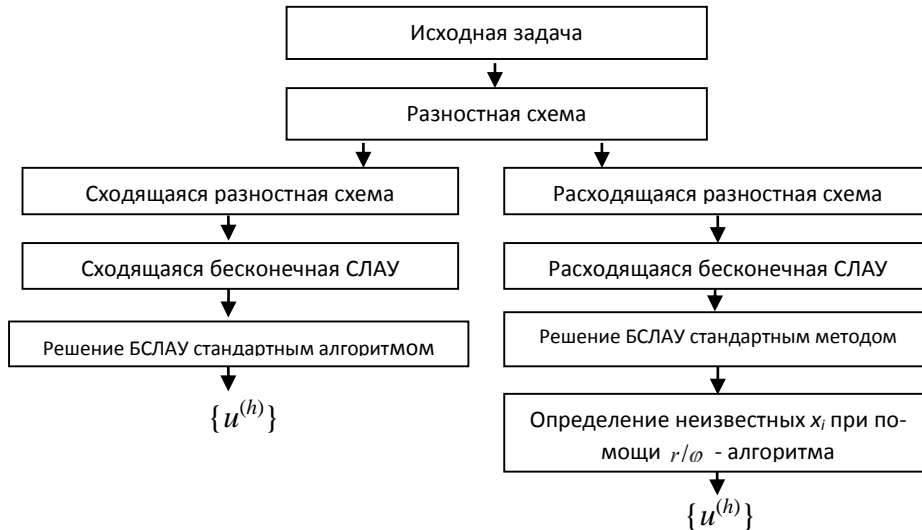


Рис. 5.48. Схема решения задач математической физики с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Возникает вопрос: как трактовать комплексные решения БСЛАУ? Некоторые подходы к решению проблемы даёт сам  $r/\varphi$ -алгоритм, то есть формулы (5.9.2) и (5.9.3). Как уже отмечалось,  $r/\varphi$ -алгоритм устанавливает комплексное число из наблюдений – длинной серии “отсчетов”, описываемых вещественными числами. Комплексные решения – это параметры периодического процесса, описываемого расходящейся в классическом смысле разностной схемой. Аргумент  $\varphi_0$  характеризует скорость протекания этого периодического процесса. Так что решения “периодической” задачи на самом деле описываются вещественными параметрами  $r$  и  $\varphi$ . Поэтому, видимо, следует брать словосочетание “комплексные решения” в кавычки.

Можно сказать, что высшая математика отличается от элементарной тем, что в элементарной математике результаты приводятся в “конечном виде”, в то время как в высшей математике вводится переменная величина, то есть движение. Движение даёт возможность “вести наблюдения”, получать “отсчеты”. Наблюдения, то есть отсчеты, порой показывают, что вычислительный процесс не сходится, другими словами, нет никакого результата в классическом понимании сходимости. Если отсчеты берутся как значения серии подходящих непрерывных дробей той или иной структуры, то расходящиеся в классическом смысле непрерывные дроби могут быть просуммированы, то есть установлены значения выражений, из которых проистекают эти непрерывные дроби. Использование  $r/\varphi$ -алгоритма позволяет из “отсчетов” установить с любой точностью комплексное значение выражения, порождающего эти отсчеты. Это в концепции тройственности А.З. Никипорца – эллиптический случай.

Расходящиеся непрерывные дроби Стилтеса, подходящие дроби которых колеблются в конечных пределах, а точнее, – четные и нечетные подходящие которых стремятся к различным пределам, связаны с гиперболическим случаем. Обыкновенные непрерывные дроби имеют линейный граф. Ветвящиеся непрерывные дроби, описываются графом типа дерева. Такие расходящиеся в классическом смысле ветвящиеся непрерывные дроби могут иметь множество локальных пределов.

Явления природы столь разнообразны и затейливы, что можно полагать, что вещественные отсчеты при их расшифровке могут свидетельствовать не только о комплексных числах, то и о числах с иными свойствами.

### 5.10. БСЛАУ с периодическими решениями

Приведем сводку периодических в смысле значений подходящих цепных дробей

$$x^2 - 2 \cos \varphi x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\varphi}, \quad x_2 = e^{-i\varphi}.$$

Комплексный корень представляется цепной дробью

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots.$$

Подходящие дроби разложения определяются формулой

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При различных значениях аргумента  $\varphi$  имеют место ультрапериодические цепные дроби

$$1. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{2} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

$$e^{i\pi/2} = i = 0 - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} - \dots - \frac{1}{0} - \dots.$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/2}{\sin n\pi/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (0, -\infty, 0, \infty).$$

$$2. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{3} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$e^{i\pi/3} = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \dots - \frac{1}{1} - \dots.$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/3}{\sin n\pi/3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(1, 0, -\infty, 1, 0, \infty).$$

$$3. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{4} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$e^{i\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots.$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/4}{\sin n\pi/4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\infty, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \infty).$$

$$4. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{5} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{5}}.$$



$$e^{i\pi\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \dots - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \dots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/5}{\sin n\pi/5}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 0, -\infty, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 0, \infty \right).$$

$$5. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{6} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$e^{i\pi\beta} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/6}{\sin n\pi/6}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\left( \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\infty, \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \infty \right).$$

$$6. \quad x^2 - 2 \cos \frac{5\pi}{12} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{5\pi}{12}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

$$e^{i5\pi/2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} - \dots - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} - \dots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)5\pi/12}{\sin n5\pi/12}, \quad n=1,2,\dots$$

$$7. \quad x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{2\pi}{5}}.$$

$$e^{i2\pi\beta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \dots - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \dots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)2\pi/5}{\sin n2\pi/5}, \quad n=1,2,\dots$$

$$8. \quad x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{10} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{10}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{10}}.$$

$$e^{i\pi/10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \dots}}}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/10}{\sin n\pi/10}, \quad n = 1, 2, \dots$$

9.  $x^2 - 2 \cos \frac{\pi}{12} x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad x_2 = e^{-i\frac{\pi}{12}}.$

$$e^{i\pi/12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1) - \dots - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1) - \dots}}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/12}{\sin n\pi/12}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, “комплексные” цепные дроби, то есть цепные дроби, имеющие своими значениями комплексные числа, могут быть периодическими в смысле величин подходящих дробей. Для этого цепная дробь должна представлять комплексный корень квадратного уравнения, аргумент которого определяется соотношением  $\varphi = \pi/s$ , где  $s$  - рациональное число.

Рассмотрим предельные случаи

а)  $\varphi = 0, \quad x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i0} = 1, \quad x_2 = e^{-i0} = 1.$

$$e^{i0} = 1 = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \dots}}}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)0}{\sin n0} = \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

б)  $\varphi = \pi, \quad x^2 + 2x + 1 = 0, \quad x_1 = e^{i\pi} = -1, \quad x_2 = e^{-i\pi} = -1.$

$$e^{i\pi} = -1 = (-2) - \frac{1}{(-2) - \frac{1}{(-2) - \dots - \frac{1}{(-2) - \dots}} = -2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \dots}}}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi}{\sin n\pi} = -\frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\left(-2, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \dots, -\frac{n+1}{n}, \dots\right).$$

### Пример 1.

Рассмотрим БСЛАУ, диагональные элементы которой близки к значению  $\sqrt{2}$ , то есть к значению  $2 \cos \frac{\pi}{4}$ .

$$\begin{pmatrix} 1,41421 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,41421 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,41421 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,41421 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,41421 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,41421 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.10.1)$$

Ранее рассматривалась цепная дробь

$$e^{i\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots \quad (5.10.2)$$

Цепная дроби (5.10.2) – это, так называемая, ультрапериодическая цепная дробь, у которой значения подходящих дробей повторяются:

$$\left( \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\infty, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \infty \right)$$

БСЛАУ (5.10.1) имеет восемь значений решений, которые также периодически повторяются:

$$x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2, x_3 = \mu_3, x_4 = \mu_4, x_5 = \mu_5, x_6 = \mu_6, x_7 = \mu_7, x_8 = \mu_8 \\ x_9 = \mu_1, x_{10} = \mu_2, x_{11} = \mu_3, x_{12} = \mu_4, x_{13} = \mu_5, x_{14} = \mu_6, x_{15} = \mu_7, x_{16} = \mu_8$$

В табл. 5.49 приведены значения периодически повторяющихся решений системы (5.10.1)

Таблица 5.49

Значения “периодических” решений системы (5.10.1)

$x_i$	Координата x	Координата y	$x_i$	Координата x	Координата y
1	5,004507623426E-01	2,072934930623E-01	13	8,569730966872E-02	-2,066667437691E-01
2	2,936795223060E-01	-2,933417600438E-01	14	2,922196170099E-01	2,923320602672E-01
3	8,584683057662E-02	2,075904234946E-01	15	4,989998013811E-01	-2,065800114011E-01
4	5,853235887030E-01	0,000000000000E+00	16	4,534557474125E-09	-1,178098511077E-05
5	8,581759884916E-02	-2,069572717352E-01	17	4,988854495747E-01	2,066451192844E-01
6	2,926406495846E-01	2,927530346079E-01	18	2,927713886138E-01	-2,924333507771E-01
7	4,997115561655E-01	-2,068748897515E-01	19	8,557475634773E-02	2,069338306435E-01
8	2,266080741264E-09	-5,898921163212E-06	20	5,837234066470E-01	0,000000000000E+00
9	4,996017649621E-01	2,069418268328E-01	21	8,558747637480E-02	-2,064014305697E-01
10	2,931865204047E-01	-2,928486654918E-01	22	2,918342731793E-01	2,919467886589E-01
11	8,569940539425E-02	2,072345886892E-01	23	4,983489847105E-01	-2,063103604465E-01
12	5,844878309598E-01	0,000000000000E+00	24	6,806276868718E-09	-1,764835060981E-05

На рис 5.49 и 5.50 показаны периодические решения БСЛАУ (5.10.1) и (5.10.3).

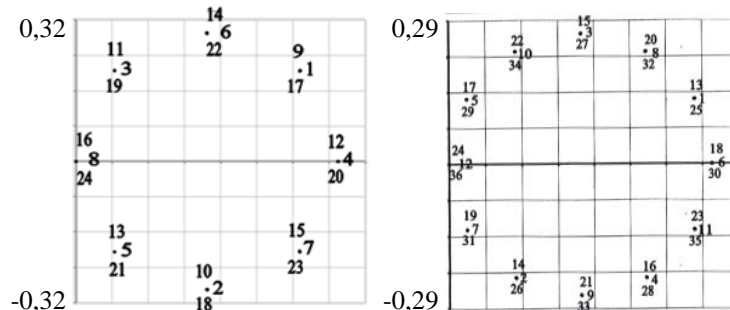


Рис. 5.49. Решения системы (5.10.1). Рис. 5.50. Решения системы (5.10.3).

**Пример 2.**

Рассмотрим БСЛАУ, диагональные элементы которой близки к значению  $\sqrt{3}$ , то есть к значению  $2 \cos \frac{\pi}{6}$ .

$$\begin{pmatrix} 1,73205 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,73205 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,73205 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,73205 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,73205 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,73205 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.10.3)$$

Имеет место цепная дробь

$$e^{i\pi/6} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots \quad (5.10.4)$$

Цепная дробь (5.10.4) имеет периодически повторяющиеся значения подходящих дробей:

$$\left( \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\infty, \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \infty \right)$$

БСЛАУ (5.10.3) имеет всего 12 различных решений, которые периодически повторяются:

$$x_1 = x_{13}, \quad x_2 = x_{14}, \quad x_3 = x_{15}, \dots, \quad x_{12} = x_{24}.$$

В табл. 5.50 приведены значения периодически повторяющихся решений системы (5.10.3).

Таблица 5.50

Значения “периодических” решений системы (5.10.3)

Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината	Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината
1	5,004605772785E-01	1,339608810714E-01	17	3,587076869697E-02	1,338715312836E-01
2	1,340890249212E-01	-2,322490039009E-01	18	5,347882130917E-01	0,000000000000E+00
3	2,682803895493E-01	2,680745994937E-01	19	3,584218741172E-02	-1,336961978988E-01
4	4,022966437100E-01	-2,321974619804E-01	20	4,011783103292E-01	2,314143620304E-01
5	3,592874075861E-02	1,340878859631E-01	21	2,673960167375E-01	-2,673960167375E-01
6	5,355009066289E-01	0,000000000000E+00	22	1,337542845973E-01	2,315317885832E-01
7	3,588926537003E-02	-1,338720066741E-01	23	4,990151377106E-01	-1,335045071908E-01
8	4,017140705909E-01	2,317240135471E-01	24	1,998692581422E-09	-5,182514334715E-06
9	2,677513314298E-01	-2,677513314298E-01	25	4,989956509569E-01	1,335679508474E-01
10	1,339336585743E-01	2,318426929940E-01	26	1,336989665019E-01	-2,315734029008E-01
11	4,996801772769E-01	-1,336830355201E-01	27	2,674933059870E-01	2,672869102030E-01
12	9,977404801111E-10	-2,594715553407E-06	28	4,011214912103E-01	-2,315187843079E-01
13	4,996623378623E-01	1,337468099347E-01	29	3,582225156846E-02	1,336904628950E-01
14	1,338763697678E-01	-2,318806743708E-01	30	5,341397426114E-01	0,000000000000E+00
15	2,678515687997E-01	2,676455039108E-01	31	3,579941328877E-02	-1,335364423287E-01
16	4,016561573638E-01	-2,318275848349E-01	32	4,006907540365E-01	2,311325143087E-01

**Пример 3.**

Рассмотрим БСЛАУ, диагональные элементы которой близки к  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$ , то есть к значению  $2 \cos \frac{\pi}{12}$ .

$$\begin{pmatrix} 1,93185 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,93185 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,93185 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,93185 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,93185 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,93185 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.10.5)$$

Можно записать цепную дробь:

$$e^{i\pi/12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1) - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)} - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)} - \dots - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)} - \dots \quad (5.10.6)$$

Ультрапериодическая цепная дробь (5.10.6) имеет “период” 24, то есть

$$x_1 = x_{25}, x_2 = x_{26}, x_3 = x_{27}, \dots, x_{12} = x_{48}.$$

В табл. 5.51 приведены координаты периодических ( $T=24$ )  $x_m$  решений системы (5.10.5).

Таблица 5.51

Значения “периодических” решений системы (5.10.5)

Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината	Номер $x_m$	Абсцисса	Ордината
1	5,006332843574E-01	6,603983872121E-02	17	1,883881707570E-01	-2,455122440736E-01
2	3,414426820284E-02	-1,273304536150E-01	18	2,543998841969E-01	2,544978708032E-01
3	4,347135971576E-01	1,801619799585E-01	19	3,203938269116E-01	-2,456181541775E-01
4	1,273895692542E-01	-2,205148931266E-01	20	1,272443039657E-01	2,203935994424E-01
5	3,205957514481E-01	2,461973578239E-01	21	4,344444317071E-01	-1,797566565858E-01
6	2,548840287995E-01	-2,545905989673E-01	22	3,408246972417E-02	1,272302038395E-01
7	1,888719122496E-01	2,461752935725E-01	23	5,001255145601E-01	-6,554853495513E-02
8	3,823019510289E-01	-2,205263618200E-01	24	7,517342678917E-09	-1,949211026977E-05
9	7,464582988526E-02	1,802109748836E-01	25	4,999188575761E-01	6,594636324101E-02
10	4,755041540629E-01	-1,271824591105E-01	26	3,410073350379E-02	-1,271675296933E-01
11	8,668991277615E-03	6,594547499083E-02	27	4,340881994906E-01	1,799033665972E-01
12	5,083316886523E-01	0,000000000000E+00	28	1,272170875976E-01	-2,202155553364E-01
13	8,653902526363E-03	-6,579810145905E-02	29	3,201302302354E-01	2,458410193968E-01
14	4,742500616656E-01	1,269771505052E-01	30	2,545322457787E-01	-2,542374927448E-01
15	7,440513499542E-02	-1,797276867816E-01	31	1,885942886817E-01	2,458136318461E-01
16	3,812894068151E-01	2,200723197803E-01	32	3,817676939424E-01	-2,202170279544E-01

Из табл. 5.51, в которой даны координаты на комплексной плоскости решений  $x_m$  БСЛАУ (5.10.5), видно, что решения периодически повторяются:

$$x_1 \approx x_{25}, x_2 \approx x_{26}, x_3 \approx x_{27}, x_4 \approx x_{28},$$

$$x_5 \approx x_{29}, x_6 \approx x_{30}, x_7 \approx x_{31}, x_8 \approx x_{32} \dots$$

На рис 5.51 показаны периодические решения БСЛАУ (5.10.5)

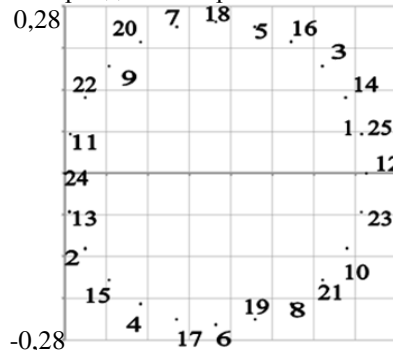


Рис. 5.51. Расположение решений системы (5.10.5) на плоскости.

**Пример 4.**

Рассмотрим БСЛАУ, диагональные элементы которой близки к “1”, то есть к значению  $2 \cos \frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{pmatrix} 1,001 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,001 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,001 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,001 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,001 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,001 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.10.7)$$

Имеет место цепная дробь:

$$e^{i\pi/3} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\dots}}} \quad (5.10.8)$$

Подходящие дроби ультрапериодической цепной дроби (5.10.8):

$$(1, 0, -\infty, 1, 0, \infty)$$

В табл. 5.52 приведены координаты периодических решений  $x$  системы (5.10.7)

Таблица 5.52

**Значения “периодических” решений системы (5.10.7)**

$x_i$	Координата $x$	Координата $y$	$x_i$	Координата $x$	Координата $y$
1	4,490627208017E-01	2,960847372905E-01	13	4,515932123190E-01	2,948840700943E-01
2	4,806800337605E-01	-2,406374484107E-01	14	4,789850994197E-01	-2,424556732645E-01
3	-3,175971578177E-05	-5,368809818748E-04	15	-1,469721275496E-04	-2,686997176487E-03
4	4,496939699599E-01	2,957866911285E-01	16	4,522281463242E-01	2,945803624141E-01
5	4,802568996540E-01	-2,410914867877E-01	17	4,785603752826E-01	-2,429111039243E-01
6	-6,234001939091E-05	-1,074020516155E-03	18	-1,728023688949E-04	-3,225177753095E-03
7	4,503261306643E-01	2,954872325104E-01	19	4,528640179899E-01	2,942752345147E-01
8	4,798333642049E-01	-2,415458681413E-01	20	4,781352602031E-01	-2,433668913432E-01
9	-9,173768620281E-05	-1,611419268308E-03	21	-1,974369066860E-04	-3,763620389602E-03
10	4,509592092918E-01	2,951863594810E-01	22	4,535008341044E-01	2,939686844809E-01
11	4,794094299356E-01	-2,420005958284E-01	23	4,777097569140E-01	-2,438230391184E-01
12	-1,199494749522E-04	-2,149077921394E-03	24	-2,208724312256E-04	-4,302325843713E-03

На рис. 5.52 и рис. 5.53 показано расположение решений системы (5.10.7)

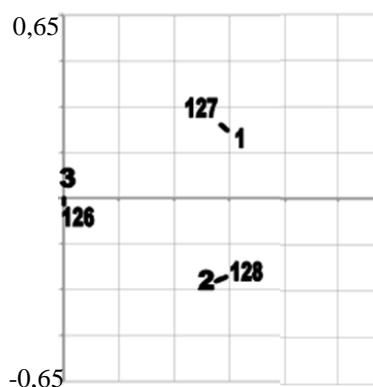
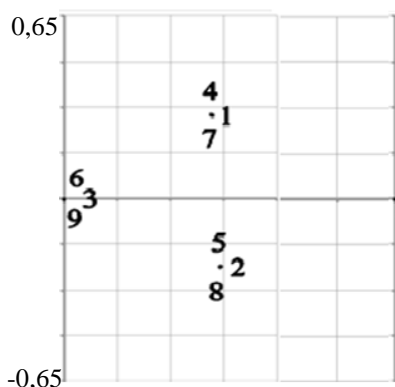


Рис. 5.52. Расположение  $x_1$ - $x_9$  системы (5.10.7). Рис. 5.53. Расположение  $x_1$ - $x_9$  системы (5.10.7).

Из рис. 5.52 и 5.53 видно, что координаты  $x_i$  несколько “разъезжаются”. Трансформация координат  $x_i$  с ростом номера неизвестных наблюдается и из табл. 5.52. Это объясняется тем, что решалась не СЛАУ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (5.10.9)$$

а близкая СЛАУ (5.10.7).

Чем более диагональные элементы отличаются от “эталона”, то есть от “1”, тем более сбивается периодичность в решении СЛАУ, как то хорошо видно из рис. 5.54.

**Пример 5**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,01 & 1 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,01 & 1 & 1,01 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,01 & 1 & 1,01 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,01 & 1 & 1,01 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,01 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.10.10)$$

На рис. 5.54 показано расположение на комплексной плоскости первых 128  $x_i$  системы (5.10.10).

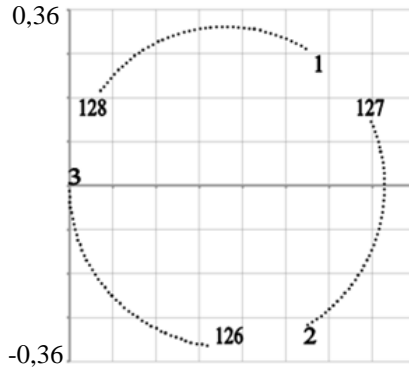


Рис. 5.54. Расположение решений системы (5.10.10).

**Пример 6.** Рассмотрим БСЛАУ, диагональные элементы которой близки к нулю:

$$\begin{pmatrix} 0,001 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0,001 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0,001 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0,001 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,001 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,001 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,001 \\ 0,001 \\ 0,001 \\ 0,001 \\ 0,001 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.11)$$

Имеет место цепная дробь:

$$e^{i\pi/1} = i = 0 - \frac{1}{0 - \frac{1}{0 - \dots - \frac{1}{0 - \dots}}}, \quad (5.6.12)$$

Подходящие дроби периодически повторяются:

(0,  $-\infty$ , 0,  $\infty$ )

На рис. 5.55 и рис. 5.56 показаны расположения на комплексной плоскости решений системы (5.6.11) и (5.6.13).

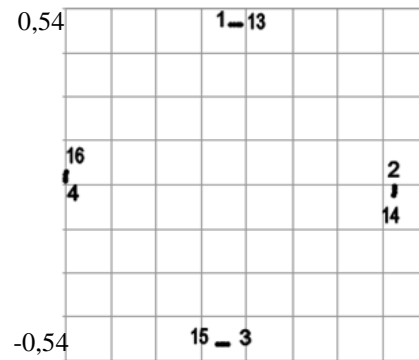
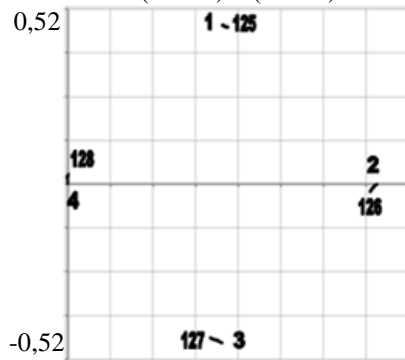


Рис. 5.55. Расположение  $x_i$  системы (5.6.11). Рис. 5.56. Расположение  $x_i$  системы (5.6.13).

**Пример 7.**

Рассмотрим БСЛАУ (5.6.13), диагональные элементы которой ещё более отличны от нуля:

$$\begin{pmatrix} 0,01 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0,01 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0,01 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0,01 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,01 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,01 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.13)$$

Как видно из рис. 5.55 и рис. 5.56, решения систем (5.6.11) и (5.6.13), движутся по окружности, причём, скорость смещения тем выше, чем более диагональные элементы отличны от нуля. Этот же феномен – переход от периодических решений к непериодическим характерен для всех рассмотренных выше СЛАУ с “периодическими решениями”.

**Пример 8.**

Рассмотрим ещё один предельный случай – БСЛАУ, диагональные элементы которой равны “2”:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.14)$$

Из цепной дроби Никипорца

$$e^{i\varphi} = 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots - \frac{1}{2 \cos \varphi} - \dots$$

при  $\varphi = 0$  имеем цепную дробь, значение которой равно “1”:

$$e^{i0} = 1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2} - \dots \quad (5.6.15)$$

Подходящие цепной дроби (5.6.15) записываются следующим образом:



$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{n+1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На рис. 5.57 показано расположение решений системы (5.6.15)

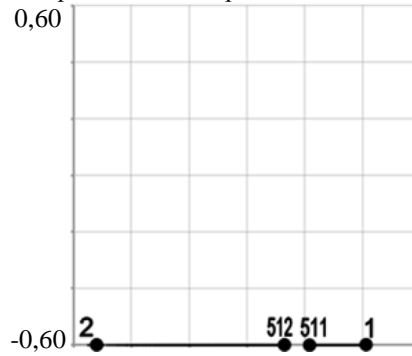


Рис. 5.57. Расположение решений системы (5.6.15) на плоскости.

### Пример 9.

Рассмотрим СЛАУ, элементы которой несколько меньше “2”:

$$\begin{pmatrix} 1,9999 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,9999 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,9999 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,9999 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,9999 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,9999 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.6.16)$$

На рис 5.58 (а, б) показано расположение на комплексной плоскости, соответственно, значений  $x_i (i = 1 \div 256)$  и значений  $x_i (i = 1 \div 400)$ . Из графиков видно, что все  $x_i$  БСЛАУ (5.6.16) располагаются на окружности некоторого диаметра.

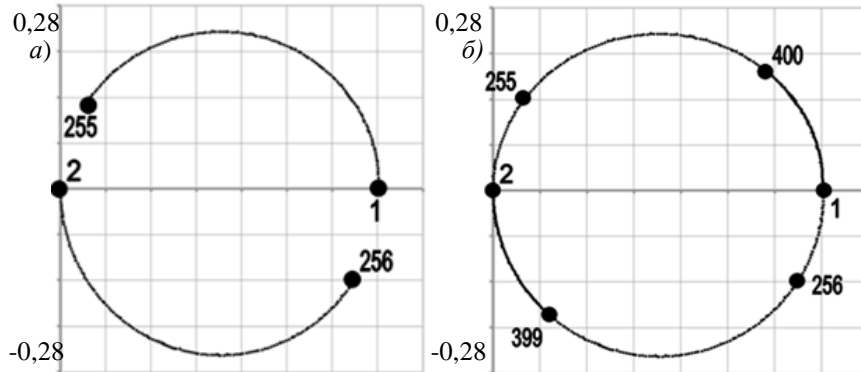


Рис. 5.58. Расположение решений системы (5.6.16)

### 5.11. Решение БСЛАУ классов $Ab$ , $Bb$ и $Cb$ .

Особенность решений классов  $Ab$ ,  $Bb$  и  $Cb$  состоит в том, что значения  $x_i$  этих систем не может сходиться к некоторым пределам, ибо коэффициенты правой части непрерывно возрастают, что влечёт неограниченный рост значений  $x_i$  с увеличением размерности системы.

**Пример 1.**

$$\begin{pmatrix} 1,99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,99 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1,99 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1,99 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,99 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,99 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.11.1)$$

На рис 5.59 показаны вещественные значения  $x_i$ , полученные при решении системы (5.11.1) увеличивающейся размерности.

$x_1^{(n)}$ :

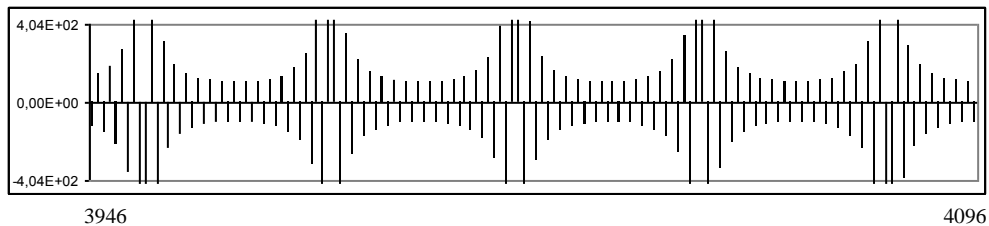


Рис. 5.59. Значения подходящих дробей для  $x_1$  системы (5.11.1).

В табл. 5.53 и 5.54 показаны результаты определения модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  для  $x_1$  и  $x_2$  системы (5.11.1).

Таблица 5.53

**Результаты определения модуля и аргумента  $x_1$  системы (5.11.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_1$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	5,025125628141E-01	---	---
2	-3,378264247829E-03	4,120218713903E-02	1,570796326795E+00
3	5,076399804235E-01	9,516241461301E-02	1,047197551197E+00
4	-1,032903990526E-02	5,462155737936E-02	1,570796326795E+00
7	5,296868583306E-01	9,102904597248E-02	1,346396851538E+00
8	-3,688391773974E-02	8,130871973700E-02	1,570796326795E+00
15	6,513062522330E-01	1,397217808633E-01	1,466076571675E+00
16	-1,785220339960E-01	1,418782570316E-01	1,570796326795E+00
31	-1,316499587297E+01	4,437601958116E-01	1,621467176046E+00
32	5,442379943650E+00	4,799194602983E-01	1,570796326795E+00
...	...	...	...
1023	2,744828571996E+01	1,866636671411E+01	1,581544688757E+00
1024	-2,812083914224E+01	1,867383817495E+01	1,583068173098E+00
2047	-8,108552701266E+01	3,762605123177E+01	1,580772072886E+00
2048	7,303594262831E+01	3,763823858963E+01	1,580000211522E+00
4095	1,050150081426E+02	7,529048736169E+01	1,571179915641E+00
4096	-1,028918675127E+02	7,529622856865E+01	1,571563317189E+00

Таблица 5.54

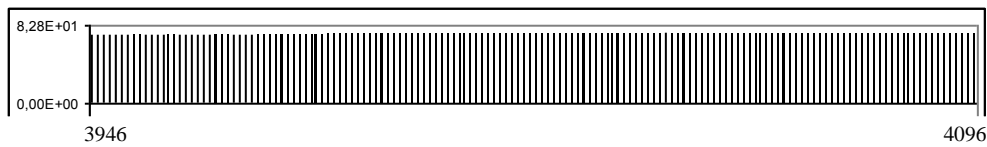
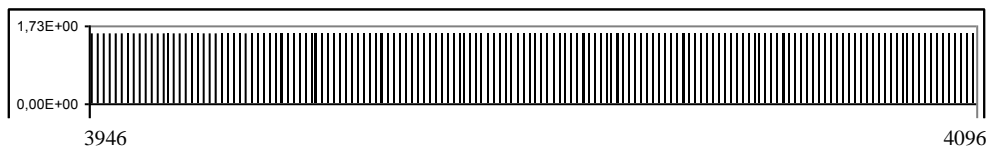
**Результаты определения модуля и аргумента  $x_2$  системы (5.11.1)**

Размерность системы, n	Значение $x_2$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
2	1,006722745853E+00	---	---
3	-1,020356104280E-02	1,013516501617E-01	-1,570796326795E+00
4	1,020554789411E+00	2,188597965175E-01	-1,047197551197E+00
7	-5,407684807797E-02	1,595036656592E-01	-1,570796326795E+00
8	1,073398996302E+00	2,094377809784E-01	-1,346396851538E+00
15	-2,960994419436E-01	2,841814039737E-01	-1,570796326795E+00
16	1,355258847652E+00	3,153726992643E-01	-1,466076571675E+00

Окончание табл. 5.54

31	2,719834178720E+01	9,498563510675E-01	-1,466076571675E+00
32	-9,830336087863E+00	1,024228785230E+00	-1,520125477543E+00
...	...	...	...
1023	-5,362208858272E+01	3,736022527340E+01	-1,558500465137E+00
1024	5,696046989305E+01	3,737563090007E+01	-1,556977004272E+00
2047	1,623601987552E+02	7,511733890237E+01	-1,560047964832E+00
2048	-1,443415258303E+02	7,514131021386E+01	-1,560820580704E+00
4095	-2,079798662038E+02	1,500945949194E+02	-1,570028961711E+00
4096	2,057548163502E+02	1,501061564794E+02	-1,569645560255E+00

На рис. 5.63 и 5.64 показаны графики значений модуля модуля  $r_n$  и аргумента  $\varphi_n$  для  $x_1$  системы (5.11.1), полученные  $r/\varphi$ -алгоритмом.

 $r_1^{(n)}$ :Рис. 5.63. Значения  $r_1^{(n)}$  для  $x_1$ . $\varphi_1^{(n)}$ :Рис. 5.64. Значения  $\varphi_n$  для  $x_1$ .

В табл. 5.55 приведены результаты проверки найденных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма комплексных  $x_i$ . Значения “невязок”, приведённые в 4-й колонке таблиц 5.55 свидетельствуют о том, что при решении систем классов Ab, Bb и Cb необходима дополнительная корректировка  $x_i$ , полученных  $r/\varphi$ -алгоритмом.

Таблица 5.55

Результаты проверки решений системы (5.11.1)

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	5,781166224958E-02 - i2,666063111109E-01	1,000000000000E+00	-9,421883377504E-01 - i2,666063111109E-01
2	1,143668539718E-01 + i2,446271317296E-01	2,000000000000E+00	-1,885633146028E+00 + i2,446271317296E-01
4	2,252623530781E-01 + i2,136592204218E-01	4,000000000000E+00	-3,774737646922E+00 + i2,136592204218E-01
8	4,181399948585E-01 + i1,464888333940E-01	8,000000000000E+00	-7,581860005141E+00 + i1,464888333940E-01
16	5,903679628606E-01 - i3,312620229016E-02	1,600000000000E+01	-1,540963203714E+01 - i3,312620229016E-02
32	2,079324908389E+01 - i1,636161181430E+00	3,200000000000E+01	-1,120675091611E+01 - i1,636161181430E+00
64	4,08936699010E+01 - i6,513721539291E-01	6,400000000000E+01	-2,310633000990E+01 - i6,513721539291E-01
128	6,809251919793E+01 + i8,145676466382E-01	1,280000000000E+02	-5,990748080207E+01 + i8,145676466382E-01
256	8,913162387584E+01 + i1,257378733437E+00	2,560000000000E+02	-1,668683761242E+02 + i1,257378733437E+00
512	4,446125284609E+01 - i2,283306854406E+00	5,120000000000E+02	-4,675387471539E+02 - i2,283306854406E+00
1024	1,635337179775E+01 - i1,403378724742E+00	1,024000000000E+03	-1,007646628202E+03 - i1,403378724742E+00
2048	8,519171158693E+02 - i1,762420893737E-01	2,048000000000E+03	-1,196082884131E+03 - i1,762420893737E-01

В табл. 5.56 приведены значения модулей и аргументов комплексных  $x_i$  системы (5.11.1), полученные непосредственно  $r/\varphi$ -алгоритмом при решении “расширяющихся” СЛАУ (5.11.1).

В табл. 5.57 даны значения модулей и аргументов  $x_i$  системы (5.11.1), полученные алгоритмом “перебора” с целью минимизации невязки.

Таблица 5.56  
Значения комплексных  $x_i$

Номер $x_i, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	3,171070975786E+01	1,570796326795E+00
2	1,053812405003E+01	-1,553511805693E+00
3	2,829522235395E+01	-1,568700534498E+00
4	2,007428827505E+01	1,572368695490E+00
7	1,258703589684E+01	-1,567648438364E+00
8	3,165366051473E+01	1,572370796885E+00
15	2,650152597445E+01	1,571848434181E+00
16	1,453233104533E+01	1,559745498365E+00
511	2,997468913850E+01	1,530422445303E+00
512	3,250581791855E+01	-1,544921417434E+00
1023	1,458944747774E+01	1,620032612063E-01
1024	4,696627473258E+01	1,566823650197E+00
2047	4,840660174985E+01	1,541158660252E+00
2048	2,945690163630E+01	-6,164510243665E-01

Таблица 5.57  
Значения откорректированных  $x_i$

Номер $x_{\text{кон}}, n$	Модуль Комплексного числа, $r_n$	Аргумент к омплексного числа, $\varphi_n$
1	3,171070975786E+01	1,570796326795E+00
2	1,057549112780E+01	-1,539271686759E+00
3	2,818845601521E+01	-1,561730237602E+00
4	1,996601102812E+01	1,571723829096E+00
7	1,248541201840E+01	-1,556798738901E+00
8	3,130476176412E+01	1,569160418215E+00
15	2,598936535861E+01	1,565698824117E+00
16	1,435291611975E+01	1,543071548167E+00
511	2,405095796574E+01	1,258355349271E+00
512	2,695832671677E+01	-1,282943381900E+00
1023	1,544780337981E+01	3,326460506572E-01
1024	3,341410334265E+01	1,117685140049E+00
2047	4,005129452844E+01	7,517989885689E-01
2048	3,535931414611E+01	-5,799129660120E-01

На рис. 5.65 показано расположение в комплексной плоскости  $x_i$  полученных непосредственно из решения “расширяющихся” систем (5.11.1). На рис 5.66 показаны  $x_i$ , значения которых установлены после коррекции алгоритмом перебора.

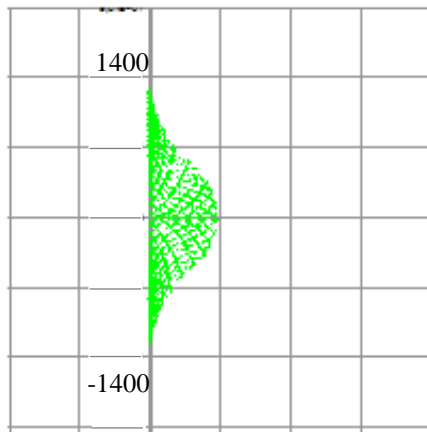


Рис. 5.65. Расположение  $x_i$  без коррекции.

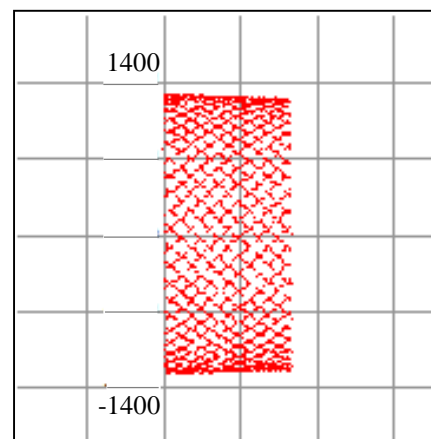


Рис. 5.66. Расположение  $x_i$  после коррекции.

Нельзя не отметить сетку довольно сложной структуры, которая изображена на рис. 5.66. Расположение  $x_i$  на этой сетке обеспечивает комплексную “невязку” чрезвычайно малости.

Сравнивая значения  $x_i$  приведённые в табл. 5.56 и 5.57 можно заметить, что откорректированные значения модулей и аргументов комплексных  $x_i$  незначительно отличаются от исходных значений  $x_i$ . Тем не менее, использование “уточнённых” значений  $x_i$  даёт, как свидетельствует табл. 5.58, даёт чрезвычайно малые “невязки”, то есть чрезвычайно высокую точность решения “комплексной” системы.

В табл. 5.58 приведены результаты проверки решений системы (5.11.1) после “уточнения” комплексных корней. Невязки, как по вещественной, так и по мнимой части представляют величины порядка  $10^{-13} \div 10^{-14}$ .

Таблица 5.58

**Результаты проверки решений системы (5.11.1)**

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Абсолютная погрешность
1	1,000000000000E+00 + i1,317054104666E-13	1,000000000000E+00	2,657260262523E-14 + i1,317054104666E-13
2	1,100000000000E+00 - i3,198760700762E-13	1,100000000000E+00	1,102312685575E-13 - i3,198760700762E-13
3	1,200000000000E+00 - i1,059291543370E-13	1,200000000000E+00	2,604808729822E-13 - i1,059291543370E-13
4	1,300000000000E+00 - i8,866518630413E-14	1,300000000000E+00	-1,461881830866E-13 - i8,866518630413E-14
7	1,600000000000E+00 + i1,173991459602E-13	1,600000000000E+00	3,626909970272E-13 + i1,173991459602E-13
8	1,700000000000E+00 + i1,748948208480E-14	1,700000000000E+00	6,304635633003E-15 + i1,748948208480E-14
15	2,400000000000E+00 - i1,478712985392E-13	2,400000000000E+00	2,184212012646E-13 - i1,478712985392E-13
16	2,500000000000E+00 - i3,766709166797E-13	2,500000000000E+00	-3,582290714066E-13 - i3,766709166797E-13
...	...	...	...
511	5,200000000000E+01 - i1,894595591523E-13	5,200000000000E+01	-4,008078591244E-13 - i1,894595591523E-13
512	5,210000000000E+01 + i1,191477472240E-13	5,210000000000E+01	1,332718657654E-13 + i1,191477472240E-13
1023	1,032000000000E+02 - i2,694094947131E-13	1,032000000000E+02	4,183459134666E-14 - i2,694094947131E-13
1024	1,033000000000E+02 + i1,310306030344E-13	1,033000000000E+02	-8,112954752448E-14 + i1,310306030344E-13
2047	2,056000000000E+02 + i1,625644063807E-13	2,056000000000E+02	-2,394195952604E-13 + i1,625644063807E-13
2048	2,057000000000E+02 + i2,562568213182E-13	2,057000000000E+02	-3,119310365562E-13 + i2,562568213182E-13

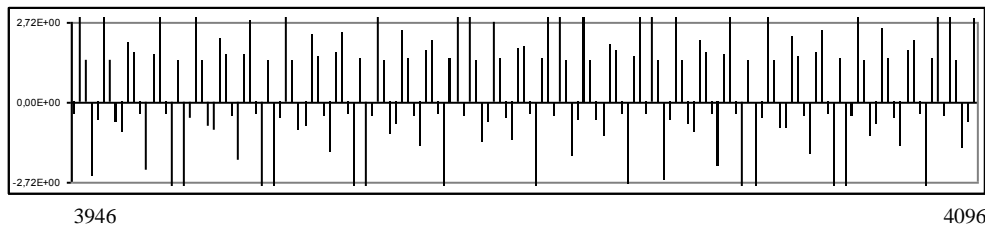
**Пример 2.**

Система класса Bb.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1,001 & 1 & 1,002 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1,002 & 1 & 1,003 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1,003 & 1 & 1,004 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,004 & 1 & 1,005 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,005 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,001 \\ 1,002 \\ 1,003 \\ 1,004 \\ 1,005 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.11.2)$$

Система (5.11.2) относится к СЛАУ типа Bb, когда растут элементы матрицы и элементы правой части системы. Ранее уже отмечалось, что именно рост элементов правой части не позволяет найти решения подобных БСЛАУ, так как решение  $x_i$  не стремится к пределам с ростом размерности системы. Тем не менее, использование  $r/\phi$ -алгоритма позволяет находить не «мгновенное», а «истинные» решения таких СЛАУ.

На рис. 5.67 показаны значения подходящих дробей для определения значения  $x_1$  системы (5.11.2). Из рисунка можно сделать заключение, что аргумент комплексного  $x_1$  близок к  $\pi/2$ .

 $x_1^{(n)}$ :Рис. 5.67. Значения подходящих дробей для  $x_1$ .

В таблице 5.59 приведены результаты определения модуля и аргумента  $x_1$  системы (5.11.2).

Таблица 5.59

**Результаты определения модуля и аргумента  $x_1$  системы (5.11.2)**

Размерность системы, $n$	Значение $x_1$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	1,000000000000E+00	---	---
2	1,000000000000E+00	1,000000000000E+00	0,000000000000E+00
3	9,910447761194E-04	9,970059701045E-02	0,000000000000E+00
4	1,004005046967E+00	1,776058608932E-01	0,000000000000E+00
7	1,011085233253E+00	1,659199914410E-01	0,000000000000E+00
8	6,280787948325E-01	1,959580654970E-01	0,000000000000E+00
15	3,249784018755E-02	1,791210979037E-01	0,000000000000E+00
16	1,052866236102E+00	2,000890840039E-01	0,000000000000E+00
31	1,226691900421E+00	2,680145215485E-01	0,000000000000E+00
32	5,750132005396E-01	2,744848062390E-01	0,000000000000E+00
...	...	...	...
1023	-6,397817077560E+00	5,693645125880E-01	7,677401401735E-01
1024	9,882801789396E-01	5,696712098457E-01	7,669903939428E-01
2047	-3,178707200669E-01	6,524844298822E-01	1,131096133706E+00
2048	2,593556174507E+00	6,529242397588E-01	1,130543840672E+00
4095	-6,901545847918E-01	9,551547689222E-01	1,347164029232E+00
4096	2,84347790706E+00	9,554091943221E-01	1,346835131764E+00

На рис. 5.63 и рис. 5.64 показано соответственно, расположение комплексных решений системы (5.11.2) полученных при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма без коррекции коэффициента  $x_i$  и с коррекцией коэффициента алгоритма минимизации невязки решений.

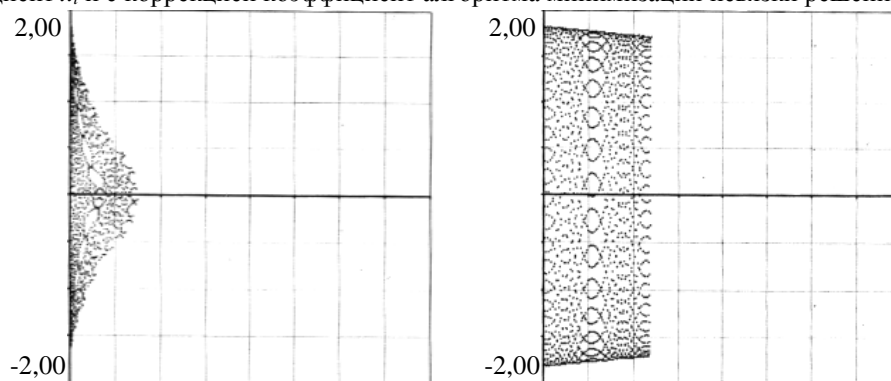


Рис. 5.68. Расположение  $x_i$  без коррекции. Рис. 5.69. Расположение  $x_i$  после коррекции.

В табл. 5.60 приведены результаты проверки решений системы (5.11.2) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.60

**Результаты проверки решений системы (5.11.2)**

Номер строки, $n$	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	4,043473363162E-01 - i9,699300494141E-03	1,000000000000E+00	-5,956526636838E-01 - i9,699300494141E-03
2	4,047510504122E-01 - i5,945781013940E-03	1,001000000000E+00	-5,962489495878E-01 - i5,945781013940E-03
4	4,059868677356E-01 - i2,457127718188E-03	1,003000000000E+00	-5,970131322644E-01 - i2,457127718188E-03
8	4,023676341952E-01 - i1,229269559609E-03	1,007000000000E+00	-6,046323658048E-01 - i1,229269559609E-03
16	4,077590975614E-01 + i4,003810610962E-02	1,015000000000E+00	-6,072409024386E-01 + i4,003810610962E-02
32	4,501084232569E-01 + i9,724724845987E-02	1,031000000000E+00	-5,808915767431E-01 + i9,724724845987E-02
64	7,106720235740E-01 - i4,046307829828E-02	1,063000000000E+00	-3,523279764260E-01 - i4,046307829828E-02
128	4,126924075257E-01 + i6,887473189916E-02	1,127000000000E+00	-7,143075924743E-01 + i6,887473189916E-02
256	8,217815646128E-01 + i6,676901332308E-02	1,255000000000E+00	-4,332184353872E-01 + i6,676901332308E-02
512	5,508520056706E-01 + i3,378998205628E-01	1,511000000000E+00	-9,601479943294E-01 + i3,378998205628E-01
1024	6,381016629373E-01 + i3,654939784912E-02	2,023000000000E+00	-1,384898337063E+00 + i3,654939784912E-02
2048	2,54859119370E+00 + i6,769526610610E-02	3,047000000000E+00	-4,984088806295E-01 + i6,769526610610E-02

**Пример 3.**

Рассмотрим БСЛАУ класса  $S_6$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 5,096 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5,096 & 1 & 5,095 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5,095 & 1 & 5,094 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5,094 & 1 & 5,093 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 5,093 & 1 & 5,092 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,092 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,001 \\ 1,002 \\ 1,003 \\ 1,004 \\ 1,005 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5.11.3)$$

На рис. 5.70 показаны значения  $x_1$ , полученные методом “прогонки” при решении “расширяющейся” системы (5.11.3).

$x_1^{(n)}$ :

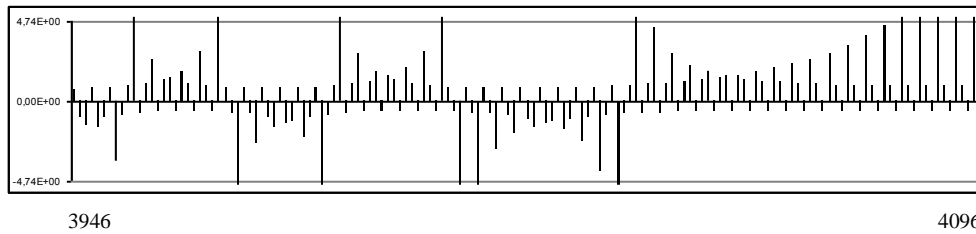


Рис. 5.70. Значения  $x_1$  “расширяющейся” системы (5.11.3).

В табл. 5.61 приведены значения модуля и аргумента комплексного  $x_1$  системы (5.11.3), установленные  $r/\varphi$ -алгоритмом из вещественных значений  $x_1$  полученных “прогонкой” при решении “расширяющихся” СЛАУ (5.11.3). Из третьей колонки табл. 5.61 следует, что значения  $r_n$  с увеличением размерности системы также растёт, что естественно, так как с ростом размерности системы увеличиваются коэффициенты правой части системы, что сказывается на структуре цепной дроби, определяющей значения  $x_1$ .

Уже отмечалось, что алгоритм прогонки эквивалентен представлению неизвестной трёхдиагональной системы цепной дроби, коэффициенты которой по определённым формулам находятся из коэффициентов матрицы СЛАУ и коэффициентов её правой части.

Если мы предположим, что значения  $x_i$ , полученные прогонкой при решении “расширяющейся” СЛАУ, есть подходящие некоторой цепной дроби, то можно говорить, что такая гипотетическая цепная дробь является расходящейся, ибо нет предела значений подходящих дробей  $P_n/Q_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таблица 5.61

**Определение значения  $r_n$  и  $\varphi_n$  комплексного  $x_1$  системы (5.13.1)**

Размерность системы, $n$	Значение $x_1$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	1,000000000000E+00	---	---
2	1,642460860605E-01	4,052728538411E-01	0,000000000000E+00
3	7,940727346150E-02	2,353884258071E-01	0,000000000000E+00
4	-5,072651283750E-02	1,603790292356E-01	7,853981633974E-01
7	6,016114230220E-02	1,554748454316E-01	4,487989505128E-01
8	-1,520451684662E-01	1,550419403817E-01	7,853981633974E-01
15	7,422904914019E-03	1,273070047143E-01	6,283185307180E-01
16	1,851110300021E+00	1,504920471570E-01	5,890486225481E-01
31	1,491320798701E+01	1,531980915007E-01	6,080501910174E-01
32	1,807511841688E-01	1,539919340989E-01	5,890486225481E-01
...	...	...	...

Окончание табл. 5.61

1023	2,915929987469E-01	1,936258144573E-01	1,308229198856E+00
1024	-8,016831807561E-02	1,934591488553E-01	1,310019592854E+00
2047	-2,609314141322E+02	3,039581953696E-01	1,431903246604E+00
2048	-2,504266365412E-01	3,039294447527E-01	1,432738055885E+00
4095	-6,248507997183E-01	5,389648704281E-01	1,492160613244E+00
4096	7,084767468667E+00	5,393039422510E-01	1,491796316219E+00

Несмотря на то, что неизвестные  $x_i$  в системах, в которых коэффициенты правой части увеличиваются с ростом размерности системы, не стремятся к пределам, вещественным или комплексным, тем не менее, используя  $r/\varphi$ -алгоритм мы можем говорить, что мы находим комплексные решения “расширяющихся” СЛАУ, которые не могут быть установлены традиционными методами. Такие комплексные решения слабо зависят от изменения размерности СЛАУ и могут описывать реальную физическую задачу, для которой составляется математическая модель, приводящая к комплексным решениям.

Таким образом, следует различать “решения бесконечных СЛАУ” и “решение расширяющихся СЛАУ”. Под “расширяющимися” СЛАУ будем понимать СЛАУ, размерность которых увеличивается, всякий раз оставаясь конечной. Для некоторых классов БСЛАУ, прежде всего для БСЛАУ с ограниченной правой частью, мы можем получать “предельные” решения, то есть решения, действительные или комплексные для СЛАУ размерности  $n \times n$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Для “расширяющихся” СЛАУ мы не имеем возможности получить “предельные решения”, так как решения изменяются с ростом размерности СЛАУ, однако мы можем решать наборы таких “расширяющихся” СЛАУ и по решениям этих СЛАУ различной размерности, устанавливать “истинные” решения таких СЛАУ. Эти “истинные” решения могут быть как вещественными, так и комплексными. Под “истинными” решениями понимаются решения, адекватные физической модели. Основным признаком “истинных” решений – слабая зависимость решений от размерности СЛАУ. Комплексные решения СЛАУ до сих пор ускользали из поля зрения специалистов, занимающихся линейной алгеброй и численными методами.

В табл. 5.62 приведены результаты проверки решения системы (5.12.1) при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 5.62

Результаты проверки решений системы (5.11.3)

Номер строки, $n$	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	8,697131997840E-01 + i1,563474889987E-01	1,000000000000E+00	-1,302868002160E-01 + i1,563474889987E-01
2	3,937688166673E-01 - i4,664079833710E-02	1,001000000000E+00	-6,072311833327E-01 - i4,664079833710E-02
4	3,752772664833E-01 - i1,742777034295E-01	1,003000000000E+00	-6,277227335167E-01 - i1,742777034295E-01
8	5,246691027491E-01 - i2,654817695140E-01	1,007000000000E+00	-4,823308972509E-01 - i2,654817695140E-01
16	9,134386957284E-01 + i6,597528462829E-02	1,015000000000E+00	-1,015613042716E-01 + i6,597528462829E-02
32	3,886758805949E-01 - i1,046911012449E-02	1,031000000000E+00	-6,423241194051E-01 - i1,046911012449E-02
64	2,946095768226E-01 - i3,640928660593E-02	1,063000000000E+00	-7,683904231774E-01 - i3,640928660593E-02
128	3,071543565363E-01 - i1,034911965773E-01	1,127000000000E+00	-8,198456434637E-01 - i1,034911965773E-01
256	4,809196001970E-01 - i3,220434323619E-01	1,255000000000E+00	-7,740803998030E-01 - i3,220434323619E-01
512	3,658638820805E-01 + i1,501352402557E-01	1,511000000000E+00	-1,145136117920E+00 + i1,501352402557E-01
1024	6,698040922864E-01 + i4,580326387143E-01	2,023000000000E+00	-1,353195907714E+00 + i4,580326387143E-01
2048	4,805275351475E-01 - i1,270772191444E-02	3,047000000000E+00	-2,566472464853E+00 - i1,270772191444E-02

Из четвёртой колонки табл. 5.62 следует, что установленные непосредственно  $r/\varphi$ -алгоритмом комплексные решения системы (5.11.3) приводят к значительным “невязкам”, то есть погрешностям. По алгоритму “перебора” были найдены такие значения комплексных  $x_i$  системы (5.11.3), подстановка которых давала минимальную “невязку”. В табл.



5.63 и 5.64, приведены координаты на комплексной плоскости значений  $x_i$  системы (5.11.3) до и после «коррекции».

Таблица 5.63  
Координаты  $x_i$  системы (5.11.3)  
(до коррекции)

Номер $x_i, n$	Модуль комплексного числа, $r_n$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$
1	4,076593509095E-01	1,469218164329E+00
2	1,792912112068E-01	-3,236919406333E-01
3	4,054596735312E-01	-1,557173676863E+00
4	1,706057934688E-01	1,551403779551E+00
7	3,377917449691E-01	-1,580239992086E+00
8	3,11366257288E-01	1,545079981986E+00
15	4,251716017646E-02	-1,589734259737E+00
16	4,149351979000E-01	1,485020848983E+00
31	4,185645917443E-01	1,499925381411E+00
32	1,807386305805E-01	-1,163944735247E-02
...	...	...
1023	3,247630785115E-01	-9,974318435058E-01
1024	3,970539302714E-01	-1,570001791475E+00
2047	7,004751253360E-01	-1,527986364010E+00
2048	3,132976167169E-01	0,000000000000E+00

Таблица 5.64  
Координаты  $x_i$  системы (5.11.3)  
(после коррекции)

Номер $x_{кон}, n$	Модуль Комплексного числа, $r_n$	Аргумент к омплексного числа, $\varphi_n$
1	4,076593509095E-01	1,469218164329E+00
2	2,042617396949E-01	-4,002143775435E-01
3	4,075348263394E-01	-1,276535557725E+00
4	1,568498446659E-01	1,664390664840E+00
7	3,243125746759E-01	-1,330016657433E+00
8	2,890145175964E-01	1,617175709260E+00
15	3,936159217691E-02	-1,385113959908E+00
16	4,095524005603E-01	1,487364420191E+00
31	4,081528183470E-01	1,502677142393E+00
32	1,829037287470E-01	-2,726338616054E-02
...	...	...
1023	4,598559275806E-01	-7,432981984842E-01
1024	3,439334717435E-01	-9,818957164853E-01
2047	7,343179374190E-01	-7,822083339895E-01
2048	3,191147586099E-01	1,917581652817E-01

Сравнивая данные табл. 5.63 и 5.64, можно отметить, что координаты  $x_i$  системы (5.11.3), полученные непосредственно  $r/\varphi$ -алгоритмом, и «откорректированные» координаты  $x_i$ , установленные «перебором», в целом незначительно разнятся друг от друга. Тем не менее, использование «откорректированных» координат комплексных  $x_i$  системы дают чрезвычайно малую «невязку» (Табл. 5.65), что свидетельствует о высокой точности полученных решений.

Таблица 5.65  
Проверка решений системы (5.12.1) после коррекции

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части системы	Погрешность
1	1,000000000000E+00 - i2,162712283565E-16	1,000000000000E+00	-1,083768491617E-15 - i2,162712283565E-16
2	1,001000000000E+00 + i4,685921789482E-15	1,001000000000E+00	7,702822754641E-15 + i4,685921789482E-15
3	1,002000000000E+00 + i3,107648686995E-15	1,002000000000E+00	8,201989434853E-16 + i3,107648686995E-15
4	1,003000000000E+00 - i8,663751140114E-15	1,003000000000E+00	3,024273539931E-15 - i8,663751140114E-15
7	1,006000000000E+00 + i5,663546888413E-15	1,006000000000E+00	-5,480533561697E-15 + i5,663546888413E-15
8	1,007000000000E+00 + i3,650942395628E-15	1,007000000000E+00	6,682371669897E-15 + i3,650942395628E-15
15	1,014000000000E+00 + i2,234540677493E-15	1,014000000000E+00	-1,717267821000E-15 + i2,234540677493E-15
16	1,015000000000E+00 - i1,535298038875E-15	1,015000000000E+00	3,475843744771E-15 - i1,535298038875E-15
31	1,030000000000E+00 + i1,858220879686E-17	1,030000000000E+00	-3,200347972743E-15 + i1,858220879686E-17
32	1,031000000000E+00 - i6,267122237835E-15	1,031000000000E+00	-5,107459594145E-15 - i6,267122237835E-15
...	...	...	...
1023	2,022000000000E+00 + i3,389758092276E-15	2,022000000000E+00	-4,603088743504E-15 + i3,389758092276E-15
1024	2,023000000000E+00 - i2,559150807935E-15	2,023000000000E+00	-9,759987956715E-15 - i2,559150807935E-15
2047	3,046000000000E+00 + i9,990516443639E-16	3,046000000000E+00	9,497611030973E-16 + i9,990516443639E-16
2048	3,047000000000E+00 + i3,821921078229E-15	3,047000000000E+00	-2,156044440205E-15 + i3,821921078229E-15

На рис. 5.71 и 5.72 показаны размерности  $x_i$  системы (5.13.3) на комплексной плоскости, соответственно, до и после коррекции координаты  $x_i$ .

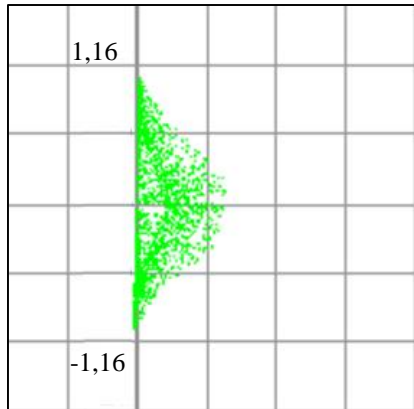


Рис. 5.71. Расположение  $x_i$  без коррекции.

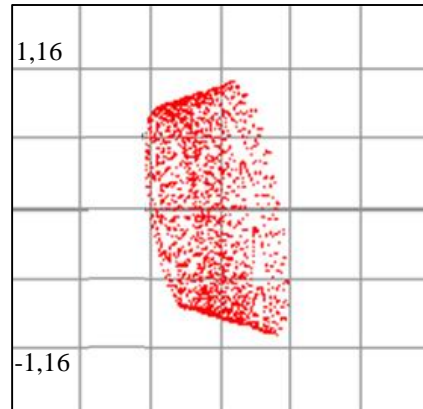


Рис. 5.72. Расположение  $x_i$  после коррекции.

### 5.12. Функция Пуанкаре и Крамера.

Запишем алгоритм решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ).

Пусть имеется БСЛАУ с вещественными элементами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{5.12.1}$$

При решении БСЛАУ (5.12.1) используют метод “усечения”, который естественней было бы именовать “методом решения расширяющихся СЛАУ”. Суть этого метода проста и напоминает подход к традиционному определению сходимости рядов или цепных дробей. Например, сходимость непрерывных дробей определяется следующим образом. Цепная дробь:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \tag{5.12.2}$$

сходится и имеет своим значением число  $\alpha$ , если существует предел подходящих цепной дроби (5.12.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha. \tag{5.12.3}$$

Если предела подходящих дробей не существует, то непрерывная дробь (5.12.2) считается расходящейся.

«Метод решения расширяющихся» СЛАУ предполагает решение СЛАУ увеличивающихся размерностей. Запишем последовательности решений  $\{\bar{x}_i\}$ , полученных по формулам Крамера для “расширяющихся” СЛАУ:

$$\begin{aligned} & \{ \bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)} \} \\ & \{ \bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)} \} \\ & \{ \dots \dots \dots \} \\ & \{ \bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)} \} \end{aligned} \tag{5.12.4}$$

На последовательность значений  $\bar{x}_i$ , полученных при решении “расширяющихся” СЛАУ, можно смотреть как на последовательность подходящих дробей. Если для каждой компоненты  $x_i$  существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}_i^{(m)} = p_i, \tag{5.12.5}$$

где  $p_i$  – некоторое вещественное число, то считается, что БСЛАУ (5.12.1) имеет решения

$$\bar{x}_1 = p_1, \bar{x}_2 = p_2, \dots, \bar{x}_n = p_n, \dots \quad (5.12.6)$$

Запишем “подходящие дроби” для  $x_1$ , полученные по формулам Крамера при решении БСЛАУ (5.12.1):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= \frac{|b_1|}{|a_{11}|}; \\ \bar{x}_1^{(2)} &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \\ \bar{x}_1^{(3)} &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \\ &\dots \\ \bar{x}_1^{(n)} &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}; \end{aligned} \quad (5.12.7)$$

Для БСЛАУ (5.12.1) можно записать:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}, \dots \quad (5.12.8)$$

Выражения (5.12.8) будем называть *функцией Пуанкаре*, который, как известно, одним из первых получил фундаментальные результаты в теории бесконечных определителей [21]. Для функции Пуанкаре введём обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{in}}{\Delta_n} = \text{Poin}_i(x_i^{(\infty)}). \quad (5.12.9)$$

Функция Пуанкаре (5.12.9) имеет своим значением, в общем случае, комплексное число  $z_i = r_i e^{i\varphi_i}$ , если существуют пределы

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{l=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (5.12.11)$$

где  $\bar{x}_i^{(m)}$  – значение формулы Крамера размерности  $m$  для  $x_i$ .

$k_i^{(m)}$  – количество отрицательных значений  $\bar{x}_i$  из  $m$  «подходящих».

Требуется исследования сходимости функции Пуанкаре, аналогично тому, как то было сделано для обыкновенных и ветвящихся непрерывных дробей. Теория сходимости функций Пуанкаре, видимо, будет существенно сложнее теории сходимости обыкновенных непрерывных дробей или ветвящихся непрерывных дробей, а также других известных классов, например непрерывных дробей Хессенберга и Никипорца. Сравнительно просто будет разработать теорию сходимости, то есть установить признаки сходимости для БСЛАУ с трёхдиагональной матрицей, так как решения БСЛАУ с трёхдиагональной матрицей при помощи алгоритма «прогонки» можно представить обыкновенными непрерывными дробями. Здесь следует, однако, иметь в виду, что классическая теория сходимости непрерывных дробей с вещественными элементами не предполагает возможности определения их комплексных значений.

Функция Пуанкаре была определена как аналитическое выражение, позволяющее определить комплексные или вещественные значения  $x_i$  бесконечной системы. Другими словами, предполагается сходимость  $x_i$  к некоторым, в общем случае, комплексным пределам, при неограниченно расширяющейся системе. Как уже отмечалось, БСЛАУ с возрастающими элементами правой части могут иметь значения  $x_i$ , модули которых также неограниченно увеличиваются. Поэтому введём функцию Крамера, которая будучи аналогична функции Пуанкаре, тем не менее, связана со СЛАУ, матрицы которых не расширяются бесконечно, а имеют ограниченные размеры.

Таким образом, под функцией Крамера будем понимать функцию, определяющую значение  $x_i$  конечной системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}, \quad (5.12.10)$$

причём, значение  $x_i$  устанавливается не по формуле Крамера, а по процедуре, использующей  $r/\varphi$ -алгоритм.

Функция Крамера  $\text{Cr } x_i^{(n)} = \frac{\Delta_{im}^{m=1}}{\Delta_{im}^{m=n}}$  имеет своим значением в общем случае комплексное число  $z_i = r_i e^{i\varphi_i}$ , если

$$r_i = \sqrt[m]{\prod_{l=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

$$|\varphi_i| = \pi \frac{k_i^{(m)}}{m},$$

где  $\bar{x}_i^{(m)}$  – значение формулы Крамера размерности  $m$  для  $x_i$ .

$k_i^{(m)}$  – количество отрицательных значений  $\bar{x}_i$  из общего числа  $m$  «подходящих дробей».



## ГЛАВА 6

### РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ

#### 6.1 Формулы Эйткина

Известны разнообразные применения алгебраических уравнений при решении научных и технических задач. Часто алгебраические уравнения появляются в задачах аэродинамики. При расчете устойчивости различных конструкций используют, так называемые, собственные значения матриц, определяемые из решения алгебраических уравнений, степень которых равна количеству учитываемых гармоник. Особенно часто алгебраические уравнения возникают при выполнении различных геометрических расчетов, в частности, при определении точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров. Разным аспектам теории и практики алгебраических уравнений посвящены недавно опубликованные монографии [26, 27]. Тем не менее, актуальной является оценка ситуации в этом разделе математики, которая была дана известным американским специалистом Р. Хеммингом [45]: “Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного”. В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [61]. В основном, это алгоритмы численного решения алгебраических уравнений.

Ниже будут рассмотрены аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения  $n$ -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно используется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей, именуемый как  $r/\varphi$ -алгоритм [53], нашедший разнообразные применения в вычислительной математике [13, 70, 74].

Имеется алгебраическое уравнение степени  $n$ :

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \quad (6.1.1)$$

Запишем следующую производящую функцию

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots \quad (6.1.2)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  в (6.1.1) и (6.1.2) совпадают. Коэффициенты  $c_m$  последовательности (6.1.2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1. \quad (6.1.3)$$

Для определения корней алгебраического уравнения (6.1.1) Эйткен предложил формулы [85]:

$$x_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \quad (6.1.4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \begin{array}{cc|c} c_{m+1} & c_{m+2} & \\ \hline c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} \\ \hline c_m & c_{m+1} & c_m \end{array} \right)}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \quad (6.1.5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \begin{array}{ccc|cc} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} & c_{m+2} \\ \hline c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+1} & c_{m+2} \\ \hline c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ \hline c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & c_m & c_{m+1} \\ \hline c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} & c_{m+2} \\ \hline c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+1} & c_{m+2} \end{array} \right)}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \quad (6.1.6)$$

Корень  $x_i$  может быть представлен выражением:

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \begin{array}{cccc|cccc} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ \hline c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i} \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline c_{m+i} & c_{m+i+1} & \dots & c_{m+2i-1} & c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-3} \\ \hline c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-2} \\ \hline c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} & c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \dots & c_{m+2i-4} \end{array} \right)}{c_m} \right). \quad (6.1.7)$$

Очевидно, что используя формулы Эйткена можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (6.1.1). При определении комплексных корней алгебраического уравнения (6.1.1) используется  $r/\varphi$ -алгоритм.

## 6.2. Представление нулей полинома непрерывными дробями Никпорца

Запишем формулы Эйткена (6.1.4) - (6.1.7) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Тейлора, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (6.1.1).

Формулу (6.1.4) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = - \frac{\left( \begin{array}{cccc|c} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ \hline -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ \hline 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \hline 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{cccc|c} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ \hline -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \hline 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right)} \cdot \frac{\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ \hline 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \hline 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \hline 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & -1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array} \right)} \quad (6.2.1)$$

Последующие корни уравнения (6.1.1) запишутся следующим образом:

$$x_2 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (6.2.2)$$

$$x_i = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \quad (6.2.3)$$

Отношения определителей (6.2.1) – (6.2.3), выражающие корни алгебраического уравнения (6.1.1) через его коэффициенты, будем называть *функциями*  $N_i^{(n)}$ . Для функций  $N_i^{(n)}$  введём обозначение:

$$N_i^{(n)} = N_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвёртой функции  $N_i^{(n)}$  записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Функции  $N_i^{(n)}$ , определяемые выражениями (6.2.1) – (6.2.3), будем называть также *непрерывными дробями Никпорца*. Определение математических конструкций (6.2.1) – (6.2.3) как непрерывных дробей особой структуры позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие как подходящая дробь, что упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций  $N_i^{(n)}$  и  $r/\varphi$ -алгоритма.

Для нахождения комплексных корней уравнения (6.1.1), определяемых также формулами (6.2.1) – (6.2.3), необходимо дополнительно использовать  $r/\varphi$ -алгоритм. Модуль  $r_i$  и модуль аргумента  $\varphi_i$  искомого комплексного числа  $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$  устанавливаются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2.4)$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (6.2.5)$$

где  $\bar{x}_i^{(m)}$  –  $m$ -я подходящая дробь выражения (6.2.3),



$k_i^{(m)}$  – число отрицательных подходящих дробей для  $i$ -го корня из  $m$  подходящих дробей.

Например, подходящие дроби для  $x_2$  определяются следующим образом:

$$\bar{x}_2^{(1)} = -\frac{|\alpha_2|}{1} : \frac{|\alpha_1|}{1}, \quad \bar{x}_2^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|\alpha_1|},$$

$$\bar{x}_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \dots$$

Следует обратить внимание, что по формуле (6.2.5) определяется модуль аргумента комплексного числа. Знак аргумента  $\varphi$  устанавливается из анализа динамики в распределении подходящих дробей. Из рассмотрения калибровочных непрерывных дробей, представляющих комплексные числа, в [74] был сформулирован алгоритм определения знака аргумента  $\varphi$  по распределению значений подходящих дробей. Этот алгоритм основывается на анализе значений пар подходящих дробей. «Возрастающими» парами названы пары, для которых  $P_n/Q_n < P_{n+1}/Q_{n+1}$  «Убывающими» парами являются пары, если  $P_n/Q_n < P_{n+1}/Q_{n+1}$ . Как следует из формулы (6.2.5), если  $|\varphi| < \pi/2$ , то большинство подходящих дробей из общего числа  $n$  подходящих имеет положительный знак. Большинство подходящих отрицательны, если  $\pi/2 < |\varphi| < \pi$ . При  $0 < |\varphi| < \pi/2$  анализируются пары из положительных подходящих дробей. Если  $\pi/2 < |\varphi| < \pi$ , то анализируются пары из подходящих, имеющих отрицательные значения.

Итак, алгоритм определения знака  $\varphi$  формулируется следующим образом: «Если модуль аргумента комплексного числа, установленный по формуле (6.2.5), лежит в интервале  $\pi/2 < |\varphi| < \pi$ , то знак  $\varphi$  будет положительным, если число «убывающих» пар подходящих составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар подходящих принадлежит к множеству «возрастающих» пар, то знак аргумента  $\varphi$  будет отрицательным».

Если по формуле (6.2.5) получим, что  $\pi/2 < |\varphi| < \pi$  то знак угла  $\varphi$  будет положительным, если число «возрастающих» пар подходящих составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Если большинство пар подходящих принадлежит к множеству «убывающих» пар, то знак аргумента  $\varphi$  будет отрицательным».

Для определения подходящих непрерывных дробей (6.2.3), записываемых отношениями определителей Тейлора, то есть определителей не общего, а весьма специального вида, может быть использован известный алгоритм «частных и разностей», или QD-алгоритм Рутисхаузера [37].

Рекуррентный QD-алгоритм Рутисхаузера описывается формулами:

$$x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + e_m^{(i)} - e_{m-1}^{(i)}, \quad (6.2.6)$$

$$e_m^{(i+1)} = e_m^{(i)} \frac{x_{m+1}^{(i+1)}}{x_m^{(i+1)}}. \quad (6.2.7)$$

В качестве начальных условий принимаются величины:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1, \quad x_m^{(0)} = 0, \quad (6.2.8)$$

$$e_m^{(0)} = \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (6.2.9)$$

Кроме того,

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + e_1^{(i)}, \quad x_n^{(i+1)} = x_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)}.$$

На рис. 6.1 показан граф рекуррентного QD-алгоритма Рутисхаузера.

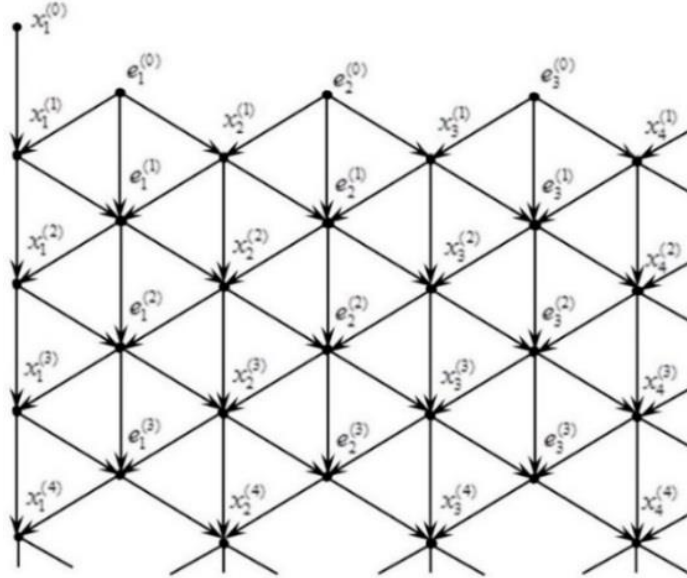


Рис. 6.1. Граф рекуррентного QD-алгоритма Рутисхаузера.

### 6.3. Примеры решения алгебраического уравнения

При помощи рекуррентного QD-алгоритма, описываемого формулами (6.2.6) и (6.2.7), и  $r/\varphi$ -алгоритма, определяемого формулами (6.2.4) и (6.2.5), вычислим корни уравнения 41-й степени, коэффициенты которого получены случайной выборкой чисел из диапазона  $-100 \div 100$ . Это уравнение имеет вид:

$$x^{41} + 3x^{40} - 59x^{39} + 5x^{38} + \dots - 23x^2 + 32x - 88 = 0. \quad (6.3.1)$$

Таблица 6.1

Коэффициенты уравнения (6.3.1)

3	-59	5	-2	-7	93	25	-98	17
63	-72	13	-58	41	-81	53	21	7
-65	-5	34	-35	10	50	-74	19	28
-69	31	-57	62	21	-19	-9	84	-91
71	-18	-23	32	-88				

На рис. 6.2 (а, б) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют действительные корни  $x_1$  и  $x_2$  алгебраического уравнения (6.3.1).

На рис. 6.3 (а, б, в, г) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряжённые корни  $x_{16}$  и  $x_{17}$ , а также  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.1). Из графиков видна «периодичность» в расположении подходящих дробей, представляющих комплексные корни.

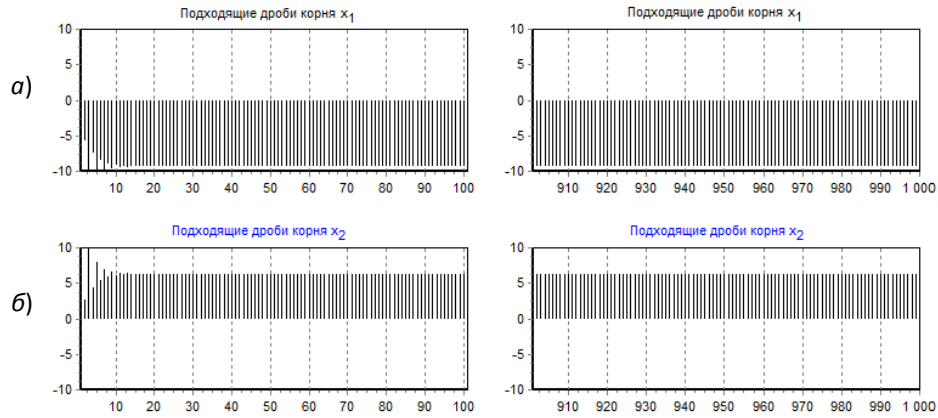


Рис. 6.2. Подходящие дроби, представляющие действительные корни  $x_1$  и  $x_2$  алгебраического уравнения (6.3.1).

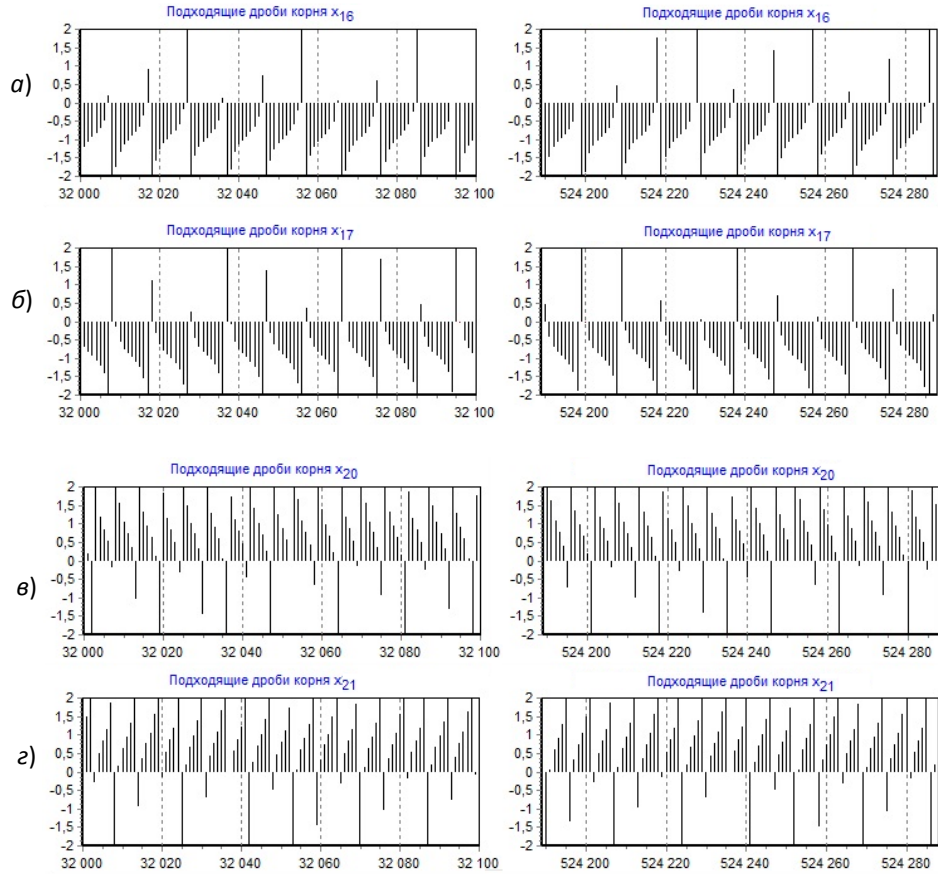


Рис. 6.3. Подходящие дроби, представляющие комплексно-сопряжённые корни  $x_{16}$ ,  $x_{17}$  и  $x_{20}$ ,  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.1).

В табл. 6.2 и табл. 6.3 показаны значения подходящих дробей представляющих действительные корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения (6.3.1).

Таблица 6.2

**Значения  $P_n/Q_n$  для  $x_1$**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$
2	-5,676470588235
4	-7,455947561210
8	-8,934067490842
16	-9,342570821524
32	-9,360430262179
64	-9,360460159945
128	-9,360460160028
256	-9,360460160028
512	-9,360460160028
1024	-9,360460160028

Таблица 6.3

**Значения  $P_n/Q_n$  для  $x_2$**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$
2	2,5930891687315
4	4,3720419620129
8	5,8499484408631
16	6,2584517020167
32	6,2763111426718
64	6,2763410404379
128	6,2763410405212
256	6,2763410405212
512	6,2763410405212
1024	6,2763410405212

В табл. 6.4 – 6.7 приведены результаты вычисления двух пар комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.1), а именно,  $x_{16}$ ,  $x_{17}$  и  $x_{20}$ ,  $x_{21}$ . В первых колонках табл. 6.4 – 6.7 указано число подходящих дробей  $P_n/Q_n$ , которые использовались при определении значений модулей и аргументов комплексных корней.

Таблица 6.4

**Определение корня  $x_{16}$  полинома (6.3.1)**

$$x_{16} = 1,00783496791408e^{i2,81716409189574}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	-0,954844340425	1,0080524309119	0,0002174629978	2,8188542665500	0,0016901746542
65536	-1,045327608357	1,0078415219572	0,0000065540431	2,8171946645215	0,0000305726258
131072	-1,301366766794	1,0078358708154	0,0000009029014	2,8171689010146	0,0000048091189
262144	-0,070043304675	1,0078195320771	0,0000154358368	2,8171750429303	0,0000109510346
524288	-1,423830166833	1,0078349470451	0,0000000208689	2,8171647518426	0,0000006599469
1048576	-0,541239161363	1,0078340678272	0,0000009000867	2,8171662729281	0,0000021810324

Таблица 6.5

**Определение корня  $x_{17}$  полинома (6.3.1)**

$$x_{17} = 1,00783494363534e^{-i2,81716408723112}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	-0,955674189700	1,0070697415791	0,0007652020561	-2,8188542665500	0,0016901793188
65536	-0,865190921769	1,0078185359383	0,0000164076969	-2,817194664521	0,0000305772904
131072	-0,609151763332	1,0078329284959	0,0000020151393	-2,817168901014	0,0000048137835
262144	-1,840475225451	1,0078371066387	0,0000021630033	-2,817175042930	0,0000109556992
524288	-0,486688363293	1,0078349277746	0,0000000158607	-2,817164751842	0,0000006646115
1048576	-1,369279368763	1,0078348572733	0,0000000863619	-2,817166272928	0,0000021856970

Таблица 6.6

**Определение корня  $x_{20}$  полинома (6.3.1)**

$$x_{20} = 0,994796949538554e^{i0,557164595688301}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	0,0534916315106	0,9908730357509	0,0039239137876	0,5556002612330	0,0015643344552
65536	1,3678635547913	0,9948102840165	0,0000133344780	0,5571814146629	0,0000168189746
131072	2,1036957441362	0,9947996804204	0,0000027308818	0,5571742504640	0,0000096547757
262144	-0,440627252991	0,9947913041470	0,0000056453915	0,5571721625130	0,0000075668247
524288	1,0320159433339	0,9947979349745	0,0000009854360	0,5571649405118	0,0000003448235
1048576	0,9472971116871	0,9947974808654	0,0000005313268	0,5571647608674	0,0000001651791

Во вторых колонках табл. 6.4 – 6.7 показаны значения подходящих непрерывных дробей Никипорца, представляющих комплексно-сопряжённые корни уравнения (6.3.1). В третьих и пятых колонках этих таблиц приведены, найденные по  $r/\varphi$ -алгоритму, то есть по формулам (6.2.4) и (6.2.5), значения модулей  $r_i$  и аргументов  $\varphi_i$  комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.1). В четвёртых и шестых колонках таблиц

представлены, соответственно,  $\varepsilon_r = |r_0 - r_n|$  и  $\varepsilon_\varphi = |\varphi_0 - \varphi_n|$ , устанавливающие разности между значениями модулей и аргументов комплексных корней, полученных с использованием стандартной программы решения алгебраических уравнений и найденных посредством алгоритма Эйткена-Никипорца. В качестве стандартной программы использовалась функция polyroots, входящая в пакет MathCAD. Комплексные корни  $x_{16}$ ,  $x_{17}$ , и  $x_{20}$ ,  $x_{24}$  найденные стандартной программой, имеют значения:

$$x_{16} = 1,007834967914e^{i2,817164091895}, \quad x_{17} = 1,007834943635 e^{-i2,817164087231}, \\ x_{20} = 0,994796949538 e^{i0,557164595688}, \quad x_{21} = 0,994796949307 e^{-i0,557164602636}.$$

Таблица 6.7

**Определение корня  $x_{21}$  полинома (6.3.1)**

$$x_{21} = 0,994796949307112e^{-i0,557164602636204}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	1.6351917960405	0,9954930133345	0,0006960640274	-0,555600261233	0,0015643414031
65536	0,3208198727599	0,9948056041663	0,0000086548592	-0,557181414662	0,0000168120267
131072	-0,415012316584	0,9948060085064	0,0000090591993	-0,557174250464	0,0000096478278
262144	2,1293106805431	0,9948009340169	0,0000039847098	-0,557158512020	0,0000060906158
524288	0,6566674842172	0,9947970365578	0,0000000872507	-0,557164940511	0,0000003378756
1048576	0,7413863158641	0,9947970491567	0,0000000998496	-0,557164760867	0,0000001582312

В табл. 6.8 приведены значения комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.1), которые установлены с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, а также проведено сравнение полученных результатов с результатами в определении корней уравнения (6.3.1) при помощи стандартной программы «polyroots», входящей в пакет Mathcad.

Таблица 6.8

**Таблица комплексных корней полинома (6.3.1)**

Номер корня, $x_i$	Модуль числа, $r_{др}$	$\varepsilon_r =  r_{сн} - r_{др} $	Аргумент числа, $\varphi_{др}$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{сн} - \varphi_{др} $
$x_3$	1,3019122199828	0,0000038517218	1,571197196476	0,0000009574580
$x_4$	1,3019082503388	0,0000001179128	-1,571197196476	0,0000009574611
$x_6$	1,1336538077234	0,000000709322	2,6298586990174	0,0000002914310
$x_7$	1,1336525274871	0,0000012081657	-2,629858699017	0,0000002848706
$x_8$	1,0869383026749	0,0000017286840	0,1914006817622	0,0000005166982
$x_9$	1,0869354354131	0,0000011385722	-0,191400681762	0,0000005166972
$x_{10}$	1,0412819238570	0,000000130998	2,3480642079786	0,0000009824865
$x_{11}$	1,0412817732513	0,0000001558209	-2,348064207978	0,0000009855573
$x_{12}$	1,0215922084783	0,0000013892163	0,8725166677112	0,0000003337546
$x_{13}$	1,0215906324747	0,0000001747125	-0,872516667711	0,0000003281448
$x_{14}$	1,0161379018867	0,0000001633531	0,3475862675395	0,0000001302110
$x_{15}$	1,0161375417953	0,0000001329612	-0,347586267539	0,0000001638676
$x_{31}$	0,9706124759163	0,0000013789517	1,9768742421184	0,0000004369711
$x_{32}$	0,9706183834095	0,0000072865297	-1,976871170320	0,0000035087425
$x_{33}$	0,9695952467424	0,0000004233652	1,0435543983844	0,0000014338352
$x_{34}$	0,9695950456178	0,0000002222481	-1,043554398384	0,0000014341905
$x_{35}$	0,9532571437562	0,0000002464457	0,7306333749298	0,0000012722923
$x_{36}$	0,9532590219768	0,0000021258793	-0,730630303131	0,0000018137859
$x_{37}$	0,9417139140609	0,0000020610021	1,2600946776292	0,0000005117380
$x_{38}$	0,9417131186608	0,0000012698637	-1,260094677629	0,0000004437064
$x_{39}$	0,8837665210792	0,0000005380907	1,8060238911429	0,0000007800379
$x_{40}$	0,8837659938563	0,0000000510283	-1,806023891142	0,0000007549626

В табл. 6.9 приведены действительные корни полинома (6.3.1), также найденные при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (6.2.4) и (6.2.5).

Таблица 6.9

*Действительные корни полинома (6.3.1)*

Номер корня	Значения корней	$\varepsilon_\varphi =  x_{сп} - x_{др} $
$x_1$	-9,3604396905217	0,0000204683472
$x_2$	6,2763297683441	0,0000112704437
$x_5$	-1,1741951605108	0,0000001843916
$x_{28}$	-0,988530339599	0,0000000219673
$x_{41}$	-0,841336008445	0,0000000811259

На рис. 6.4 показано расположение корней уравнения (6.3.1) на комплексной плоскости.

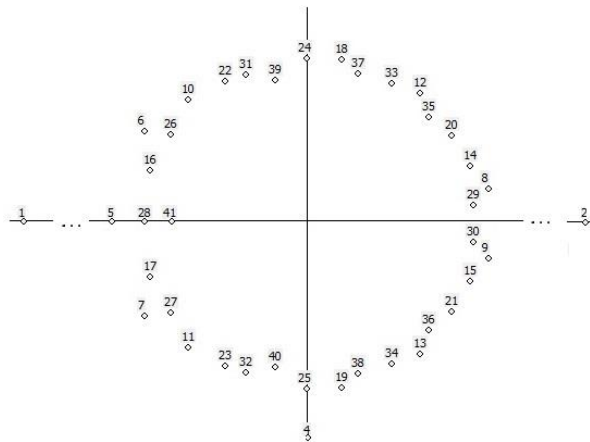


Рис. 6.4. Расположение корней уравнения (6.3.1) на комплексной плоскости.

Выше отмечалось, что формулы (6.2.3) – (6.2.5) представляют корни полинома  $n$ -й степени через его коэффициенты. Используя эти формулы, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Произвольное алгебраическое уравнение степени  $n$  разрешимо с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (6.2.4) и (6.2.5), в функциях  $N_i^{(n)}$ , записываемых отношениями (6.2.3) определителей Тейлора бесконечного порядка.

Предлагаемый алгоритм нахождения нулей полинома имеет две особенности в сравнении с существующими методами решения алгебраических уравнений. Первая и, пожалуй, принципиально важная особенность: предложен простой аналитический способ записи всех корней уравнения  $n$ -й степени по коэффициентам исходного уравнения. Комплексные корни находятся из "расширяющихся" отношений определителей с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма. Вторая особенность предложенного алгоритма нахождения нулей полинома  $n$ -й степени, – простота и регулярность информационного графа алгоритма, что делает его привлекательным при аппаратной реализации в решающем поле суперкомпьютеров с реконфигурируемой структурой. Следует также отметить, что рассмотренный алгоритм позволяет определять все корни полинома параллельно, то есть одновременно.

### Пример 2

Определим корни уравнения 51-й степени, коэффициенты которого равны  $1/n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots, 52$ . Это уравнение имеет вид:

$$x^{51} + \frac{1}{2}x^{50} + \frac{1}{3}x^{49} + \frac{1}{4}x^{48} + \dots + \frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{51}x - \frac{1}{52} = 0. \quad (6.3.2)$$

На рис. 6.5 (а, б) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют действительный корень  $x_{43}$  алгебраического уравнения (6.3.2).

На рис. 6.6 (а, б, в, г) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряжённые корни  $x_7$  и  $x_8$ , а также  $x_{48}$  и  $x_{49}$  алгебраического уравнения (6.3.2). Из графиков видна «периодичность» в расположении подходящих дробей, представляющих комплексные корни.

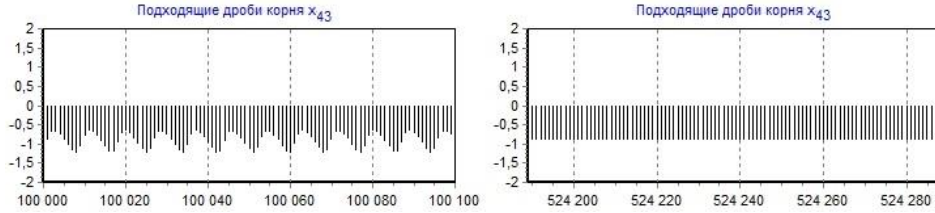


Рис. 6.5. Подходящие дроби, представляющий действительный корень алгебраического уравнения (6.3.2).

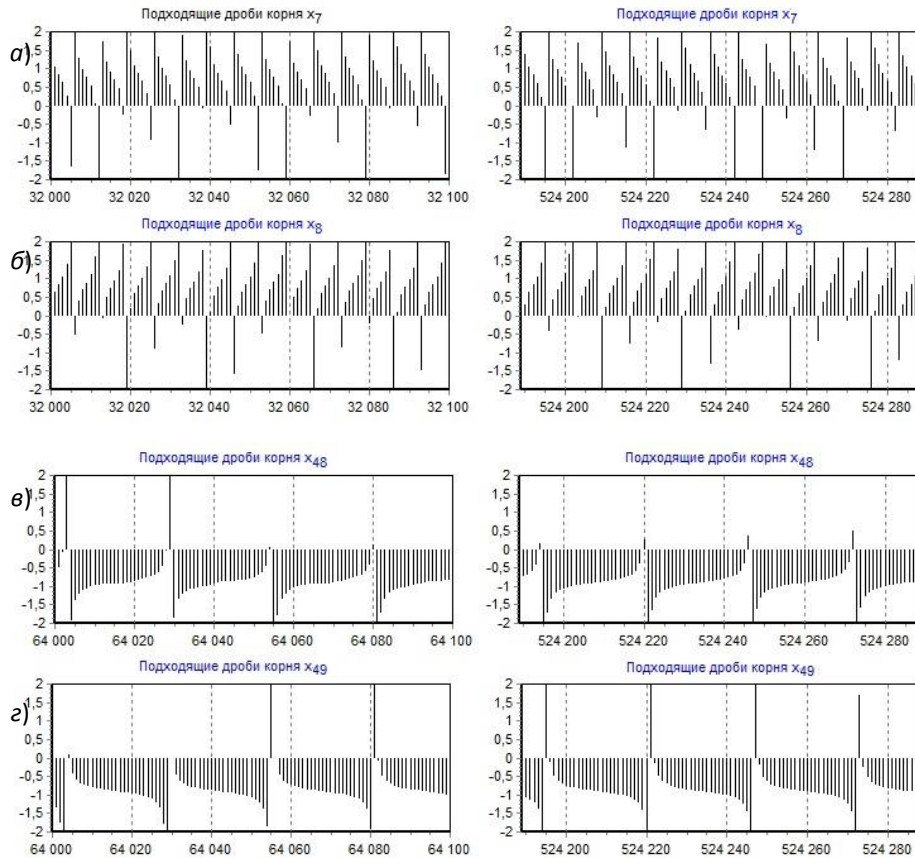


Рис. 6.6. Подходящие дроби, представляющие комплексно-сопряжённые корни  $x_6$ ,  $x_7$  и  $x_8$ ,  $x_9$  алгебраического уравнения (6.3.2).

В табл. 6.10 – 6.13 приведены результаты вычисления двух пар комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.2), а именно,  $x_7$ ,  $x_8$  и  $x_{48}$ ,  $x_{49}$ . В первых колонках табл. 6.10 – 6.13 указано число подходящих дробей  $P_n/Q_n$  которые использовались при определении значений модулей и аргументов комплексных корней.

Таблица 6.10

**Определение корня  $x_7$  полинома (6.3.2)**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	Аргумент числа, $\varphi_n$
32768	0,6665966358227	0,9316709246393	0,4657237483865
65536	0,9225560200658	0,9319440033932	0,4680024121816
131072	3,1201131950180	0,9319367811645	0,4680377859455
262144	1,1209523020436	0,9319404729544	0,4680344448657
524288	0,2174806885554	0,9319362717385	0,4680331000833
1048576	0,2110122575853	0,9319380340009	0,4680355815508

Таблица 6.11

**Определение корня  $x_8$  полинома (6.3.2)**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	Аргумент числа, $\varphi_n$
32768	0,9968322696881	0,9314767142887	-0,465723748386
65536	0,7408728854449	0,9319278001898	-0,468002412181
131072	-1,456684289507	0,9319515933218	-0,468037785945
262144	0,5424766034671	0,9319387073667	-0,468034444865
524288	1,4459482169553	0,9319399797991	-0,468033100083
1048576	1,4524166479254	0,9319398704761	-0,468035581550

Таблица 6.12

**Определение корня  $x_{48}$  полинома (6.3.2)**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	Аргумент числа, $\varphi_n$
32768	-1,043872456420	0,9197290453379	3,019033772435
65536	-1,200187999405	0,9205787355232	3,0203766565195
131072	-0,794863289933	0,9205949283611	3,0204292132037
262144	-1,849269937890	0,9205945564907	3,0204172294618
524288	-0,880725537664	0,9206003420124	3,0204251692184
1048576	-0,832701133785	0,9206003077610	3,0204256738509

Таблица 6.13

**Определение корня  $x_{49}$  полинома (6.3.2)**

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	Аргумент числа, $\varphi_n$
32768	-0,846206442554	0,9206284538438	-3,019033772435
65536	-0,644221421807	0,9206246711338	-3,020376656519
131072	-1,032681278536	0,9206032462506	-3,020429213203
262144	0,0215678407799	0,9206088034273	-3,020417229461
524288	-0,946976558011	0,9206005595177	-3,020425169218
1048576	-0,995000961890	0,9206007731849	-3,020425673850

Во вторых колонках табл. 6.10 – 6.13 показаны значения подходящих непрерывных дробей Никипорца, представляющих комплексно-сопряжённые корни уравнения (6.3.2). В третьих и четвёртых колонках этих таблиц приведены, найденные по  $r/\varphi$ -алгоритму, то есть по формулам (6.2.4) и (6.2.5), значения модулей  $r_i$  и аргументов  $\varphi_i$  комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.2).

В табл. 6.14 даны значения комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.1), которые установлены с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма. В колонках 3 и 4 табл. 6.14 проведено сравнение полученных результатов с результатами в определении корней уравнения (6.3.2) при помощи стандартной программы MathCAD.

Таблица 6.14

**Таблица комплексных корней полинома (6.3.2)**

Номер корня, $x_i$	Модуль числа, $r_{оп}$	$\varepsilon_r =  r_{сп} - r_{оп} $	Аргумент числа, $\varphi_{оп}$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{сп} - \varphi_{оп} $
$x_1$	0,9478718314037	-7,093823623E-06	0,0978029868337	-1,701834672E-05
$x_2$	0,9478689383256	5,879219238E-06	-0,097802986833	-7,274026425E-06
$x_3$	0,9392060624817	-1,730322828E-06	0,2225395013713	1,412049865E-06
$x_4$	0,9392066250931	-2,635069952E-06	-0,222539501371	1,050973730E-06



Окончание табл. 6.14

$x_5$	0,9347992556303	0,3456049576206	1,146222838E-05	-2,637878101E-05
$x_6$	0,9347965808349	-0,345608029418	2,261215404E-05	2,152750716E-05
$x_7$	0,9319397303707	0,4680376234152	-3,369469124E-05	2,380029270E-06
$x_8$	0,9319400603502	-0,468037623415	-3,396739164E-05	-1,661891474E-06
$x_9$	0,9298619208840	0,5901508221841	-5,843136438E-05	5,892554620E-05
$x_{10}$	0,9298618587878	-0,590153893982	-5,347149302E-05	-5,694947571E-05
...	...	...	...	...
$x_{41}$	0,9209023203468	2,4463218209643	1,471238296E-03	-5,925221903E-03
$x_{42}$	0,9209057345987	-2,420365125127	1,927573521E-03	3,250645702E-03
$x_{44}$	0,9207052693780	2,8921380553047	1,188456691E-04	3,485473381E-03
$x_{45}$	0,9207044786820	-2,895031689325	-1,091827782E-04	-1,996115046E-03
$x_{46}$	0,9206692359156	2,6560672823167	1,541254936E-05	5,826651032E-05
$x_{47}$	0,9206711503426	-2,656067282316	1,434395267E-05	-5,801757126E-05
$x_{48}$	0,9206003905278	3,0204255687046	-2,568104730E-05	-9,781407353E-05
$x_{49}$	0,9206007101000	-3,020425568704	-2,585983128E-05	9,782624997E-05
$x_{50}$	0,9203290311771	2,7775876240091	1,756037983E-04	1,157152772E-07
$x_{51}$	0,9203289023792	-2,777587624009	1,756745115E-04	-1,284750041E-07

Единственный действительный корень полинома (6.3.2), также найденный при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (6.2.4) и (6.2.5), равен величине 0,9207737899699.

На рис. 6.7 показано расположение корней уравнения (6.3.2) на комплексной плоскости.

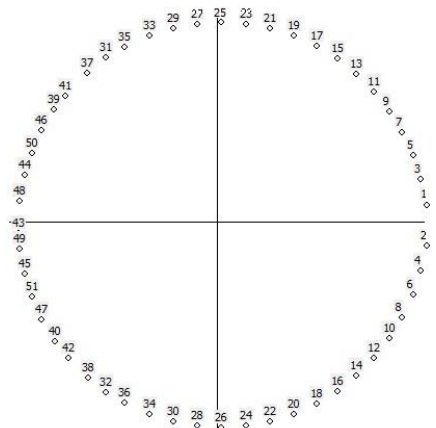


Рис. 6.7. Расположение корней уравнения (6.3.2) на комплексной плоскости.

Выше отмечалось, что формулы (6.2.3) – (6.2.5) представляют корни полинома  $n$ -й степени через его коэффициенты. Используя эти формулы, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Произвольное алгебраическое уравнение степени  $n$  разрешимо с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, то есть формул (6.2.4) и (6.2.5), в функциях  $N_i^{(n)}$ , записываемых отношениями определителей Тейлора бесконечного порядка (6.2.3). Комплексные корни находятся при использовании  $r/\varphi$ -алгоритма непосредственно, без выделения квадратичных множителей с последующим решением квадратных уравнений, как то имеет место в известных алгоритмах решения алгебраических уравнений.

### Пример 3

Вычислим корни уравнения 25-й степени, коэффициенты которого получены случайной выборкой чисел из диапазона  $1 \div 100$ . Это уравнение имеет вид:

$$x^{25} + 3x^{24} + 17x^{23} + 22x^{22} + \dots + 85x^2 + 45x + 91 = 0. \quad (6.3.3)$$

В табл. 6.15 приведены коэффициенты уравнения (6.3.3).

Таблица 6.15

**Коэффициенты уравнения (6.3.3)**

3	17	22	78	34	41	22	13	64
44	16	20	59	83	52	26	97	93
79	51	85	66	85	45	91		

В табл. 6.16 приведены значения комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.3), которые установлены с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма.

Во второй колонке табл. 16 даны значения модулей комплексных корней, полученных по формулам (6.2.4). Следует обратить внимание, что модули комплексных корней расположены строго «по убыванию» их значений. В 4-й колонке табл. 6.16 помещены аргументы комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.3), которые установлены по формуле (6.2.5).

В колонках 3 и 5 табл. 6.16 показаны, соответственно,  $\varepsilon_r = |r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}}|$  и  $\varepsilon_\varphi = |\varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}}|$ , устанавливающие разности между значениями модулей и аргументов комплексных корней, полученных с использованием стандартной программы решения алгебраических уравнений, и найденных посредством  $r/\varphi$ -алгоритма.

Таблица 6.16

**Таблица комплексно-сопряжённых корней полинома (6.3.3), полученных с применением  $r/\varphi$ -алгоритма**

Номер корня	Модуль комплексного числа, $r_{\text{оп}}$	$\varepsilon_r =  r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{\text{оп}}$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}} $
$x_1$	3,2141867437368	0,0000041243611	2,0524896296589	0,0000018390573
$x_2$	3,2141832442533	0,0000076196014	-2,052486557860	0,0000012296768
$x_3$	2,4727985538026	0,0000032504378	1,5038787362084	0,0000001572191
$x_4$	2,4727991327277	0,0000025944637	-1,503878736208	0,0000002897548
$x_5$	1,2061633937317	0,0000001816296	1,6752727954873	0,0000012924361
$x_6$	1,2061640235153	0,0000004525277	-1,675269723688	0,0000017800538
$x_8$	1,0571718819207	0,0000000748636	0,2583689570209	0,0000000353650
$x_9$	1,0571718379147	0,0000000256828	-0,258368957020	0,0000000667491
...	...	...	...	...
$x_{18}$	0,9941639521810	0,0000003585166	0,5332058248562	0,0000012848331
$x_{19}$	0,9941623615201	0,0000012276137	-0,533208896654	0,0000017913939
$x_{20}$	0,9910721419287	0,0000004142283	2,1869852474713	0,0000002974423
$x_{21}$	0,9910728727988	0,0000003235646	-2,186985247471	0,0000003109167
$x_{22}$	0,9847087010428	0,0000015227275	2,5497615577224	0,0000023463967
$x_{23}$	0,9847074913781	0,0000003204913	-2,549764629520	0,0000007349477
$x_{24}$	0,8864895769842	0,0000003618987	1,3973948473114	0,0000010945956
$x_{25}$	0,8864894757434	0,0000002658838	-1,397397919109	0,0000019796347

На рис. 6.8 показаны подходящие непрерывных дробей, которые представляют единственный действительный корень  $x_7$  алгебраического уравнения (6.3.3).

$$x_7 = -1,078191121\dots$$

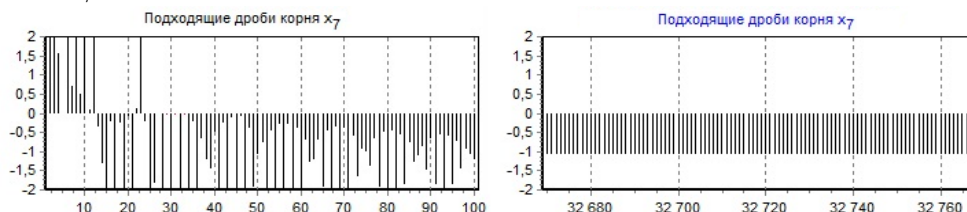


Рис. 6.8. Подходящие дроби, представляющие действительный корень  $x_7$  алгебраического уравнения (6.3.3).

На рис. 6.9 (а, б) и 6.10 (а, б) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряжённые корни  $x_8$  и  $x_9$ , а также  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.3).

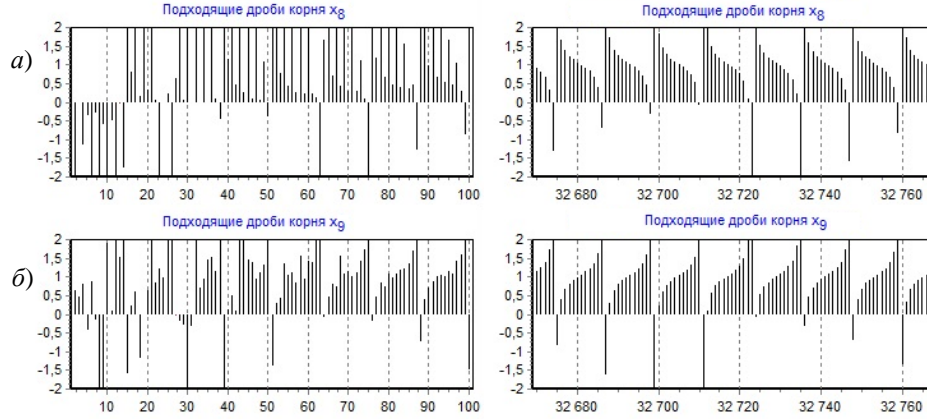


Рис. 6.9. Подходящие дроби, представляющие комплексно-сопряжённые корни  $x_8$  и  $x_9$  алгебраического уравнения (6.3.3).

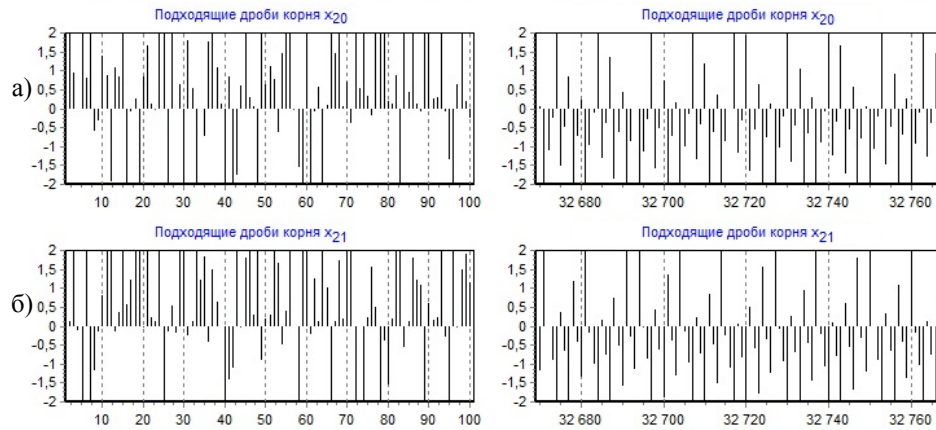


Рис. 6.10. Подходящие дроби, представляющие комплексно-сопряжённые корни  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.3).

В модифицированном алгоритме Рутисхаузера, чтобы найти комплексно-сопряжённые корни  $x_i$  и  $x_{i+1}$  алгебраического уравнения (6.3.3) определяются коэффициенты квадратных уравнений  $x^2 + px + q = 0$  по правилу:

$$x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)} = -p_{i,i+1}^{(n)}, \quad (6.3.4)$$

$$x_i^{(n-1)} \cdot x_{i+1}^{(n)} = q_{i,i+1}^{(n)}. \quad (6.3.5)$$

На рис. 6.11 – рис. 6.14 показаны графики значений  $p^{(n)}$  и  $q^{(n)}$  для комплексно – сопряжённых корней  $x_8$  и  $x_9$ , а также  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.3). Значения  $p$  и  $q$  соответствующих квадратных уравнений фиксируются в правых частях графиков.

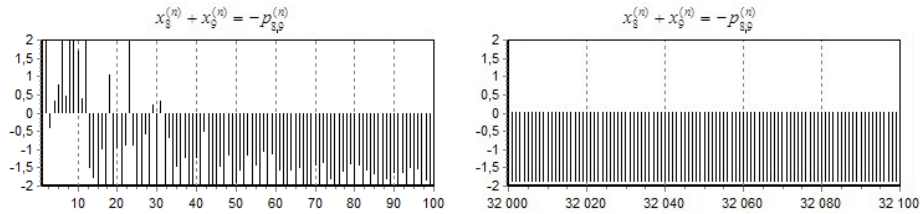


Рис. 6.11. Значения  $-p_{8,9}^{(n)}$  для определения корней  $x_8$  и  $x_9$  методом Рутисхаузера.

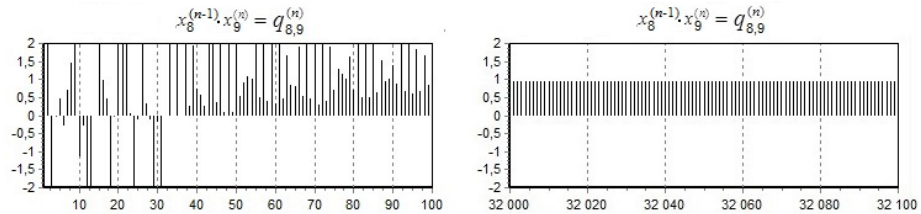


Рис. 6.12. Значения  $q_{8,9}^{(n)}$  для определения корней  $x_8$  и  $x_9$  методом Рутисхаузера.

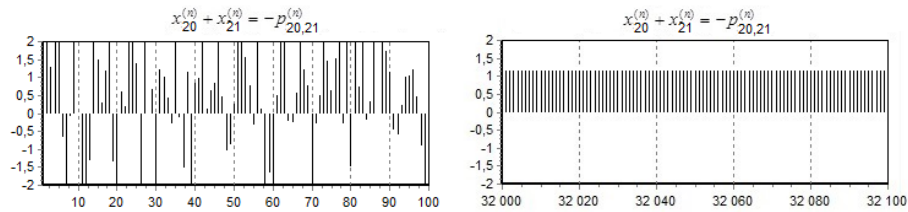


Рис. 6.13. Значения  $-p_{20,21}^{(n)}$  для определения корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$  методом Рутисхаузера.

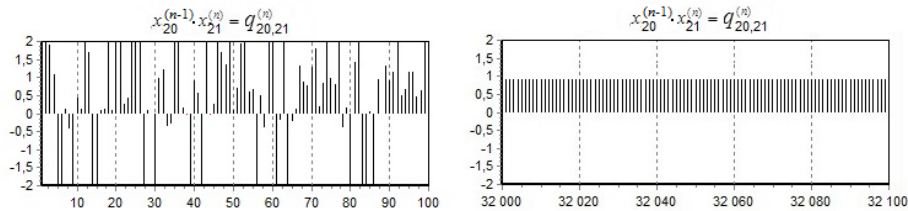


Рис. 6.14. Значения  $q_{20,21}^{(n)}$  для определения корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$  методом Рутисхаузера.

В табл. 6.17 и табл. 6.18 приведены значения коэффициентов квадратных уравнений, из которых устанавливаются комплексно-сопряжённые корни  $x_8, x_9$  и  $x_{20}, x_{21}$  исходного уравнения (6.3.3). Значения  $p^{(n)}$  и  $q^{(n)}$  определяются, соответственно, по формулам (6.3.4) и (6.3.5).

Здесь следует обратить внимание, что в алгоритме Рутисхаузера, описываемого формулами (6.3.4) и (6.3.5), подходящие комплексно-сопряжённые корни  $x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}$  и  $x_i^{(n-1)}$  представлены вещественными «отчётами», помещенными во вторых, третьих и шестых колонках табл. 6.17 и табл. 6.18, соответственно. Необходимо отметить, что если при определении значения  $-p_{i,i+1}^{(n)}$  использовались значения  $x_i^{(n)}$  и  $x_{i+1}^{(n)}$ , то есть значения с индексами  $n$ , то при определении  $q_i^{(n)}$  использовались  $x_i^{(n-1)}$  и  $x_{i+1}^{(n)}$ .

Таблица 6.17

Вычисление  $p_{8,9}^{(n)}$  и  $q_{8,9}^{(n)}$  квадратного уравнения для корней  $x_8$  и  $x_9$

Номер, $n$	Значения $x_8^{(n)}$	Значения $x_9^{(n)}$	$x_8^{(n)} + x_9^{(n)} = -p_{8,9}^{(n)}$	Номер, $n-1$	Значения $x_8^{(n-1)}$	$x_8^{(n-1)} \cdot x_9^{(n)} = q_{8,9}^{(n)}$
4	-1,143523292883	0,809540203279	0,333983089604	3	-0,034940175910	-0,028285477109
8	-2,041025883821	-4,901624635077	6,942650518898	7	-0,295674993389	1,449287831570
16	0,793920311970	0,208451955680	-1,002372267650	15	4,647433714160	0,968766646612
32	79,685432743099	14,403231024457	-94,088663767555	31	0,001984346199	0,028580996735
64	1,670165051798	-0,076198966508	-1,593966085290	63	-10,786397373059	0,821912332170
128	1,527291172098	0,864269369902	-2,391560542000	127	1,051909698135	0,909133332001
256	0,441705720030	1,610582800485	-2,052288520515	255	0,681032270997	1,096858862244
512	0,015913762342	2,028227973531	-2,044141735874	511	0,551084528967	1,117725057432
1024	4,583405641374	-2,539241147068	-2,044164494306	1023	-0,440136365315	1,117612369129
2048	1,311069822722	0,733094670100	-2,044164492821	2047	1,524513016287	1,117612366738
4096	0,862819747433	1,181344745388	-2,044164492821	4095	0,946050990715	1,117612366750
8192	0,996356987728	1,047807505094	-2,044164492821	8191	1,066619929306	1,117612367010
16384	1,289644056680	0,754520436141	-2,044164492821	16383	1,481222126074	1,117612364588
32768	0,833436998571	1,210727494250	-2,044164492821	32767	0,923091584850	1,117612361489

Таблица 6.18

Вычисление  $p_{8,9}^{(n)}$  и  $q_{8,9}^{(n)}$  квадратного уравнения для корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$

Номер, $n$	Значения $x_{20}^{(n)}$	Значения $x_{21}^{(n)}$	$x_{20}^{(n)} + x_{21}^{(n)} = -p_{20,21}^{(n)}$	Номер, $n-1$	Значения $x_{20}^{(n-1)}$	$x_{20}^{(n-1)} \cdot x_{21}^{(n)} = q_{20,21}^{(n)}$
4	-0,038855035324	-0,105768491282	0,144623526606	3	0,937112311545	-0,099116955353
8	-0,606380098784	-1,182273464718	1,788653563502	7	19,596758993827	-23,168728152876
16	-1,970152519927	0,556979228618	1,413173291309	15	2,905049139078	1,618052028582
32	0,512919744992	0,115002271157	-0,627922016149	31	1,778434710291	0,204524030788
64	-2,850738055694	3,661179803073	-0,810441747379	63	0,574147133101	2,102055887702
128	10,091974768772	0,252132938560	-10,344107707332	127	1,819023003236	0,458635615114
256	0,401346475878	0,261759861968	-0,663106337845	255	1,783355932721	0,466811002788
512	0,187028643636	1,560788952848	-1,747817596484	511	-29,606548960765	-46,209574549910
1024	8,183384353244	-6,819846445328	-1,363537907916	1023	-0,024561841670	0,167507988605
2048	1,153365488115	-2,303364882309	1,149999394193	2047	-0,479281749535	1,103960750611
4096	-1,832191486342	0,686690176541	1,145501309802	4095	1,430214761605	0,982114427138
8192	0,516204150608	-1,661743195327	1,145539044720	8191	-0,591080991421	0,982224815380
16384	-10,250869275715	9,105330230806	1,145539044910	16383	0,107873607121	0,982224816028
32768	-0,607466322902	-0,538072722010	1,145539044912	32767	-1,825450021115	0,982224861754

На рис. 6.15 – рис. 6.18 показаны графики модулей и модулей аргументов комплексно-сопряжённых корней  $x_8$  и  $x_9$ , а также  $x_{20}$  и  $x_{21}$ , которые находятся из решений соответствующих квадратных уравнений с коэффициентами  $p$  и  $q$ , найденных по формулам (6.3.4) и (6.3.5).

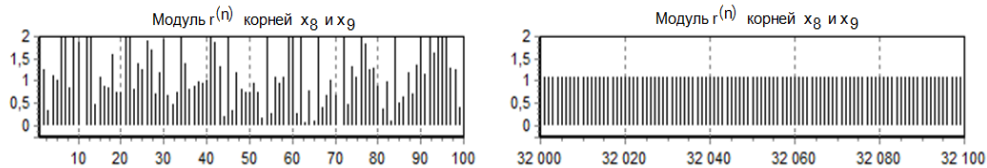


Рис. 6.15. Значения модуля  $r_n$  корней  $x_8$  и  $x_9$  алгебраического уравнения (6.3.3).

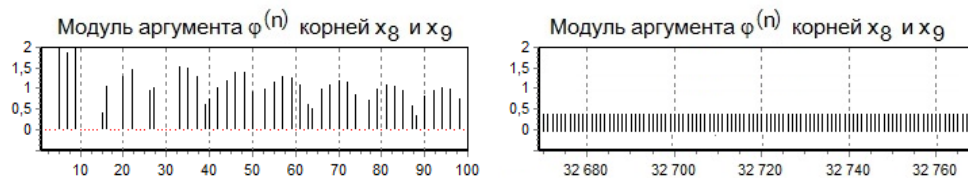
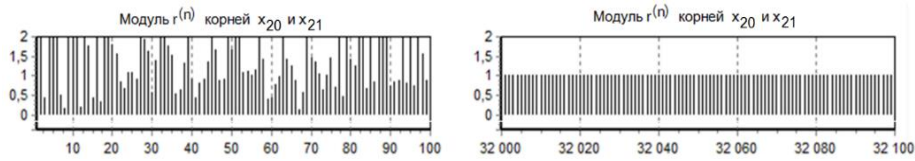
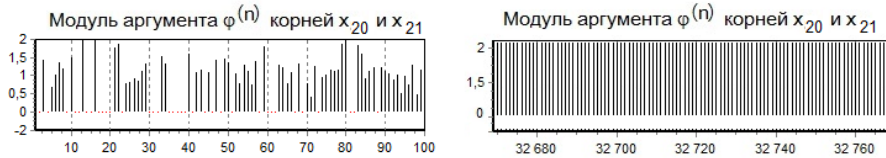


Рис. 6.16. Значения модуля аргумента  $\phi_n$  корней  $x_8$  и  $x_9$  алгебраического уравнения (6.3.3).

Рис. 6.17. Значения модуля  $r_n$  корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения.Рис. 6.18. Значения модуля аргумента  $\varphi_n$  корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$  алгебраического уравнения (6.3.1).

В табл. 6.19 и табл. 6.20 приведены результаты определения значений комплексно-сопряжённых корней  $x_8$  и  $x_9$ , а также  $x_{20}$  и  $x_{21}$  уравнения (6.3.3), найденных с использованием алгоритма Рутисхаузера, то есть вычислений по формулам (6.3.4) и (6.3.5) коэффициентов  $p_n$  и  $q_n$  соответствующих квадратных уравнений.

В табл. 6.21 приведены значения всех комплексно-сопряжённых корней алгебраического уравнения (6.3.3), установленные по модифицированному алгоритму Рутисхаузера.

Таблица 6.19

**Вычисление модуля и аргумента комплексных корней  $x_8$  и  $x_9$** 

$$x_{8,9} = 1,057171863597 e^{\pm i0,258368890272}$$

Номер, $n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}} $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}} $
1024	1,057171873031	9,43420030985465E-9	0,25836887969622	1,05756267632096E-8
2048	1,057171871900	8,30298962917198E-9	0,258368878395133	1,18767143897358E-8
4096	1,057171871906	8,3090319069612E-9	0,258368878416753	1,18550944616658E-8
8192	1,057171872029	8,43161584995755E-9	0,258368878855521	1,14163261621947E-8
16384	1,057171870883	7,28616078582434E-9	0,258368874755424	1,55164228132776E-8
32768	1,057171869417	5,82034864748948E-9	0,258368869508615	2,07632317450468E-8

Таблица 6.20

**Вычисление модуля и аргумента комплексных корней  $x_{20}$  и  $x_{21}$** 

$$x_{20,21} = 0,991072549234 e^{\pm i2,186984936554}$$

Номер, $n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}} $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}} $
1024	1,227022030955	0,235949481721627	2,15973759555103	0,027247341003582
2048	1,050695365275	0,0596228160411919	2,14987892886680	0,0371060076878078
4096	0,991016865213	5,56840206258347E-5	2,18700141760841	1,64810537963689E-5
8192	0,991072558080	8,84643125420581E-9	2,18698494893573	1,23811152441533E-8
16384	0,991072558407	9,17329323613103E-9	2,18698494881967	1,22650600786756E-8
32768	0,991072581476	3,22420973253301E-8	2,18698493233727	4,21734114297578E-9

Таблица 6.21

**Таблица комплексно-сопряжённых корней полинома (6.3.3), установленных по модифицированному алгоритму Рутисхаузера**

Номер корня	Модуль комплексного числа, $r_{\text{др}}$	$\varepsilon_r =  r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{\text{др}}$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}} $
$x_{1,2}$	3,214190902485	3,86311094224823E-8	2,052487783325	4,21233581349156E-9
$x_{3,4}$	2,472801773714	4,65230063362299E-8	1,503878500875	5,44213485387246E-8
$x_{5,6}$	1,206163565122	5,86461745832878E-9	1,675271505366	1,62395452640851E-9
$x_{8,9}$	1,057171869417	5,82034864748948E-9	0,258368869508	2,07632317450468E-8

Окончание табл. 6.21

$x_{10,11}$	1,022136191713	2,71551026109762E-9	2,821721349085	1,20471286280122E-8
$x_{12,13}$	1,011573866641	3,41293660000019E-11	0,790968233790	3,49832385282411E-11
$x_{14,15}$	1,012936091713	0,00321643059528354	1,064882598845	0,00393351020984567
$x_{16,17}$	1,012908620171	0,00340242555484815	1,960130352270	0,00400677942364025
$x_{18,19}$	0,994163595273	6,13985362551972E-9	0,533207111790	6,53022680374704E-9
$x_{20,21}$	0,991072581476	3,22420973253301E-8	2,186984932337	4,21734114297578E-9
$x_{22,23}$	0,984707178213	7,32627825072996E-9	2,549763883508	1,10640927530881E-8
$x_{24,25}$	0,886489212679	2,82032219800499E-9	1,397395940257	7,82228504192517E-10

На рис. 6.19 показаны корни уравнения (6.3.3) на комплексной плоскости.

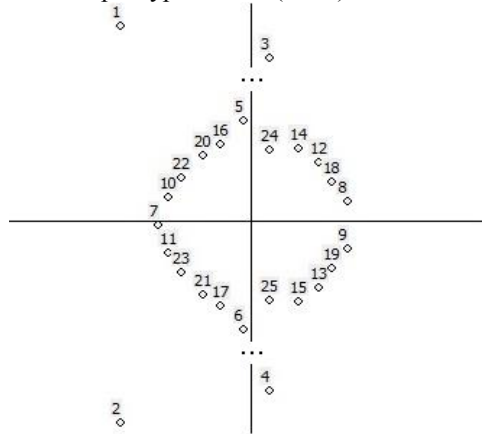


Рис. 6.19. Расположение корней уравнения (6.3.3) на комплексной плоскости.

Сравнение результатов вычисления комплексных корней уравнения (6.3.3), помещённых в табл. 6.16 и табл. 6.21, показывает, что модифицированный алгоритм Рутисхаузера обеспечивает несколько большую точность в определении корней, нежели  $r/\varphi$ -алгоритм. В то же время, следует подчеркнуть, что  $r/\varphi$ -алгоритм более надёжный алгоритм, так как не пребудет жёсткой синхронизации подходящих, что имеет место в алгоритме Рутисхаузера, как то следует из формул (6.3.4) и (6.3.5).

Таким образом, использование  $r/\varphi$ -алгоритма в вычислительной практике, несмотря на некоторую его громоздкость, представляется более перспективным, нежели использование алгоритма Рутисхаузера, в связи с тем, что комплексные корни при применении  $r/\varphi$ -алгоритма находятся непосредственно из множества подходящих дробей, а не из решения соответствующих квадратных уравнений, что требует жёсткой синхронизации «отчётов».

Следует отметить, что определение комплексных корней алгебраических уравнений степени  $n$  во всех известных алгоритмах, включённых в стандартные вычислительные программы, подразумевает именно нахождение квадратичных множителей, то есть составление и решений квадратных уравнений, имеющих отрицательный дискриминант, то есть два комплексно-сопряжённых корня. Так как  $r/\varphi$ -алгоритм по природе своей есть алгоритм усреднения, метод решения алгебраических уравнений, базирующийся на этом алгоритме, является устойчивым к накоплению вычислительной погрешности и «сбоям», то есть надёжным.

#### Пример 4.

При помощи QD-алгоритма, описываемого формулами (6.2.6) и (6.2.7) и  $r/\varphi$ -алгоритма, определяемого формулами (6.2.4) и (6.2.5), вычислим корни уравнения 25-й степени, коэффициенты которого получены выборкой простых чисел из диапазона 2 – 100. Это уравнение имеет вид:

$$x^{25} + 97x^{24} + 3x^{23} + 83x^{22} + \dots + 5x^2 + 89x + 2 = 0. \quad (6.3.6)$$

Таблица 6.22

**Коэффициенты уравнения (6.3.6)**

97	3	83	7	73	13	67	19	59
29	47	37	41	43	31	53	23	61
17	71	11	79	5	89	2		

На рис. 6.20 (а, б, в, г) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряжённые корни  $x_2$  и  $x_3$ , а также  $x_8$  и  $x_9$  алгебраического уравнения (6.3.6). Из графиков видна «периодичность» в расположении подходящих дробей, представляющих комплексные корни.

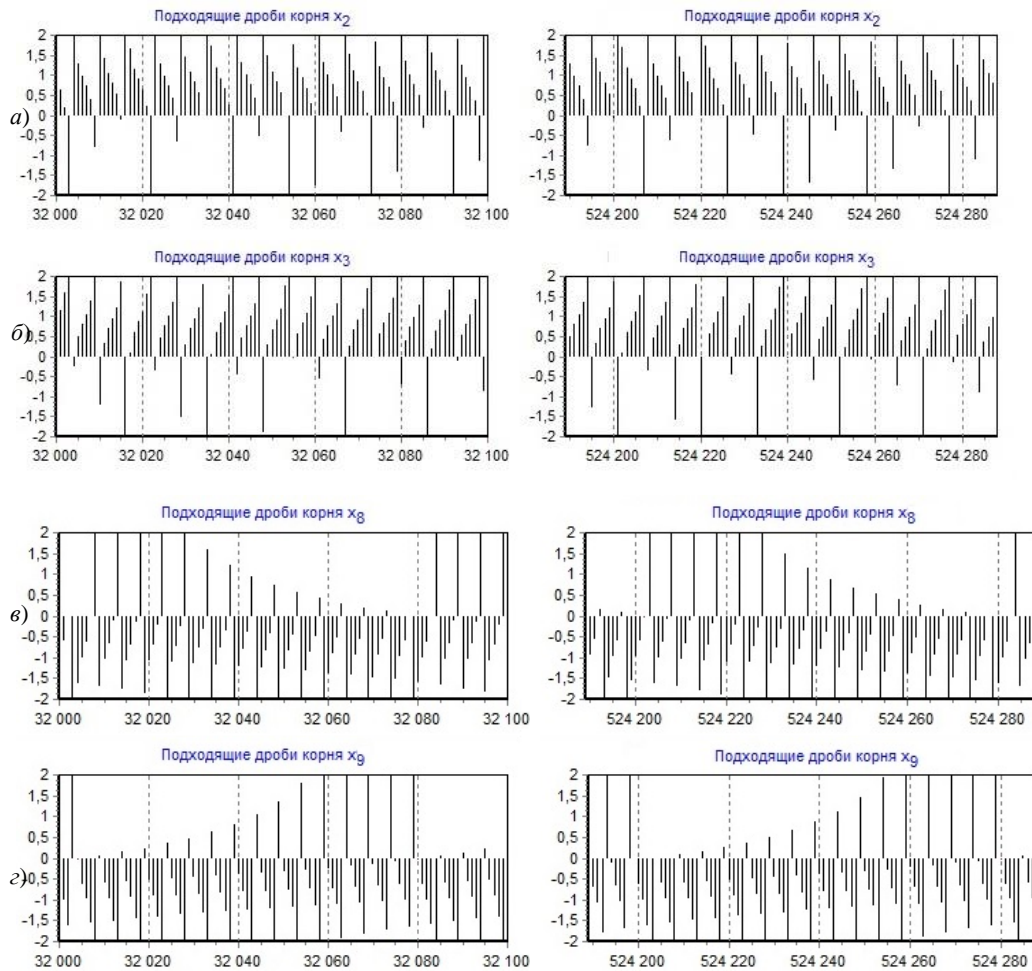


Рис. 6.20. Подходящие дроби, представляющие корни алгебраического уравнения (6.3.6).

В табл. 6.23 – 6.26 приведены результаты вычисления двух пар комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.6), а именно корень,  $x_2$ ,  $x_3$ , и  $x_8$ ,  $x_9$ . В первых колонках табл. 6.23 – 6.26 указано число подходящих дробей  $P_n / Q_n$ , которые использовались при определении значений модуля и аргумента комплексных корней.



Таблица 6.23

**Вычисление корня  $x_2$  полинома (6.3.6)**

$$x_2 = 1,00046133939838e^{i0,494672291565701}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	0,9951261955805	1,0005745315091	0,0001131921107	0,4943208206558	0,0003514709098
65536	4,3078676865598	1,0004492205449	0,0000121188534	0,4946999076723	0,0000276161066
131072	1,2679163152430	1,0004623433786	0,0000010039802	0,4946740827066	0,0000017911409
262144	0,3779810250374	1,0004559677767	0,0000053716216	0,4946665562179	0,0000057353477
524288	0,5060716515083	1,000459676294	0,0000016631043	0,4946699084135	0,0000023831521
1048576	0,6932535286839	1,0004609939300	0,0000003454683	0,4946714262347	0,0000008653309

Таблица 6.24

**Вычисление корня  $x_3$  полинома (6.3.6)**

$$x_3 = 1,00046130788874 e^{-i0,494672272895419}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	0,7659344861477	1,0004974146570	0,0000361067682	-0,494320820655	0,0003514522395
65536	-2,546807004831	1,0005205330455	0,0000592251567	-0,494699907672	0,0000276347769
131072	0,4931443664852	1,0004638767757	0,0000025688870	-0,494674082706	0,0000018098112
262144	1,3830796566908	1,0004629377656	0,0000016298769	-0,494666556217	0,0000057166774
524288	1,2549890302199	1,0004617974341	0,0000004895453	-0,494669908413	0,0000023644818
1048576	1,0678071530442	1,0004613778746	0,0000000699858	-0,494671426234	0,0000008466606

Таблица 6.25

**Вычисление корня  $x_8$  полинома (6.3.6)**

$$x_8 = 0,998128222084988e^{i2,52145712964537}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	-18,92685200103	0,9975587819467	0,0005694401382	2,5206276557411	0,0008294739042
65536	-1,362086019354	0,9981297046874	0,0000014826025	2,5214613548223	0,0000042251769
131072	-0,213019013101	0,9981095798604	0,0000186422245	2,5214742970890	0,0000171674436
262144	-0,237878380009	0,9981207484830	0,0000074736019	2,5214644185209	0,0000072888755
524288	-0,120107220145	0,9981233147833	0,0000049073016	2,5214604424037	0,0000033127583
1048576	0,6033239679737	0,9981271705329	0,0000010515519	2,5214555517169	0,0000015779283

Таблица 6.26

**Вычисление корня  $x_9$  полинома (6.3.6)**

$$x_9 = 0,998128189427682e^{-i2,52145714472447}$$

Номер, $n$	Значения $P_n / Q_n$	Модуль числа, $r_n$	$\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент числа, $\varphi_n$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
32768	17,302301818358	1,0025559305270	0,0044277410993	-2,520627655741	0,0008294889833
65536	-0,262466809672	0,9981365937306	0,0000084043029	-2,521461354822	0,0000042100978
131072	-1,411533815926	0,9981314626607	0,0000032732330	-2,521474297089	0,0000171523645
262144	-1,386674449018	0,9981295041074	0,0000013146797	-2,521464418520	0,0000072737964
524288	-1,504445608881	0,9981292031409	0,0000010137132	-2,521460442403	0,0000032976792
1048576	-2,227876797001	0,9981294723256	0,0000012828979	-2,521458642080	0,0000014973562

Во вторых колонках табл. 6.23 – 6.26 показаны значения подходящих непрерывных дробей Никкипорца, представляющих комплексно-сопряжённые корни уравнения (6.3.6). В третьих и пятых колонках этих таблиц приведены найденные по  $r/\varphi$ -алгоритму, то есть по формулам (6.2.4) и (6.2.5), значения модулей  $r_i$  и аргументов  $\varphi_i$  ком

плексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.6). В четвёртых и шестых колонках таблиц представлены, соответственно,  $\varepsilon_r = |r_0 - r_n|$  и  $\varepsilon_\varphi = |\varphi_0 - \varphi_n|$ , устанавливающие разности между значениями модулей и аргументов комплексных корней, полученных с использованием стандартной программы решения алгебраических уравнений и найденных посредством алгоритма Эйткена-Никипорца. В качестве стандартной программы использовалась функция `polyroots`, входящая в пакет `MathCAD`. Комплексные корни  $x_2, x_3$ , и  $x_8, x_9$  найденные стандартной программой, имеют значения:

$$x_2 = 1,000461339398e^{i0,4946722915657}, x_3 = 1,000461307888e^{-i0,4946722728954}, \\ x_8 = 0,998128222084988e^{i2,52145712964537}, x_9 = 0,998128189427682e^{-i2,52145714472447}.$$

В табл. 6.27 приведены значения комплексно-сопряжённых корней уравнения (6.3.6), которые установлены с использованием  $r/\varphi$ -алгоритма, а также проведено сравнение полученных результатов с результатами в определении корней уравнения (6.3.6) при помощи функции `polyroots Mathcad`.

Таблица 6.27

Таблица комплексных корней полинома (6.3.6)

Номер корня	Модуль комплексного числа, $r_{др}$	$\varepsilon_r =  r_{сп} - r_{др} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{др}$	$\varepsilon_\varphi =  \varphi_{сп} - \varphi_{др} $
$x_2$	1,0004609287934	0,0000004106048	0,4946731866815	0,0000008951158
$x_3$	1,0004631581133	0,0000018502245	-0,494673186681	0,0000009137861
$x_4$	0,9988022027537	0,0000003721527	0,2422788774005	0,0002501274067
$x_5$	0,9987999298574	0,0000018797218	-0,248700225240	0,0066714699752
$x_6$	0,9985757288506	0,0000014577711	1,7630371453986	0,0006119079996
$x_7$	0,9985784174547	0,0000012379115	-1,758609925548	0,0050391900991
$x_8$	0,9981277047191	0,0000005173658	2,5214580079663	0,0000008783209
$x_9$	0,9981286755253	0,0000004860976	-2,521458007966	0,0000008632418
$x_{10}$	0,9968196849046	0,0000006608090	2,7778333678750	0,0000009066516
$x_{11}$	0,9968176729726	0,0000013303610	-2,777830296076	0,0000021793025
$x_{12}$	0,9958473134301	0,000000794695	1,5049600092184	0,0000008687842
$x_{13}$	0,9958468682619	0,0000005191317	-1,504960009218	0,0000007988011
$x_{14}$	0,9956473265256	0,0000010387082	1,2538558552334	0,0000018986041
$x_{15}$	0,9956480895368	0,0000002570552	-1,253858927031	0,0000012354681
$x_{16}$	0,9953442141567	0,0000014958283	0,7479337430899	0,0000021633438
$x_{17}$	0,9953454244348	0,0000002506953	-0,747936814888	0,0000009420611
$x_{18}$	0,9949213758918	0,0000080046908	2,2713122550583	0,0000056045301
$x_{19}$	0,9949211506470	0,0000077974898	-2,271309183260	0,0000087118360
$x_{20}$	0,9937194513569	0,0000005278260	1,0002850471944	0,0000012058131
$x_{21}$	0,9937199690160	0,0000000203449	-1,000285047194	0,0000011548670
$x_{22}$	0,9934632627402	0,0000006006849	2,0079024769879	0,0000003334762
$x_{23}$	0,9934655152130	0,0000016981488	-2,007902476987	0,0000002871784

В таблице 7 приведены действительные корни полинома (6.3.6).

Таблица 6.28

Действительные корни полинома (6.3.6).

Номер корня	Значение корней	$\varepsilon_\varphi =  x_{сп} - x_{др} $
$x_1$	-96,977449858730	0,0004337670645
$x_{24}$	-0,9901186385312	0,0000000000782
$x_{25}$	-0,0224903393469	0,0000000834473

На рис. 6.21 показано расположение корней уравнения (6.3.6) на комплексной плоскости.

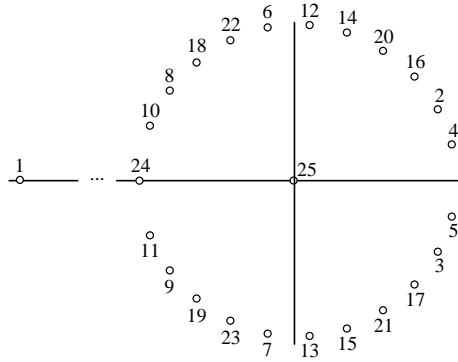


Рис. 6.21. Расположение корней уравнения (6.3.6) на комплексной плоскости.

Из рис. 6.21 видно, что вещественные корни  $x$  и  $x_{25}$  имеют «экстремальные» значения. Если остальные корни уравнения (6.3.6) располагаются на окружности с радиусом близким к единице, то  $x_1$  равен  $-96,9777\dots$ , а  $x_{25} = -0,022\dots$ . Следует подчеркнуть, что алгоритм Эйткина – Никипорца решения алгебраических уравнений строго определяет значения корней в порядке убывания их модулей.

## ГЛАВА 7

### ДЗЕТА-ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА

#### 7.1. Дзета-функции Римана

Дзета-функции Римана, которые входят в обойму специальных функций современной математики и имеют фундаментальное значение в аналитической теории чисел, определяются выражением:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1). \quad (7.1.1)$$

Часто используется более простая конструкция

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (7.1.2)$$

При  $n$  – четном Эйлером были найдены формулы суммирования таких рядов:

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}, \quad (7.1.3)$$

где  $B_{2n}$  – числа Бернулли.

Запишем некоторые частные случаи функции Римана:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934066\{\dots\}, \quad (7.1.4)$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} = 1,082323233\{\dots\}, \quad (7.1.5)$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945} = 1,017343062\{\dots\}, \quad (7.1.6)$$

$$\zeta(8) = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450} = 1,004077356\{\dots\}. \quad (7.1.7)$$

Эйлер определил значения функции  $\zeta(2n)$  вплоть до значения  $\zeta(12)$  с точностью в двадцать десятичных разрядов.

Для функций  $\zeta(2n+1)$  формулы суммирования не установлены. Можно записать значения этих функций:

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = 1,202056903\{\dots\}, \quad (7.1.8)$$

$$\zeta(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \dots = 1,036927755\{\dots\}, \quad (7.1.9)$$

$$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \dots = 1,008349277\{\dots\}. \quad (7.1.10)$$

Кроме классических дзета-функций  $\zeta(n)$ , рассматриваются иные суммы обратных степеней:

$$\eta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-n} = (1 - 2^{1-n}) \zeta(n) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (7.1.11)$$

Например,

$$\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2, \quad (7.1.12)$$

$$\eta(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}, \quad (7.1.13)$$

$$\eta(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720}. \quad (7.1.14)$$

$$\lambda(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-n} = (1 - 2^{-n}) \zeta(n) \quad (n=2, 3, \dots). \quad (7.1.15)$$

Например,

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}, \quad (7.1.16)$$

$$\lambda(4) = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}. \quad (7.1.17)$$

$$\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (7.1.18)$$

Имеют место соотношения [84]:

$$\beta(2n+1) = \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!} |E_{2n}| \quad (n=0, 1, \dots), \quad (7.1.19)$$

где  $E_{2n}$  – числа Эйлера,

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4(2n-1)!} \int_0^1 E_{2n-1}(x) \sec(\pi x) dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad (7.1.20)$$

$E_{2n-1}(x)$  – многочлены Эйлера.

$$\beta(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}, \quad (7.1.21)$$

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G = 0,915965594\dots, \quad (7.1.22)$$

$G$  – постоянная Каталана.

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}. \quad (7.1.23)$$

## 7.2. Дзета-функции Никипорца

Можно ввести функции, аналогичные дзета-функции Римана, и для цепных дробей. Здесь однако вариантов значительно больше. Степени обратных величин могут

занимать позиции как частных числителей, так и частных знаменателей. Назовем эти функции *дзета-функциями Никипорца* и введем соответствующие обозначения.

$$\zeta^p(n) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.1)$$

$$\zeta_q(n) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} + \dots \quad (7.2.2)$$

Здесь следует заметить, что ряд

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots + \frac{1}{m^n} + \dots \quad (7.2.3)$$

сходится при  $n = 2, 3, \dots$  расходится, то Цепные дроби (7.2.1) и (7.2.2), представляющие дзета-функцию Никипорца, можно рассматривать как при положительных, так и отрицательных значениях показателей степени  $n$ , в том числе и при  $n = 0$ .

И еще одно принципиальное отличие ряда (7.2.3) от цепных дробей (7.2.1) и (7.2.2). Рассматривать сходящиеся ряды при всех отрицательных элементах не имеет смысла, ибо знак “-” можно вынести за скобки. Иное дело в цепных дробях: если частные числители цепной дроби отрицательны

$$\frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 - \frac{a_3}{1 - \dots - \frac{a_n}{1 - \dots}}}}, \quad (7.2.4)$$

то знак минус вынести за скобки нельзя. Цепная дробь (7.2.4) имеет самостоятельный интерес. Как показано в [65], цепные дроби (7.2.4) часто имеют комплексное значение при действительных элементах  $a_n$ .

Введем в рассмотрение дзета-функции Никипорца вида:

$$\zeta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1 - \dots}}}}, \quad (7.2.5)$$

$$\zeta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} - \dots}. \quad (7.2.6)$$

По аналогии с тем, как были введены суммы обратных степеней  $\eta(n)$ ,  $\lambda(n)$  и  $\beta(n)$  для рядов, введем функции  $\eta^p(n)$ ,  $\lambda^p(n)$ ,  $\beta^p(n)$ ,  $\eta_q(n)$ ,  $\lambda_q(n)$ ,  $\beta_q(n)$ , а также функции  $\lambda^{-p}(n)$ ,  $\lambda_{-q}(n)$ ,  $\delta^p(n)$ ,  $\delta_q(n)$ ,  $\delta^{-p}(n)$ ,  $\delta_{-q}(n)$ ,  $\gamma^p(n)$  и  $\gamma_q(n)$ :

$$\eta^p(n) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.7)$$

$$\eta_q(n) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} + \dots, \quad (7.2.8)$$

$$\lambda^p(n) = 1 + \frac{1}{1+} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.9)$$

$$\lambda_q(n) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} + \dots, \quad (7.2.10)$$

$$\lambda^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1-} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} - \dots, \quad (7.2.11)$$

$$\lambda_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} - \dots, \quad (7.2.12)$$

$$\beta^p(n) = 1 + \frac{1}{1-} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2m+1}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.13)$$

$$\beta_q(n) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2m+1}\right)^n} + \dots, \quad (7.2.14)$$

$$\delta^p(n) = 1 + \frac{1}{1+} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.15)$$

$$\delta_q(n) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} + \dots, \quad (7.2.16)$$

$$\delta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1-} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} - \dots, \quad (7.2.17)$$

$$\delta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} - \dots, \quad (7.2.18)$$

$$\gamma^p(n) = 1 + \frac{1}{1-} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2m}\right)^n}{1} + \dots, \quad (7.2.19)$$

$$\gamma_q(n) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2m}\right)^n} + \dots, \quad (7.2.20)$$

Хотя в цепных дробях (7.2.1), (7.2.2), (7.2.5) – (7.2.20)  $n$  – целые числа или ноль, в общем случае следует брать, как и в дзета-функциях Римана, комплексную переменную  $z$ .

Например:

$$\zeta^P(z) = 1 + K \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^z}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^z}{1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^z}{1 + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^z}{1 + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^z}{1 + \dots}}}$$

Запишем частные случаи дзета-функций Никипорца, особо обращая внимание на сходимость цепных дробей, которые определяют эти функции при различных значениях  $n$ .

$$\zeta^P(-12) = 1 + K \frac{m^{12}}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^{12}}{1 + \frac{3^{12}}{1 + \frac{4^{12}}{1 + \dots + \frac{m^{12}}{1 + \dots}}}} \quad (7.2.21)$$

Цепная дробь (7.2.21) – расходящаяся, так как пределы, к которым стремятся подходящие с четными и нечетными номерами различны:

$$\Pi_{2k} = 1,9917174238665\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,0002529338067\dots$$

При  $n \rightarrow \infty$  пределы имеют значения 1 и 2.

Расходящимися будут цепные дроби (7.2.1) при  $n = -4$  и  $n = -3$ :

$$\zeta^P(-4) = 1 + K \frac{m^4}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^4}{1 + \frac{3^4}{1 + \frac{4^4}{1 + \dots}}}} \quad (7.2.22)$$

$$\zeta^P(-3) = 1 + K \frac{m^3}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^3}{1 + \frac{3^3}{1 + \frac{4^3}{1 + \dots}}}} \quad (7.2.23)$$

В самом деле, для цепной дроби (7.2.22) четные и нечетные подходящие стремятся, соответственно, к различным пределам:

$$\Pi_{2k} = 1,6890810419188\dots$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,1054145868361\dots,$$

Для цепной дроби (7.2.23) четные и нечетные подходящие стремятся к пределам:

$$\Pi_{2k} = 1,5052645361397\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,2625237459044\dots$$

Однако цепная дробь  $\zeta^P(-2)$  является уже сходящейся цепной дробью:

$$\zeta^P(-2) = 1 + K \frac{m^2}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{4^2}{1 + \dots + \frac{m^2}{1 + \dots}}}} \quad (7.2.24)$$

Установим значение цепной дроби (7.2.24). Запишем для ряда Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

равноценную цепную дробь:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{4^2}{1 + \dots}}}} \quad (7.2.25)$$



Значение ряда Лейбница, а следовательно, и равноценной цепной дроби (7.2.25), равно  $\ln 2$ . Следовательно, можно записать:

$$\zeta^p(-2) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{1} = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2^2}{1+1} \frac{3^2}{1+1} \frac{4^2}{1+1} \dots = \frac{1}{\ln 2} = 1,442695044\mathbf{3}981\dots$$

Цепная дробь (7.2.24) сходится столь же медленно, как и ряд Лейбница. Сходится, при том со значительно большей скоростью, цепная дробь

$$\zeta^p(-1) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m}{1} = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \quad (7.2.26)$$

$$\frac{P_{443}}{Q_{443}} = 1,525135276\mathbf{6}098121\dots$$

Остановимся на суммировании цепной дроби (7.2.26). Имеет место цепная дробь для неполной гамма-функции [49]:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a \left( \frac{1}{x+1} \frac{1-a}{1} \frac{1}{x+1} \frac{2-a}{1} \dots \frac{n}{x+1} \frac{n+1-a}{1} \dots \right).$$

При параметрах  $a=1/2$  и  $x=1/2$ , получим после преобразований

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \left( \frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \dots \frac{n}{1+1} \dots \right).$$

Таким образом

$$\frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \frac{m}{1+1} \dots = \sqrt{\frac{e}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Известно [84], что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} x.$$

Полагая, что  $x=1/\sqrt{2}$ , получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, можно записать

$$\zeta^p(-1) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{2}{1+1} \frac{3}{1+1} \frac{4}{1+1} \dots \frac{m}{1+1} \dots = \frac{\sqrt{2/e}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2/\pi e}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1,525135276\mathbf{6}098121\dots$$

Цепная дробь  $\zeta^p(0)$  является цепной дробью Фибоначчи, а ее значение – “отношением золотого сечения”.

$$\zeta^p(0) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \frac{1}{1+1} \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988\mathbf{7}9894\dots$$

Продолжим запись цепных дробей, связанных с дзета-функциями Никипорца.

$$\zeta^p(1) = 1 + \frac{1}{1+1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \dots \frac{1}{m} \dots \quad (7.2.27)$$

Цепная дробь (7.2.27) является сходящейся цепной дробью. Скорость сходимости цепной дроби весьма высока: пятнадцатая подходящая дробь дает 14 верных десятичных знаков

$$\frac{P_{15}}{Q_{15}} = 1,7182818284905\dots$$

Несложно заметить, что цепная дробь (7.2.27) связана с числом  $e$ :

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}}} \quad (7.2.28)$$

Еще большей скоростью сходимости обладают цепные дроби  $\zeta^p(2)$ ,  $\zeta^p(3)$ , ...,  $\zeta^p(12)$ .

$$\zeta^p(2) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}}} \quad (7.2.29)$$

$$\zeta^p(2) = 1,8154717660401\dots$$

Цепную дробь (7.2.29) запишем в эквивалентном виде:

$$\zeta^p(2) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{4^2} + \dots + \frac{(m-1)^2}{m^2} + \dots} \quad (7.2.30)$$

$$\zeta^p(3) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^3}{1} + \dots} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1^3}{2^3} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{3^3}{4^3} + \dots + \frac{(m-1)^3}{m^3} + \dots}$$

$$\zeta^p(3) = 1,8923779173629\dots$$

$$\zeta^p(12) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}}{1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}}} \quad (7.2.31)$$

$$\zeta^p(12) = 1,9997559194426\dots$$

Уже отмечалось, что в отличие от дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{k^s} + \dots$$

дзета-функция Никипорца, связанная с цепными дробями, имеет значительно большее число вариантов построения. Выше были рассмотрены примеры дзета-функций Никипорца с элементами в частных числителях цепной дроби. Запишем несколько примеров функции  $\zeta_q(n)$ .

$$\zeta_q(-12) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{12}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \dots + \frac{1}{m^{12}} + \dots} = 1,9997559180521\dots \quad (7.2.31)$$

Цепная дробь (7.2.31), очевидно, сходящаяся. Третья подходящая дает значение цепной дроби (7.2.31) с 14-ю верными десятичными разрядами.

$$\zeta_q(-2) = 1 + \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{m^2} + \dots} = 1,8043185611716\dots \quad (7.2.32)$$

Цепная дробь (7.2.32) также имеет высокую скорость сходимости. Седьмая под-

ходящая дробь обеспечивает вычисление значения дроби (7.2.32) с 14-ю верными десятичными разрядами.

$$\zeta_q(-1) = 1 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = 1,697774657\mathbf{0}401\dots \quad (7.2.33)$$

Известен ряд, являющийся частным случаем гипергеометрического ряда:

$$\psi(c, x) = 1 + \frac{x}{1!c} + \frac{x^2}{2!c(c+1)} + \dots + \frac{x^n}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} + \dots$$

В монографии [31] приведена цепная дробь, в которую раскладывается отношение:

$$\frac{\psi(c, x)}{\psi(c+1, x)} = 1 + \frac{x/c}{c+1} + \frac{x}{c+2} + \dots + \frac{x}{c+n} + \dots \quad (7.2.34)$$

Полагая, что  $c=1$ ,  $x=1$ , получим цепную дробь:

$$\frac{\psi(1,1)}{\psi(2,1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots \quad (7.2.35)$$

Следовательно, функция Никпорца  $\zeta_q(-1)$  представляется отношением гипергеометрических рядов частного вида

$$\zeta_q(-1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots = 1 + \frac{{}_0F_1(2,1)}{{}_0F_1(1,1)} \quad (7.2.36)$$

Очевидно, цепная дробь  $\zeta_q(0)$  совпадает с цепной дробью  $\zeta^p(0)$ :

$$\zeta_q(0) = \zeta^p(0) = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1+\dots+1} + \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988\mathbf{7}9894\dots \quad (7.2.37)$$

Весьма примечательна цепная дробь  $\zeta_q(1)$ :

$$\zeta_q(1) = 1 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{m}} + \dots \quad (7.2.38)$$

Эта цепная дробь является сходящейся, однако сходимость дроби (7.2.38) чрезвычайно медленная, – необходимо вычислить цепную дробь (7.2.38) с более чем миллионом звеньев, чтобы установить ее значение с пятью верными десятичными знаками.

$$\frac{P_{1048576}}{Q_{1048576}} = 1,570797\dots$$

Цепная дробь (7.2.38) связана с числом  $\pi$ :

$$\zeta_q(1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots}}} = \frac{\pi}{2} \quad (7.2.39)$$

Здесь можно напомнить, что дзета-функция Никпорца  $\zeta^p(1)$  связана с другой фундаментальной константой – числом  $e$ :

$$\zeta^p(1) = 1 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \dots}}} = e - 1. \quad (7.2.40)$$

Продолжим запись дзета-функций Никпорца.

$$\zeta_q(2) = 1 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \dots \quad (7.2.41)$$

Цепная дробь  $\zeta_2(2)$  – расходящаяся, так как значение пределов, к которым стремятся дроби, содержащие четное и нечетное число звеньев, различно:

$$\Pi_{2k} = 1,819873729(\dots),$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,289695778(\dots).$$

Естественно, являются расходящимися цепные дроби  $\zeta_q(n)$ ,  $n=3, 4, \dots$

$$\zeta_q(3) = 1 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{-3}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^3} + \dots \quad (7.2.42)$$

$$\Pi_{2k} = 1,9510558690976879(\dots),$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,1306106844082950(\dots),$$

$$\zeta_q(12) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}} + \dots \quad (7.2.43)$$

$$\Pi_{2k} = 1,9999981145497(\dots),$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,0002441418530(\dots).$$

Помимо знакоположительных рядов, хорошо известны знакопеременные ряды. Например:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Однако сходящиеся ряды со всеми отрицательными элементами обычно не рассматриваются, ибо в этих рядах знак “минус” можно вынести за скобки. Запишем цепную дробь с отрицательными частными числителями  $a_i$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{a_1}{b_1 - \frac{a_2}{b_2 - \frac{a_3}{b_3 - \dots - \frac{a_n}{b_n - \dots}}}} \quad (7.2.44)$$

Цепные дроби вида (7.2.44) весьма распространены в теории цепных дробей. Цепными дробями этой структуры представляются многие элементарные и специальные функции. Например,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots - 2n+1 - \dots}}}}, \quad (7.2.45)$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{x}{1 - \frac{1^2 x^2}{3 - \frac{2^2 x^2}{5 - \frac{3^2 x^2}{7 - \dots - 2n+1 - \dots}}}}, \quad (7.2.46)$$

$$\text{Ei}(x) = e^x \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \dots - \frac{n}{1-x} + \frac{n}{1-x} - \dots \right). \quad (7.2.47)$$

Расходящиеся цепные дроби вида (7.2.44), как правило, имеют комплексные значения и могут быть просуммированы при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма, как это показано в [55].

$$e^i = 2 \cos 1 - \frac{1}{2 \cos 1} - \frac{1}{2 \cos 1} - \dots - \frac{1}{2 \cos 1} - \dots, \quad (7.2.48)$$

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1-2} - \frac{3}{2-3} - \frac{6}{2-5} - \dots - \frac{3n}{2-2n+1} - \dots. \quad (7.2.49)$$

Рассмотрим дзета-функции Никипорца вида  $\zeta^{-p}(n)$  и  $\zeta_{-q}(n)$ . Эти функции представляются цепными дробями с отрицательными частными числителями и знаменателями:

$$\zeta^{-p}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1} - \dots}, \quad (7.2.50)$$

$$\zeta_{-q}(n) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} - \dots - \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^n} - \dots}. \quad (7.2.51)$$

Определим значения дзета-функций Никипорца  $\zeta^{-p}(n)$  и  $\zeta_{-q}(n)$  при различных значениях  $n$ .

$$\zeta^{-p}(12) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{12}}{1} - \dots} = -0,00024420003819163. \quad (7.2.52)$$

Сходящейся является дробь

$$\zeta^{-p}(2) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1} - \dots - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1} - \dots} = -0,3961078348811.$$

Цепная дробь

$$\zeta^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m} - \dots} \quad (7.2.53)$$

является расходящейся цепной дробью, так как значение ее неограниченно растет.

Легко понять причины расходимости цепной дроби (7.2.53). Известно [55], что цепные дроби

$$\frac{1}{2-3} - \frac{2}{3-4} - \frac{3}{4-5} - \dots - \frac{n}{n+1} - \dots = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \dots - \frac{1}{1-1} - \dots$$

имеют своими значениями единицу. Поэтому значение цепной дроби

$$\frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} - \dots - \frac{1}{1-1} - \dots \quad (7.2.54)$$

будет неограниченно расти с увеличением числа звеньев.

Чтобы просуммировать цепную дробь (7.2.54), которая равноценна ряду

$$1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n! + \dots, \tag{7.2.55}$$

надо построить через равноценный расходящийся ряд (7.2.55) так называемую соответствующую цепную дробь. Можно записать такую последовательность выражений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \dots - \frac{1}{1 - \dots}}}}} &= 1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n! + \dots = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{1 - \dots - \frac{n}{1 - \frac{n}{1 - \dots}}}}}}} \end{aligned} \tag{7.2.56}$$

Расходящаяся в классическом смысле цепная дробь (7.2.56) может быть просуммирована при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма. Как показано в [55], цепная дробь (7.2.56) имеет комплексное значение

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{1 - \dots - \frac{n}{1 - \frac{n}{1 - \dots}}}}} = 1,34972e^{i1,02800}, \tag{7.2.57}$$

которое связано с интегральной показательной функцией:

$$1,34972e^{i1,02800} = \frac{1}{e} \text{Ei}(1).$$

Таким образом, установлено значение расходящейся в классическом смысле цепной дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{1 - \dots - \frac{n}{1 - \frac{n}{1 - \dots}}}}} = 1,34972e^{i1,02800} = \frac{1}{e} \text{Ei}(1). \tag{7.2.58}$$

Можно записать

$$\zeta^{-p}(1) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{3}{1 - \dots - \frac{n}{1 - \frac{n}{1 - \dots}}}}} = 1 - \frac{1}{e} \text{Ei}(1). \tag{7.2.59}$$

Любопытна следующая цепная дробь:

$$\zeta^{-p}(0) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \dots - \frac{1}{1 - \dots}}}. \tag{7.2.60}$$

Разумеется, цепная дробь (7.2.60) – расходящаяся в классическом смысле. В [55] приведена цепная дробь Никипорца:

$$e^{i\varphi} = 2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi} - \frac{1}{2\cos\varphi} - \dots - \frac{1}{2\cos\varphi} - \dots. \tag{7.2.61}$$

Если  $\varphi = \pi/3$ , то из (7.2.61) получим

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \dots - \frac{1}{1 - \dots}}.$$

Следовательно, можно записать

$$\zeta^{-p}(0) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \dots - \frac{1}{1 - \dots}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Значение цепной дроби (7.2.60) непосредственно установить нельзя, так имеется «деление на ноль». Поэтому будем определять при помощи  $r/\varphi$  – алгоритма значение «близкой» к (7.2.60) цепной дроби (табл. 7.1).

Запишем дзета-функции Никипорца  $\zeta^{-p}(n)$  при других значениях  $n$ .

$$\zeta^{-p}(-1) = 1 - \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1-1} - \frac{3}{1-1} - \dots - \frac{n}{1-1} - \dots \quad (7.2.62)$$

Цепная дробь (7.2.62), то есть дзета-функция Никипорца  $\zeta^{-p}(-1)$ , имеет, как показано в [55], комплексное значение:

$$\begin{aligned} \zeta^{-p}(-1) &= 1 - \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1-1} - \frac{3}{1-1} - \dots - \frac{n}{1-1} - \dots = \\ &= -\frac{i\sqrt{2e}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = -\frac{i\sqrt{2e/\pi}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = 0,952092781925559e^{-i0,809229433902698} \end{aligned}$$

Также комплексное значение имеет дзета-функция  $\zeta^{-p}(-2)$  [55]:

$$\zeta^{-p}(-2) = 1 - \frac{1^2}{1-1} - \frac{2^2}{1-1} - \frac{3^2}{1-1} - \dots - \frac{n^2}{1-1} - \dots \quad (7.2.63)$$

Имеют места соотношения [70]:

$$i \int_0^{\infty} \frac{e^{-it} dt}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{1-1} - \frac{1^2}{1-1} - \frac{2^2}{1-1} - \frac{3^2}{1-1} - \dots - \frac{n^2}{1-1} - \dots = 1 + 1 + 5 + 61 + 1365 + 50521 + \dots + E_n + \dots, \quad (7.2.64)$$

где  $E_n$  – числа Эйлера.

Таблица 7.1

**Определение значения цепной дроби**

$$1 + 10^{-7} - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \dots - \frac{1}{1 + 10^{-7}} - \dots$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, $r_n$	Погрешность, $\varepsilon_r =  r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_n$	Погрешность, $\varepsilon_\varphi =  \varphi_0 - \varphi_n $
2	1,9999990066E-07	0,0004472135	0,9995527864	0,0000000000	1,0471974934
4	1,00000029989E+00	1,0000000249	0,0000000249	0,7853981633	0,2617993300
8	5,99914472987E-07	0,1668253300	0,8331746699	0,7853981633	0,2617993300
16	1,00000109966E+00	0,9999930061	0,0000069938	0,9817477042	0,0654497892
32	2,19993070971E-06	0,6655679837	0,3344320162	0,9817477042	0,0654497892
64	1,00000429968E+00	0,9999842231	0,0000157768	1,0308350894	0,0163624040
128	8,59982064771E-06	0,9128948239	0,0871051760	1,0308350894	0,0163624040
256	1,00001709980E+00	0,9999924525	0,0000075474	1,0431069357	0,0040905576
512	3,41993152517E-05	0,9801113303	0,0198886696	1,0431069357	0,0040905576
1024	1,00006830203E+00	0,9999974627	0,0000025372	1,0461748973	0,0010225961
2048	1,36590623063E-04	0,9956630842	0,0043369157	1,0461748973	0,0010225961
4096	1,00027313700E+00	0,999992812	0,0000007187	1,0469418877	0,0002556057
8192	5,46050890365E-04	0,9990829644	0,0009170355	1,0469418877	0,0002556057
16384	1,00109289688E+00	0,999998217	0,0000001782	1,0471336353	0,0000638581
32768	2,18221901022E-03	0,9998129445	0,0001870554	1,0471336353	0,0000638581
65536	1,00437868586E+00	0,999999733	0,0000000266	1,0471815722	0,0000159212
131072	8,70035373342E-03	0,9999638050	0,0000361949	1,0471815722	0,0000159212
262144	1,01763171370E+00	1,0000000158	0,0000000158	1,0471935564	0,0000039370
524288	3,43625667672E-02	0,9999935939	0,0000064060	1,0471935564	0,0000039370
1048576	1,07252879101E+00	1,0000000261	0,0000000261	1,0471965525	0,0000009409
2097152	1,31275512686E-01	0,999990580	0,0000009419	1,0471965525	0,0000009409
4194304	1,33265709261E+00	1,0000000232	0,0000000232	1,0471973015	0,0000001919
8388608	4,65963107920E-01	0,999999251	0,0000000748	1,0471973015	0,0000001919

Установим значения цепных дробей  $\zeta^{-p}(n)$  при  $n = -3, -4, \dots$

$$\zeta^{-p}(-3) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{2^3}{1} - \frac{3^3}{1} - \frac{4^3}{1} - \dots - \frac{m^3}{1} - \dots \quad (7.2.65)$$

Подходящие дроби разложения (7.2.65) с четными и нечетными номерами стремятся к различным пределам:

$$\Pi_{2k} = 0,6127260\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,7788193\dots$$

$$\zeta^{-p}(-4) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{2^4}{1} - \frac{3^4}{1} - \frac{4^4}{1} - \dots - \frac{m^4}{1} - \dots, \quad (7.2.66)$$

$$\Pi_{2k} = 0,325498929\dots,$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,135634663\dots$$

$$\zeta^{-p}(-12) = 1 - \frac{1}{1} - \frac{2^{12}}{1} - \frac{3^{12}}{1} - \frac{4^{12}}{1} - \dots - \frac{m^{12}}{1} - \dots, \quad (7.2.67)$$

$$\Pi_{2k+1} = 1,00025306131715\dots,$$

$$\Pi_{2k} = 0,00828260981643\dots$$

### 7.3. О цепных дробях, имеющих различные пределы четных и нечетных подходящих.

В этой главе рассматривались цепные дроби, четные и нечетные подходящих которые имели различные пределы. Такие цепные дроби определяются как расходящиеся. Известна теорема Коха, опубликованная в 1895 г [91].

Теорема. Цепная дробь

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n + \dots}}}$$

расходится, если ряд, составленный из элементов  $b_i$ , сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

В этом случае существуют конечные пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1} = F_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = F_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n+1} = G_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n} = G_2$$

и выполняется условие

$$F_2 G_2 - F_2 G_1 = 1.$$

Используя принцип тройственности Никипорца, определим, что непрерывные дроби с вещественными элементами могут иметь не только комплексные значения (эллиптический случай), но и иметь различные пределы четных и нечетных подходящих дробей (гиперболический случай).

Непрерывная дробь

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (7.3.1)$$

сходится и имеет своим значением пару чисел  $z_0 = r_0 e^{\pm i\theta}$ , если существуют пределы



$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i / Q_i|} \quad (7.3.2)$$

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{P_{2n} / Q_{2n}}{r_0} \quad \text{или} \quad \frac{1}{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{P_{2n+1} / Q_{2n+1}}{r_0}.$$

где  $P_i / Q_i$  – подходящие цепной дроби (7.3.1).

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ , то « $n$ » примет нулевое значение и цепная дробь (7.3.1)

сходится в классическом смысле.

## ГЛАВА 8 ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

### Ветвящиеся непрерывные дроби

В.Я. Скоробогатько (18.07.1927 – 5.07.1996) начал предисловие к своей одной из последних книг “Дивлюсь на світ як математик” такими словами: “Людина завжди прагнула пізнати світ у всій його повноті, відкрити загальні закономірності, а не блукати серед частковостей. Ця властивість характерна не тільки для філософії як загальної науки, а й для інших галузей знань і, в першу чергу, для математики”.

Не знаем, как в философии, но в математике дар открывать “загальні закономірності” чрезвычайно редок. Как показывает практика, многие специалисты прекрасно обходятся без этого дара, устраивая со временем свою научную карьеру наилучшим образом. Такое положение вещей иногда искренне возмущало В.Я. Скоробогатько, но он тут же осознавал абсурдность своих сетований и все кончалось острой шуткой.

Ветвящиеся цепные дроби, как математический аппарат, сформировались в работах львовского профессора Виталия Яковлевича Скоробогатько и его учеников во второй половине шестидесятых годов [9, 40].

В.Я. Скоробогатько охотно вспоминал, как он пришел к ветвящимся цепным дробям. Об этом он рассказывал на лекциях и семинарах, на страницах своих книг. В свое время довелось множество раз вести беседы с Виталием Яковлевичем Скоробогатько о ветвящихся цепных дробях. И всякий раз разговор вращался вокруг одних и тех же материй: ветвящиеся цепные дроби идеально приспособлены для адекватного описания в пространственно-временном отношении ветвящихся процессов, коими так богата природа. А посему – ветвящимся цепным дробям уготована на веки вечные завидная судьба, – они всегда будут востребованы. На главный вопрос: как случилось, что, казалось бы, лежащие на поверхности ветвящиеся цепные дроби ускользали от внимания великих и даже величайших учёных XVIII-XX веков, В.Я. Скоробогатько обычно отвечал: “Раньше жизнь была размеренной и неторопливой. Это в двадцатом веке люди постоянно слышат о цепных ядерных реакциях”.

В предисловии к своей монографии “Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике”, вышедшей в издательстве “Наука” в 1983 г. [40]. В.Я. Скоробогатько отмечал, что “из рассмотрения графа обыкновенной цепной дроби возникла догадка, что обычная цепная дробь является частным случаем более общего математического понятия, основанного на более общем понятии дерева”. Правда, страницей далее В.Я. Скоробогатько выдвигает другую версию озарения: “Догадка о существовании ветвящихся цепных дробей возникла у автора в результате размышлений о методе решения дифференциальных уравнений С.А. Чаплыгина и его применении к уравнениям с частными производными”.

Сохранился семистраничный вариант рукописи первой статьи по ветвящимся цепным дробям. Даты в автографе нет, но можно считать, что статья готовилась не позже первой половины 1966 г. Приводим фрагмент первой страницы этой рукописи В.Я. Скоробогатько, несомненно, уже имеющей ценность для историков математики.



В. Я. Скоробогатко, Н. С. Дронюк, Е.  
Гобик, Б. И. Плишчик

"Ветвящиеся целые дроби"

Пусть задано некоторое дерево  $A$ .

Предположим, что каждой  
конечной вершине  $B_j^{(k)}$  по-  
ставлен в соответствие не-  
который оператор  $v_j^{(k)}$  и  
некоторой вершине  $A_j^{(k)}$

соответствующий оператор  $u_j^{(k)}$ . В зави-  
сности это могут быть числа, функ-  
ции и т. д. Определим графы  $A_j^{(k)}$   
и помощью направленных ребер  
которые выходят из корня дерева  $A_j^{(k)}$

Тогда в каждую вершину  $A_j^{(k)}$ ,  $B_j^{(k)}$   
входит одна ребра, а из верши-  
ны  $A_j^{(k)}$  выйдут  $m_j^{(k)}$  ребер в  
соседние смежные вершины. Если

$m_j^{(k)} = 2$  тогда будем говорить, что верши-  
на  $A_j^{(k)}$  является точкой ветвления.  
Нулевой этап дерева образует корень

$A_0$  и соответствующие ребра и  
соответствующие ребрам, выходящим из нее  
в смежные вершины  $B_j^{(0)}$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Первый этап образуют вершины  
 $A_j^{(1)}$ ,  $j = 1, \dots, p$  и ребра, выходящие  
из них во все смежные вершины  
 $B_j^{(1)}$  и т. д.

Сохранились копии писем В. Я. Скоробогатко академику Юрию Владимировичу Линнику (8.01.1915-30.06.1972), выдающемуся специалисту в теории чисел и теории вероятностей, лауреату Ленинской премии, Герою социалистического труда. В письмах имеются сведения о начальном этапе развития теории ветвящихся цеп-

ных дробей. Дадим без купюр заключительную часть первого письма, датированного 30 октября 1970 г.: *“Частично также интересуюсь теорией чисел. У нас во Львове сейчас стремительно и успешно развивается теория ветвящихся цепных дробей. Что это такое? Это дроби, когда в знаменателях обычной цепной дроби появляются несколько дробей. (Первая публикация – “Доповіді АН УРСР”, 1967 г., №2) Убеждён, что диофантовы уравнения нужно решать именно ветвящимися цепными дробями. У нас получен интересный, как мне кажется, результат: решён вопрос о виде алгебраической иррациональности любой степени. А именно, для того, чтобы число  $a$  было алгебраической иррациональностью  $n$ -ой степени, необходимо и достаточно, чтобы оно разлагалось в ветвящуюся периодическую цепную дробь. Для уравнения 3-ей степени эта работа скоро выйдет в “Доповідях АН УРСР”. Наш ученик Ф.О. Пасичняк оформляет этот результат как диссертационную работу. Разумеется, если Вы не против, то мы можем установить с Вами деловые контакты по этому вопросу. Марковские процессы (теория вероятностей) со счётным числом состояний, как оказалось, изображаются ветвящимися цепными дробями. Это самый естественный аппарат. Словом, ветвящаяся цепная дробь так относится к анализу с несколькими аргументами, как обычная цепная дробь к функциям с одним аргументом. Разумеется, уже есть многочисленные публикации. Как только строго обоснуем разложимость функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби, приступим к написанию суммирующей монографии в этом направлении”*.

Сделаем одно замечание. Следуя списку работ В.Я. Скоробогатько, помещённом в Библиографическом указателе [81], первую публикацию по ветвящимся цепным дробям следует считать публикацию, вышедшую годом ранее, т.е. в 1966 г.: *“Скоробогатько В.Я., Дронюк Н.С., Бобик О.І., Пташник Б.Й. Гіллясті ланцюгови дроби і їх застосування.- Друга наук. конф. молодих математиків України.- К.: Наук. думка, 1966, 561-565.”*

Во втором письме В.Я. Скоробогатько к Ю.В. Линнику говорится и о других проводимых им исследованиях. Так как Ю.В. Линник был земляком, – родом из Белой Церкви Киевской области, В.Я. Скоробогатько писал ему на украинском. Приведём это письмо полностью.

*Львів, 7. XII, 1970 р.*

*Вельмишановний Юрію Володимировичу!*

*Одержав від Вас два листи і відозву на автореферат І.П. Пустомельнікова. Дякую. Автореферат Ви оцінили, з моєї точки зору, точно. Дійсно, цей напрямок перспективний. Завжди хочеться говорити про ті результати, що тепер одержуються, а не про те, що вже одержано. Мій учень Р.В. Слоневський разом з іншими щойно розробив новий метод розв'язування математичних задач економіки на основі гіллястих ланцюгових дробів. Це задачі, які формулюються в термінах марковських процесів (Див. книгу Ховарда). Ми обов'язково цей напрямок доведемо до діла, тобто будуть розроблені стандартні програми і будуть втілені в практику принаймі 2-х обчислювальних центрів. Вже зараз видно переваги цього методу, коли розглядаються великі кількості рівнянь з великою кількістю невідомих (сам цим займатися не буду). Зрозуміло, що краще нам приїхати до Ленінграду в лютому місяці, на початку або в середині. Впевнений, що будуть встановлені наукові контакти, які будуть сприяти прогресу математики, незалежно від загальної орієнтації обох сторін. Дякую за запрошення на дачу, але скажу відверто, що я не дачна людина. Найкращий стан для мене – рибалка бродячого типу (зимою, літом, весною та восени), саме там приходять найкращі думки.*

*Звичайно, я децю можу розповісти про нашу “універсальну теорію відносності”,*

але повторю, що вона ще сирувата з точки зору втілення ідей у формули, хоча однімірний (самий важливий) випадок майже повністю зроблено. Зрозуміло, мене цікавить використання одержаних результатів і в оптиці, якщо це можливо, бо промінь світла викривлюється в сфері з неоднорідними оптичними властивостями. Теоретично принаймі можна уявити собі середовище з такими оптичними властивостями, що промінь світла буде рухатися саме по  $n$ -точковій прямій, а довільне оптичне середовище можна мабуть апроксимувати з якою завгодно точністю середовищем, де промені світла будуть  $n$ -точковими прямими, тому як завгодно точно можна наблизити реальний шлях світла  $n$ -точковою моделлю (при досить великому  $n$ ) і всі ефекти “універсальної теорії відносності” будуть у частинок, що рухаються у такому середовищі по  $n$ -точковим прямим. З Вашим батьком можна було би поговорити конкретно в цьому плані. Але чи не старий він для цього. Може йому вже важко мислити. Все ж таки 81 рік – це не 28 років. В усякому разі ми цей напрямок так чи інакше обов’язково доведемо до діла. Заздалегідь дякую за відбитки робіт про арифметичну теорію відносності. Мене завжди цікавили конструктивні математичні побудови, а це мабуть конструктивна річ.

*Про книгу М.І. Гаврилова не пишу, вивчимо всі про і контра.*

Звичайно, мене особисто цікавлять і інші проблеми математики, наприклад, побудова якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Мені присвоїли звання доктора саме за теорему про “внутрішній діаметр”. Суть її в тому, що перша гранична задача для сильно еліптичної системи однозначно розв’язана, якщо діаметр максимальної кулі, вписаної в дану область, досить малий. (Це буде не завжди). Якщо область опукла, то завжди при досить гладких коефіцієнтах системи. Це типова якісна теорема для рівнянь з частинними похідними; цей напрямок у нас розвивається. Виявилось, що тут є прямий зв’язок з питаннями стійкості плазменого шнура. Якщо би у вас були спеціалісти по плазмі, то корисно було би і з ними зв’язатися.

*Ще раз дякую за відозву на автореферат Пустомельнікова.*

*Щиро бажаю успіхів в науці та організаційних питаннях, зв’язаних з наукою.*

З повагою, В. Скоробогатько.

**Р. С.** Дійсно, у нас відбувається швидка інфляція наукових ступенів та звань усіх рангів, але ніколи не буде інфляції справжніх вчених.

Твердые заверения В.Я. Скоробогатько, аналогичные фразе из письма: “Ми обов’язково цей напрямок доведемо до діла, тобто будуть розроблені стандартні програми і будуть втілені в практику”, как правило, не подкреплялись трудовым энтузиазмом его сотрудников и посему повисали в воздухе, производя некоторые его сотрясения и вводя в смятение слабонервных.

В этом письме выразительны слова: “... я не дачна людина. Найкращий стан для мене – рибалка бродячого типу”. У Виталия Яковлевича был годами отлаженный режим, – всем были известны “рыбные” дни – среда и суббота. Однажды весной в середине восьмидесятых подледный лов едва не окончился трагически, но обычное самообладание не оставило его, и он, потеряв всю рыбацкую амуницию и значительную часть вещей гардероба, выбрался из казалось бы безнадежной ситуации. Виталий Яковлевич вспоминал фразу, оброненную одним из институтских начальников: “Вы могли здорово подвести коллектив”. В самом деле, памятная история случилась в рабочее время.

В.Я. Скоробогатько любил и умел шутить, что называется, невзирая на лица. Шутки получались не всегда, надо сказать, благостными. Чего стоит хотя бы телеграмма одному почтеннейшему ученому по случаю 8-го марта. Он трезво смотрел на миропорядок, повторяя пословицу: “Идешь постричь, не забывай, что можешь вернуться обритым”. И странно потому было слышать его сетования на действия товарищей, ответственных за передвижения по научной лестнице, особенно в верхней её части.

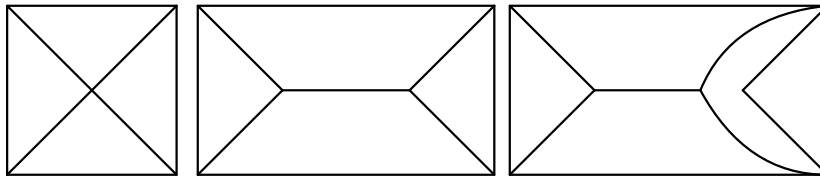
В.Я. Скоробогатько был прекрасным аналитиком. На семинарах он мог часами

исписывать доску выкладками и формулами. И все же В.Я. Скоробогатько признавался, что ему ближе геометрические методы исследований. В одной из последних своих книг “Методы математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння” В.Я. Скоробогатько писал: “В останні 50 років розгорнулася робота по створенню загальної теорії систем диференціальних рівнянь. Громіздкість аналітичного апарату, що при цьому використовується, зумовила розвиток геометричних методів, які роблять теорію більш прозорою і наочною. У цьому напрямку в математичну науку були введені нові поняття, на базі яких одержано нові результати, частину з яких ми тут наводимо”.

И далее идет речь о биссектрисе и внутреннем диаметре тела, – казалось бы простейших геометрических понятиях, которые явились центральным звеном в доказательстве основных теорем докторской диссертации В.Я. Скоробогатько “Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными”. В.Я. Скоробогатько так определяет биссектрису: “Грубіше кажучи, бисектриса фігури є її середньою лінією внаслідок того, що кожна точка  $x \in B_D$  локально найбільш віддалена від межі  $S$  області  $D$ ”.

Аналогічно вводиться поняття бисектриси  $i$  у випадку області  $D$ , розташованої у просторі вимірності  $n \geq 3$ ”.

В книге приводятся несколько фигур с обозначением биссектрис:



Обычно В.Я. Скоробогатько прибегал к такому наглядному толкованию биссектрисы плоской фигуры: биссектрисы – это маршруты, по которым должна перещататься девушка в озере, держась подалее от хулиганов на берегу.

И еще В.Я. Скоробогатько говорил: “Биссектриса угла известна более двух тысяч лет, но биссектриса фигуры введена мною”.

Как опытный педагог, В.Я. Скоробогатько на семинарах, лекциях и в публичных выступлениях часто обращался к притчам, историям, пословицам и поговоркам. Думается, привлечение художественных образов было не просто приемом, позволяющим удерживать внимание аудитории или способом точнее и эффективнее донести до слушателя мысль. Видимо, В.Я. Скоробогатько искренне разделял известный постулат Карла Вейерштрасса: математику требуется воображения не меньше, чем поэту. Дело не в буйстве фантазии, а в общности приемов, присущих как художественному, так и научному творчеству. Одному из авторов этой книги довелось декабрьским вечером 1995 г. сопровождать В.Я. Скоробогатько из центра города к его дому на улице Козланюка. Возвращались с “книжкиных именин”. В.Я. Скоробогатько, только что выписавшийся из донецкой клиники, где ему уже не могли помочь, представлял свою последнюю книгу “Методы математики”. Обычно “книжкины именины” справлялись шумно. На этот раз было не до веселья. В.Я. Скоробогатько показал собравшимся в отделе книжку в темно-коричневом переплете, зачитал “Зміст”, несколько фраз, – и все стали мало-помалу расходиться. Мы продвигались по Пекарской, было темно и морозно. Разговор шел о гиблом положении науки, научных карликах, болтунах-демократах и прочих обыденных вещах. Неожиданно Виталий Яковлевич вспомнил своего старого товарища академика Ярослава Степановича Подстригача, долгое время бывшим директором института и уже три года, как ушедшего из жизни.

Вспомнил, как будто продолжал неоконченный спор. Вопреки обстоятельствам, никаким христианским смирением не сквозило.

Егор Булычев в пьесе Горького сокрушался перед смертью: “Жизнь прожил не на той улице”. Виталий Яковлевич жил математикой и, похоже, в конце пути был удовлетворен балансом. Здесь вспоминается другой случай, относящийся к декабрю уже 1994 г. Обычно после семинара, если сообщение было удачным, В.Я. Скоробогатько приглашал докладчика, прихватывая еще одного-двух наиболее активных участников семинара, в ближайшее кафе и обсуждение семинара продолжалось в другом интерьере. Была пора купонов, когда компот и копеечный салат из капусты тянули на десятки тысяч денежных единиц. Виталий Яковлевич уже был болен, но внешне это мало в чем проявлялось, семинары же следовали по заведенному порядку – один за другим. Посреди беседы В.Я. Скоробогатько сказал фразу, очень уж диссонировавшую с убогим застольем: “Ветвящиеся цепные дроби обессмертили меня”. В другой раз В.Я. Скоробогатько вспоминал, как навещая приятеля – университетского профессора, дышавшего, что называется, на ладан, услышал от того: “У Вас есть ветвящиеся цепные дроби. Вам можно позавидовать”.

В.Я. Скоробогатько не единожды отмечал, что его высокочтимый учитель академик Ярослав Борисович Лопатинский долгое время относился к его занятиям ветвящимися цепными дробями снисходительно. “В последние годы жизни Лопатинский стал понимать, что ветвящиеся дроби – это серьезно”, – добавлял Виталий Яковлевич.

В.Я. Скоробогатько множество раз подчеркивал, с каким превеликим трудом давались ему и его ученикам первые шаги в теории ветвящихся цепных дробей и такие привычные теперь обозначения и определения. “Это когда сделано, так вроде и думать тут нечего”, – говорил он и продолжал: “Был большой риск. Я испытывал ответственность перед моими первыми аспирантами Боднарчуком, Пустомельниковым и Слоневским, пошедшими за мною в разработке нового математического аппарата. Но мы победили – направление получило признание”.

В.Я. Скоробогатько по-отечески относился к своим сотрудникам и ученикам. День в отделе он начинал с обхода, как врач своих палат. У каждого из присутствовавших спрашивал: “Успіхи є?” В ответ, как правило, слышалось невнятное бормотание. Виталий Яковлевич любил давать советы, особенно в организации здорового образа жизни. У него всегда наготове были рецепты из народной медицины от тех или иных напастей. Никогда не уклонялся хлопотать “за своих”, хотя чиновничество – обычное или научное, не любил, и кажется, жалел этот отряд человечества.

Несмотря на умудренность, В.Я. Скоробогатько проявлял порой откровенную наивность в ряде жизненных ситуаций. Так, ему представлялось, что вот-вот воздастся по заслугам и он будет избран в Академию. В 1978 году не хватило одного голоса, чтоб попасть туда. Виталий Яковлевич очень переживал неудачу, не избежал инфаркта, но считал, что справедливость восторжествует. Однако ситуация с выборами повторялась: всякий раз не хватало “чуть-чуть”.

При приближении 60-летнего юбилея Виталий Яковлевич почти по секрету рассказывал ближайшим сотрудникам, что в мэрии есть мнение отметить его, заслуженного деятеля науки Украины, имеющего десятки учеников и международное признание, улучшив ему жилищные условия. Известно, что В.Я. Скоробогатько жизнь прожил в небольшой квартире, полученной в начале пятидесятых годов при решающей финансовой поддержке тещи из костромской глухомани. С ростом семейства квартира была уже тесна. По словам Виталия Яковлевича в мэрии обещали не просто новую квартиру, а двухэтажный особняк. Он живо описывал, как на втором этаже особняка разместится его кабинет, в котором непременно разместится доска, чтобы можно было в любой час с мелом в руке вести с учениками обсуждение

математических проблем.

Семинарские занятия были для В.Я. Скоробогатько формой существования. У нас есть возможность привести фрагмент рукописной страницы из письма В.Я. Скоробогатько к президенту Академии наук СССР Гурию Ивановичу Марчуку. Письмо датировано 28 октября 1986 г.

Письмо 28.10.1986.  
 Глубоко уважаемый Гурий Иванович  
 Впервые всего познакомлю Вас с  
 изложением на французском языке  
 ветвящейся цепной дроби  
 от имени математиков в Львове и  
 Закарпатье обретенной АН СССР  
 Николаев, что означало оборотами  
 Вам пишет Вас, пожеланию Вас  
 не упускаю из виду, а также прошу  
 на во всем случае желаю Вам  
 такого. Не мешало бы о себе, меня.

Так как почерк В.Я. Скоробогатько в высшей степени неразборчив, дадим подстрочник завершающего фрагмента:

“... Я могу приехать в Москву вместе со своими учениками и проинформировать Вас более подробно о наших работах. Замечу, что имею 4 еженедельных семинара на протяжении 23 лет (теория ветвящихся цепных дробей, дифференциальные уравнения с частными производными, вычислительная математика, общая теория относительности).

Повторяю, что Ваша поддержка будет поддержкой того, что еще осталось живо от руководства шкурников и карьеристов”.

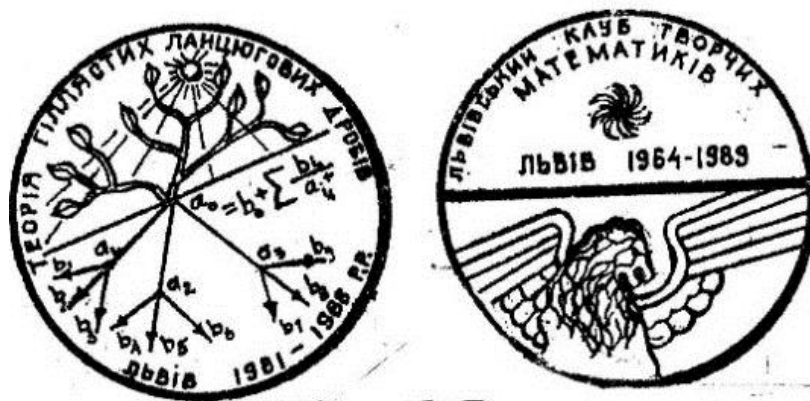
Действительно, на первой странице цитируемого письма В.Я. Скоробогатько к Г.И. Марчуку говорилось: “Кратко опишу научные достижения современных математиков Львова с тем, чтобы Вы были знакомы с ними, а также с целью установления научных контактов ученых, сгруппировавшихся около Вас и тем, что еще осталось в живых в математической науке на Украине после многолетнего бездарного “руководства” математикой на Украине со стороны...”. Далее шли фамилии.

“Истина – конкретна”, – этой краткой фразой В.Я. Скоробогатько часто прерывал туманные разглагольствования. Его раздражало, что, казалось бы, революционная и чрезвычайно перспективная для вычислительной математики теория ветвящихся цепных дробей не встречала не то что энтузиазма, но даже маломальского внимания со стороны научного начальства. “Ведь мы сидим на золоте!”, – возглашал он, и указывал, как на Западе всюю раскручивают куда менее значимые теории.

В.Я. Скоробогатько при случае напоминал, что он автор семи новых направлений в математике. Из семи он особо выделял два своих детища: теорию ветвящихся цепных дробей и многоточечную геометрию. В 1989 году, к двадцатипятилетию юбилею клуба творческих математиков, были выпущены памятные медали, которые



бы увековечивали оба творения. На фотографии показана медаль, посвященная открытию ветвящихся цепных дробей. Медали были изготовлены в незначительном количестве, ибо нашлось мало охотников приобрести их даже за весьма умеренную плату – 10 рублей, хотя качество медалей было отменным. Естественно, памятные медали создавались скульптором-медальером по эскизам Виталия Яковлевича. Основная идея медалей – самые глубокие математические теории рождаются из созерцания и осмысливания окружающего нас мира.



В.Я. Скоробогатько всю жизнь интересовался философией. Это особенно ярко запечатлелось в одной из последних его книг: “Дивлюсь на світ як математик”, которая вышла в 1994 году. Характерны заголовки параграфов этой небольшой книги: “Біблійні істини з точки зору математики”, “Імовірнісна інтерпретація розв’язків основних рівнянь математичної фізики”, “Розкриття причин імовірнісної природи світу”, “Філософія багаточкової геометрії”, “Простори дробових вимірів”, “Філософія теорії гіллястих ланцюгових дробів”.

И хотя В.Я. Скоробогатько в математике был суровым материалистом, в жизни он находился значительно ближе к идеализму, скептически относясь к откровению: “Бытие определяет сознание”. Он не разделял кредо людей эпохи рыночных отношений: в начале надо создать прочный экономичный базис, а уж потом можно всерьез заняться делом, в том числе и наукой. Он не сомневался, что такая премудрость ведет в конце концов к жизненному краху. В.Я. Скоробогатько полагал, что жизнь ставит вопросы в ином порядке. Здесь он не был оригинален. Великий химик Д.И. Менделеев, кстати, в свое время проваленный на выборах в Императорскую Академию наук, был убежден, что только духовно одаренные люди и способны привести общество к материальному процветанию. Случалось, Виталий Яковлевич глухо роптал, видя, как его ученики, в том числе и талантливые, все более отдаляются от науки, встав на административную стезю. В самом деле, многие специалисты отходили от математического аппарата, который оказывался не в состоянии достойно прокормить своего исследователя.

На фотографии, которая была задумана к юбилею Виталия Яковлевича, отмечавшемуся в июле 1982 года, запечатлены многие его ученики. Как отмечалось в аннотации к книге “Методы математики”, “Скоробогатько В.Я. створив математичну школу, з якої вийшло вісім докторів наук і біля тридцяти кандидатів наук”. Не все из присутствующих на фотографии обрели с годами общенародную известность, поэтому приведем фамилии:



Первый ряд (слева направо): Крупка З.І., Пелех Я.М., Максимів Є.М., Боднар Д.І., Пташник Б.Й., Кучмінська Х.Й., Марко В.Ф., Кукс Л.М., Ключник І.Ф., Шмойлов В.І., Пелих В.О., Каленюк П.І.

Второй ряд: Комарницький Я.І., Штабальок П.І., Обшта А.Ф., Боднарчук П.І., Сявковко М.С., Слоновьський Р.В., МIRONЮК П.Й., Мельничук Ю.В., Коробчук І.В., Мойсак П.П., Огирко О.В., Пасічник Т.В.

Во Львове, в центральной части города, на стене дома 15 по улице Лермонтова (ныне улица Дудаева), можно видеть мемориальную доску со скульптурным портретом В.Я. Скоробогатько: “У цьому будинку в 1988-1996 роках працював видатний математик, Заслужений діяч науки України, професор Віталій Скоробогатько”.



И всё же, как нам представляется, лучшая часть научной и педагогической деятельности В.Я. Скоробогатько прошла в доме 3 на тихой улице Кармелюка, где в небольшом зале на первом этаже долгие годы, с 1975 по 1987, шли бесконечные семинары Скоробогатько. Виталий Яковлевич непременно сидел в первом ряду, внимательно слушал докладчика, нередко комментируя с места или выходя к доске.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Классическая формула Вейерштрасса

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (\text{П1-1})$$

где  $0 < b < 1$ ,  $a$  – нечётное натуральное число, известна почти сто пятьдесят лет. Примечательна функция Вейерштрасса тем, что являясь непрерывной функцией, она при  $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$  не имеет производной, что в своё время несказанно поразило математическую общественность, вызвав едва ли не кризис в самой математике. Несмотря на длинную историю, тем не менее, практически не известны работы, где бы функция Вейерштрасса рассматривалась экспериментально, что позволяло бы исследователям иметь достоверные сведения о значениях и графиках этой функции при тех или иных параметрах. Это тем более актуально, что само вычисление функции Вейерштрасса на компьютере имеет некоторые технические сложности. Приведённые в Приложении результаты вычислений функции Вейерштрасса получены с большой точностью, а данные имеют пятьдесят верных десятичных разрядов.

В табл. П1-1 и П1-2 приведены значения функций Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0.9, x = 0.1$  и  $a = 9, b = 0.7, x = 0.1$ , полученные при учёте различного числа членов ряда (П1-1).

Таблица П1-1

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 1)$ , полученные вычислением отрезка ряда П1-1**

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.5105651629515357211643933337938214340569863412575e-1
2	4.2204978923192775586460397420421665166781144024691e-1
4	8.0189459954066273614274755098801163816884173646914e-2
8	1.3280176462992915573260042191912460739714187997665e-1
16	1.8996856973325144189846843158747302278573490702436e-1
32	2.2517012922955381321127980074052478742166044585788e-1
64	2.3290175952504074389342519523909093248589396724250e-1
128	2.3317635499836877544784036173119612917618731038072e-1
256	2.3317667913321116811724129275538570577751743695571e-1
512	2.3317667913366174357160353497497570773161651672807e-1
1024	2.3317667913366174357160440563768875782752013272985e-1
2048	2.3317667913366174357160440563768875782752013273310e-1
4096	2.3317667913366174357160440563768875782752013273310e-1

Таблица П1-2

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7; 0, 1)$ , полученные вычислением отрезка ряда П1-1**

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.5105651629515357211643933337938214340569863412575e-1
2	2.8531695488854607163493180001381464302170959023772e-1
4	4.2512226278393364673604838202058381810234728945421e-1
8	5.2719411807835611531737359854372599282872087365216e-1
16	5.5758580986927836943675070492631069430057090286367e-1



из табл. П1-1, отрезок ряда с 1024 членами, то же время, для точного определения значения функции Вейерштрасса с теми же параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  в точке  $x = 0,1$  необходима конечная цепная дробь, имеющая всего 5 звеньев (Табл. П1-5).

Таблица П1-5

**Вычисление функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  при различных  $x$  конечными цепными дробями**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0,1	2.3317667913366174357160440563768875782752013273310e-1	-2.52539794440e-1202	5
0,2	2.7942194707236565390012070616751679257158708367909e+0	-1.13488761914e-1201	5
0,3	7.9764426351276869838314991971299265064242055710293e-1	2.80477599410e-1201	5
0,4	-2.2057805292763434609987929383248320742841291632091e+0	9.60665231736e-1201	5
0,5	1.2474718879802830604211551361013036310385720245153e-1204	1.24747188798e-1204	1
0,6	2.2057805292763434609987929383248320742841291632090e+0	-1.25450285225e-1200	5
0,7	-7.9764426351276869838314991971299265064242055710294e-1	-5.37634845335e-1201	5
0,8	-2.7942194707236565390012070616751679257158708367910e+0	4.53509037280e-1201	5
0,9	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1	1.97245207316e-1201	5
1,1	-2.3317667913366174357160440563768875782752013273311e-1	-2.73076395095e-1201	5

Таблица П1-6

**Вычисление функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9$ ,  $b = 0,7$  при различных  $x$  конечными цепными дробями**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0,1	5.5944500958538445418614078434081302553276390242691e-1	1.49274035638e-1203	3
0,2	2.6967233145831580803409780572760635295338486330096e+0	-7.97305173298e-1203	3
0,3	3.4575603076027831127570938508180751093979555155479e-1	2.67730065465e-1202	3
0,4	1.0300566479164914136743113906093968628671819663429e+0	-6.69400434689e-1202	3
0,5	1.24747188798028306042115513610130363103857202451e-1204	1.24747188798e-1204	1
0,6	-1.0300566479164914136743113906093968628671819663430e+0	1.21268880843e-1201	3
0,7	-3.4575603076027831127570938508180751093979555155480e-1	-3.56100715130e-1202	3
0,8	-2.6967233145831580803409780572760635295338486330097e+0	3.16845753763e-1202	3
0,9	-5.5944500958538445418614078434081302553276390242692e-1	-1.40932921587e-1202	3
1,1	-5.5944500958538445418614078434081302553276390242691e-1	2.56796921156e-1202	3

Производная функции Вейерштрасса может формально быть записана расходящимся рядом:

$$W'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]. \quad (\text{П1-2})$$

Преобразуем расходящийся ряд (П1-2) в соответствующую цепную дробь. Оказывается, соответствующая расходящемуся ряду (П1-2) будет конечной, причём, с числом звеньев таким же, как имеет соответствующая цепная дробь для сходящегося ряда, представляющего функцию Вейерштрасса.

В табл. П1-7 и табл. П1-8 приведены значения конечных цепных дробей, представляющих производные функций Вейерштрасса с параметрами, соответственно,  $a = 7$ ,  $b = 0,9$  и  $a = 9$ ,  $b = 0,7$  в различных точках  $x$ .

Таблица П1-7

**Значения производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9)$  при различных  $x$**

$x$ , аргумент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	1.30211e-1501	5
0.2	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	1.16618e-1501	5
0.3	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	-1.06706e-1501	5
0.4	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	-5.53924e-1502	5
0.5	-4.3035515802599907376200594291500039509550265744865e-1	-3.39830e-1504	3
0.6	-3.5933393209219546608880051921507245501679515153942e-1	9.51526e-1502	5

0.7	2.2377039591994958972725203517714116535190307087685e-1	2.279132e-1501	5
0.8	4.1722194169037467909295703880070490957108237720457e-1	-4.66134e-1501	5
0.9	4.3894797493294912660825500663464136289965439960118e-1	-1.10445e-1500	5
1	4.0876083355529273403772226482410718154874678349709e-1505	0	8
1.1	-4.3894797493294912660825500663464136289965439960119e-1	1.761655e-1500	5

Таблица П1-8

*Значения производной функции Вейерштрасса  $w'(9; 0, 7)$  при различных  $x$*

$x$ , аргумент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1	1.8317085270994967710819487075119773185232734847604e-1	1.155425e-1502	3
0.2	-2.5295641513567900784472414140469199411434617499915e-1	-1.076131e-1502	3
0.3	4.7954751814294903922731217106058479639923012200199e-1	7.1364497e-1503	3
0.4	-4.0929207736185697868142874844650868291981015451073e-1	-5.493933e-1503	3
0.5	5.9275333086599872423823460061877412909380554705190e-1	0	4
0.6	-4.0929207736185697868142874844650868291981015451073e-1	5.9470414e-1503	3
0.7	4.7954751814294903922731217106058479639923012200199e-1	-1.806767e-1502	3
0.8	-2.5295641513567900784472414140469199411434617499915e-1	4.0892989e-1502	3
0.9	1.8317085270994967710819487075119773185232734847604e-1	-7.295037e-1502	3
1	-5.8472088177539961882469747718044485328941966582986e-1505	-5.847208e-1505	1
1.1	-1.8317085270994967710819487075119773185232734847605e-1	1.4918578e-1501	3

Интеграл функции Вейерштрасса

$$\sum \frac{a^{-n}b^n \sin(a^n \pi x)}{\pi} \tag{П1-3}$$

В табл. П1-9 приведены значения интеграла функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$ , определёнными при различных значениях  $x$  построением по ряду П1-3 соответствующей цепной дроби.

Таблица П1-9

*Значения интеграла функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$*

$x$ , аргумент	Значение интеграла функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1	0.12694149522548610624409103510784240062256553280173e0	1.30211e-1501	5
0.2	0.15726510052813130060486100316814243767262818663326e0	1.16618e-1501	5
0.3	0.26980136295652884537653631530938438378672860645832e0	-1.06706e-1501	5
0.4	0.31877502454935999534684788790059300886280010407258e0	-5.53924e-1502	5
0.5	0.29963021207295096401776634382068873044585079034728e0	-3.39830e-1504	3
0.6	0.31877502454935999534684788790059300886280010407258e0	9.51526e-1502	5
0.7	0.26980136295652884537653631530938438378672860645832e0	2.279132e-1501	5
0.8	0.15726510052813130060486100316814243767262818663326e0	-4.66134e-1501	5
0.9	0.12694149522548610624409103510784240062256553280173e0	-1.10445e-1500	5
1.1	0.12694149522548610624409103510784240062256553280173e0	1.761655e-1500	5

Таблица П1-10

*Значения интеграла функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$*

$x$ , аргумент	Значение интеграла функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1	0.10242705828660630037406573846035299150631522265190e0	1.155425e-1502	3
0.2	0.18022050412255351721372186883581639209534918036989e0	-1.076131e-1502	3
0.3	0.26815751996200186288011821669861677671926897960936e0	7.1364497e-1503	3
0.4	0.29160290113993213578308142934429091646701552814881e0	-5.493933e-1503	3
0.5	0.33146092335079112501210495647652757042590751391492e0	0	4

0.6	0.29160290113993213578308142934429091646701552814881e0	5.9470414e-1503	3
0.7	0.26815751996200186288011821669861677671926897960936e0	-1.806767e-1502	3
0.8	0.18022050412255351721372186883581639209534918036989e0	4.0892989e-1502	3
0.9	0.10242705828660630037406573846035299150631522265190e0	-7.295037e-1502	3
1.1	0.10242705828660630037406573846035299150631522265190e0	-5.847208e-1505	1

Оказалось, что число звеньев конечных соответствующих цепных дробей, постоянных по рядам представляющим функцию Вейерштрасса

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (\text{П1-4})$$

зависит от  $x$ , точнее от числа десятичных разрядов, представляющих  $x$ .

В табл. П1-11 и П1-12 приведены результаты вычисления функции Вейерштрасса с параметрами (7; 0,9; 0,11) и (9; 0,7; 0,11), соответственно, при использовании различного числа членов ряда (П)1-4.

Таблица П1-11

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 11)$** 

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.4088076895422547232411841909702103542054951633659e-1
2	2.6578080628681188496364971777281915780815694203094e-1
4	4.7349944070906808419212463659732448068696650761508e-1
8	7.8416242375828765423057761066882907246568523326133e-1
16	1.1217186345003554551246590514219061572568765763615
32	1.3295753620944032426099929084369628478429548724341
64	1.3752287761812343538041085133978878825564240097820
128	1.3768501962920137833107207600140250131252315538456
256	1.3768521102301632005184739459455799506982939330119
512	1.3768521102328237400178042122390492547472570334043
1024	1.3768521102328237400178093532925980828350291003445
2048	1.3768521102328237400178093532925980828350291003637
4096	1.3768521102328237400178093532925980828350291003637

Таблица П1-12

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7; 0, 11)$** 

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.4088076895422547232411841909702103542054951633659e-1
2	2.4122617669821338242363483340054346839563416570117e-1
4	5.4370907692685983211944421032793767643924239501847e-2
8	1.1792664738027030360891988143575973223387821104503e-1
16	1.2149380554126919368063130558887031876375126934366e-1
32	1.2082490573222398477056306275744090991984782216724e-1
64	1.2082219187207968904056831030616291249941485028298e-1
128	1.2082219190583839409432425689085156417000947070469e-1
256	1.2082219190583839409507155700620638562069745129455e-1
512	1.2082219190583839409507155700620638562065271612288e-1
1024	1.2082219190583839409507155700620638562065271612288e-1
2048	1.2082219190583839409507155700620638562065271612288e-1
4096	1.2082219190583839409507155700620638562065271612288e-1



В табл. П1-13 и П1-14 приведены результаты вычисления функций Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$  при различных значениях  $x$ . При вычислении значений функции Вейерштрасса использовались ряды (П1-4), с числом членов, обеспечивающих определение значений функции с точными пятидесятью десятичными разрядами.

Таблица П1-13

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  при различных  $x$**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
0.11	1.3768521102328237400178093532925980828350291003637
0.22	4.8801831656555969703802017692322417780126745546056e-1
0.33	3.2252857198148520387006752754701834507388548624645
0.44	-3.6018080548949651420978989656366882269146579511098
0.55	-1.4117918681677550513167694239647441003006238975392
0.66	-4.4920760857343946863449941194242784604282368442120e-1
0.77	4.8441260142066474188187881577286338601608842669680e-1
0.88	-7.4263407288828513201914864574807581330524983080762e-1
0.99	-5.0719625995516388881843167271852098039651699470156
1.11	-1.3768521102328237400178093532925980828350291003638

Таблица П1-14

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$  при различных  $x$**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
0.11	-4.3982321830448312291996194754527188908339240957475e-1
0.22	-4.5576224080491063912454165859573220932574605607737e-1
0.33	-2.2803604791657168196596452616645525293599043825648e-1
0.44	4.5124900992693182312085239254638513211734216770670e-2
0.55	4.5325002861287715983275293991649247420091398779650e-1
0.66	5.4678640958552521997558837836520686127594075320984e-1
0.77	9.9103705306414217959326945610654690398213910154163e-2
0.88	-2.6275208532137149103033655847762280483623077332512e-1
0.99	-4.0499551995249423555629342117791141382694963832662e-1
1.11	4.3982321830448312291996194754527188908339240957474e-1

В табл. П1-15 и П1-16 приведены результаты вычисления значений функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$  при различных  $x$ . Значения функции вычислялись при помощи соответствующих цепных дробей, построенных для рядов (П1-4). В колонке 4 таблиц П1-15 и П1-16 указано число звеньев конечных дробей. В сравнении с аналогичными таблицами, в которых  $x$  имеет один десятичный разряд, конечные цепные дроби, для функций Вейерштрасса при  $x$ , записываемых в двух десятичных разрядах, имеют большее число звеньев.

Таблица П1-15

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  в различных точках  $x$ , определённые цепной дробью**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.11	1.3768521102328237400178093532925980828350291003637	-5.83018662355e-1199	9
0.22	4.8801831656555969703802017692322417780126745546056e-1	3.83945742451e-1202	5
0.33	3.2252857198148520387006752754701834507388548624645	2.37723504649e-1198	9
0.44	-3.6018080548949651420978989656366882269146579511098	6.18341547490e-1201	5
0.55	-1.4117918681677550513167694239647441003006238975392	1.49765584316e-1197	9
0.66	-4.4920760857343946863449941194242784604282368442120e-1	-8.71815869570e-1201	5
0.77	4.8441260142066474188187881577286338601608842669680e-1	-2.16708341657e-1197	9
0.88	-7.4263407288828513201914864574807581330524983080762e-1	3.92071635611e-1200	5
0.99	-5.0719625995516388881843167271852098039651699470156	-1.38029594383e-1198	9
1.11	-1.3768521102328237400178093532925980828350291003638	-5.48747787683e-1198	9

Таблица П1-16  
**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$  в различных точках  $x$ ,  
определённые цепной дробью**

х, аргу- мент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.11	1.2082219190583839409507155700620638562065271612288e-1	-1.74471680194e-1197	9
0.22	1.6689144621761791827478656216820948915953354169625	-3.66573105367e-1200	5
0.33	-5.6529410743604704526999919079871747815774792254530e-1	1.36175068994e-1198	9
0.44	7.5734254719588055541695206909761478469466329390982e-1	7.91589250546e-1201	5
0.55	-1.6623849087388770143983009663775940683231072454875	2.87368575769e-1200	5
0.66	-1.3370790282336040671685663124590136892646281757055e-3	2.12611959936e-1200	5
0.77	-1.0447544577259760835146384838374397612203868681871	2.31762396346e-1197	9
0.88	-4.9753809383248110052930367329810411725863875403966e-1	-1.32696438772e-1199	5
0.99	-1.1715122529262672546129240887011637854284240003053	-6.60241865925e-1197	9
1.11	-1.2082219190583839409507155700620638562065271612289e-1	-2.02841850230e-1196	9

Производная функции Вейерштрасса

$$W'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)] \quad (\text{П1-5})$$

В табл. П1-17 и П1-18 приведены значения производной функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$  в различных точках  $x$ . Значения производной функции Вейерштрасса определены построением по расходящимся рядам (П1-5) соответствующих цепных дробей. Эти цепные дроби – конечные и их длина такая же, как и соответствующих цепных дробей для аналогичных рядов функции Вейерштрасса.

Таблица П1-17

**Значения производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9)$  в различных точках  $x$**

х, аргу- мент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.11	-4.3982321830448312291996194754527188908339240957475e-1	-1.35959e-1499	9
0.22	-4.5576224080491063912454165859573220932574605607737e-1	-3.17175e-1501	5
0.33	-2.2803604791657168196596452616645525293599043825648e-1	-1.31148e-1498	9
0.44	4.5124900992693182312085239254638513211734216770670e-2	2.19757e-1502	5
0.55	4.5325002861287715983275293991649247420091398779650e-1	-1.63078e-1499	9
0.66	5.4678640958552521997558837836520686127594075320984e-1	-2.81040e-1500	5
0.77	9.9103705306414217959326945610654690398213910154163e-2	5.48171e-1498	9
0.88	-2.6275208532137149103033655847762280483623077332512e-1	1.16952e-1500	5
0.99	-4.0499551995249423555629342117791141382694963832662e-1	-7.85768e-1498	9
1.11	4.3982321830448312291996194754527188908339240957474e-1	-1.39388e-1498	9

Таблица П1-18

**Значения производной функции Вейерштрасса  $w'(9; 0, 7)$  в различных точках  $x$**

х, аргу- мент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.11	-3.5737597244624359600934075664032792052082599253536e-1	1.01261e-1497	9
0.22	-4.1610167573907370387776038189133055646221766512801e-1	-7.2497e-1503	5
0.33	-4.8506352338417456375230839152126806288855589570759e-1	-3.0972e-1497	9
0.44	-2.8308228524178735216736281565058827340972368745682e-1	-1.4091e-1501	5
0.55	1.6022410549298014080597374559651828730115614575658e-1	4.25921e-1502	5
0.66	3.1728042709574177665464409998005327430642708419529e-1	1.60400e-1501	5
0.77	4.5895581979849223993177744961125740903378921092216e-1	-4.8263e-1497	9
0.88	5.1004304069994240535300101740522811470323641376183e-1	7.29503e-1501	5
0.99	1.1219056972835700000863189654794738382084350016041e-1	1.04214e-1496	9
1.11	4.3982321830448312291996194754527188908339240957474e-1	-1.3938e-1498	9

В табл. П1-19 и П1-20 приведены значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0.9$  и  $a = 9, b = 0.7$ , установленными при  $x = 0.111$  с учётом различного числа членов ряда.

Таблица П1-19

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 111)$  при различных  $x$**

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.3981195108631967277843069806409626262332299650054e-1
2	2.5178757280553722734732188610618313927146257007182e-1
4	8.0742280016910037919232641684143415070245417724831e-1
8	8.5841064178842148601194201744825322071879545603285e-2
16	-4.0296007573338399280486040165757182944590078382416e-1
32	-1.5257651097017945231744296916719200697470070689155e-1
64	-1.3009963004098525467266634198911119126121019768530e-1
128	-1.3178669766942119408631635241710671973823425781647e-1
256	-1.3178740044810178140350500002952099702855995746348e-1
512	-1.3178740044527398465251956788976230272597095668466e-1
1024	-1.3178740044527398465251730720275125621353806386053e-1
2048	-1.3178740044527398465251730720275125621353806388049e-1
4096	-1.3178740044527398465251730720275125621353806388049e-1

Таблица П1-20

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7; 0, 111)$  при различных  $x$**

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.3981195108631967277843069806409626262332299650054e-1
2	2.3981540544501895650013932585000617028289226712908e-1
4	-5.8194315071640760110677177179181365979824430428825e-1
8	-2.6028185289641372779821450248123554750847613304564e-1
16	-1.8809864846957187961414076593643826833852564886340e-1
32	-1.8726822198745877178259031079430693244436411451752e-1
64	-1.8726072115405805901087527312929197673974015609375e-1
128	-1.8726072111666545455864511087453993185053951794334e-1
256	-1.8726072111666545456969520603510635361499435946475e-1
512	-1.8726072111666545456969520603510635361460966969691e-1
1024	-1.8726072111666545456969520603510635361460966969691e-1
2048	-1.8726072111666545456969520603510635361460966969691e-1
4096	-1.8726072111666545456969520603510635361460966969691e-1

Из сравнения табл. П1-19 и П1-20, как и аналогичных таблиц, приведённых ранее, следует, что ряд Вейерштрасса  $w(a, b, x)$  сходится тем быстрее, чем меньше значение коэффициента “ $b$ ”. Например, вычисление значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0,7; 0,111)$  с точными пятидесятью десятичными разрядами обеспечивается отрезком ряда, содержащего не более 1024 слагаемых, в то время, как в случае функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,111)$  для обеспечения такой же точности необходим отрезок ряда, имеющего порядка 2048 слагаемых.

В табл. П1-21 приведены значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9, b = 0.7$ , установленные в различных значения  $x$ .

Таблица П1-21

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$** 

х, аргумент	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
0,111	-0.13178740044527398465251730720275125621353806388048e0
0,222	-0.15305697701945242175597340196125622249561303780315e0
0,333	0.12088194190984092396183752849618202289767355036999e1
0,444	0.11463808279503072984087704261067381461554953650901e1
0,555	0.89346677457495307448235913713774064983326545878941e0
0,666	-0.91640911464394759464966790471497918715013956258459e0
0,777	-0.11906659461462151749232755614076083542631789559789e1
0,888	0.10228533583044874671171509840906433675584922794537e0
0,999	-0.23351462022290565773815456526942209194487978931051e1
1,111	0.13178740044527398465251730720275125621353806388048e0

Из табл. П1-21 видно, что значения функции Вейерштрасса в точках  $x$ , разделённых полупериодом, то есть единицей, равны по модулю, но имеют различные знаки.

В табл. П1-22 и П1-23 приведены значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$ , установленные при различных значениях  $x$  с использованием соответствующих цепных дробей.

Таблица П1-22

**Определение значений функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  при различных  $x$  построением соответствующих цепных дробей**

х, аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0,111	-0.13178740044527398465251730720275125621353806388048e0	0.374e-9004	33
0,222	-0.15305697701945242175597340196125622249561303780315e0	0.108e-9004	33
0,333	0.12088194190984092396183752849618202289767355036999e1	0.193e-9005	33
0,444	0.11463808279503072984087704261067381461554953650901e1	0.230e-9018	17
0,555	0.89346677457495307448235913713774064983326545878941e0	0.320e-9024	9
0,666	-0.91640911464394759464966790471497918715013956258459e0	-0.187e-9004	33
0,777	-0.11906659461462151749232755614076083542631789559789e1	-0.661e-9005	33
0,888	0.10228533583044874671171509840906433675584922794537e0	0.195e-9017	17
0,999	-0.23351462022290565773815456526942209194487978931051e1	-0.585e-9005	33
1,111	0.13178740044527398465251730720275125621353806388048e0	-0.481e-9005	33

Таблица П1-23

**Определение значений функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  при различных  $x$  построением соответствующих цепных дробей**

х, аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0,111	-0.18726072111666545456969520603510635361460966969690e0	0.209e-8994	41
0,222	0.20890146352699838884576845915419569173074423296056e1	0.175e-8993	41
0,333	-0.11057203819903070959838891776095556609550824236158e1	0.201e-8993	41
0,444	0.16492764248865790399767928624337583286914208176875e1	-0.140e-9011	21
0,555	-0.12736913622342011520050844408491325732640930615944e1	-0.128e-9023	9
0,666	0.81166526597340036201933474595674437663542068306857e0	0.138e-8993	41
0,777	-0.17127723535024900539218119318091637280480323557522e1	-0.226e-8996	41
0,888	0.41724428088171812302499643663256934924278141618066e0	0.750e-9012	21
0,999	-0.16101038174328358962116084344274323089113323802820e1	0.367e-8993	41
1,111	0.18726072111666545456969520603510635361460966969690e0	0.460e-8993	41

Из данных третьих колонок таблиц П1-22 и П1-23 следует, что соответствующие цепные дроби, построенные по ряду Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$ , конечные. В колонке 4 этих же таблиц показано число звеньев конечных цепных дробей для различных значений  $x$ . Сравнивая число звеньев конечных цепных дробей, построенных для функции Вейерштрасса для  $x$  с одним, двумя и тремя десятичными

разрядами, можно сделать вывод, что длина конечных соответствующих цепных дробей растёт с ростом числа десятичных разрядов, которые представляют точку  $x$ . Кроме того, для некоторых значений  $x$ , имеющих одинаковое число десятичных разрядов, конечные цепные дроби могут быть разной длины. Длины конечных цепных дробей для функции Вейерштрасса с разными параметрами “ $a$ ” и “ $b$ ” также различны.

В табл. П1-24 показаны результаты вычисления производной функции Вейерштрасса построением соответствующей цепной дроби по расходящемуся ряду, которым формально может быть представлена производная

$$W'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]$$

при параметрах  $a = 9, b = 0,7$ .

Таблица П1-24

**Определение производной функции Вейерштрасса  $w'(9; 0,7)$  при различных  $x$**

х, аргу-мент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.111	3.4587566119885404826021288604326928860599770366974e-1	7.44405e-1468	41
0.222	-5.1202984678793910177997063296687776793273534730736e-1	-8.14738e-1468	41
0.333	8.1243516226205056595763507309188643343858120905408e-2	-2.29746e-1467	41
0.444	4.6178243433851898200644623480659952407971022228904e-1	1.76351e-1486	21
0.555	-4.4352876770343103306567282761905641188108162569990e-1	-5.80434e-1497	9
0.666	5.5114939028889236988500591872568083009937163257328e-2	1.98693e-1467	41
0.777	2.6366190878095753142492185868784838268189902583758e-1	1.40844e-1466	41
0.888	-5.0782051356951260009624166226217399967713140537673e-1	3.55768e-1486	21
0.999	2.2529096462545223294664929594692575324672125590929e-1	2.90950e-1467	41
1.111	-3.4587566119885404826021288604326928860599770366975e-1	5.76414e-1467	41

В таблице П1-25 показаны результаты вычисления интеграла функции Вейерштрасса

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{-n} b^n \sin(\pi x a^n)}{\pi}$$

при параметрах  $a = 9, b = 0,7$  для различных значений  $x$ .

Таблица П1-25

**Определение значения интеграла функции Вейерштрасса**

х, аргу-мент	Значение интеграла функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.111	0.10894234982301154388020258673411771148742047079610e0	7.44405e-1468	41
0.222	0.20410856291046442903546854611413863932082481102422e0	-8.14738e-1468	41
0.333	0.27600235287163518911809651034453369116054770671765e0	-2.29746e-1467	41
0.444	0.31273272614128476954797895852311353949778759486264e0	1.76351e-1486	21
0.555	0.31456725840148336424553402570321929355266710617575e0	-5.80434e-1497	9
0.666	0.27506980538276173093265703052180539779249026307762e0	1.98693e-1467	41
0.777	0.20624411673375187818182935908623739318756061914168e0	1.40844e-1466	41
0.888	0.1085637967844648958184743678538712245556248838200e0	3.55768e-1486	21
0.999	0.23228111202407365438594058307104794966140951584876e-2	2.90950e-1467	41
1.111	0.10894234982301154388020258673411771148742047079610e0	5.76414e-1467	41

Надо отметить, что число звеньев конечных соответствующих цепных дробей, представляющих функцию Вейерштрасса, а также производную и интеграл этой функции, одинаково.

Продолжим экспериментальное изучение свойств функции Вейерштрасса. В табл. П1-26 и П1-27 приведены результаты вычисления функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9, b = 0,7$  и  $a = 7, b = 0,9$  при  $x = 0.1111$  с учётом различного числа слагаемых ряда Вейерштрасса  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ .

Таблица П1-26

**Определение значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 1111)$** 

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.3970455896863082819360628398144981895039703818705e-1
2	2.5040593711992505066023873007279717422660358289995e-1
4	7.9635872444083903691655781737514451650412103780850e-1
8	-3.2400768044912834693024749293854724997467299254791e-1
16	2.0936275998518289474221351496295211763347184330264e-1
32	2.3201092186472711385717247106893991905340138764401e-3
64	8.5696654131308528183903094715059416210783855978083e-3
128	8.0698376372066277153472879247143784764445290834857e-3
256	8.0689045357347534900581162979378198615736363361082e-3
512	8.0689045350146125638426309106478546299473980817898e-3
1024	8.0689045350146125638451516900708294694982250159883e-3
2048	8.0689045350146125638451516900708294694982250255317e-3
4096	8.0689045350146125638451516900708294694982250255317e-3

Таблица П1-27

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7; 0, 1111)$** 

Число членов ряда	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
1	9.3970455896863082819360628398144981895039703818705e-1
2	2.3970459351224594789651353541232959646419207667174e-1
4	-5.9318239993490929784408506856587752387131231504381e-1
8	-7.8623396737155214484084532975681238665970931376913e-1
16	-8.4357166963237322171320909802594832001816061773053e-1
32	-8.4054606757550851636093817468112795237894425639102e-1
64	-8.4054652404427165520819501101078899689363991890474e-1
128	-8.4054652398876128362979199999944537675690997580513e-1
256	-8.4054652398876128363739417529778797208994372053702e-1
512	-8.4054652398876128363739417529778797208976931972551e-1
1024	-8.4054652398876128363739417529778797208976931972551e-1

В табл. П1-28 и П1-29 приведены значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 9, b = 0.7$  и  $a = 7, b = 0.9$ , установленные при различных значениях  $x$ .

Таблица П1-28

**Значения функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$  при различных значениях  $x$** 

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
0.1111	8.0689045350146125638451516900708294694982250255317e-3
0.2222	5.6330703686170838305501852461160448372721539669320e-1
0.3333	2.8701938011873243884944245653007736661011210279191
0.4444	-2.6582217027009499479830488722656212374508256023550
0.5555	9.6328478275124009341363736958573413210386795336803e-1
0.6666	-1.6562422823884409518270906664686117762138327496765
0.7777	-1.0351507271484624618108457025459766549787764590684
0.8888	-4.1843711905709430833621973494941181846004474239104e-2
0.9999	-3.3943002234409960468855117050024659969293764770738
1.1111	-8.0689045350146125638451516900708294694982250255318e-3

Таблица П1-29

**Значения функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  при различных значениях  $x$** 

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (ряд)
0.1111	-8.4054652398876128363739417529778797208976931972551e-1
0.2222	2.5462542330622063383716937271769734356514782682582
0.3333	-1.4492171809781008265287957258804007512902621725944
0.4444	1.7892606090323686919452393054702881159426868558628
0.5555	-1.7989255421968447390134225936077507153650059316940
0.6666	1.2373032858813596541395215178722938301885650205567

Окончание табл. П1-29

0.7777	-2.3063998178107406251790328262488836928107321439364
0.8888	2.6422448028422523028648367006444714446348196363597e-1
0.9999	-2.5432158327962744454728577989703397014859519398751
1.1111	8.4054652398876128363739417529778797208976931972550e-1

В табл. П1-30 и П1-31 приведены точные значения функции Вейерштрасса с параметрами  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$ , установленные при различных значениях  $x$  с использованием соответствующих цепных дробей.

Таблица П1-30

**Определение значений функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9)$  при различных  $x$  построением соответствующих цепных дробей**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1111	8.0689045350146125638451516900708294694982250255317e-3	6.299e-1479	33
0.2222	5.6330703686170838305501852461160448372721539669320e-1	3.249e-1477	33
0.3333	2.8701938011873243884944245653007736661011210279191	-1.660e-1479	33
0.4444	-2.6582217027009499479830488722656212374508256023550	-5.003e-1479	33
0.5555	9.6328478275124009341363736958573413210386795336803e-1	-1.891e-1479	33
0.6666	-1.6562422823884409518270906664686117762138327496765	-1.122e-1478	33
0.7777	-1.0351507271484624618108457025459766549787764590684	6.753e-1478	33
0.8888	-4.1843711905709430833621973494941181846004474239104e-2	2.731e-1491	17
0.9999	-3.3943002234409960468855117050024659969293764770738	-7.864e-1478	33
1.1111	-8.0689045350146125638451516900708294694982250255318e-3	8.068e-1478	33

Таблица П1-31

**Определение значений функции Вейерштрасса  $w(9; 0, 7)$  при различных  $x$  построением соответствующих цепных дробей**

$x$ , аргумент	Значение функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1111	-8.4054652398876128363739417529778797208976931972551e-1	-1.190e-1316	201
0.2222	2.5462542330622063383716937271769734356514782682582	-1.146e-1316	201
0.3333	-1.4492171809781008265287957258804007512902621725944	-5.952e-1317	201
0.4444	1.7892606090323686919452393054702881159426868558628	3.834e-1316	201
0.5555	-1.7989255421968447390134225936077507153650059316940	-2.052e-1468	41
0.6666	1.2373032858813596541395215178722938301885650205567	1.011e-1315	201
0.7777	-2.3063998178107406251790328262488836928107321439364	-2.564e-1316	201
0.8888	2.6422448028422523028648367006444714446348196363597e-1	-3.014e-1411	101
0.9999	-2.5432158327962744454728577989703397014859519398751	2.183e-1315	201
1.111	1.8726072111666545456969520603510635361460966969690e-1	-3.519e-1468	41
1.1111	8.4054652398876128363739417529778797208976931972550e-1	-1.382e-1315	201

Сравнивая табл. П1-23, в которой приведено число звеньев конечной цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса  $w(9; 0,7)$  в точках  $x$ , имеющих три десятичных разряда, с табл. П1-31, где указано число звеньев цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса с этими же параметрами, но в точках  $x$ , имеющих четыре десятичных разряда, можно обратить внимание на резкое увеличение длины конечных цепных дробей для  $x$  с четырьмя десятичными разрядами. В приложении 2 зависимость числа звеньев конечной соответствующей цепной дроби от числа десятичных разрядов в записи значения  $x$  рассмотрены более подробно.

В табл. П1-32 и П1-33 показаны результаты вычисления производной функции Вейерштрасса построением соответствующей цепной дроби по расходящемуся ряду, которым формально может быть представлена производная функции Вейерштрасса – то есть по ряду  $W'(a, b, x) = \sum [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]$  при параметрах  $a = 7, b = 0,9$  и  $a = 9, b = 0,7$ .

Таблица П1-32

**Определение производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9)$  при различных  $x$** 

$x$ , аргумент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1111	5.0874339605857217841126225811082183701785441451525e-1	-6.648e-1479	33
0.2222	-2.0776104638212503932967804986702480094888099760442e-1	9.765e-1477	33
0.3333	-2.7702309426626382292950400349881393666739666891426e-1	-3.400e-1479	33
0.4444	5.050221968452832757753360967650030127268241201234e-1	2.476e-1477	33
0.5555	1.6078404300641493907727180725767682779321138017431e-1	1.948e-1478	33
0.6666	-4.2455986317668963102802767245981924190614668717244e-1	-2.854e-1478	33
0.7777	2.5129020892518627568288448195870165456723577448566e-1	2.454e-1477	33
0.8888	4.8354842182961163360081903270776364891050474776126e-1	-5.833e-1492	17
0.9999	-3.2577748234868719511402931191738830872051988233083e-1	5.473e-1476	33
1.1111	-5.0874339605857217841126225811082183701785441451526e-1	-8.512e-1478	33

Таблица П1-33

**Определение производной функции Вейерштрасса  $w'(9; 0, 7)$  при различных  $x$** 

$x$ , аргумент	Значение производной функции Вейерштрасса (дробь)	Значение, $w_n$	Номер звена, $w_n$
0.1111	-5.0543276389470935401306216750962454734120598004630e-1	2.844e-1315	201
0.2222	-1.8484077916204156477051245826900413528969041621565e-1	-4.561e-1316	201
0.3333	3.4466486041628794281368091327764769698436442005013e-1	-1.203e-1315	201
0.4444	4.2209436878471861294181217586727460954483505493393e-1	-2.812e-1315	201
0.5555	-3.2123471636494119866907457692774288990730328940736e-1	-4.386e-1467	41
0.6666	-4.1637979883094616059980304708853519456208564127893e-1	-1.004e-1315	201
0.7777	-4.647987412775776685570527879965144925320380681835e-2	-5.855e-1315	201
0.8888	5.6518712507108873863413494687655964750162817275924e-1	-1.708e-1410	101
0.9999	9.0309866075459048313944096939583180859448410269547e-2	-1.233e-1314	201
1.1111	5.0543276389470935401306216750962454734120598004629e-1	3.302e-1314	201



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В таблицах Приложения 2 приведены значения коэффициентов соответствующих цепных дробей, построенных для функции Вейерштрасса и её производной. Также приведены значения подходящих цепных дробей, которые получены для функции Вейерштрасса и её производной, с тем, чтобы установить характер “сходимости” подходящих дробей для этих цепных дробей. Так как функция Вейерштрасса непрерывная, то при достаточно большом количестве звеньев должна легко обнаруживаться “сходимость” цепной дроби, представляющей функцию Вейерштрасса. Напротив, есть основания предполагать, что цепная дробь, построенная по ряду, формально представляющему производную функции Вейерштрасса, будет “расходящейся” в том смысле, что значения её подходящих дробей при их последовательном вычислении не дают приближения значения производной за которое можно принять значение построенной конечной цепной дроби. Графически значения серии подходящих дробей ведут себя аналогично графикам “классических” расходящихся цепных дробей, которые при суммировании их  $r/\varphi$ -алгоритмом имеет комплексные значения.

В табл. П2-1 ÷ П2-12 даны результаты вычисления функций Вейерштрасса и её производной построением конечных соответствующих цепных дробей.

Вычисление функции Вейерштрасса.

$$w(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \tag{П2-1}$$

и её производной

$$w'(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-a^n \pi b^n \sin(a^n \pi x)]$$

осуществлялось при параметрах:

$$a = 7; b = 0,9; x = \{0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; 0,11111; 0,111111\}$$

Разрядность данных при вычислении коэффициентов соответствующих цепных дробей по алгоритму Рутисхаузера составляла 5000.

Таблица П2-1

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0,9; 0,1)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	0.5290067271	0.42204978923192775586460397420421665166781144
2	1.45623059	2.1105726443309239594960159474002498692259868
3	2.01246118	-0.07296411372765741571645948344107080564462100
4	0.5562305899	0.2331766791336617435716044056376887578275201
5	0.5132863164e-1502	

Таблица П2-2

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 1)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-16.01209163	-16.98289715015580170847338620669427433058762
2	2.406385871	10.414470714124602208663447280707118309270238
3	-14.08722826	-14.495984106989379400558339546793971164135519
4	-16.49361413	0.43894797493294912660825500663464136289965439
5	-0.1880397871e-1501	

Таблица П2-3

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 11)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-0.6750999627	0.26578080628681188496364971777281915780815694
2	0.4064253156	-0.19646551690822857144575448541692719607652490
3	2.163478905	0.16626235064015957059582534393246137796104047
4	2.466905897	0.57711939229722017657903267419095103474953854
5	0.2716350953	0.42641164050656573910458149037343962222959542
6	-2.332047809	0.51626725311924585924320696193373174614747122
7	-1.613223111	0.68415852386493345786622895874564552236903436
8	0.2806074864	1.3768521102328237400178093532925980828350291
9	-0.3412530268e-1498	

Таблица П2-4

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 11)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-13.08870674	-14.152883298079941752279835709845077942958581
2	-8.963318451	-2.3778660518917368374254721935226326363561192
3	-13.98595245	-43.317417440520087356341212131737192711065776
4	-2.825415836	4.4476323255682485221861648841307096422177058
5	-0.4340967476	1.2240252522339555491570550534670701248554071
6	-95.88037571	4.411976710894784353303283120862979706986002
7	-92.60030498	-130.33676759758395156826782890393703033528623
8	0.6487558234	-0.43982321830448312291996194754527188908339240
9	0.1777664641e-1497	

Таблица П2-5

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 111)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-0.6880243783	0.25178757280553722734732188610618313927146257
2	0.2242329388	0.052916370339771722559844988380073962299658209
3	4.825758794	0.22424548297467922419199976432284100586370478
4	4.357264191	0.48496193119783604033266218435452070674802155
5	-0.2557109225	0.95831393706551344119020657312910604277133218
6	-0.6323479729	0.65520626552066730977305785222354868586270823
7	-1.259740552	0.40411115345153023348670368510701828507288624
8	0.1130073775	0.33871725937937747589430187741235876612021546
...	...	...
31	-19.07179483	-0.093790187744322420042427674432338793560850679
32	-18.71792745	-0.13178740044527398465251730720275125621353806
33	0.3366159119e-1480	

Таблица П2-6

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-12.75908275	-13.83254016717224089988142366434248898400004
2	-9.593730933	-2.2778567755169708276139837217639481175213805
3	-8.134837373	35.9488773180035180891935074786909016575006295
4	-5.228667082	-0.65304271468424508555362307683350820879817800
5	-2.259478772	-4.5416904701374819748091559208797189731364070
6	6.26933771	0.0021188906515287731976985489935051976699215902
7	35.20786492	-5.463011554542405288509825073437546084328706
8	28.25398124	-0.81006998722505430923180748666755327518333590
9	-6.002877812	37.661736707268358132769064801250156809950978
10	-0.06896621289	22.659827233523714161229096034745386065324346
...	...	...
28	-4.364340785	-2.7982910658159340021793291127840831176352212
29	-44.14508238	34.970282748018802997754363135283188615798858
30	-44.36848368	-26.636513449076359636697122065529557675903617
31	3.633816638	82.596798624171124068463210746013296855275377
32	3.980892708	0.15265117895643695651893300367688522926574754
33	-0.3085255385e-1478	

Таблица П2-7

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-0.6892986218	0.25040593711992505066023873007279717422660358
2	0.2060343766	0.071532686567053380956856561140835949524663102
3	5.050252212	0.22610512974644525721555192772191174063709243
4	3.997520541	0.40982685879678004679013769973278150256765102
5	0.08191106748	0.38189803168873281636045479665194505862821201
6	5.876585837	0.41683843556971455697399406673718832847434998
7	4.430887129	0.070988646791307179066335440332306759619730722
8	-0.1026423609	-3.57404936289782403315606785342111943219492073
...	...	...
31	-2.212873589	-0.049311878180857679495985151740392013968104896
32	-1.226857287	0.0080689045350146125638451516900708294694982250
33	0.30427324e-1477	

Таблица П2-8

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 1111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-12.72577834	-13.800163256776563429382878047183773227497146
2	-9.646426081	-2.2696948053666601800517287659041952084591002
3	-7.529946857	25.589889184102160617366495349212964882836755
4	-4.367555197	-0.51975562719714212594051732784051197455574269
5	-2.720944736	-5.9020500837349098807600103701964851083578584
6	14.14621135	-0.18466780278395467194415642221980562482730884
7	20.25307242	-27.815768244693967888314046122808414048156315
...	...	...

Окончание табл. П2-8

29	0.008685672557	4.8663108737635020015180072070677823825071458
30	-35.90636266	2.8541226828174506275546623912442574897029408
31	-26.93958489	-1720.1370126595283345800163107550484285433829
32	-0.8557699691	0.50874339605857217841126225811082183701785441
33	0.1105535275e-1476	

Таблица П2-9

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 11111)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-0.689425863	0.25026795169226563694924363271331340501386709
2	0.2042155203	0.07334635435613550532836070094116996969560649
3	5.071939374	0.22627373096740248105727670014469553551758940
4	3.972865778	0.40493404307075656618176808874478415812030289
5	0.009520950539	0.40132038316407283003468432792729240023825558
6	0.7772767053	0.38977892324983458777721820329889301725532474
7	37.84356104	0.4012481180263331894267580441675450096284522
8	37.71899848	0.40479433694287049871843556563959557455548492
9	-0.7638250131	880.46553026528370307574387457600138422201331
10	-0.04271074624	0.48781489752517881013440485864979391030701744
...	...	...
157	0.6465606601	0.76537636084457007303298959312795124868462438
158	0.2625042945	0.76537636049512668281075691748823273416813342
159	-2.762974399	0.76537636101175324118856771468859960088300337
160	-2.39264115	0.76537635692490243286131333915959543572480440
161	0.5286972147e-1370	

Таблица П2-10

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 11111)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-12.72244451	-13.796922172370852101962174570886559599333486
2	-9.651587687	-2.2688953310276322128599821329150840470632057
3	-7.470753823	24.8067251758774178390753821839505106627141725
4	-4.138869116	-0.44681619363056405604510058579461476680048268
5	-0.17559223	-0.74879666947613612116117368358339944754835609
6	-107.0394801	-0.44957856088657077309816543045734460654662865
7	-138.2910483	-1.8778459627229315620305642185121255259878726
8	-5.057514402	-0.37059755207952769007793374020376690750859601
9	18.64028989	-50.846917998549740656843914618327443508707345
10	-0.2177576441	7.9386181825372923573722540176553695591664718
...	...	...
158	1.359664834	-3.2521889812748660360689057093085041351685359
159	4.616081635	-8.2752101407599134599504167336627315723930365
160	8.406919488	-0.31489166714798887384056351823146489037774803
161	0.1971218164e-1369	

Таблица П2-11

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 0, 9; 0, 111111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-0.6894385852	0.25025415493216392322256299429626124277489051
2	0.2040336454	0.07352725306963661009482714542365558949011309
3	5.074100155	0.22629042852338012167777354716698080205091694
4	3.970578759	0.4044704095904277441723346808698165995418743
5	0.0009597246394	0.40410071911307215614106280709743948628796885
6	-0.6610309536	0.40424765878434420006200288771914293312208704
7	-60.23752758	0.40409655593984981805934052471857858193069232
8	-59.66255138	0.40446652430727167225320292753618250053075253
9	0.5824675975	0.40646325586672427773470764150280572470585336
10	-0.3828585389	0.40504542823302806971839992249253972652741667
...	...	...
1598	0.01074657482	-0.2891258132695024854871618195064778165884616
1599	4.553481952	-0.2891258132695024854871618195064778165884616
1600	4.018858833	-0.2891258132695024854871618195064778165884616
1601	0.1563118756e-152	

Таблица П2-12

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 0, 9; 0, 111111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значение подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-12.72211109	-13.79659803002939570688860179573924881737607
2	-9.652102765	-2.2688155493863501673244479170897699214601790
3	-7.464848886	24.730337165257031875102901950887496835330822
4	-4.11472917	-0.43858942792496293095185726173114687266689638
5	-0.01644714297	-0.46668217771566592628220837425573885945026636
6	-111.1298265	-0.43883968879148229479834369678393501491599706
7	-90.03387596	-0.32602383318780594558839314833329296889269209
8	-27.904116	-0.43804504126277963269660250696332596015463257
9	-73.05684942	-0.55680255600969612033357648927951459888010928
10	15.6218004	-0.43423663622922674174840393932491790975804528
...	...	...
1598	26.57199372	-30.1879097564760648032350731149400740317120365
1599	12.59823843	-199.874850090338248461931565319632921932200525
1600	1.77663514	-0.062460305523185480410708752718124164820964570
1601	0.2199911565e-151	

В табл. П2-13 ÷ П2-24 приведены результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(a, b, x)$  и её производной  $w'(a, b, x)$  при параметрах  $a = 7$  и  $b = 2$  в различных точках  $x$ . Особенность этих таблиц в том, что функция Вейерштрасса, как и её производная, определяются при параметрах  $b > 1$ , а именно  $b = 2$ . Как известно, классическая функция Вейерштрасса определяется сходящимся рядом (П2-1) при  $0 < b < 1$ .

При  $b > 1$  ряд (П2-1) будет расходящимся, значение которого может быть установлено построением, так называемых, соответствующих цепных дробей. Эти соответствующие цепные дроби оказываются конечными, как и в случае построения соответствующих цепных дробей для сходящихся рядов Вейерштрасса (П2-1), когда  $0 < b < 1$ . Число звеньев конечных цепных дробей, построенных для расходящихся рядов, то есть при  $b > 1$   $w(a, b, x)$ , совпадает с числом звеньев конечных цепных дробей, установленных для аналогичных сходящихся рядов  $w(a, b, x)$  при  $0 < b < 1$ .

Таблица П2-13

**Значения подходящих дробей функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 1)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.175570505	-0.22451398828979268622097257589876339378960624
2	3.236067977	1.47678762841428717814210841822725875069119656
3	4.472135955	-1.92581560499387255058405357002478553827040904
4	1.236067977	-0.044902797657958537244194515179752678757921248
5	0.1138433651e-1501	

Таблица П2-14

**Значения подходящих дробей производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 1)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-35.58242585	-36.553231365569551999339995907676739871640209
2	5.347524158	7.2137207896655495665351881854326317873603439
3	-31.30495168	-31.216214025296079480055739552697284731105886
4	-36.65247584	0.18745246854138231794533331234706020446994979
5	-0.4213903663e-1501	

Таблица П2-15

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 11)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.500222139	-0.55934137030669361069914536162342758149587842
2	0.903167368	-14.552059046754233651167597651198653420525059
3	4.807730901	-0.83560482817682689570530964367018517926051214
4	5.482013104	0.82915701769878944165476801030878643011321234
5	0.603633545	0.15715887635528804140305608752075122990236857
6	-5.182328464	0.66487150908377752546499481454558897894666698
7	-3.584940246	4.26558648705514154717356251113523791815711453
8	0.623572192	-0.22508012475342372513071274102187060972586771
9	-0.7583422307e-1498	

Таблица П2-16

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 11)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-29.08601497	-30.150191531390557265432863938120577559406453
2	-19.91848545	-2.4546221101656346319573961078237892202962658
3	-31.07989433	-87.164860698844085350585117494327160801116187
4	-6.278701859	4.6486849387679448398578665635384819376250777
5	-0.9646594392	-2.2223739744334926426972602263542229198737585
6	-213.0675016	4.6140040161769939295222350337240534384413424
7	-205.7784555	-179.12724314065008800574753113644298017980904
8	1.441679607	-0.182625389419450400987361006766891678727537
9	0.3950369158e-1497	

Таблица П2-17

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.528943063	-0.58913111175986353929069999517571067815858906
2	0.4982954195	-2.1076847677728696469116262655149210164034078
3	10.72390843	-0.65699959467669762667477904321992989072205078
4	9.682809314	0.44972561621337068439916263582687749956736774
5	-0.5682464945	-629.20567876100238503616920405130741603165554
6	-1.405217717	1.23968492918343636702853644758789256918033117
7	-2.79942345	-0.96677077874921250183297599146834495698489711
8	0.2511275055	-1.7032314944417819168365134971469427780315483
9	0.5229591298	-1.40061841308980133074893110322927394747854338
10	-58.3396982	-1.69467532137364663810720821266036585908910014
...	...	...
30	-0.03668973212	-9.1138977117705486200404197329743881862135867
31	-42.38176628	-7.58823193263885244751843715399044011664741817
32	-41.59539432	0.060558409911999210221929825488562064501549878
33	0.7480353597e-1480	

Таблица П2-18

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-28.35351722	-29.426974640898708087254224313800420794963243
2	-21.31940207	-2.3438103192931648118713590232228003674972551
3	-18.07741638	113.07233540203975559871482330819040744372959
4	-11.61926018	-0.48631221868622433993010830948540791694874050
5	-5.021063937	-10.469559315270266216428860345356019024788653
6	13.93186158	0.21888623711306946708503133920161423444200963
7	78.23969981	-12.830754227949610861435261841305546706142359
8	62.78662498	-0.6586804857450623164518014263688714381641661
9	-13.33972847	105.430442534776622591335241888081233522827779
10	-0.1532582509	41.964107897047001044055166147161906660276681
...	...	...
30	-98.5966304	-22.8716038316664918090828536256005192339792143
31	8.075148084	171.711879064705183266103361269770031278027063
32	8.846428239	0.079257135930232950825465847148089797484582069
33	-0.6856123078e-1478	

Таблица П2-19

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 1111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.531774715	-0.592070156250715344102766058037778280435810640
2	0.4578541703	-1.88568785646951844790393614399963262323643253
3	11.22278269	-0.651682030639449906676472530409677388687350885
4	8.883378981	0.203579831207924701851178024869599787741558171
5	0.1820245944	0.0020970384653858453029548579132182481767020030
6	13.05907964	0.226010127180895137242967450419524327467072448
7	9.846415842	-2.32637271737892629572160082148516400478209851
8	-0.2280941352	2.08641742889009175336459936338297642414822346

Окончание табл. П2-19

9	1.482587082	-57.0461238747513242663488818470615279150797159
10	3.030407816	0.553606686518987264740050996512719197159374940
...	...	...
30	-0.7407029731	-4.10667262127585818208709088666093166239479047
31	-4.917496865	1.03170881326908694243046779533939040003102571
32	-2.726349526	-0.13702183929409739796618519642328967927561469
33	0.6761627555e-1477	

Таблица П2-20

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 1111)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-28.27950741	-29.353892334851128182817505687017386677292210
2	-21.4365024	-2.3348089785983905317802568031981249143798650
3	-16.73321524	76.938095294671105451324897371115233694908620
4	-9.705678216	-0.31159897534613957925959303348478577065415069
5	-6.046543858	-14.408197383538670977137634323424469555310519
6	31.43602521	0.078105853099324604714988600081269142047109950
7	45.0068276	-73.722943522664057091255308052368675560080428
8	13.6990071	-1.2145826684596376744754388504000376662134095
9	-21.5605258	42.784622757633298972410671535524988980504596
10	-4.628836057	4.0000229929036664197680453759997310720381909
...	...	...
30	-79.79191701	2.5886038107693882863615442563289191067017818
31	-59.86574421	-237.83103242631211228992698719487138473386528
32	-1.901711042	0.22102771328736795393379532752162920883578220
33	0.2456745056e-1476	

Таблица П2-21

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 1111)$** 

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.532057473	-0.59236365859638281806939278292910932907517050
2	0.4538122673	-1.86530780183907722876214659962974519083892022
3	11.27097639	-0.6511989653188788052235362777328178750260123
4	8.828590619	0.18574666792215444680924031788512650280256400
5	0.02115766786	0.15686430401958539984375027047940232495289096
6	1.727281567	0.22900482601306350546318581330301347731060621
7	84.09680232	0.15628697114414674112374714363291922823861027
8	83.81999663	0.18548211367736847949751367493667604079497342
9	-1.697388918	-1.6784560095781404068671567798255637128157881
10	-0.09491276942	0.56091963069949180407352250628435539382043786
...	...	...
158	0.5833428767	1.6803190165313910428446197156872070429475387
159	-6.13994311	7.2116382560212366261341743227125080948339146
160	-5.316980332	0.73833065637568800296230104968149651115145319
161	0.1898320701e-1368	



Таблица П2-22

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 11111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-28.27209891	-29.346576570558950936495867394891722637596197
2	-21.44797264	-2.3339276543390481962207997439645439592579730
3	-16.60167516	74.373633747236603276755057617564994390062113
4	-9.197486924	-0.22167378169924593788608306290295823763014393
5	-0.3902049555	-1.0318955587993792258662960526025332340811418
6	-237.8655114	-0.22502944451427485961880436606450816447933390
7	-307.3134406	-3.9897496451774170697236144254361926105129629
8	-11.23892089	-0.1313802777855832680292936862769462853989453
9	41.42286642	-130.8552237284108125348801283794011046241916
10	-0.4839058758	8.6354937640519838795074591522715332666661971
...	...	...
158	3.021477408	-3.8015220257391221857346033170911713113209276
159	10.25795919	-17.691987458596652123100306573496262190891179804349
160	18.68204331	-0.12152863110193218766912652647632096180532580
161	0.7077783164e-1368	

Таблица П2-23

**Результаты вычисления функции Вейерштрасса  $w(7; 2; 0, 11111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби функции Вейерштрасса
1	-1.532085745	-0.592393004807128670663117763078129963659063146
2	0.4534081009	-1.86328649815295956758894336693361818963640135
3	11.27577812	-0.651151112262279941992432176014801109135945718
4	8.823508354	0.184043857048835324464953186270770923812452145
5	0.002132721421	0.181046094837103137053958838844549201993564231
6	-1.468957675	0.182827077294588223023314472632980532143995741
7	-133.8611724	0.181012701656414177054874082592455224050313891
8	-132.5834475	0.184048121164261861030636514331107212427468135
9	1.294372439	0.204559619851150363063458196294475552789787436
10	-0.8507967532	0.186747017452138861228211065055016470557902400
...	...	...
1598	0.02388127738	-35.5203371063999510909807861694721458716396444
1599	10.11884878	-17.1208225907275033173962975733069168962409254
1600	8.930797406	-0.473035397276173401496682824994806008439602540
1601	0.3473597235e-152	

Таблица П2-24

**Результаты вычисления производной функции Вейерштрасса  $w'(7; 2; 0, 11111)$**

Номер итерации	Значения коэффициентов цепной дроби	Значения подходящих цепной дроби производной функции Вейерштрасса
1	-28.27135798	-29.345844918865717727847634065775236817883262
2	-21.44911725	-2.33383970830906484774401091560277019501089570
3	-16.58855308	74.1246835459702219531477664593788944940485242
4	-9.1438426	-0.21151531413374006404140725078493948370685562
5	-0.03654920661	-0.28700801991509965092186404725441940998389193
6	-246.95517	-0.21181946760197957565035707733910811454777524

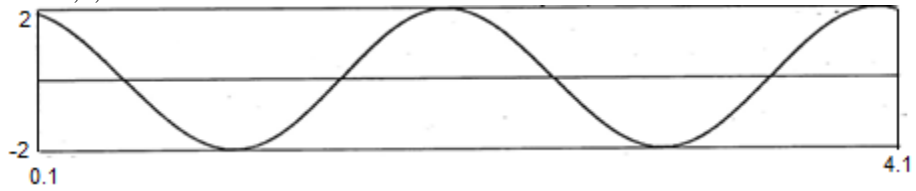
Окончание табл. П2-24

7	-200.0752799	0.10073311539349898196640886079024575295149003
8	-62.00914667	-0.21084510371080439758693704381395736872151760
9	-162.3485543	-0.53013487622452939561972037917262185459224238
10	34.715112	-0.20623704432163551586221356525607553522079809
...	...	...
1598	59.04887493	-32.784163136221684167135932239144293978840013
1599	27.99608541	-431.452331867916326074183377735135564481826443
1600	3.948078088	-0.00546001278250897115363174128059451952437935
1601	0.4888692366e-151	

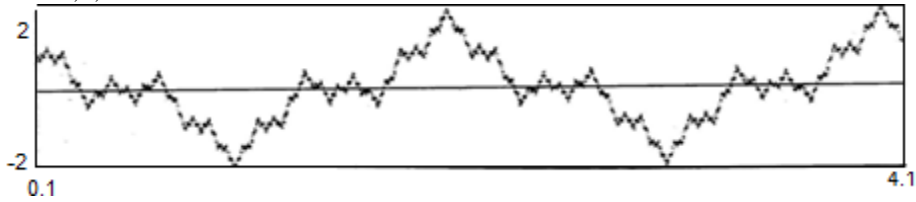
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

На рис. ПЗ-1 и ПЗ-2 представлены графики функции Вейерштрасса (П1-1) в зависимости от параметров “ $a$ ” и “ $b$ ” на интервале  $0.1 \div 4.1$ , то есть на интервале, включающем два периода функции Вейерштрасса.

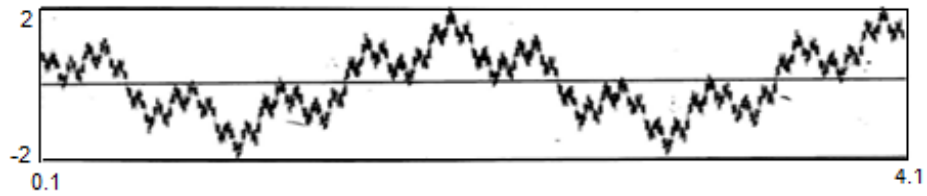
$b = 0,5; a = 1.$



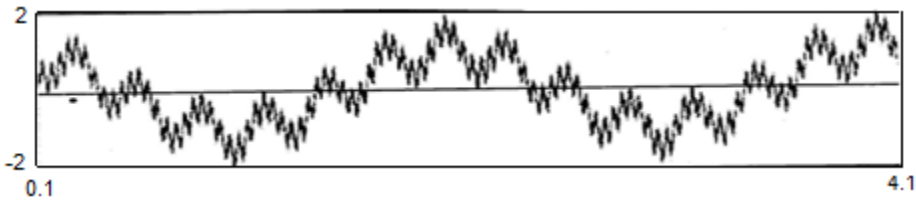
$b = 0,5; a = 3.$



$b = 0,5; a = 5.$



$b = 0,5; a = 7.$



$b = 0,5; a = 9.$

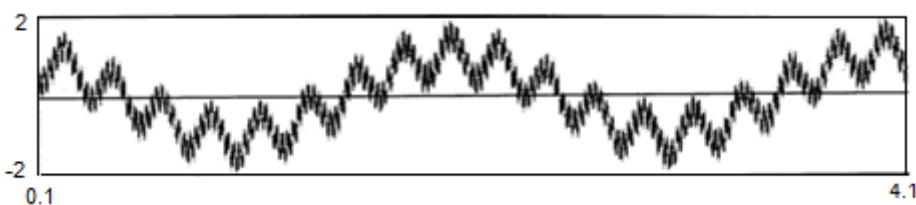


Рис. ПЗ-1. Графики функции Вейерштрасса  $w(0,5; a; x)$  в зависимости от параметра “ $a$ ”.

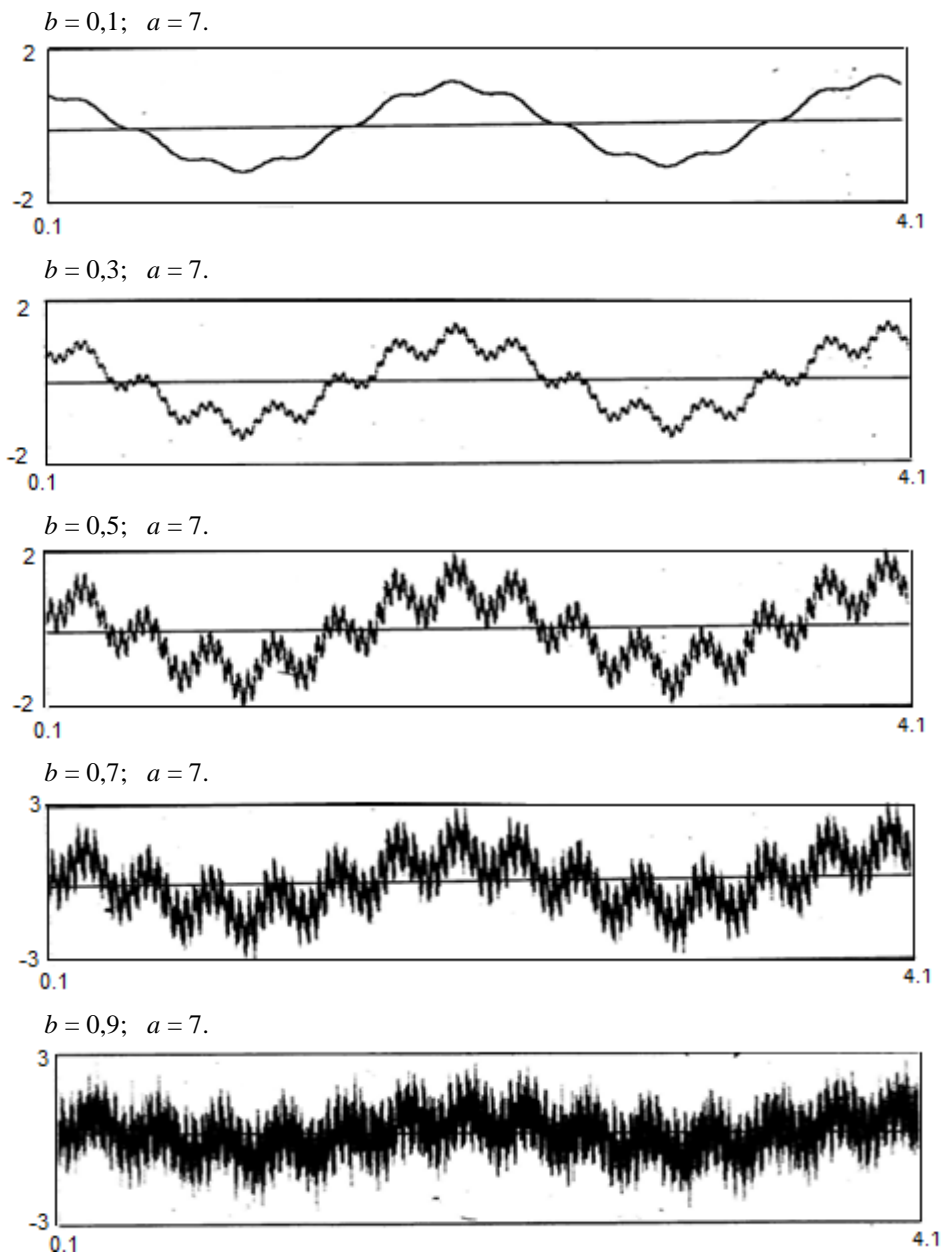


Рис. ПЗ-2. Графики функции Вейеритрасса  $w(7; b; x)$  в зависимости от параметра "b".

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аптекарев А.И., Буслаев В.И., Мартинес-Ф.А., Суетин С.П., Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены, УМН, 66:6(402) (2011), 37–122.
2. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
3. Арнольд В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов, МЦНМО, М., 2007, 120 с.
4. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде.- Пер. с англ.- М.: Мир, 1986.- 502 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.- Т. 1, Т. 2, Т. 3 М.: Наука, 1965-1967.
6. Белоглазов В.В., Бирюк Н.Д., Юргелас В.В. Проблема сходимости бесконечной системы алгебраических уравнений, описывающих вынужденные колебания параметрического контура. // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 175-180.
7. Бескин Н.М. Замечательные дроби. / Минск: “Высшая школа”, 1980. – 125 с.
8. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ.- Киев: Техніка, 1977.- 208 с.
9. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби.- Киев: Наук. думка, 1986.- 176 с.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100с.
12. Гузик В.Ф., Шмойлов В.И., Кириченко Г.А. Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. № 1 (150). С. 158-174.
13. Гузик В.Ф., Ляпунцова Е.В., Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и их применение. – М.: Физматлит, 2015. – 298 с.
14. Данилов В.Л., Иванова А.Н., Хованский А.Н. и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби).- Физматгиз, М., 1961. – 439 с.
15. Демьянов В.Ф. Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990. 431 с.
16. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
17. Ерофеева Л.Н. Фрактальная размерность недифференцированных функций. // Труды Нижегородского государственного технического университета, № 3 (90), 2011, С. 353-357.
18. Ильин В.Н., Кузнецов Ю.И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука. 1985. - 208 с.
19. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Физматлит, 1995. – 233 с.
20. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия в трех томах Под ред. А.П. Юшкевича Т. 3. Математика XVIII столетия.- М.: Наука, 1972.- 495 с.
21. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Гос. изд. Украины, Одесса, 1922

- 521 с.
22. Каганов З.Г. Цепные дроби в электротехнике. - Новосибирск, 1986.
  23. Карташов В.Я., Гугова С.Г. Непрерывные дроби и их приложения к задачам технической кибернетики. – Кемерово: Изд-во КемГУ, 2013. – 138 с
  24. Качмар В.С., Русын Б.П., Шмойлов В.И. Алгоритмы вычисления значений цепных дробей.- Ж. выч. матем. и мат. физики, 1998, Т. 38, № 9, 1436-1451.
  25. Кириченко Г.А., Шмойлов В.И. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые его применения. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015, том 55, № 4, С. 558-573.
  26. Кириченко Г.А., Коровин Я.С., Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей. Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2015. Т.4. № 1. С. 48-56.
  27. Коровин Я.С., Шмойлов В.И., Хисамутдинов М.В. Классификация состояний нефтепромышленного оборудования с использованием методов линейной алгебры. Нефтяное хозяйство, 2014, №9, с. 37-41
  28. Левин В.И. Сриниваза Рамануджан.- Историко-математические исследования, Том XIII, М.: Физматгиз, 1960.
  29. Левин И.И., Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Функция Вейерштрасса и г/ф-характеристики. // Известия ЮФУ. Технические науки, 2014, №1, С. 144-158.
  30. Левин И.И., Селянкин В.В., Шмойлов В.И. Представление функции Вейерштрасса и ее производной цепными дробями. // Известия ЮФУ. Технические науки, 2016, № 4. – С. 60 – 72.
  31. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 534 с.
  32. Медведев Ф.А. О формировании понятия обобщенного предела.-Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1960, 34, 299-322.
  33. Мехелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1962. – 260 с.
  34. Парфёнов И.И. Цепные дроби – ожерелье мехатроники. – М.: КамКнига, 2007. – 120 с.
  35. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ.- Киев, Наукова думка, 1984.- 599 с.
  36. Потапов А.А. Колебания, волны, структуры и системы на примерах глобального фрактально-скейлингового метода // Нелинейный мир, 2014, Т. 12, № 4. С. 3-34.
  37. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.
  38. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654.
  39. Селянкин В.В., Шмойлов В.И. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом суммирования расходящихся рядов. // Известия ЮФУ, Технические науки, 2015, №6, с.82-94.
  40. Скоробогатко В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.- М.: Наука, 1983.- 312 с.
  41. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовича и М. Стиган. Пер. с англ.- М.: Наука, 1979.- 830 с.
  42. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях. – Харьков – Киев: ОНТИ, 1936.-155с.
  43. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. 464 с.
  44. Харди Г. Расходящиеся ряды. // М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. – 504 с.
  45. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400с.
  46. Хинчин А. Я. Цепные дроби.- М.- Л. ОНТИ, 1935.- 104 с.

47. Хисамутдинов М.В., Шмойлов В.И. Предельные  $g/\phi$ -характеристики функции Вейерштрасса. // *Нелинейный мир*, № 3 Т. 13, 2015. С. 39-52.
48. Хлопонин С.С. Приближение функций цепными дробями.- В кн.: *Цепные дроби*.- Ставрополь, 1977, 3-102.
49. Хованский А.Н. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа.- М.: Гостехиздат, 1956.- 203 с.
50. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII столетиях.- 2-е изд.- М.- Л.: ГОНТИ, 1938.- 456 с.
51. Шмойлов В.И. Соответствующие цепные дроби.- Препринт 75-19 Ин-та кибернетики, Киев, 1975.- 37 с.
52. Шмойлов В.И. Определение значений расходящихся цепных дробей и рядов.- Львов: ИППММ НАН Украины, 1997.- 70 с.
53. Шмойлов В.И. Суммирование расходящихся цепных дробей.- Львов: ИППММ НАН Украины, 1997.- 23 с.
54. Шмойлов В.И. Периодические цепные дроби.- Львов: Академический Экспресс, 1998.- 219 с.
55. Шмойлов В.И., Слобода З.И. Расходящиеся непрерывные дроби. // *Нац. академия наук Украины, Институт прикладных проблем механики и математики*. – Львов, 1999. – 820 с.
56. Шмойлов В.И., Чирун Л.В. Непрерывные дроби и комплексные числа. // *Нац. академия наук Украины, Институт прикладных проблем механики и математики*. – Львов, 2001. – 564 с.
57. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и две классические задачи алгебры.- Львов, Меркатор, 2003.- 862 с.
58. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. Библиографический указатель.- Львов: Меркатор, 2003.- 171 с.
59. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями. - Львов: Меркатор, 2003.- 599 с.
60. Шмойлов В.И., Марчук М.В., Тучапский Р.И. Непрерывные дроби и некоторые их применения. – Львов: Меркатор, 2003. – 784 с.
61. Шмойлов В.И., Тучапский Р.И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель.- Львов: Меркатор, 2003.- 83 с.
62. Шмойлов В.И. Ультрапериодические непрерывные дроби. – Львов, Меркатор, 2004. – 338 с.
63. Шмойлов В.И., Марчук М.В. Тучапский Р.И. Суммирование непрерывных дробей по Никпорцу. – Львов: Меркатор, 2004. – 513 с.
64. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 1. Периодические непрерывные дроби. // *Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики*. – Львов, 2004. – 645 с.
65. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 2. Расходящиеся непрерывные дроби. // *Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики*. – Львов, 2004. – 558 с.
66. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Том 3. Из истории непрерывных дробей. // *Нац. акад. наук Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики*. Львов: Меркатор, 2004. – 520 с.
67. Шмойлов В.И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
68. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи  $g/\phi$  - алгоритма.

- Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
69. Шмойлов В.И., Коваленко В.Б. Некоторые применения алгоритма суммирования расходящиеся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН, Том 8, № 4, 2012, С. 3-13.
  70. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и  $r/\varphi$ -алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. – 2012. – 608 с.
  71. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А. Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов. // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 4 (129). С. 210-222.
  72. Шмойлов В.И., Савченко Д.И. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. № 2, – 2013, С. 258-276.
  73. Шмойлов В.И., Хисамутдинов М.В., Кириченко Г.А. Интервальные и предельные  $r/\varphi$ -характеристики функции Вейерштрасса. // Вестник МИФИ, 2014, Т. 3, № 3, с. 301-310.
  74. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А. Непрерывные дроби в вычислительной математике. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 228 с.
  75. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А., Непрерывные дроби. Lap Lambert Academic Publising. – Saarbruken, Germany, 2015. – 336 с.
  76. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Лукьянов В.А. О постоянной Эйлера. // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов, 2016, № 4 (118), С. 142-153.
  77. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Никулин Н.А. Суммирование расходящихся рядов построением соответствующих цепных дробей. // Приволжский научный вестник, № 8 (60) – 2016. – С. 18 – 31.
  78. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Плющенко С.В. О производной функции Вейерштрасса // Приволжский научный вестник. № 1 (53) – 2016. – С. 20-27.
  79. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А., Плющенко С.В. Применение  $r/\varphi$ -алгоритма для определения производной функции Вейерштрасса. // Наука, техника и образование, 2016, № 3 (21), – С. 37-47.
  80. Шмойлов В.И., Селянкин В.В., Кириченко Г.А. Об одном алгоритме представления рациональных чисел конечными цепными дробями. // Приволжский научный вестник, № 7 (59). – 2016. – С. 33-44.
  81. Шмойлов В.И., Войтулевич В.Ю. Непрерывные дроби. Библиографический указатель. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – 351 с.
  82. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. - М.: Физматгиз, 1961, Т. 1 Перев. Е.Л. Пацановского, вступ. статья А. Шпайзера; ред. И.Б. Погребысского.
  83. Юшкевич А.П. История математики в России. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
  84. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М.: Наука, 1968.- 344 с.
  85. Aitken A.C. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. – Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26), 289-305.
  86. Atanassov K.T. Remark on the harmonic series, C. R. Acad. Bulgare Sci., v 40 (1987) n. 5, 25-28; MR 88m:40004.
  87. Baxley J.V. Euler's constant, Taylor's formula, and slowly converging series, Math. Mag. 65 (1992) 302-313; MR 93j:40001.
  88. Baker G.A., Gammel J.L. The Pade approximant in theoretical physics. New York: Academic Press, 1970. – 502 p.
  89. Brent R.P. Computation of the regular continued fraction for Euler's constant, Math. – Сотр. 31 (1977) 771-777; MR 55 #9490.



90. Brent R.P., McMillan E.M. Some new algorithms for high-precision computation of Euler's constant, *Math. Comp.* 34 (1980) 305-312; MR 82g: 10002.
91. Brezinky C. History of continued fraction and Pade approximations. – Springer – Verlag, Berlin, 1991. – 547 p.
92. Bushaw D., Saunders S.C. The third constant, *Northwest Sci.* 59 (1985) 147-158.
93. Cuyt A., Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Springer Science. 2008. – 431pp.
94. Euler L. De tractionibus continuis dissertatio. – *Comm. Acad. Petropol.*, t.9, (1737), 1744, pp. 98-137.
95. Euler L. De tractionibus continuis observationes. – *Comment. Acad. Petropol.* t. 11(1739), 1750 pp. 32-81.
96. Evelyn F. Continued fractions.- University of California, Los Angeles, Calif., 80 p.
97. Finch S.R. Mathematical constants. – *Encyclopedia Math. Appl.*, 94, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. – 618 p.
98. Glaisher J.W.L. On the history of Euler's constant, *Messenger of Math.* 1 (1872) 25-30.
99. Guzik V.F., Shmoylov V.I., Lyapunsova E.V., Kirichenko G.A.. One of the approaches to the analysis of rapidly oscillating functions. // *Transactions on Information and Communication Technologies*, Vol. 58, – 2014, p. 405-413.
100. Hardy D.H. Weierstrass's non differentiable function // *Trans-Amer. Math. Soc.* 17(1916). pp. 301-325.
101. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 2. Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics and Continued Fractions.- New York: Wiley, 1977.- 662 p.
102. Jones W. B., Thron W. I. Continued fractions: Analytic theory and applications. – Addison – Wesley, 1980, vol. 11, 428p.
103. Kenter F.K. A matrix representation for Euler's constant, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999) 452-454.
104. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Applications. London – New-York – Tokyo, 1992. – 606 p.
105. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fraction. Second edition – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantic Press / Word Scientific, 2008. - 308p.
106. Mellin H.I. Resolution de l'equation algebraique generale a l'aide de la fonction gamma. – *C. R. Acad. Sci., Ser. I Math.*, vol. 172, 658-661, 1921.
107. Nunemacher Y. On computing Euler's constant, *Math. Mag.* 65 (1992) 313-322; MR 93j:65042.
108. Pade H. Sur la representation approchée d'une fonction, par des fractions rationnelles.- *Ann. Sci., Ecole Normale Super.* (3) 9(1892), 1-93.
109. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen.- Leipzig und Berlin, Teubner, 1913, 520.
110. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen.- 2 ed, Leipzig und Berlin, 1929, 524 p.
111. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd.1. Elementare Kettenbrüche.- Stuttgart, 3 te Aufl, B. G. Teubner Verlagsges, 1954, vi, 194 pp.
112. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Dritte, verbesserte und erweiterte Aufl. Bd. II. Analytisch-funktionen-theoretische Kettenbrüche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957.- 316 pp.
113. Ramanujan S. A series for Euler's constant, *Messenger of Math.* 46(1917) 73-80.
114. Ramanujan S. Collected papers.- New York, Chelsea, 1962.
115. Rutishauser H. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus.- *Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zurich*, 1957, № 7, 74 p.

116. Shmoylov V.I., Kirichenko G.A. Algorithm for Summation of Divergent Continued Fractions and Some Applications. // Computational Mathematic and Matematical Physics, 2015, vol.55, №4, pp.549-563.
117. Stieltjes T.J. Recherches sur les fractions continues. – Annales de la Faculte des Sciences Toulouse, 1894, 8, p. 1- 122 ; 1895, 9, p. 1-47.
118. Thron W. J., Waadeland H. On a certain transformation of continued fractions.- Lect. Notes Math., 1982, 932, 225-240.
119. Van Vleck E. B. On the convergence of continued fractions with complex elements.- Trans. Amer. Math., Soc. 2(1901), 205-233.
120. Viscovatov V. Essai d'une méthode générale pour réduire toutes sortes de séries en fractions continues.- Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1806, t.15, p. 181-192.
121. Waadeland H. Linear approximations to continued fractions  $K(z_n/1)$ .- J. Comp. Appl. Math.- 1987.- 20.- 403-415.
122. Wall H.S. Analytic Theory of continued fractions.- Bronks., N. Y., Chelsen Publ., 1967, XIII, 433 p.
123. Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 2. Berlin 1895. Abh. 6.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (Niels Hendrik Abel, 1802-1829) 69  
Арндт (Friedrich Peter Arndt, 1817-1866) 59  
Арнольд Владимир Игоревич (1937-2010) 16
- Бейкер** (George A. Baker) (1937-2010) 369  
Бейтмен (Harry Bateman, 1882-1946) 369  
Бэкон (Francis Bacon, 1561-1626) 4  
Бернулли Д. (Daniel Bernoulli, 1700-1782) 7, 67  
Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846) 40  
Бине (Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856) 40  
Благовещенский Юрий Владимирович, 369  
Боднар Дмитрий Ильич (р. 1947) 342  
Боднарчук Пётр Иванович (1935-1989) 339  
Больцано (Bernard Bolzano, 1781-1848) 126  
Бомбелли (Rafael Bombelli, 1526-1572) 19, 35  
Борель (Emile Borel, 1871-1956) 63  
Браудер (Felix E. Browder) 4  
Брезински (Claude Brezinski, b. 1941) 164  
Броункер (William Brouncker, 1620-1684) 26, 46
- Валлис** (John Wallis, 1616-1703) 17, 27, 38  
Ван-дер-Варден (Bartel Van der Waerden, 1903-1996) 126  
Ван Флек (Edward Burr Van Vleck, 1863-1943) 62  
Ватсон (George Nevile Watson, 1886-1965) 374  
Вейерштрасс (Karl Teodor Weierstrass, 1815-1897) 123  
Висковатов Василий Иванович (1780-1812) 148  
Воделанд (Haakon Waadeland) 374  
Воробьёв Николай Николаевич (р. 1925) 63
- Вороной Георгий Феодосьевич (1868-1908) 63  
Ворпицкий (Julius Daniel Worpitzky, 1835-1895) 60
- Гаврилов Николай Иванович** (1927-2004) 337  
Ганкель (Hermann Hankel, 1839-1873) 65  
Гаусс (Carl Fridrich Gauss, 1777-1855) 17  
Гейне (Henrich Edward Heine, 1821-1881) 160  
Гершель (John Frederick William Herschel, 1792-1871) 36  
Гильберт (David Hilbert, 1862-1943) 188  
Глейшер (James Whitbread Lee Glaisher, 1848-1928) 28  
Годунов Сергей Константинович (р. 1929) 12  
Градштейн Израиль Соломонович (1899-1958) 369  
Грегори (J. Gregory, 1638-1675) 29  
Грейвс-Моррис (Peter P. Graves-Morris) 373
- Давыдов Денис Васильевич (1784-1839) 5  
Дарбу (Jean Gaston Darboux, 1842-1917) 126  
Джонс (Willam Jones, 1675-1749) 26  
Джоунс (Willam B. Jones, в 1931) 5, 19
- Евклид** (365-ок. 300 до н. э.) 40
- Зейдель** (Philipp Ludwig Seidel, 1821-1896) 58, 165
- Ильин В.Н.**, 369
- Каган Вениамин Фёдорович** (1869-1953) 369  
Кантор (Geory Cantor, 1845-1918) 126  
Кардано (Girolamo Cardano, 1501-1576) 305  
Карр (Georg Shoobridge Carr, в. 1837) 35  
Каталан (Engene Charles Catalan, 1814-1894) 81  
Катальди (Pietro Autonio Cataldi, 1548-1626) 19

- Качмар Виталий Семенович (р. 1972) 371  
Кнут (Donald Erwin Knuth, в 1938) 370  
Коутс (Roger Cotes, 1682-1716) 20  
Кох (Niels Fabian Helge von Koch, 1870-1924) 59  
Коши (Augustin Cauchy, 1789-1857) 160  
Кравчук Михаил Филиппович (1892-1942) 16  
Краммер (Gabriel Cramer, 1704-1752) 199  
Кронекер (Leopold Kronecker, 1823-1891) 15  
Кудрявцев Лев Дмитриевич (1923-2012) 4  
Кузнецов Ю.И., 369  
Куммер (Ernst Edward Kummer, 1810-1893) 373  
Курант (Richard Courant, 1888-1972) 373  
Кутишев Г.П., 370  
Кымпан (Florica Cimpan) 26  
Лагерр (Edmond Nicolas Laguerre, 1834-1866) 373  
Лагранж (Joseph Louis de Lagrange, 1736-1813) 15  
Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728-1777) 22  
Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827) 54, 67  
Левин Виктор Иосифович, 370  
Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716) 27, 67  
Лейтон (Walter Lighton, b. 1907) 6  
Лежандр (Adrien Marie Legendre, 1752-1833) 17  
Лемер (Derrick Normann Lehmer, 1867-1938) 17  
Линник Юрий Владимирович (1915-1966) 335  
Лобачевский Николай Иванович (1792-1856) 370  
Лонатинский Ярослав Борисович (1906-1981) 355  
Лорентзен (Lisa Lorentzen) 373  
Лудольф (Ceulen Ludolf, 1540-1610) 26  
Люстерник Лазарь Аронович (1899-1981) 369  
Маклорен (С. Maclaurin, 1698-1746) 148  
Марчук Гурий Иванович (1925-2013) 276, 340  
Маскерони (Lorenzo Mascheroni, 1750-1800) 83  
Меллин (H. L. Mellin) 373  
Меркатор (Nicolaus Mercator, 1620-1687) 31, 84  
Милн-Томсон (Lous Melville Milne-Thomson) 53  
Мюир (Thomas Muir, 1848-1934) 42  
Никипорец Аким Захарович (1896-1972) 6, 7, 63, 84  
Никольский Сергей Михайлович (1905-2012) 5  
Ньютон (Isaak Newton, 1642-1727) 33, 83  
Обрешков Никола Димитров (1896-1963) 155  
Паде (Henri Eugène Padé, 1863-1953) 6  
Пелль (John Pell, 1611-1685) 41  
Перрон (Oskar Perron, 1880-1975) 5, 28  
Попов Богдан Александрович (1945-2005) 370  
Прим (Fridrich Prim, 1841-1915) 117  
Прингсхейм (Alfred Pringsheim, 1850-1941) 36, 59  
Просвирина Анна Сергеевна (1907-1979) 82  
Пташник Богдан Иосифович (р. 1937) 342  
Пуассон (Simeon Poisson, 1781-1840) 109  
Пуанкаре (Henri Poincare, 1854-1912) 296  
Пустомельников Иван Павлович (р. 1933) 336  
Рамануджан (Srinivasa Iyengar Ramanujan, 1887-1920) 16, 30  
Риман (Bernhard Riemann, 1826-1866) 67, 120, 126, 322  
Рудио (Ferdinand Rudio, 1856-1929) 28  
Русин Богдан Павлович (р. 1952) 370  
Рутисхаузер (Heinze Rutishauser, 1918-1970) 65  
Рыжик Иосиф Моисеевич, 369  
Рябенский Виктор Соломонович (р. 1923) 12  
Самарский Александр Андреевич (1919-2008) 370  
Серпинский (Waclaw Sierpinski, 1882-1969) 126  
Скоробогатько Виталий Яковлевич (1927-1996) 5, 334  
Скотт (Walter T. Scott, 1913-1984) 373  
Слешинский Иван Владиславович (1854-1931) 60  
Слобода Маркиян Зиновьевич (р. 1981) 371

- Смирнов Владимир Иванович (1887-1974) 4  
Софронов Михаил (1729-1760) 96  
Стилтьес (Thomas Jan Stieltjes, 1856-1894) 61  
Стирлинг (James Stirling, 1692-1770) 163  
Сявавко Марьян Степанович (р. 1939) 342
- Т**  
Тейкроу (D. Theichroew) 55  
Тейлор (Brock Taylor, 1685-1731) 65  
Теплиц (Otto Toeplitz, 1881-1940) 313  
Теслер Геннадий Семенович (1935-2009) 370  
Тиле (Thorvald Nicolai Thiele, 1838-1910) 164  
Трембли (Jean Trembly, 1749-1811) 107  
Трон (Wolfgang Joseph Thron, b. 1918) 5
- У**  
Уолл (Hubert Stanley Wall, 1902-1971) 5, 38
- Ф**  
Фейер (Lipót Fejér, 1880-1959) 109  
Ферма (Pierre Fermat, 1601-1665) 96  
Фибоначчи (Leonardo Fibonacci, 1180-1240) 26, 79  
Фихтенгольц Григорий Михайлович (1888-1959) 4  
Флек (Edward Burr Van Vleck, 1863-1943) 59  
Фурье (Joseph Fourier, 1768-1830) 98  
Фюрстеннау (Eduard Fürstenau, b. 1826) 66
- Х**  
Харди (Godfrey Harold Hardy, 1877-1947) 154  
Хейлерманн (Johann Bernhard Hermann Heilermann, 1820-1899) 61  
Хемминг (Richard Hamming, 1915-1998) 370  
Хенричи (Peter Henrici) 373
- Х**  
Хессенберг (Gerland Wilhelm Hessenberg, 1874-1925) 34, 76  
Хинчин Александр Яковлевич (1894-1959) 17  
Хлопонин Станислав Серафимович (1937-1993) 57  
Хованский Алексей Николаевич (1916-1996) 5
- Ц**  
Цейтен (Hieronymus Georg Zeuthen, 1839-1920) 19
- Ч**  
Чаплыгин Сергей Алексеевич (1861-1942) 334  
Чеботарев Николай Григорьевич (1894-1947) 220  
Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894) 64  
Чезаро (Ernesto Cesaro, 1859-1906) 151
- Ш**  
Шварц (G. Schwarz, 1849-1921) 76  
Шмойлов Владимир Ильич (р. 1940) 342  
Штерн (Maritz Abraham Stern, 1807-1894) 48, 58  
Штольц (Otto Stolz, 1842-1905) 59
- Э**  
Эйлер (Leonard Euler, 1707-1783) 4, 17, 19  
Эйткен (Alexander Craig Aitken, 1895-1967) 274  
Эмде (E. Emde) 299  
Эрдейи (Artur Erdelyi, 1908-1977) 355
- Я**  
Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851) 192  
Янке (E. Janke) 372  
Ямпольский А.Р., 369

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм  $r/\varphi$ , 6
  - Евклида, 40
  - Милн-Томсона, 52
  - Рутисхаузера, 65
- Алгоритмы вычисления цепных дробей, 49
  - адаптивный, 55
  - континуант, 54
  - матричный алгоритм, 52
  - прямой рекуррентный алгоритм, 51
  - обратный рекуррентный алгоритм, 49
  - Тейкроу, 55
  - $\Delta$ -алгоритм, 56
  - $\psi/\varphi$ -алгоритм, 56
- Алгоритмы определения нулей полиномов, 299
  - – – – Бернулли, 300
  - – – – Эйткена, 300
  - – – –  $r/\varphi$ -алгоритм, 301
  - – – – Рутисхаузера, 302
- Алгоритмы построения соответствующих цепных дробей, 61
  - Висковатова, 61
  - Рутисхаузера, 65
  - Никипорца, 63
  - Хейлерманна-Стилтьеса, 61
- Аппроксимация Паде, 5
  
- Бернулли задача, 47
  - тождество, 47
- Бесконечное произведение, 27
  - Валлиса, 27
  - цепная дробь, 28
- Биссектриса фигуры, 338
- Вейерштрасса функция, 126
  - обобщенная, 153
  - производная, 153
- Граф непрерывной дроби, 34
  - ветвящейся, 35
  - восходящей, 35
  - обыкновенной, 34
  - Хессенберга, 35
- Граф QD-алгоритма, 66
- Графики подходящих дробей, 11
  
- Диагональные аппроксимации, 5
  
- Дробно-линейные преобразования, 38
- Детерминантная формула, 42
- Диофантовы уравнения, 41
  
- Единица гиперболическая, 8
  - параболическая, 8
  - эллиптическая, 8
  
- Запись цепной дроби, 35
  - – – Гершеля, 35
  - – – Прингсхейма, 35
- Звено цепной дроби, 37
- Знак  $\varphi$ -характеристики, 111
- Значение цепной дроби, 38
  
- Квадратические иррациональности, 20
  - цепная дробь, 20
- Континуанта, 54
  
- Лейбница ряд, 67, 325
  - цепная дробь, 67, 325
- Логарифмическая функция, 46
  - цепная дробь, 46
- Лудольфово число, 26
  - цепная дробь, 26
  
- Матрица Гильберта, 197
- Матричная форма записи, 52
- Меркатора ряд, 31
  - цепная дробь, 31
- Метод прогонки, 201
  - модифицированный, 201
  - простых итераций, 166
  - цепных дробей, 165, 223
  
- Наилучшие приближения, 41
- Неопределенные уравнения, 40
- Неперово число, 20
  - цепные дроби,
- Неполные гамма-функции, 30
  - – – цепные дроби, 30
- Неполные частные, 37
- Непрерывные дроби, 17
  - ветвящиеся, 33
  - восходящие, 33

- – интегральные, 62
- – Никипорца, 300
- – обобщенные, 32
- – Скоробогатько, 33
- – Хессенберга, 14, 75
  
- Обратные тригонометрические функции, 323**
  - – – цепные дроби, 329
- Определители, 32**
  - Ганкеля, 62
  - Никипорца, 301
  - Скоробогатько, 33
  - Теплица, 300
  - Хессенберга, 34
  - Якоби, 33
- Определители бесконечного порядка, 32**
- Остаток цепной дроби, 36**
- Осцилляция значений подходящих, 10**
- Отношение ортогональных полиномов, 8**
  - золотой пропорции, 26
- Отрезок цепной дроби, 36**
  
- Периодические цепные дроби, 41**
  - – – обыкновенные, 41
  - – – смешанные, 41
  - – – Хессенберга, 77
- Подходящие дроби, 5, 302**
- Показательная функция, 21**
  - – цепная дробь, 21
- Полиномы ортогональные, 8**
  - Чебышева, 8
  - – цепная дробь, 8
- Постоянная Эйлера-Маскерони, 83**
- Правильная  $S$ -дробь, 61**
- Предел Никипорца, 8**
- Предел функции, 160**
  - – по Гейне, 160
  - – по Коши, 161
  - – по  $r/\varphi$ -алгоритму, 161
- Преобразования цепных дробей, 44**
  - Бернулли, 46
  - Глейшера, 48
  - Штерна, 48
  - Эйлера, 45
- Производящая функция, 299**
  
- Равноценные ряды, 45**
- Разностные схемы, 264**
  - – сходящиеся, 265
  - – расходящиеся, 266
- Рамануджана формула, 16**
  - – комплексная, 16
- Растяжение цепных дробей, 48**
  
- Расходимость цепных дробей, 57**
  - – – несущественная, 58
  - – – существенная, 58
- Расходящиеся ряды, 67**
- Рекуррентные формулы, 37, 299**
  - – Валлиса, 37
- Решения СЛАУ периодические, 278**
- Ряд гармонический, 85**
  - – цепная дробь, 85
- Грегори, 329
- Лейбница, 27
- Меркатора, 31
- Тейлора, 5
- тригонометрический, 92
- – цепная дробь, 93
- Фурье, 95
- – цепная дробь, 95
- Эйлера, 16
- – цепная дробь, 16
  
- Свойство вилки, 43**
- Системы бесконечные, 13**
- Сжатие цепных дробей, 48**
- Скобки Гаусса, 36**
- Соответствующие непрерывные дроби, 61**
  - – ряды, 76
- СЛАУ с комплексными решениями, 198, 256**
  - бесконечные, 223
  - расходящиеся, 233
  - с периодическими решениями, 278
- Степенная функция, 20**
  - – цепная дробь, 20
- Суммы Фейера, 109**
- Суммирование по Никипорцу, 6**
- Суммирование рядов, 15**
  - – по Висковатову, 61
  - – по Никипорцу, 8
- Схема QD-алгоритма, 65**
- Сходимость непрерывных дробей, 5, 45, 57**
  - – – условная сходимость, 58
  - – – безусловная сходимость, 58
  - – – в классическом смысле, 57
  - – – в узком смысле, 58
  - – – в широком смысле, 58
  - – – несущественная расходимость, 58
  - – – по Зейделю, 45
  - – – по Никипорцу 6, 333
  - – – с положительными элементами, 43
  - – – существенная расходимость, 58
  
- Теорема Бореля, 39**
  - Лагранжа, 20

- Штольца, 48
- Эйлера, 20
- Теоремы о сходимости цепных дробей, 57
  - Ван Флека, 60
  - Ворпицкого, 60
  - Зейделя, 58
  - Коха, 59
  - Прингсхейма, 59
  - Слешинского, 60
  - Уолла, 59
  - Штерна, 58
- Тождество Бернулли, 46
  - Глейшера, 28
  - Штерна, 48
  - Эйлера, 45
- Трёхдиагональный определитель, 33
- Тригонометрические функции, 329
  - цепные дроби, 329
- Фибоначчи** числа, 26
- Формула Кардано, 200
  - Валлиса, 38
  - Крамера, 272
  - Лапласа, 67
  - Никипорца, 8
  - Пуассона, 109
  - Рамануджана, 16
  - Хейлсманна-Стилтьеса, 61
  - Эйлера, 7
  - Эйткена, 290
  - Вейерштрасса, 126, 344
    - цепная дробь, 148
- Функция Никипорца, 322
  - цепная дробь, 323
- Функция Прима, 30
- Функция Римана, 67, 321
  - цепная дробь, 67
- Функции  $N_i^{(n)}$ , 301
- Характеристики функции Вейерштрасса, 130
- Цепные дроби**, 35
  - арифметические, 20
  - бесконечные, 17
  - Броункера, 26
  - Гаусса, 30
  - Глейшера, 28
  - Евклида, 20
  - знакоположительные, 43
  - инверсные, 37
  - Кatalьди, 19
  - конечные, 37
  - Коутса, 20
  - Лагерра, 30
  - Лагранжа, 22
  - Ламберта, 22
  - Лапласа, 16
  - Никипорца, 8, 88
  - общего вида, 32
  - обыкновенные, 32
  - периодические, 41
  - Перрона, 28
  - правильные, 20, 39
  - предельно-периодические, 84
  - присоединённые, 62
  - простейшие, 20
  - равноценные, 25, 45
  - растянутые, 22
  - Рамануджана, 15
  - регулярные, 20
  - сжатые, 22
  - соответствующие, 61
  - Стилтьеса, 62
  - Тиле, 64
  - Трона, 63
  - ультрапериодические, 9, 232
  - Фибоначчи, 26, 79
  - функциональные, 21
  - Чебышева, 62
  - Эйлера, 27
  - Эйлера-Ламберта, 19
  - эквивалентные, 25, 44
- С-дробь, 61
- J-дробь, 62
- G-дробь, 62
- P-дробь, 62
- S-дробь, 63
- T-дробь, 5
- Частный знаменатель дроби**, 37
  - числитель непрерывной дроби, 37
- Частных и разностей алгоритм, 65
- Числа Бернулли, 23, 67
  - Каталана, 81
  - Лудольфа, 26
  - Фибоначчи, 81
  - Эйлера, 71
- Эйткена формулы, 290
- Эквивалентные преобразования, 45
- Экспоненциальная функция, 21
  - цепная дробь, 21
- Ядро Пуассона**, 109







## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	19
ГЛАВА 1. НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ.....	32
<p>Обобщённые непрерывные дроби (32). Цепные дроби (35). Цепные дроби и дробно-линейные преобразования (38). Правильные цепные дроби и некоторые их применения (39). Некоторые формулы теории цепных дробей (41). Эквивалентные преобразования цепных дробей (44). Равноценные цепные дроби (45). Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей (48). Алгоритмы вычисления значений непрерывных дробей (49). Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей (57).</p>	
ГЛАВА 2. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ .....	61
<p>Алгоритмы построения соответствующих цепных дробей (61). Формулы Хейлгерманна-Стилтьеса (61). Метод Никипорца (63). Рекуррентный алгоритм Рутисхаузера (65). Суммирование расходящихся рядов, связанных с дзета-функцией Римана (67). Об одном алгоритме представления рациональных чисел конечными цепными дробями (78). О постоянной Эйлера (83). Разложение тригонометрических рядов в цепные дроби (92). Ускорения сходимости рядов Фурье построением соответствующих цепных дробей (97).</p>	
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ.....	126
<p>Функция Вейерштрасса (126). Интервальные и предельные <math>r/\varphi</math>-характеристики функции Вейерштрасса (130). Алгоритм определения значения <math>\varphi</math>-характеристики (143). Представление <math>r/\varphi</math>-характеристики функции Вейерштрасса (144). Определение функции Вейерштрасса цепными дробями (148). Определение производной функции Вейерштрасса цепными дробями (149). Нахождение предела функции через непрерывные дроби. (160).</p>	
ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	164
<p>Решение СЛАУ методом суммирования расходящихся рядов (165). Решение систем алгебраических уравнений СЛАУ различных классов (171). Решение СЛАУ с симметричной матрицей (178). Решение СЛАУ различной размерности (183). Итерационный алгоритм решения СЛАУ (193). Решение комплексных СЛАУ (198). Решение комплексных СЛАУ “методом цепных дробей” (218).</p>	
ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	223
<p>Метод цепных дробей (223). Об одном подходе к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (237). Решение БСЛАУ класса <math>A_c</math> (234).</p>	

Решение БСЛАУ класса  $Ba$  (245). Решение БСЛАУ класса  $Bc$  (249). Решение БСЛАУ класса  $Ca$  (257). Решение БСЛАУ класса  $Cc$  (272). О некоторых особенностях решения СЛАУ методом цепных дробей (267). Построение сходящихся разностных схем при помощи  $r/\varphi$ -алгоритма (282). БСЛАУ с периодическими решениями (278). Решение БСЛАУ классов  $Ab$ ,  $Bb$  и  $Cb$  (287). Функции Пуанкаре и Крамера (294).

ГЛАВА 6. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ.....	299
Формулы Эйткина (298). Представление нулей полинома непрерывными дробями Никпорца (301). Примеры решения алгебраических уравнений (304).	
ГЛАВА 7. ДЗЕТА-ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА .....	321
Дзета-функции Римана (321). Дзета-функции Никпорца (322). О цепных дробях, имеющих различные пределы чётных и нечётных подходящих (335).	
ГЛАВА 8. ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ.....	334
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	344
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	357
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	367
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	369
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	375
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	378

Научное издание

**Шмойлов Владимир Ильич**  
**Коровин Яков Сергеевич**

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ  
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ**

Ростов–на–Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – 383 с.

Монография

Работа печатается в авторской редакции

Подписано в печать 20.04.2017 Заказ №  
Формат 70x100 1/16. Усл. печ. л. 29,60.  
Уч.-изд л. 18,55. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Секторе обеспечения полиграфической продукции  
кампуса в г. Таганроге отдела полиграфической, корпоративной  
и сувенирной продукции ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.  
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1. Тел. (8634) 37-17-17.