ЮЖНЫЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.И.Шмойлов

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ r/φ– АЛГОРИТМА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет»
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ НИСТИТУТ в г. Таганроге

В.И.Шмойлов

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ r/φ– АЛГОРИТМА

Таганрог 2011

УДК 517.524+519.615.4

Шмойлов В.И., Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ – алгоритма**. –** Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. **-** 330с.

В книге рассматривается способ суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей. Этот способ применим не только к классическим цепным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга или Никипорца, что позволило предложить новый эффективный алгоритм определения всех нулей полиномов.

Приводятся формулы, то есть аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональные элементы которых являются коэффициенты алгебраических уравнений. Изучаются ультрапериодические непрерывные дроби, значения подходящих которых периодически повторяются. Приводятся некоторые сведения из истории непрерывных дробей и алгебраических уравнений.

Илл. 82. Табл. 174. Библиогр.: с. 262-329 (1618 назв.)

Рецензенты:

докт. техн. наук, проф. П.П. Кравченко

докт. техн. наук, проф. В.Ф. Гузик

ОГЛАВЛЕНИЕ

“Фурье прав, говоря что математика необходима человеку для решения практических задач и познания законов природы. Но не мог же такой мыслитель, как Фурье не знать, что математика прежде всего предназначена для возвеличивания человека.”

К.Г. Якоби

ПРЕДИСЛОВИЕ

Новая математическая идея имеет шансы достаточно быстро получить признание, если эта идея способна помочь решить важную проблему, длительное время не поддававшуюся усилиям ученых, перепробовавших в своих попытках разобраться с неподатливой задачей весьма изощренные приемы из чрезвычайно обширного математического арсенала. Громких примеров тому немало, но мы не станем их приводить, дабы не быть ненароком ложно истолкованными.

Способ суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, или r/φ-алгоритм, детально описанный в публикациях [520,536], возник из экспериментального изучения расходящихся непрерывных дробей. Поначалу могло показаться, что найденные приемы, устанавливающие значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, если кого могут живо заинтересовать и даже всерьёз обеспокоить, так это немногочисленных специалистов, занимающихся аналитической теорией непрерывных дробей, основным содержанием которой как раз и являются вопросы сходимости. Открытие в некотором смысле парадоксального метода суммирования расходящихся непрерывных дробей круто меняло ситуацию в аналитической теории непрерывных дробей, что само по себе немало, приняв во внимание почти трёхвековую историю развития этой теории, если отсчёт вести от первых работ Эйлера, хотя отдельные аспекты в поведении подходящих дробей, например, свойство “вилки”, отмечались ещё Катальди в начале семнадцатого столетия. Предложенный r/φ-алгоритм колонками беспристрастных цифр сотен таблиц устанавливал сходимость тех непрерывных дробей, расходимость которых, казалось бы, раз и навсегда была строго доказана. Выяснилось, что способ суммирования, названный нами “суммированием по Никипорцу”, применим не только к обыкновенным непрерывным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга. Это уже указывало на некоторую универсальность найденного метода суммирования и открывало путь к построению новых вычислительных схем в других разделах математики. В частности, r/φ-алгоритм дал возможность предложить практически удобный способ определения всех нулей полинома. Но главное, этот алгоритм позволил рассматривать полученные нами ранее выражения для нулей полиномов через непрерывные дроби Хессенберга и Никипорца [514], как аналитические формулы для определения корней многочлена через его коэффициенты, тем самым неожиданно нашлось решение классической задачи, занимавшей математиков длительное время. И это обнадеживало.

Разработанный способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [551]. Поясним простейшим примером. Как известно, удобный метод решения разностной краевой задачи, представляющий один из вариантов исключения неизвестных и носящий название “прогонки”, фактически эквивалентен записи решения обыкновенной непрерывной дробью. То есть, для бесконечной системы линейных алгебраических уравнений решения могут представляться как сходящимися непрерывными дробями, так и расходящимися. Что принимать в случае расходящихся непрерывных дробей за решения СЛАУ? Значения “расходящихся” непрерывных дробей, или как сказал бы известный в 30-е годы прошлого века прокурор, – “их истинное обличие”, устанавливается суммированием по Никипорцу.

Можно, пожалуй, высказать предположение: сколь-нибудь общих подходв к созданию теории решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) не было найдено именно потому, что до последнего времени расходящиеся непрерывные дроби в каком-либо позитивном смысле не рассматривались вовсе, то есть расходящиеся непрерывные дроби не изучались. И это в отличие от расходящихся рядов, имеющих чрезвычайно развитую теорию и стародавние традиции их исследований. Капитальная монография Н.Харди “Divergent series” (“Расходящиеся ряды”) в русском переводе появилась еще в 1951 году [465]. Построение теории БСЛАУ на основе приемов суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей могло бы также способствовать признанию и развитию нового способа суммирования.

Непрерывные дроби в большинстве случаев дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, нежели классические степенные ряды. Непрерывные дроби, зачастую, могут быть с большим эффектом использованы для ускорения сходимости рядов. Более того, преобразуя расходящиеся ряды в соответствующие непрерывные дроби, нередко можно просуммировать, то есть найти значения, расходящихся рядов.

Бесконечной *непрерывной дробью*, или *цепной дробью*, называют выражение вида

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{\vdots}{\ +\cfrac{a_n}{b_n+\vdots}}}}\ , \tag{1}$$

где a_i, и $b_i, i=1,2,\dots$ - в общем случае независимые переменные.

Аналогично ситуации с рядами, само по себе выражение (1) никакого определенного смысла не имеет, ибо действие сложения подразумевает операции лишь с конечным числом слагаемых. Смысл выражения (1) должен устанавливаться. Непрерывную дробь (1) естественно определять через понятие *подходящей дроби*, которое является аналогом частичных сумм для рядов.

Непрерывная дробь, содержащая n звеньев, т.е. дробь

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}$$

называется n-й подходящей дробью бесконечной непрерывной дроби (1).

Первая, вторая, третья и т.д. подходящие дроби

$$\frac{P_1}{Q_1} = b_0,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{+ b_2},$$

....

составляют бесконечную последовательность.

Непрерывная дробь (1) называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha. \tag{2}$$

Предел (2) называется значением непрерывной дроби [142].

Сходимость, устанавливаемую этим определением, будем называть *сходимостью по Зейделю.*

Непрерывная дробь (1) называется расходящейся, если последовательность ее подходящих дробей предела (2) не имеет.

Такие непрерывные дроби, для которых не выполняется условие (2), будем называть *расходящимися по Зейделю цепными дробями.*

Нахождение значения непрерывной дроби (1), как установление предела значений последовательности ее подходящих дробей, представляется совершенно естественным и практически удобным. Здесь уместно повторить, что в отличие от положения с рядами, когда помимо классического определения суммы ряда, как предела частичных сумм, имеется большое число других алгоритмов суммирования, использующихся прежде всего при оперировании с расходящимися рядами, для непрерывных дробей таких алгоритмов обобщенного суммирования, которые бы привлекались для нахождения значений расходящихся непрерывных дробей, не существует. Расходящиеся непрерывные дроби до сих пор не стали объектом математических исследований, как это случилось с расходящимися рядами, пристальным изучением которых аналитики занимаются давно. И повинны в этом, по-видимому, сами непрерывные дроби, которые в отличие от рядов́, имеют большие области сходимости и доставляют меньше неудобств при их использовании. Во многих практически важных приложениях непрерывные дроби сходятся на всей плоскости комплексного переменного, исключая, может быть, так называемые вырезы по осям, с которыми приходится мириться, как с неизбежным злом.

Несмотря на казалось бы естественность общепринятого определения сходимости непрерывных дробей, не следует забывать, что это определение взято по соглашению, из практической целесообразности, и ни в коей мере не может претендовать на единственность.

В [518] предложено иное, нежели традиционное, толкование сходимости непрерывных дробей. Для установления значений непрерывных дробей используется r/φ - алгоритм:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, *если существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} | P_i / Q_i |} = r_0, \tag{3}$$

$$\pi \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \tag{4}$$

где P_i/Q_i – значения i-й подходящей дроби из совокупности, включающей n подходящих дробей,
k – число отрицательных подходящих дробей из n подходящих дробей.

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет, при определенных условиях, за последовательностью вещественных подходящих дробей усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из «поведения» подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, то есть его модуль r_0 и аргумент φ_0 могут быть определены, в частности, так называемым r/φ - алгоритмом, то есть формулами (3) и (4).

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 или π. Если φ_0 = 0, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0:

$$z = r_0 e^{i0} = r_0 .$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0 .$$

Предложенный r/φ - алгоритм даёт возможность устанавливать значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей, а также решать множество других задач из различных разделов вычислительной математики.

Рассмотрим теорему о сходимости периодической непрерывной дроби

$$1+\frac{a}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{a}{1}\,\frac{}{+\ldots+}\,\frac{a}{1}\,\frac{}{+\ldots} . \tag{5}$$

Теорема утверждает [417], что непрерывная дробь (5) сходится на всей плоскости комплексного переменного с разрезом по действительной оси от $-\infty$ до $-\frac{1}{4}-c$, где c – сколь угодно малое положительное число. Действительно, можно показать, что значения подходящих дробей разложения (5) при $a<-1/4$ определяются формулой [520]:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sqrt{a}\cdot\frac{sin[(n+1)arctg\sqrt{4a-1}]}{sin(narctg\sqrt{4a-1})} . \tag{6}$$

Как видно из соотношения (6), значения P_n/Q_n при $n\to\infty$ не стремятся ни к какому пределу, осциллируют и, следовательно, непрерывная дробь (5) при $a<-1/4$ расходится. Надо только не забывать уточнять в формулировке теоремы: непрерывная дробь (5) при $a<-1/4$ расходится в смысле Зейделя, то есть когда сходимость непрерывной дроби определяется, как существование предела значений подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$, $n\to\infty$. Эта теорема приводится в монографиях без такого уточнения, что делает ее попросту ошибочной, ибо непрерывная дробь (5) сходится при любых значениях переменной a. Если $a<-1/4$, то значением непрерывной дроби (5) является комплексная величина

$$x=\sqrt{a}e^{iarctg\sqrt{4a-1}},$$

которая устанавливается с любой точностью по значениям подходящих дробей разложения (5) при помощи r/φ-алгоритма.

Например, непрерывная дробь

$$1-\frac{4}{1}-\frac{4}{1}-\ldots-\frac{4}{1}-\ldots \tag{7}$$

расходится в классическом смысле, что очевидно, если запишем выражение, определяющее значения подходящих дробей разложения (7):

$$\frac{P_n}{Q_n}=2\cdot\frac{sin[(n+1)arctg\sqrt{15}]}{sin(narctg\sqrt{15})}. \tag{8}$$

И тем не менее, непрерывная дробь (7) является сходящейся, так как при использовании r/φ – алгоритма, то есть формул (3) и (4), с любой точностью устанавливаются модуль и аргумент комплексного числа $2e^{i\cdot arctg\sqrt{15}}$, которое представляется расходящейся по Зейделю непрерывной дробью (7) и которое является значением этой непрерывной дроби.

В табл. 1 приведены результаты суммирования “расходящейся” непрерывной дроби (7) при помощи r/φ-алгоритма.

Нахождение значения цепной дроби

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}=2e^{iarctg\sqrt{15}}=1-\frac{4}{1}-\frac{4}{1}-\ldots-\frac{4}{1}-\ldots.$$

$r_0=2.0,\quad \varphi_0=1.318116071652\ldots$. Таблица 1

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
2	-3.0000000000	1.732050807568	0.267949192431	m	1.570796326794	0.252680255142	m
4	-0.7142857142	1.495348781221	0.504651218778		1.570796326794	0.252680255142	
8	1.4369747899	1.901623404084	0.098376595915		1.178097245096	0.140018826556	
16	-1.0326336812	1.893923277888	0.106076722111		1.374446785945	0.056330714292	m
32	0.9570674702	1.954777493792	0.045222506207		1.276272015520	0.041844056131	
64	-3.3737052603	1.992211007792	0.007788992207		1.325359400733	0.007243329080	m
128	-0.9528199343	1.985483211714	0.014516788285		1.325359400733	0.007243329080	
256	1.0641835576	1.995010880870	0.004989119129		1.313087554430	0.005028517222	
512	-2.5412946875	1.998634135542	0.001365864457		1.319223477581	0.001107405928	m
1024	-0.4041335913	1.996749737389	0.003250262610		1.319223477581	0.001107405928	
2048	2.1217417851	1.999829743244	0.000170256755		1.317689496793	0.000426574859	
4096	0.1547065652	1.998758806916	0.001241193083		1.317689496793	0.000426574859	
8192	5.7575173443	2.000006649905	0.000006649905	m	1.318072991990	0.000043079662	
16384	2.7721264678	1.999990952659	0.000009047340		1.318072991990	0.000043079662	
32768	0.8108450840	1.999946089818	0.000053910181		1.318072991990	0.000043079662	
65536	-5.3765210082	1.999995713264	0.000004286735	m	1.318120928890	0.000004857237	m
131072	-2.1191941726	1.999993440699	0.000006559300		1.318120928890	0.000004857237	
262144	-0.0937280531	1.999976553821	0.000023446178		1.318120928890	0.000004857237	
524288	3.3611474401	1.999999895090	0.000000104909		1.318114936777	0.000001134874	
1048576	1.2752422354	1.999999061459	0.000000938540		1.318114936777	0.000001134874	
2097152	-1.5309777594	1.999999422170	0.000000577829		1.318116434806	0.000000363153	
4194304	0.4077117759	1.999999256397	0.000000743602		1.318115685791	0.000000385860	
8388608	20.7706409258	2.000000005109	0.000000005109	m	1.318116060298	0.000000011353	m

На рис. 1 показаны значения подходящих дробей непрерывной дроби (7).

Рис. 1. Значения подходящих дробей непрерывной дроби (7).

В предисловии к монографии У.Джоунса и В.Трона "Непрерывные дроби" [142] известный американский специалист П.Хенричи особо выделяет два вопроса теории непрерывных дробей, которые интересны для современной вычислительной математики. Один вопрос касается связи между непрерывными дробями и асимптотическими рядами. Другой вопрос, на который обращает внимание П.Хенричи, связан с представлением непрерывными дробями различных функций. Непрерывные дроби получили достаточно широкое распространение в вычислениях во многом потому, что они часто дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, чем классические аппроксимации степенными рядами. И далее П.Хенричи добавляет с неподдельной грустью: "Превосходные сами по себе эти результаты в настоящее время выглядят скорее отдельными жемчужинами, чем конкретными проявлениями скрывающейся за ними общей теории. Конечно, было бы весьма желательно увидеть хотя бы начало такой теории".

В 1954 г. вышла небольшая книжка "Михаил Софронов – русский математик середины XVIII века" [419], написанная академиком В.И.Смирновым и историком математики Е.С.Кулябко, в которой повествовалось о судьбе одного из первых русских математиков. Среди четырех опубликованных в книге работ Михаила Софронова одна имеет название: "Рассуждение о применении непрерывных дробей для нахождения квадратных и биквадратных корней и т.д."

В.И.Смирнов и Е.С.Кулябко пишут в связи с этой работой: "М.Софронов не занимается доказательством сходимости соответствующих подходящих дробей к истинному значению корня. С этим связано парадоксальное представление мнимой величины в виде вещественной непрерывной дроби в последнем параграфе рассматриваемой работы."

Приведем этот небольшой параграф из работы М.Софронова.

"Применим сказанное об иррациональных и рациональных числах к мнимым величинам. Предположим, что нам дана мнимая величина $\sqrt{-a}$, которую нужно превратить в непрерывную дробь. На основании доказанного выше, будет либо

$$\sqrt{-a}=b+\sqrt{-a}-\sqrt{bb}=b-\frac{a-bb}{b+\sqrt{-a}}=$$

$$=b+\cfrac{-a-bb}{2b+\cfrac{-a-bb}{2b+\cfrac{-a-bb}{2b+\cfrac{-a-bb}{2b}}}} \quad \text{и т.д.,} \tag{9}$$

либо

$$\sqrt{-a} = -b + \sqrt{-a} + \sqrt{bb} = -b + \frac{-a-bb}{-b+\sqrt{-a}} =$$

$$= -b + \cfrac{-a-bb}{-2b + \cfrac{-a-bb}{-2b + \cfrac{-a-bb}{-2b + \cfrac{-a-bb}{-2b}}}} \quad \text{и т.д.,} \tag{10}$$

или – в частном примере – будет равно:

$$1 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{2}}}}} \ \text{и т.д.} = 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1}}}}} \ \text{и т.д. до бесконечности.}$$

Этого я в настоящее время не исследую. Этот параграф находится в противоречии с мнением славнейшего Г.Кюна, который доказывает в III томе наших “Комментариев”, что мнимые величины реальны и поддаются точному определению. Но об этом, как и о прочем, я буду говорить позже, когда получу одобрительное суждение благосклонных судей.”

Благосклонные судьи с одобрительным суждением не торопились. В 1759 г. Софронова исключают из адъюнктов Академии наук, и как свидетельствуют архивные материалы Академии − “он умер в большой бедности, замерзнув от сильной стужи 10 февраля 1760 г. на дороге вблизи проезжего дома на Выборгской стороне”. Тридцати лет от роду, − добавим к архивной справке.

Нелишне отметить, что комментировать работу М.Софронова по непрерывным дробям авторы книги привлекли Ю.В.Линника − одного из крупнейших специалистов в теории чисел, в ту пору члена-корреспондента Академии наук. Такое обращение “на сторону” было не случайно. Можно утверждать, что непрерывные дроби не заняли достойного места в математическом образовании. Этот феномен сложно объяснить с рациональных позиций. Но факт остается фактом. Если, к примеру, в фундаментальном трехтомном “Курсе дифференциального и интегрального исчисления” Г.М.Фихтенгольца рядам в общей сложности отводился едва ли не целый том, то непрерывным дробям - “ни полслова”, если вспомнить знаменитые строчки Дениса Давыдова, в которых тот сокрушался, правда, по совсем иному поводу. Были проигнорированы цепные дроби и в монументальном пятитомном “Курсе высшей математики” самого В.И. Смирнова. Не упоминались они и в более поздних курсах математического анализа Л.Д. Кудрявцева и С.М. Никольского, равно как и в бесчисленном множестве других “Курсов”.

Если изучать численные методы по университетским и вузовским учебникам, а также обращаться к специальной литературе по вычислительной математике, то окончив курс наук, вполне можно остаться на всю жизнь в твердом убеждении, что никаких цепных или непрерывных дробей в природе не существует. В предметном указателе к книге Г.И.Марчука “Методы вычислительной математики” [321] на букву “Ц” имеется единственная строка:

“Ценность субстанции 359”.

Здесь вспоминается, что результаты непреходящей ценности в изучении субстанций были получены средневековыми учеными.

Между тем, непрерывные дроби − математический аппарат неизмеримо более мощный, чем ряды. Об уникальных возможностях рациональных функций, к которым приводит свертка цепных дробей, пишет Р.Хемминг в монографии "Численные методы"[467]. О непрерывных дробях заговорили, когда западные физики-теоретики с удивлением обнаружили, что таблицы Паде, то есть дробно-рациональные аппроксимации, могут с большим эффектом применяться при решении насущных задач, причем тех, для решения которых прекрасно знакомый аппарат рядов оказывался совершенно бесполезным.

Вернемся, однако к работе М.Сафронова. Ю.В.Линник довольно сложным приемом доказывает расходимость непрерывной дроби (10) при $a > 0$, и добавляет в скобках: (что ясно и из того, что она – непрерывная дробь (10) – не может быть мнимым числом).

И все же, как следует понимать слова М.Софронова, завершающие небольшой параграф его работы, в котором приведены непрерывные дроби, представляющие мнимые числа? Очевидно, М.Софронов понимал необычность ситуации. С одной стороны, в разложениях 9 и 10 имеем мнимые числа, которые усилиями не только славнейшего Г.Кюна, но и гениального Эйлера и других математиков первой половины XVIII века, прочно обосновались в математическом анализе, а с другой – непрерывные дроби из звеньев, включающих лишь действительные числа. Естественно, подходящие дроби разложения 9 и 10 могут составлять только действительную последовательность. Как такая последовательность действительных чисел может в том или ином смысле представлять мнимое число $\sqrt{-a}$ Софронову, возможно, еще не вполне было ясно. Но не вызывает сомнения, что странные непрерывные дроби 9 и 10 не очень смущали молодого математика. Он собирался на сей счет высказаться.

С аналогичной ситуацией мы столкнулись два века спустя.

В 1948г. таганрогский математик Аким Захарович Никипорец (1896 – 1972) записал предел, имеющий, казалось бы, лишь формальный характер [544]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}=e^{i\varphi}\,. \tag{11}$$

В самом деле, из формулы Эйлера

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

можно записать дроби:

$$e^{i\varphi}=2\cos\varphi-\frac{1}{e^{i\varphi}}\,,$$

$$e^{i\varphi}=2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{e^{i\varphi}}}\,,$$

$$e^{i\varphi}=2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{e^{i\varphi}}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{i\varphi}=2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{}{\ddots-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{e^{i\varphi}}}}}}\,. \tag{12}$$

Подходящие дроби непрерывной дроби (12) определяются следующим образом:

$$\frac{P_1}{Q_1}=2\cos\varphi=\frac{\sin 2\varphi}{\sin n\varphi},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=2\cos\varphi-\frac{1}{2\cos\varphi}=\frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi}}=\frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi}$$

…………………………………………

$$\frac{P_n}{Q_n}=2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{1}{2\cos\varphi-\cfrac{}{\cdots-\cfrac{1}{2\cos\varphi}}}}}=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}, \qquad (13)$$

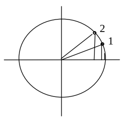
При $n\to\infty$ можно прийти к непрерывной дроби

$$e^{i\varphi}\overset{*}{=}2\cos\varphi-\frac{1}{2\cos\varphi-}\,\frac{1}{2\cos\varphi-}\ldots-\frac{1}{2\cos\varphi-}\ldots \qquad (14)$$

В выражении (14) над знаком равенства стоит «звездочка», которая означает, что это равенство ни есть равенство в традиционном понимании. Смысл «равенства» (14) будет разъяснен ниже, после чего к «звездочке» прибегать не будем, чтобы не загромождать записи комплексных чисел непрерывными дробями с вещественными элементами.

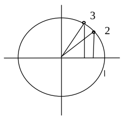
Формула (11) долгое время не поддавалась рациональному объяснению. Парадоксальность выражения (11) очевидна. Как разгадать этот ребус? Мало - помалу пришло понимание, что используя непрерывную дробь (14) мы можем восстановить комплексное число $e^{i\varphi}$, которое "представлено" этой непрерывной дробью. Изобразим графически несколько значений первых подходящих дробей непрерывной дроби (14). Используя выражение (13) для подходящих дробей разложения (14), можем записать

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{sin2\varphi}{sin\varphi},$$



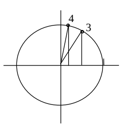
$$\frac{P_1}{Q_1}>0,$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{sin3\varphi}{sin2\varphi},$$



$$\frac{P_2}{Q_2}>0,$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{sin4\varphi}{sin3\varphi},$$

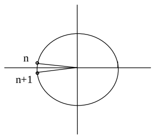


$$\frac{P_3}{Q_3}>0,$$

- -

Очевидно, с ростом номера n угол $(n+1)\varphi$ станет больше угла π :

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{sin(n+1)\varphi}{sin\,n\varphi},$$



$$\frac{P_n}{Q_n}<0\,.$$

Этот момент может быть зафиксирован, так как подходящая дробь P_n/Q_n примет отрицательное значение. Следовательно, перемещение радиуса – вектора от угла φ до угла $(n+1)\,\varphi$, несколько превышающего значение π, дает возможность, пусть и приближенно, определить аргумент комплексного числа $e^{i\varphi}$, представленного цепной дробью (14).

Продолжая наблюдение за значениями подходящих дробей (13), запишем формулу, по которой можно приближенно определить аргумент φ_0 комплексного числа $e^{i\varphi_0}$:

$$\varphi_0=\frac{\pi k_n+\varphi^*}{n}\,, \tag{15}$$

где k_n – количество подходящих дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа n подходящих дробей разложения (14),

φ^* – некоторый угол, причем, $\varphi^* < \varphi_0$.

Если $n\to\infty$, то формула (15) примет вид

$$\varphi_0=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}\,.$$

Рассмотренная выше процедура позволяет установить однако не значение аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$, а модуль этого аргумента, то есть

$$\pi\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=|\varphi_0|\,. \tag{16}$$

Знак аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$ определяется из динамики распределения значений подходящих дробей (14) на “периоде”.

Эти правила определения знака установлены после калибровки на тестовых цепных дробях, имеющих комплексные значения [521].

На рис. 2 и 2а показано распределение значений подходящих дробей P_n/Q_n разложений (17) и (18) в зависимости от номера n.

$$2cos\,0.2-\frac{1}{2cos\,0.2-}\,\frac{1}{2cos\,0.2-}\ldots\frac{1}{-\,2cos\,0.2}=\frac{sin(n+1)0.2}{sin\,n0.2}\,, \tag{17}$$

$$\frac{1}{2cos\,0.2-}\,\frac{1}{2cos\,0.2-}\ldots\frac{1}{-\,2cos\,0.2}=\frac{sin\,n0.2}{sin(n+1)0.2}\,. \tag{18}$$

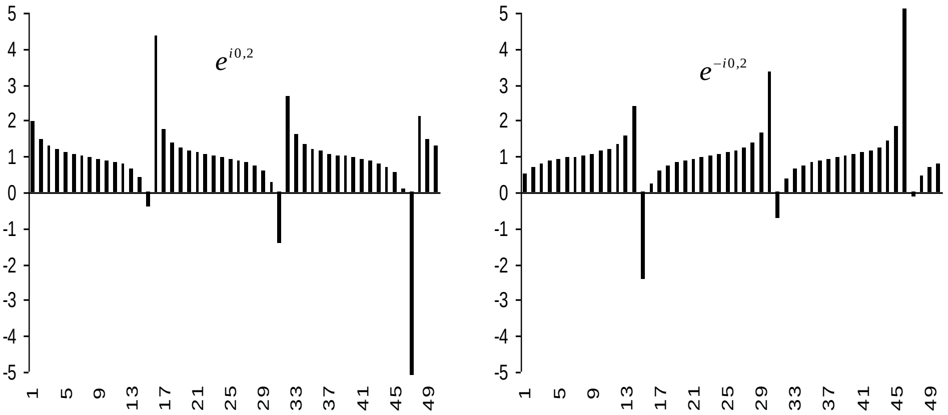


Рис.2. Распределение значений подходящих цепных дробей (17) и (18).

Из цепной дроби (14), представляющей комплексное число $e^{i\varphi}$, можно получить, помимо аргумента, модуль этого комплексного числа, равный единице. Именно, опираясь на предел Никипорца (11), была предпринята попытка обосновать новый подход к суммированию расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей.

В [520] приведены некоторые другие алгоритмы, позволяющие находить значения расходящихся непрерывных дробей. Поэтому сформулируем более общий подход к сходимости непрерывных дробей [521]:

Непрерывная дробь с произвольным графом является сходящейся, если существует алгоритм, позволяющий по последовательности подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$, $n \to \infty$, определить с любой точностью значение исходной непрерывной дроби, которое, т. е. значение, собственно, и представляется этой непрерывной дробью.

Легко заметить, что в идейном плане такой подход к сходимости непрерывных дробей, в [521] названый сходимостью по Никипорцу, весьма близок к подходу Эйлера при суммировании расходящихся рядов. В “Дифференциальном исчислении” Эйлер пишет: *“Мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд”.*

Мы исходили из того, что бесконечная последовательность подходящих дробей разложения несет информацию о значении непрерывной дроби. В случаях, когда непрерывная дробь сходится в классическом смысле, эта информация о значении непрерывной дроби считывается непосредственно, – ответ содержится в самих подходящих дробях. В так называемых расходящихся непрерывных дробях информация о значении непрерывной дроби зашифрована и необходимо использовать некоторый алгоритм, то есть иметь ключ к коду, чтобы прочесть это закодированное сообщение о значении непрерывной дроби. При суммировании по Никипорцу для установления значений непрерывных дробей используется упоминавшийся выше r/φ - алгоритм.

Сходимость по Никипорцу эффективно используется также при нахождении значений расходящихся рядов. В литературе по непрерывным дробям давно отмечено, что медленно сходящиеся и даже расходящиеся ряды могут быть просуммированы преобразованием этих рядов в непрерывные дроби. Именно это свойство непрерывных дробей было использовано при построении эффективного итерационного метода решения систем линейных алгебраических уравнений, который был описан в недавно вышедшей книге [550]. Известный историк математики Клод Брезински отмечал [694]: “Самое трудное − это, видимо, убедить людей, занимающихся итерационными методами, использовать процесс ускорения сходимости”.

Суммирование рядов через расходящиеся в классическом смысле соответствующие цепные дроби названо *суммированием рядов по Никипорцу* [519].

В качестве примера запишем значение расходящегося ряда, связанного с интегральной показательной функцией, которое установлено через соответствующую цепную дробь при помощи r/φ -алгоритма:

$$1+1!+2!+3!+4!+5!+\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{1-\cfrac{2}{1-\cfrac{3}{1-\cfrac{3}{1-\ldots}}}}}}}=1{,}349725\ldots e^{i1{,}028001\ldots}=\frac{1}{e}Ei(1).$$

Здесь следует отметить, что непрерывные дроби тесно связаны с аппроксимациями Паде, которые, как утверждается в [32], стали главным вычислительным средством в задачах статистической механики и физики твердого тела. Поэтому существенные результаты, полученные в теории непрерывных дробей, в частности, в вопросах сходимости, могут быть использованы в аппроксимациях Паде.

Выше уже отмечалось, что r/φ- алгоритм применим не только к классическим непрерывным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга.

Несколько слов о непрерывных дробях Хессенберга. *Непрерывными дробями Хессенберга* были названы непрерывные дроби, задаваемые отношением определителей матриц Хессенберга, для которых характерна одна поддиагональ элементов [520]. Дроби Хессенберга – своеобразные непрерывные дроби, звенья которых распространяются не только “вниз”, но и “вверх”. Кроме того, числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям n-го порядка. Непрерывные дроби Хессенберга следует рассматривать как обобщение обыкновенных цепных дробей, для числителей и знаменателей подходящих дробей которых имеют место рекуррентные соотношения второго порядка, – рекуррентные формулы Валлиса. Непрерывные дроби Хессенберга впервые описаны немецким математиком Фюрстенау в 1874 г. [871].

В [514] было показано, что периодической непрерывной дробью Хессенберга естественным образом представляется корень алгебраического уравнения n-*й* степени. Под периодической непрерывной дробью Хессенберга будем понимать отношение определителей матриц Хессенберга, когда каждая i-я диагональ матрицы содержит один и тот же элемент α_i. Структура матрицы Хессенберга при этом становится аналогичной структуре матрицы Теплица, в которой на диагоналях, параллельных главной, располагаются одинаковые элементы.

Важно подчеркнуть, что периодические непрерывные дроби Хессенберга всегда сходятся к вещественному или комплексному корню соответствующего алгебраического уравнения. Если корни комплексные, то непрерывные дроби Хессенберга, естественно, расходятся в классическом смысле, но суммируются при помощи r/φ- алгоритма.

Таким образом, не может быть расходящихся периодических непрерывных дробей. “Этого не может быть потому, что этого не может быть никогда”, – как сообщал в письме к ученому соседу герой первого чеховского рассказа.

Итак, старший по модулю корень алгебраического уравнения степени n

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \tag{19}$$

может быть представлен непрерывной дробью Хессенберга:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots & -\alpha_n & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & \ldots \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}. \tag{20}$$

Выражение (20) восходит к известному алгоритму Д. Бернулли для отыскания старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения.

Опираясь на формулы Эйткена, появившиеся в работе 1926г. [577], была построена конструкция [514], определяющая *i-й* корень уравнения (19):

$$x_i = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \ldots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \ldots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \ldots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \ldots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \ldots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \ldots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \ldots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \ldots \\ -a_{n-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \ldots \\ . & . & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \ldots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \ldots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix}}. \tag{21}$$

Формула (21) – аналитическое выражение, позволяющее представить корни алгебраического уравнения через коэффициенты этого уравнения. Если использовать r/φ -алгоритм, то можно находить, как действительные, так и комплексные корни алгебраического уравнения степени n. Как подметил Джеймс Максвелл, “четыре правила арифметики можно рассматривать как полное снаряжение математика”.

Конструкция (21) была названа *функцией Никипорца* или *непрерывной дробью Никипорца* [520]. Для вычисления подходящих дробей непрерывной дроби Никипорца используется рекуррентный алгоритм Рутисхаузера, известный как QD-алгоритм, или алгоритм частных и разностей, опубликованный в 1954 г. [398]. Таким образом, формула (21) вкупе с r/φ - алгоритмом, полностью решают старинную проблему аналитической записи всех корней уравнений *n-й* степени по коэффициентам уравнения.

То обстоятельство, что в формулу (21) входят определители бесконечно высокого порядка не должно вызывать дополнительных вопросов, ибо вычисление корня квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ также связано с бесконечной вычислительной процедурой, которую можно представить в виде отношения трёхдигональных определителей:

$$x_1 = -p + -\frac{q}{p-}\,\frac{q}{p-}\dots-\frac{q}{p-}\dots = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{\begin{vmatrix} -p & -q & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -p & -q & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -p & -q & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -p & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -p & -q & 0 & \dots \\ -1 & -p & -q & \dots \\ 0 & -1 & -p & \dots \\ . & \dots & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (22)$$

Даже беглого взгляда на формулы (20), (21) и (22) достаточно, чтобы заключить, что никаких особенностей в формулах, определяющих корни уравнений 2-*й*, 3-*й* и 4-*й* степеней – уравнений, решаемых в радикалах, и формулах для корней уравнений 5-*й* и более высоких степеней, нет. Проблему решения алгебраических уравнений именно в радикалах можно считать в каком-то смысле искусственной. Но эта проблема привела к созданию глубоких математических теорий, прежде всего – теории функций комплексного переменного и теории групп.

Применение r/φ - алгоритма к непрерывным дробям Никипорца, то есть к конструкции (21), содержащей только действительные коэффициенты алгебраического уравнения *n–й* степени , позволяет “извлечь” из этих конструкций комплексные корни этого уравнения, если они, конечно, имеются. Это – парадоксальный результат, не вписывающийся в классический подход к представлению комплексных чисел в “явном виде” - через выражения, содержащие $\sqrt{-1}$. Использование же r/φ - алгоритма позволяет установить комплексность из “поведения” подходящих дробей. В то же время, само появление комплексных корней из конструкций (21) никакой сенсации не несет, комплексные корни алгебраических уравнений известны, по крайней мере, со времен Кардано. Иное дело, обнаружение при помощи r/φ - алгоритма комплексных корней в бесконечных системах, содержащих действительные коэффициенты [525].

Итак, в случае алгебраических уравнений комплексные корни “извлекаются” из бесконечных конструкций (21), то есть с использованием подходящих непрерывных дробей Никипорца, которыми представляется *i - й* корень полинома. Для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений аналогом конструкции (21) являются формулы Крамера, записываемые соотношением двух бесконечных определителей, то есть комплексные корни бесконечных СЛАУ “извлекаются” из бесконечно “расширяющихся” формул Крамера. Дело в том, что для определения *i - го* комплексного корня бесконечных СЛАУ при помощи r/φ - алгоритма нужно получить множество значений этого корня из серии СЛАУ различной размерности. Если матрица СЛАУ имеет действительные элементы, то значения x_i, получаемые из “расширяющихся” формул Крамера, будут, естественно, также действительными. По этим действительным “отсчетам” или, в иной терминологии, по значениям подходящих дробей, при помощи r/φ - алгоритма устанавливаются “истинные” комплексные значения неизвестных x_i бесконечных СЛАУ, если они имеются.

Исследование бесконечных систем линейных алгебраических уравнений методами суммирования расходящихся непрерывных дробей представляется перспективным занятием. Идея использования r/φ − алгоритма при решении СЛАУ бесконечно высокого порядка вполне естественна, так как формулы Крамера представляются отношениями определителей. Но именно отношениями определителей записываются непрерывные дроби различных классов.

В [499] были предложены «обобщенные» непрерывные дроби:

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ . & . & \cdots & . & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ . & \cdots & . & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ . & \cdots & . & \cdots \end{vmatrix}}. \tag{23}$$

Представление непрерывной дроби отношением определителей квадратных матриц общего вида (23) имеет то основание, что все известные классы непрерывных дробей есть частные случаи непрерывной дроби (23). Например, обыкновенные непрерывные дроби, или цепные дроби, могут быть записаны отношением трёхдиагональных определителей:

$$a_{11} + \cfrac{a_{12}}{a_{22} + \cfrac{a_{23}}{a_{33} + \cfrac{a_{34}}{a_{44} + \cfrac{a_{45}}{a_{55} + \ldots}}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}.$$

Ветвящиеся непрерывные дроби [499], или непрерывные дроби Скоробогатько, представляются отношением определителей характерной ступенчатой структуры:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots} + \cfrac{a_4}{b_4 + \ldots}} + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_5}{b_5 + \ldots} + \cfrac{a_6}{b_6 + \ldots}} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \ldots \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}$$

Выше отмечалось, что способ суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей или r/φ-алгоритм возник из экспериментального изучения расходящихся непрерывных дробей. В книге много таблиц, может быть, более, чем обычно случается в книгах математического содержания. Возможно, это вызовет некоторую аллергию при чтении. Включение в текст большого количества экспериментального материала было сделано сознательно, ибо математические таблицы рассматриваются как математические факты. Джон-Карло Рота, редактор американской Математической энциклопедии, утверждает: “Математика состоит главным образом из фактов”.

Как правило, непрерывные дроби неожиданны и изящны, и их можно долго рассматривать как завораживающий своими гранями кристалл. Хотелось бы надеяться, что и читателю созерцание их доставит удовольствие. Например, обозрение таких цепных дробей

$$e = 2+\frac{1}{1+}\,\frac{\frac{1}{2}}{1+}\,\frac{\frac{1}{3}}{1+}\,\frac{\frac{1}{4}}{1+}\,\frac{\frac{1}{5}}{1+}\,\frac{\frac{1}{6}}{1+}\,\frac{\frac{1}{7}}{1+\ldots}, \tag{24}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+}\,\frac{1}{\frac{1}{3}+}\,\frac{1}{\frac{1}{4}+}\,\frac{1}{\frac{1}{5}+}\,\frac{1}{\frac{1}{6}+}\,\frac{1}{\frac{1}{7}+\ldots}. \tag{25}$$

Глядя на цепные дроби (24) и (25), невольно вспоминаются известные слова Леопольда Кронекера: “Целые числа сотворил Господь Бог, а все прочее – дело людских рук”.

Около ста лет известна уникальная по красоте формула Рамануджана [516]:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+\ldots}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Можно предложить, пожалуй, более неожиданную формулу:

$$1-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots-\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-\ldots}=-i\sqrt{\frac{\pi}{2e}},$$

которая, тем не менее, верна, как показано в [519].

Математические факты могут быть зафиксированы не только в виде теорем и отдельных формул, но и в столбцах чисел. От фактов не так просто отмахнуться, факты – упрямая вещь. Сознавая, что в трактовках таблиц возможны искренние заблуждения, мы стремились избегать измышлений гипотез, оставляя большей частью колонки цифр без комментариев. Колонки чисел часто красноречивее слов, и уж во всяком случае – достоверней.

Математические таблицы следует рассматривать как экспериментальные данные. Великий физик, лауреат Нобелевской премии П.Л. Капица, выступая в 1962 году на Общем собрании Академии наук, сказал слова, которые не грех и процитировать [196]: “В заключение я хотел бы, чтобы значение и роль хорошего эксперимента запомнилась бы вам в словах шутливого афоризма, принадлежащего героине американского фильма “Джентльмены предпочитают блондинок”: “Любовь – это хорошая вещь, но золотой браслет остается навсегда”. Я думаю, что мы, ученые, можем сказать: теория – это хорошая вещь, но правильный эксперимент остается навсегда”.

Нечто аналогичное отмечал В.И. Арнольд в своём предисловии к книге американских математиков Р. Грехема, Д. Кнута и О. Паташника “Конкретная математика”: “Примеры учат не меньше, чем правила.”

Несколько слов об изложении. Мы старательно избегали громоздких формул. И не потому, что нас сколько-нибудь затрудняло сооружение конструкций с многоэтажными индексами. Избегали, так сказать, по медицинским показаниям: громоздкие формулы мало того, что, как правило, совершенно бесполезны, они к тому же способны вызвать у читателя стойкую депрессию.

Теперь о некоторых производственных секретах, ибо путь к воплощению даже самой неплохой идеи пролегает через унылую, а порой и вздорную практику. При суммировании по Никипорцу необходимо иметь эффективные алгоритмы для построения так называемых соответствующих непрерывных дробей и для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. Использование для счета классического рекуррентного алгоритма (FR-алгоритма) приводит к быстрому переполнению разрядной сетки компьютера, а применение естественной процедуры вычисления непрерывной дроби “снизу-вверх” (BR-алгоритм) невозможно из-за недопустимо больших временных затрат при определении серий подходящих дробей. В [521] были детально рассмотрены алгоритмы для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. Там же изложены различные методы построения соответствующих непрерывных дробей.

В последнее время численный эксперимент все чаще рассматривается как новая технология научного поиска в разных областях знания, в том числе такой абстрактной, как математика. Становится очевидно: закономерности, лежащие на поверхности или на относительно небольшой глубине, в основном уже обнаружены и описаны. Разумеется, это не касается пустопорожних теорем – все их зафиксировать на бумаге никогда и никому не удастся.

О содержании книги. Во введении приводятся некоторые сведения из истории алгебраических уравнений. Обращается внимание на недавно вышедшие монографии, - книгу Г.П. Кутищева «Решение алгебраических уравнений произвольной степени» [279] и книгу И.Ф. Корчагина «Алгебраические уравнения» [237]. В первой главе рассматриваются применения r/φ-алгоритма при решении разнообразных задач вычислительной математики и, прежде всего, при суммировании расходящихся непрерывных дробей и рядов. Особенно перспективным представляется использование r/φ-алгоритма для решения бесконечных систем алгебраических уравнений и изучения так называемых расходящихся разностных схем. В остальных главах книги исследуются различные аспекты применения r/φ-алгоритма для нахождения корней алгебраических уравнений. Рассмотрено большое число «классов» алгебраических уравнений, определяемых характером коэффициентов уравнений. Привлечение немалого количества экспериментального материала сделано преднамеренно, ибо именно факты служат наиболее надежной основой «при измышлении гипотез».

Джордж Бейкер и Питер Грейвс-Моррис заключили предисловие к своей книге “Аппроксимации Паде” [32], можно сказать, расчувствованно: “И последнее, – вся книга пронизана безграничной верой в силу метода аппроксимаций Паде”. Столь же проникновенные признания можно было бы обратить и в адрес многоуважаемых непрерывных дробей, явивших миру свои воистину фантастические возможности. Но, похоже, непрерывные дроби в наших с вами признаниях не нуждаются.

Автор выражает искреннюю признательность доктору технических наук Илье Израилевичу Левину и заведующему отделом Южного научного центра Российской академии наук Евгению Андреевичу Семерникову за полезные обсуждения полученных результатов.

г. Таганрог,
11 июля 2011 г. В. И. Шмойлов

ВВЕДЕНИЕ

Предисловие к своей книге “Теория ветвящихся цепных дробей и их применение в вычислительной математике” В.Я. Скоробогатько [417] начал словами: “Уже более 2000 лет математики занимаются изучением цепных дробей. Понятно, что такой огромный интервал времени может выдержать только теория, имеющая фундаментальное значение”. Здесь можно внести некоторые формальные уточнения.

Как отмечают У. Джоунс и В. Трон [142]: “Хотя греки знали об алгоритме Евклида, нет сведений о том, что они использовали его для получения непрерывных дробей. Первым известным применением непрерывной дроби является приближённое выражение для $\sqrt{13}$, данное Р. Бомбелли в 1572 г.”

Что касается алгебраических уравнений, то в предложении 14 книги II “Начал” Евклида сформулирована задача решения простейшего квадратного уравнения $x^2 = ab$, то есть извлечения квадратного корня: “Построить квадрат, равный данной прямоугольной фигуре”.

Во введении приводятся некоторые сведения, из истории алгебраических уравнений. В “Послесловии” к своей книге “В мире уравнений” [344] В.А. Никифоровский отмечает: “Самое интересное в этой истории состоит в том, что рассматриваемая проблема для практических нужд разрешена давно: разработаны методы приближённого решения уравнений, позволяющие находить корни их с любой заданной точностью. Но приближённые методы на уравнения с буквенными коэффициентами не распространяются”. Далее В.А. Никифоровский пишет: “Более двух тысяч лет всю математику составляли алгебраические уравнения и геометрия, проблемы их питали математику, стимулировали её развитие. Многие математики, включая Эйлера, Лагранжа, Абеля, Галуа, некоторое время считали, что уравнения выше четвёртой степени могут быть решены в радикалах; нужно лишь приложить усилия, чтобы получить необходимые формулы ”.

Три столетия напряжённых поисков понадобились на то, чтобы убедиться: решения в радикалах для уравнений выше четвёртой степени не существуют. На протяжении девятнадцатого века предпринимались многочисленные попытки решения алгебраических уравнений при помощи высших трансцендентных функций. В 1884 г. Ф. Клейн в “Лекциях об икосаэдре и о решении уравнений пятой степени” [284] писал: “Что касается уравнения пятой степени, то, к сожалению, в учебниках обыкновенно ограничиваются констатированием того отрицательного результата, что такое уравнение невозможно решить с помощью радикалов, присоединяя к тому ещё туманное указание на то, что решение становится возможным посредством эллиптических функций”.

В книге будет показано, что все корни алгебраического уравнения n-й степени аналитически могут быть выражены через функции Никипорца. Следует, однако, добавить: “ Вкупе с r/φ– алгоритмом.”

1. Можно считать, что история алгебраических уравнений прослеживается от папируса Ринда. Этот папирус египтологи относят к XVIII в. до н.э. Ринд – английский египтолог, который в 1858г. приобрел свиток длиной 5,25 м. и шириной 0,33 м. и способствовал введению этого источника в научный оборот. Как оказалось, папирус имел математическое содержание, в нем излагались 84 задачи.

Текст папируса Ринда был расшифрован и издан вместе с немецким переводом и комментариями египтологом А.Эйзенлором в 1877г. В папирусе Ринда особое место занимают задачи на "аха", решаемые теперь с помощью линейных уравнений с одним неизвестным. Начало решения обозначается словами: "Делай, как делается". После проверки говорится: "Видишь, ты сделал правильно". Опираясь в изложении нового метода суммирования в большей степени на таблицы, мы, таким образом, исповедуем принципы составителей папируса.

Если от цивилизации Древнего Египта дошли, по существу, всего два математических текста – папирус Ринда и Московский папирус, то свидетельств о состоянии математики в Вавилоне значительно больше. Среди задач клинописных вавилонских математических текстов достаточно много алгебраических, приводящих к системам линейных уравнений и уравнениям второй степени. Вавилоняне решали также задачи, приводящие к кубическим уравнениям. В трехтомной "Истории математики", вышедшей под редакцией А.П.Юшкевича [558], говорится, что влияние традиций, восходящих к вавилонской алгебре, можно усмотреть в творчестве Герона, Диофанта, а впоследствии, ал-Хорезми и других математиков стран ислама, основавших алгебраическую школу.

Отсутствие удобной символики, было, по-видимому, одной из причин, почему в древности более широко развивалась геометрия, а не алгебра. По легенде у входа в Академию Платона было начертано: "Пусть не входит сюда, не знающий геометрию".

Пифагорейцы ставили во главу угла число. "Все есть число", - известный девиз пифагорейцев. Основное достижение пифагорейцев в математике состояло в открытии иррациональных величин. Грекам удалось установить, что стороны квадратов, имеющих площади, выражавшихся числами 3, 5, 6, 7, ... , несоизмеримы со стороной единичного квадрата. Так появились иррациональные числа вида $\sqrt{n}$, где n не является точным квадратом. Открытие несоизмеримых отрезков и иррациональных чисел привело математику к понятию бесконечности.

В истории математики открытие несоизмеримых в Древней Греции сравнивается с созданием неевклидовой геометрии в XIX веке и теории относительности в XX веке. По легенде открыл несоизмеримые величины в V в. до н.э. Гиппадий из Метапонта, которого пифагорейцы за то, что он внес новшество, противоречившее основам их учения о сводимости явлений природы к целым числам и отношениям целых чисел, выбросили за борт корабля.

Характерную оценку открытия несоизмеримых дал Платон в диалоге "Законы". Афинянин, ведущий диалог, говорит: "Друг мой, Клиний, я и сам был поражен, что лишь так поздно узнал то состояние, в котором мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, а скорее каким-то свиньям. Я устыдился не только за себя, но и за всех эллинов". Эти слова более выразительны, чем то удивление, которое проявил известный Журден Мольера, когда осознал, что говорит прозой.

Открытие пифагорейцами несоизмеримых отрезков и иррациональностей потрясло математику того времени. Греки не смогли преодолеть возникших в связи с этим трудностей на пути расширения понятия числа и обратились к геометрии. Они стали строить всю математику в геометрической форме, что вызвало интенсивное развитие геометрии.

На пути преодоления трудностей возникших в связи с появлением иррациональных, пифагорейцы стали разрабатывать геометрическую алгебру, применявшуюся при доказательстве различных алгебраических соотношений и при решении квадратных уравнений. В Древней Греции ни о каком решении квадратных уравнений в привычном нам смысле не могло быть и речи: в те времена математическая символика отсутствовала, все уравнения записывались словесно. Квадратные уравнения греки решали геометрически, построением.

Отсутствие математической символики – одна из причин, почему цепные дроби не появились в Греции, хотя алгоритм Евклида, непосредственно приводящий к цепным дробям, был известен со времен Евдокса (IV в. до н.э.). Геометрическая алгебра содействовала получению древними новых результатов, но впоследствии стала тормозить развитие математики.

Евдокс Книдский разработал "метод исчерпываний", усовершенствованный и успешно примененный Архимедом. Евдокс основал в математике то направление, которое впоследствии превратилось в математический анализ. Метод исчерпывания получил свое название в XVII в. Этот метод применялся древними при доказательстве теорем, связанных с вычислением площадей и объемов, и считается первым вариантом теории пределов. Школа Евдокса заложила основу, на которой в период 350г.-200г. до н.э. трудами Евклида, Архимеда, Аполлония была создана греческая дедуктивная математика.

"Начала" Евклида состоят из тринадцати книг, к которым присоединяют еще две, не принадлежащие Евклиду, и написанные во II в. до н.э. и в V в. н.э. В "Началах" изложены планиметрия и стереометрия, теория отношений, теория чисел, метод исчерпывания, геометрическая алгебра, дана классификация квадратических иррациональностей, рассмотрено решение квадратных уравнений.

Евклид нашел ограничения, при которых решается уравнение $(a-x)x = s$:

$$s \le (a/2)^2 .$$

В V в. до н.э. возникли три задачи, получившие широкую известность. Это задачи об удвоении куба, трисекции угла, квадратуры круга. В современных обозначениях задача удвоения куба решается просто. Составляется уравнение

$$x^3 = 2a^3,$$

откуда

$$x = a\sqrt[3]{2} .$$

Задачу о трисекции угла древним математикам не удалось свести к кубическому уравнению. Это сделали значительно позже математики стран ислама. Уравнение трисекции угла имеет вид:

$$4x^3 - 3x + a = 0 .$$

Задача квадратуры круга не может быть сведена к алгебраическому уравнению, что было доказано только в XIX веке.

И еще одна задача древних сводилась к алгебраическим уравнениям – построение правильных многоугольников. Архимед выполнил построение правильного семиугольника. Математики стран ислама показали, что эта задача сводится к кубическому уравнению. Полное решение задачи о построении правильных многоугольников дал в конце XVIII в. К.Гаусс.

Во второй книге сочинения "О шаре и цилиндре" Архимед рассмотрел задачу о рассечении круга плоскостью так, чтобы объемы полученных частей имели заданное отношение $m:n \quad (m>n)$. Задача Архимеда сводится к уравнению третьей степени:

$$\left(\frac{m}{n}+1\right)x^3+3r\left(\frac{m}{n}+1\right)x^2+4\frac{m}{n}r=0\ .$$

Архимед решал и другие задачи, приводящие к кубическим уравнениям.

Третий великий математик античности Аполлоний средствами геометрической алгебры завершил разработку теории конических сечений. С помощью конических сечений греческие математики, в том числе Архимед, решали кубические уравнения. Известны три проблемы Аполлония, приводящие к квадратным уравнениям. Например, третья задача Аполлония – проблема определенного сечения, сводилась к пропорции

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}=\frac{m}{n}\,,$$

которая дает квадратное уравнение

$$n(x-a)(x-b)=m(x-c)(x-d)\,.$$

Греки признавали только обычные целые числа и их отношения, поэтому они не могли допустить существование таких величин, как $\sqrt{2}$. Греки решили возникшую проблему, попросту изгнав иррациональные числа: они отказались считать, например, $\sqrt{2}$ числом. Однако некоторые математики, прежде всего Архимед, производили арифметические действия над иррациональными числами.

На фоне упадка античной математики, а по мнению римлян наукой должны были заниматься грекулы (гречишки), необъяснимой загадкой, как считают историки математики, является творчество Диофанта. Диофант нарушил геометрическую традицию эллинов и возродил и развил алгебру, основы которой заложили египтяне и вавилоняне. Время жизни Диофанта – середина III в. н.э. Диофанта считают последним великим математиком античности. Вместе с тем Диофант был одним из первых создателей алгебры, основывающейся не на геометрии, как то было у Евклида, Архимеда и Аполлония, а на арифметике. Именно Диофант ввел отрицательные числа и пользовался буквенной символикой.

Подобно тому, как греки считали, что Бог геометризует, индийцы полагали, что Будда арифметизирует. Строгие доказательства греков индийцы заменяли наглядностью. Индийцы чертежи сопровождали словом “смотри!”. Известно, что индийские математики ввели в обращение цифры, называемые арабскими, и позиционную систему записи чисел. Они распространили правила действия над рациональными числами на числа иррациональные, производя с ними непосредственные выкладки.

При решении задач греки поступали так, чтобы в результате получались положительные числа. Если этого не происходило, то менялось условие задачи. Индийские математики в аналогичных ситуациях либо отбрасывали отрицательные решения, либо истолковывали их как долг. Далее был сделан естественный шаг к установлению правил действий над величинами при любом наборе знаков и к установлению наличия двузначности квадратного корня и существованию двух корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx=c\ .$$

Брахмагупта (598-ок.660) дал правило решения квадратного уравнения, которое символически могло быть записано в виде

$$x=\frac{\sqrt{ac+(b/2)^2}-b/2}{a}\ .$$

Решение задач с квадратными уравнениями отмечается у Ариабхаты. Эти задачи связаны с определением числа членов арифметической прогрессии и сложными процентами. Задачи с квадратными уравнениями решал Магавира (814-880).

Индийский математик и астроном Бхаскара II (1114-1185) привел отрывок из недошедшего до нас сочинения Шридхары (IX-X вв.), содержащий способ решения полного квадратного уравнения. Бхаскара II также изучал уравнения более высоких степеней.

Около 830г. вышел трактат по алгебре “Краткая книга об исчислении ал-джафа и ал-мукабалы” ал-Хорезми (787-850), положивший начало самостоятельному развитию алгебры. Трактат содержит теорию и применения линейных и квадратных уравнений. В XII веке трактат ал-Хорезми был переведен на латинский язык. В трактате ал-Хорезми приводились правила решения квадратных уравнений

$$ax^2+bx=c, \quad ax^2+c=bx, \quad bx+c=ax^2 .$$

Отыскивались только положительные корни. В качестве примера рассматривалось уравнение

$$x^2+10x=39 .$$

Вслед за ал-Хорезми науку о решении уравнений долгое время именовали алгеброй. Математиков, занимавшихся решением уравнений, Омар Хайям называл алгебраистами.

Квадратным уравнениям посвятил трактат “Рассуждение об установлении задач алгебры с помощью геометрических доказательств” багдадский ученый Сабит ибн Корра (836-901гг.). При помощи геометрической алгебры древних греков строил корни квадратных уравнений египетский математик X века ал-Мисри. Ал-Мисри составил уравнение

$$x^2+\sqrt{3}x=300.$$

Здесь нарушен принцип однородности, которого неукоснительно придерживались древнегреческие математики.

Арабские математики имели значительные достижения в изучении уравнений третьей и четвертой степеней. Ал-Махани (IX в.) свел задачу Архимеда о делении шара плоскостью на два сегмента в данном отношении к кубическому уравнению

$$x^3+r=px^2 ,$$

но не смог решить это уравнение.

В X в. арабским математикам удалось ряд физических и геометрических задач свести к кубическим уравнениям. Построение стороны правильного вписанного девятиугольника осуществил ал-Бируни (973 - ок. 1050гг.), который свел определение искомой стороны к решению кубических уравнений

$$x^3+1=3x, \quad x^3=1+3x .$$

В “Книге оптики” Ибн ал-Хайсама (965г.-1039г.) встречается задача об определении места отражения светящейся точки от цилиндрического зеркала, которая сводится к уравнению четвертой степени, решавшемуся геометрически.

Если у древних греков задачи, приводящие к кубическим уравнениям, появлялись эпизодически, то арабские математики накопили значительный материал, который был систематизирован Омаром Хайямом (ок. 1048-ок. 1123). Омар Хайям широко известен как автор знаменитых четверостиший. Хайям предложил прием извлечения корня степени n. Как предполагают, Хайям знал формулу разложения бинома.

В рукописи первого алгебраического трактата Хайяма приводится кубическое уравнение

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000.$$

Хайям указал, что это уравнение не может быть решено с помощью "плоской геометрии" из-за присутствия куба неизвестной. Таким образом, Хайям впервые высказал утверждение о невозможности решения уравнения третьего порядка в квадратичных иррациональностях, то есть о невозможности построения корней кубического уравнения циркулем и линейкой. Это утверждение в 1637г. высказывалось Декартом и было доказано в 1837г. французским математиком П.Л.Ванцелем (1814-1848).

Хайям перечислил 25 форм канонических уравнений первой, второй и третьей степеней. Они представлялись словесно, например: "Куб и корни равны числу". Хайям выделил 14 форм кубических уравнений. Он отметил, что первый тип $\left(x^3 = qr\right)$ был рассмотрен еще древнегреческими математиками, что уравнение второго типа $\left(x^3 + px^2 = r\right)$ изучал Ибн-Ирак, уравнение четвертого типа $\left(x^3 + r = px^2\right)$ - ал-Хазин, что уравнение девятого типа $\left(x^3 + qx + r = px^2\right)$ рассматривал Абу ал-Джуд.

Хайям, занимаясь упомянутым кубическим уравнением, произвел построение его корня, как пересечение окружности $y^2 = (x-10)(20-x)$ и равносторонней гиперболы $xy = 10\sqrt{2}(x-10)$. Хайям также отмечал: "Если кто хочет найти решение этого уравнения при помощи арифметики, то для этого нет пути". В своих исследованиях Хайяму впервые удалось установить наличие двух корней кубического уравнения. Возможности трех корней Хайям не заметил, это сделал лишь в XVI веке Д.Кардано.

Хайям исследовал кубическое уравнение

$$x^3 + r = px^2,$$

которое встречается еще у Архимеда. Хайям произвел построение корней этого уравнения при помощи параболы $y^2 = \sqrt[3]{r}(p-x)$ и равносторонней гиперболы $xy = \sqrt[3]{r^2}$. Ветви этих кривых могут пересекаться, касаться и не иметь общих точек.

Идеи исследования кубических уравнений, принадлежащие Хайяму, развивал ал–Каши (XV в.), распространивший метод геометрических построений на уравнения четвертой степени.

Английский математик Вильямс Джордж Горнер (1786-1837) в 1819г. опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который называется теперь способом Руффини–Горнера. Горнер, как замечает Стройк [339], по-видимому, не знал, что он обнаружил метод, имеющий давность около тысячи лет. При этом Стройк упоминает книгу китайского математика Цинь Цзю-шао, решавшего уравнения методом, являющимся обобщением метода последовательных приближений, применявшимся ещё ранее в "Девяти книгах" для вычисления кубических корней. Стройк отмечает, что Цинь, книга которого датирована 1247г., занимался также численным решением уравнений высших степеней. В книге Ян Хуэя (1261г.) можно найти самые давние из дошедших до нас изображений треугольника Паскаля.

Метод Горнера встречается в книге ал-Каши из Самарканда (около 1420г.).

2. Первым европейским математиком, которому удалось внести в математику свой вклад, был Леонард Пизанский или Фибоначчи (1180-1240), написавший "Книгу абака", длительное время служившую основным трудом, по которому изучали математику.

В “Книге абака” линейные и квадратные уравнения изложены с небывалой строгостью и полнотой. Неизвестную величину Леонардо называет *res* (вещь) или *radix* (корень). Фибоначчи получил важный результат: он доказал, что уравнение

$$x^3+2x^2+10x=20$$

не может иметь целых положительных корней и что корни этого уравнения не представимы в виде иррациональностей, рассмотренных Евклидом.

Современник Фибоначчи Иордан Неморарий (XIII в.) решал квадратные уравнения в общем виде.

Французский епископ Николь Орем (1323-1382), доказавший расходимость гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots,$$

рассматривал дробные степени числа, например $a^{1/2}, a^{1/4}, a^{3/2}$.

Извлечением корней на основе биномиальной формулы до $n=8$ занимался П.Апиан (1495-1552). М.Штифель (1486-1567) привел таблицу коэффициентов до $n=18$ и назвал эти коэффициенты биномиальными.

Выдающимся алгебраистом своего времени был монах-францисканец, друг Леонардо да Винчи, Лука Пачоли (ок. 1445- ок. 1514). Раздел “Суммы”, посвященный алгебраическим уравнениям, Пачоли закончил замечанием о том, что для решения кубических уравнений

$$x^3+ax=b \quad \text{и} \quad x^3+b=ax$$

“искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга”.

Итак, как ни значительны были достижения греческих, индийских, арабских и западноевропейских математиков, крепость, содержащая уравнения третьей и четвертой степени, оставалась неприступной.

Развитию алгебры несомненно способствовало введение удобной математической мнемоники [6]. Историк математики Энестрем зафиксировал первое употребление слова *plus,* как обозначения действия сложения, в итальянской алгебре XIV в. Сначала действие обозначали первой буквой слова *p*. Шюке, например, писал $\overline{p}$ и $\overline{m}$ для “+” и “–.” Такими же обозначениями, или записью $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$, пользовались и другие математики, например Пачоли. Современные “+” и “–” появились в Германии в последнее десятилетие XV в. в книге Видмана, которая была руководством по счету для купцов – “*Behende und Rechnung auf allen Kaufmannschaft*”, 1489г. Вместе с тем, и после первого появления этих знаков на страницах математических книг еще более века в роли плюса и минуса выступали самые различные значки. Некоторые авторы предпочитали испытанные *p* и *m*. Знаки *p* и *m* для обозначения операций сложения и вычитания использовал и Бомбелли в своей “Алгебре” 1572г., в которой, как известно, в явном виде впервые появляются цепные дроби. Хотя при написании именно цепных дробей вместо “+” Бомбелли использовал знак & [479]. Следует добавить, что из современных знаков деления старейший – горизонтальная черта, она встречается у Фибоначчи. Двоеточие введено в “Арифметике” Джонса (1633г.), знак умножения в виде косого креста “$\times$” предложил Оутред в книге “Ключ к математике” (1631г.).

Немецкие алгебраисты – “коссисты” (от слова *Coss* – вещь, неизвестная величина) ввели не только знаки “+” и “–”, но также и знаки для неизвестной, ее степеней и свободного члена. “Коссические знаки” получили распространение во многих странах Европы.

3. В.А.Никифоровский в своей книге “В мире уравнений” [344], пишет: “XVI в. в алгебре, да и во всей математике, ознаменован величайшим открытием – решением в общем виде уравнений третьей и четвертой степени. Эта проблема занимала математиков около двух тысяч лет, ее разрешение было подготовлено всем ходом развития науки”.

Среди итальянских университетов того времени одно из первых мест занимал университет Болоньи. С 1496г. по 1526г. профессором математики в нем был Сципион дель Ферро (1456-1526). Известно, что в 1505г. Ферро нашел решение кубического уравнения вида

$$x^3 + ax = b, \quad a,b > 0\,.$$

Стройк [426], ссылаясь на авторитет Бортолотти, опубликовавшем серию работ, посвященных итальянским математикам шестнадцатого и семнадцатого веков, полагает, что дель Ферро решил все три типа уравнений

$$x^3 + ax = b, \quad x^3 = ax + b, \quad x^3 + b = ax, \quad a,b > 0,$$

к которым можно свести общее кубическое уравнение.

Свое решение дель Ферро не опубликовал, а сообщил зятю и приемнику по должности Аннибалу делла Наве и одному из учеников – Фиоре. Фиоре неоднократно участвовал в “диспутах” – соревнованиях математиков, на которых решались задачи с числовыми данными. На этих диспутах он пользовался сообщенным ему методом решения уравнения

$$x^3 + ax = b\,.$$

В “диспуте” 12 февраля 1535г. Фиоре встретился с Николо Тартальей (1500-1557), настоящая фамилия которого, как предполагают историки, была Фонтана. Бедность не позволила Тарталье получить достаточное образование. В книге “Вопросы и различные изобретения” Тарталья писал: “У меня не было другого наставника, кроме спутницы бедности - предприимчивости”. Здесь вспоминается, что львовский профессор В.Я.Скоробогатько не раз приводил на семинарах пословицу: “Голь на выдумки хитра”.

Тарталье было известно, что Фиоре владеет секретом решения кубических уравнений и он “... приложил все рвение, прилежание и искусство, чтобы найти правило решения этих уравнений, и это удалось за десять дней до срока благодаря счастливой судьбе” [128]. В день диспута Тарталья за два часа решил все задачи Фиоре. Через день после диспута Тарталья решил также уравнение

$$x^3 = ax + b, \quad a,b > 0\,.$$

И вновь В.А.Никифоровский прибегает к превосходной степени: “Это было величайшим открытием. Надо обладать достаточным мужеством, чтобы взяться за задачу, не поддававшуюся усилиям выдающихся математиков около двух тысячелетий”.

На этом изучение кубических уравнений не закончилось. Завершил построение алгоритма их решения итальянец Джироламо Кардано (1501-1576) – замечательный представитель эпохи Возрождения. По образованию Кардано был врачом. В написанной в конце жизни “Автобиографии” Кардано упоминает, что им разработаны приемы лечения около 500 болезней. Близкие Кардано прочили ему непродолжительную жизнь. Уверовав в это, Кардано старался написать как можно больше, чтобы оставить о себе память. Изданное в 1633г. в Лионе собрание сочинений Кардано составило 10 больших томов. Его книги имеют энциклопедический характер. В истории науки и техники, кроме формул Кардано, известны карданов вал и карданов подвес.

Хрестоматийна история появления “формул Кардано”. В начале 1539г. Кардано задумал написать книгу по математике, которая представляла бы свод всего известного в арифметике и алгебре. Ему хотелось поместить в книгу и уравнения третьей степени. Он понимал, что формулы решения кубического уравнения были бы лучшим украшением его книги, решающей ступенькой к известности. Кардано 12 февраля 1539г. отправил Тарталье письмо с просьбой сообщить метод решения. Уже 18 февраля, в сроки немыслимые по теперешним временам, если обращаться к услугам почты, Тарталья прислал ответ, но о методе решения уравнений третьей степени ничего не говорилось. 25 марта Тарталья приехал в Милан и встретился с Кардано. Кардано поклялся “на святом Евангелии и как истинно благородный человек” никому не открывать секрет решения, и Тарталья под впечатлением клятвы сдался. “Если бы я не поверил такой клятве, - писал позже Тарталья, - то сам стал бы человеком, недостойным доверия”.

В стихотворной форме Тарталья указал решение уравнения

$$x^3 + ax = b, \quad a,b > 0$$

в виде

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\,,$$

где $u - v = b, \quad uv = (a/3)^3$, откуда u и v отыскиваются как корни квадратного уравнения.

Кардано в стихотворении Тартальи не разобрался и 9 апреля 1539г. обратился к Тарталье с просьбой дать разъяснения. Книга Кардано “Практика общей арифметики” вышла в 1539г. без “великого алгебраического секрета Тартальи”.

В 1545г. вышла в свет знаменитая книга Кардано “Великое искусство, или об алгебраических преобразованиях”. Кардано на этот раз проигнорировал свою горячую клятву и опубликовал решение Ферро-Тартальи, указав, правда, что именно Тарталье принадлежит честь открытия “такого прекрасного и удивительного, превосходящего человеческое остроумие и все таланты человеческого духа, истинно небесный дар, такое доказательство силы ума, его постигшего, что уже ничто не может считаться для него непостижимым”. Несмотря на столь витиеватое признание заслуг Тартальи, с той поры формула для решения уравнений третьей степени носит имя Кардано.

Вывод формулы Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

может показаться простым, но надо помнить, что задача ждала своего разрешения около двух тысячелетий. Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то квадратный корень в формуле Кардано дает мнимое число. Этот случай получил название неприводимого. С этим случаем не справились ни Тарталья, ни Кардано. Вопрос вполне прояснился, когда Виет записал решения кубического уравнения в тригонометрической форме. У Кардано впервые встречаются комплексные числа, которые он называл “чисто отрицательными”.

Книга Кардано “Великое искусство” примечательна и тем, что в ней впервые было опубликовано решение уравнения четвертой степени. Открыл метод решения уравнений четвертой степени двадцатитрехлетний ученик Кардано Луиджи Феррари (1522-1565). Феррари привел общее уравнение четвертой степени к уравнению

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

для которого дал формулы нахождения корней.

Еще при жизни Кардано была предпринята успешная попытка рассмотреть неприводимый случай. Осуществил ее инженер-гидролог из Болоньи Рафаэль Бомбелли (1526-1572). В 1572г. Бомбелли издал “Алгебру”, в первой книге которой исследовал уравнение

$$x^3 = px + q\,.$$

Бомбелли писал, что если $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$, то разность

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

после извлечения из нее квадратного корня “не может быть названа ни плюсом, ни минусом; поэтому я буду называть ее плюсом минуса, а в тех случаях, когда она должна вычитаться, я буду ее называть минусом минуса. Корни покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение; того же мнения придерживался и я, пока не нашел доказательства на линиях”[128]. Бомбелли указал правила действий с мнимой единицей

$$(\pm 1)i = \pm i\,, \qquad (\pm 1)(-i) = \mp i\,,$$
$$(+i)(+i) = -1\,, \qquad (+i)(-i) = 1\,,$$
$$(-i)(+i) = 1\,, \qquad (-i)(-i) = -1\,.$$

Во второй книге “Алгебры” Бомбелли удалось показать, что в неприводимом случае кубическое уравнение имеет действительные корни.

4. Важнейший этап в развитии теории уравнений – творчество математика Франсуа Виета (1540-1603). Виет дал полное изложение вопросов, связанных с решением уравнений первых четырех степеней. Виетом были заложены начала теории симметрических функций. Он исследовал возможности разложения многочленов на линейные множители, что вскоре привело к открытию основной теоремы алгебры - теоремы о корнях уравнения произвольной степени.

В трудах Виета, которого называют “отцом алгебры”, алгебра становится наукой об алгебраических уравнениях, основанной на буквенных обозначениях. Виет впервые ввёл (1591г.) буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для коэффициентов уравнений. Им установлена зависимость между корнями и коэффициентами уравнений - так называемые “формулы Виета”.

В тригонометрии Виет нашёл формулу синусов кратных дуг, что дало ему возможность решить одно уравнение 45-й степени, которое предложил голландский математик Роомен (1561-1615).

Виет впервые нашел бесконечное произведение для π :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots\,.$$

Подобные конструкции исследовал Рамануджан, который привел формулу [128]

$$\sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - \sqrt{8 + \ldots}}}} = 1 + 2\sqrt{3}\sin 20^0\,.$$

Ряды используют операции сложения и умножения, цепные дроби строятся при помощи операций сложения и деления. Конструкция Рамануджана включает операции сложения и извлечения квадратных корней. Конструкции Виета-Рамануджана можно рассматривать как своеобразное обобщение аппарата цепных дробей.

Надо отметить, что Виет был первоклассным вычислителем. Он опубликовал таблицы тригонометрических функций с шагом $1'$. Для вычисления, например, $\sin 1'$ Виету понадобилось найти длины сторон вписанного многоугольника с числом сторон $3\cdot 2^{11}$ и описанного многоугольника с числом сторон $3\cdot 2^{12}$. Можно лишь предположить, какого труда требовало составление этих таблиц.

5. Ближайшими последователями Виета в алгебре были Гарриот, Жирар и Оутред. Основной труд Гарриота – “Применение аналитического искусства к решению уравнений”, вышел в свет в 1631г., через десять лет после смерти автора. В работе Гарриота шло дальнейшее упрощение и развитие математической символики: появились строчные буквы, знак равенства, при записи уравнений все члены собирались с одной стороны. Гарриот, как и Виет, не признавал отрицательных корней уравнений.

Главное сочинение Альбера Жирара (1595-1632) – “Новое открытие в алгебре”, опубликованное в 1629г. Жирар наравне с положительными корнями, получал отрицательные и даже мнимые корни. Так для уравнения

$$x^4 - 4x + 3 = 0$$

Жирар нашел корни

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{2} .$$

Допущение трех видов корней позволило Жирару впервые высказать основную теорему алгебры: “Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько показывает наименование высшей степени”.

Жирар продвинул вперед теорию симметрических функций и установил их связь с коэффициентами уравнения. Он изучал также степенные суммы корней и первые четыре суммы выразил через коэффициенты.

6. Основная идея сочинений Рене Декарта (1596-1650), посвященных алгебре, - освобождение алгебры от геометрических построений. Декарт усовершенствовал буквенную символику. Он обозначал известные величины буквами $a, b, c, \ldots$, неизвестные величины обозначал буквами $x, y, z, \ldots$. Декарт указывал, что уравнения удобно записывать в виде $P(x) = 0$.

Декарт окончательно сформулировал основную теорему алгебры: число действительных и мнимых корней уравнения равно наивысшему показателю степени, входящей в уравнение. Справедливость теоремы Декарт аргументировал тем, что при перемножении n двучленов вида $x - a$ получается многочлен степени n. Декарт установил так называемое правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней. В вопросах решения уравнений Декарт придерживался установившейся традиции: находил корни уравнений как результат пересечения некоторых линий. В самом деле, в заключительной части третьей книги “Геометрия” Декарт графически решал уравнения третьей, четвертой, пятой и шестой степени.

Выдающийся английский математик Джон Валлис (1616-1703) писал: “Всеобщая алгебра является поистине арифметической, а не геометрической, и разъясняется скорее при помощи начал арифметических, а не геометрических”.

Основные работы французского математика Мишеля Ролля (1652-1719) посвящены алгебре. В “Трактате алгебры” Ролль опубликовал свой “метод каскадов”, из которого вывел названную его именем теорему о действительных корнях уравнения. Им впервые установлено правило отыскания верхней границы действительных корней алгебраического уравнения известное, впрочем, как правило Маклорена.

7. Дальнейшая арифметизация алгебры связана с работами Ньютона (1642-1727). Исследования Ньютона по алгебре в основном изложены им во "Всеобщей арифметике" (1707г.). Ньютон подчеркивал различие методов алгебры и геометрии. "Умножения, деления и тому подобные вычисления, - пишет Ньютон, - введены были в геометрию недавно и при этом неосторожно, в противоречии с основной целью этой науки. Всякий, кто рассматривает построения задач при помощи прямой и круга, найденные первыми геометрами, легко увидит, что геометрия была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобствами избегать утомительных вычислений. Поэтому не следует смешивать эти две науки".

Во "Всеобщей арифметике" Ньютон вводит определение действительного числа. "Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине такого же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное число измеряется кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей". Таким образом, Ньютон дал понятие числа, как базы алгебры и всей математики.

При решении уравнений Ньютон учитывал и мнимые корни, называя их невозможными: "Корням уравнений часто надлежит быть невозможными, иначе они выражали бы как возможные те частные случаи задач, которые невозможны". Ньютон во "Всеобщей арифметике" по каждому вопросу дает конкретные рекомендации и почти не приводит обоснования высказанных правил и теорем, аргументируя тем, что "они представлялись слишком легкими, а иногда не могли быть изложены без докучливых длиннот". Ньютон использовал запись уравнения, которую теперь принято называть канонической, т.е. слева писал все члены уравнения, а справа – нуль. Такую форму записи предпочитал и Декарт. Ньютон применял известный ранее прием образования уравнения умножением двучленов $x-a, x-b, x-c$, и т.д., приравнивая произведения нулю. Отсюда следовало, что число корней уравнения не может превышать его степени. Ньютон сформулировал правило для определения границ действительных корней и их приближенного вычисления. В отличие от Декарта Ньютон пользовался построениями не для обоснования существования решения той или иной задачи, но преследуя цель получить несколько первых знаков корней, чтобы затем использовать разработанные им итерационные методы для уточнения значений корней. В качестве примера Ньютон решал приближенно уравнение

$$x^3 - 2x - 5 = 0\,,$$

получив $x \approx 2.09455147$

Ньютон сформулировал алгоритм, позволяющий представить многочлен $f_{2m}(x)$ в виде произведения $\varphi_m(x)\psi_m(x)$, или установить, что такого представления нет. "Всеобщая арифметика" Ньютона оказала значительное влияние на последующее развитие алгебры и неоднократно переиздавалась. Начатое Ньютоном построение алгебры на арифметической основе развивалось и далее, в связи с чем из книг по алгебре исключались геометрические приложения.

Творчество Ньютона в некотором смысле подытоживало многовековую работу алгебраистов. Уже были найдены способы приведения различных задач к уравнениям, решены квадратные уравнения, уравнения третьей и четвертой степеней, определены зависимости между корнями и коэффициентами, предложены способы приближенного решения уравнений, сформулирована основная теорема алгебры, поставлена общая задача решения уравнений в радикалах. Доказывать основную теорему алгебры, исследовать проблему разрешимости уравнений в радикалах выпало на долю великих ученых XVIII – первой половины XIX веков – Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа, Гаусса, Абеля, Галуа.

8. Проблема решения уравнений в радикалах интересовала математиков всех времен. И сама алгебра до конца XVIII века развивалась как наука о решении уравнений. “Алгебра - это, собственно говоря, анализ уравнений, ” – писал в середине девятнадцатого века Ж.Серре (Joseph Alfred Serret, 1819-1885), член Парижской академии наук. Ж.Серре опубликовал двухтомный “Курс высшей алгебры”, в котором была изложена теория Галуа.

После того как в середине XVI века итальянские математики Тарталья и Феррари успешно справились с решением уравнений 3-й и 4-й степени, возникло желание решить уравнения и более высоких степеней, а также обобщить некоторые свойства уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени. Так, уже Кардано в 1545г. знал соотношения между корнями и коэффициентами уравнения 3-й степени, аналогичные соотношениям между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Виет в своем сочинении “О подготовке уравнений к решению”, изданном в 1615г., распространил это свойство квадратных уравнений на уравнения высших степеней - 3-й, 4-й и 5-й.

В XVII веке активно обсуждался вопрос о решении уравнений степени выше 4. Вопрос стоял так: если существуют общие формулы для решения уравнений первой и второй степени, если из формулы Кардано не трудно было вывести общую формулу решения любого уравнения третьей степени, по способу Феррари или какому угодно другому способу то же самое можно было сделать и для уравнения четвертой степени, то нельзя ли решить в общем виде и уравнение пятой степени или уравнения еще более высокой степени? Проблема решений уравнений “в радикалах” сводится к проблеме нахождения формул, выражающих корни уравнения n-й степени

$$x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

через коэффициенты a_i этого уравнения. Причём, формулы должны были включать четыре арифметических операций и радикалы. Подразумевалось, что число операций, входящих в формулы, конечно. Условие конечности числа операций было, вообще-то говоря, внутренне противоречивым, ибо вычисление даже квадратного корня, входящего в формулы решения квадратного уравнения, не может быть выполнено за конечное число арифметических операций, если подкоренное число ни есть точный квадрат.

Лейбниц весьма интересовался решением уравнений, что можно видеть из его переписки с Чирнгаузом (*Ehrenfried Walter von Tschirnhaus,* 1651-1708). В 1683г. Чирнгауз опубликовал в Лейпцигском журнале “*Acta Eruditorum*” преобразование алгебраического уравнения в уравнение той же степени с меньшим числом членов. Чирнгауз пытался также найти преобразование уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

в двучленное

$$y^n + c_n = 0\,,$$

которое разрешимо в радикалах. Чирнгаузу удалось освободиться от первой и второй степени x при $n=3$ и от первой и третьей степени при $n=4$. Таким образом, для x в первом случае получилось двучленное уравнение третьей степени, а во втором случае – биквадратное. В конечном счете дело сводилось каждый раз к решению некоторого вспомогательного уравнения, которое для $n=3$ оказывалось квадратным, а для $n=4$ - кубичным. Такого рода уравнение, к которому приводится в конечном счете решение данного уравнения, впоследствии у Эйлера получило название резольвенты (*resolvere* - развязывать). По аналогии естественно было ожидать, что для $n=5$ получится резольвента четвертой степени. Однако надежды Чирнгауза не оправдались. Лейбниц писал Чирнгаузу по поводу его приема [344]: “Метод находить корни уравнений путем устранения промежуточных членов я считаю неподходящим для уравнений высших степеней за исключением частных случаев. Я надеюсь это доказать”. Некоторые математики не теряли надежды добиться успехов в решении уравнений высших степеней методом Чирнгауза.

9. Новый метод приближенного вычисления корней алгебраических уравнений был разработан Даниилом Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700-1782). Занимаясь некоторыми задачами теории колебаний, приведшими его к открытию цилиндрической функции $y = J_0\left(2\sqrt{\pi/n}\right)$ в форме бесконечного ряда

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot n^4} - \ldots,$$

Д.Бернулли отметил, что уравнение $y(x) = 0$ имеет бесконечно много действительных корней и приближенно вычислил значение двух первых с помощью открытого им метода (Commentarii, (1732-1733)1738). Свой метод Д.Бернулли изложил в “Замечаниях о рекуррентных последовательностях” (Observationes de sereibes recurrentibus. Commentarii. (1728) 1732).

Последовательность чисел $a_1, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется рекуррентной, т.е. возвратной, если её общий член a_n линейно выражается через определенное число предыдущих членов рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \ldots + m_k a_{n-k}.$$

Рекуррентными называются и степенные ряды, коэффициенты которых образуют такую последовательность. К рекуррентным рядам Муавр (Abraham de Moivre, 1667-1754) пришёл в ходе решения одной задачи теории вероятностей и некоторые сведения о них привёл в “Учении о случаях”(1718г.).

Рекуррентными являются арифметические последовательности. Другим давно известным примером рекуррентной последовательности является геометрическая прогрессия. К рекуррентным относится и последовательность чисел Фибоначчи, общий член которой определяется соотношением $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ещё Кеплер заметил, что отношение a_n/a_{n-1} членов этой последовательности стремится к корню $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Стирлинг, который также изучал рекуррентные ряды (1730г.), называл их рядами, возникающими при делении друг на друга целых рациональных функций.

Алгоритм Бернулли состоит в следующем. Пусть имеется алгебраическое уравнение степени *n*:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + a_n = 0\,. \tag{1}$$

Вводится производящая функция:

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + \ldots. \tag{2}$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_n последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного соотношения

$$c_m = -\left(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \ldots + \alpha_n a_{m-n}\right),\ c_0 = 1,\quad c_1 = -\alpha_1\,.$$

Старший по модулю корень алгебраического уравнения (1) x_1, если x_1 - действительный корень, определяется согласно алгоритму Бернулли как предел:

$$x_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}\,. \tag{3}$$

Отношение c_{m+1}/c_m не всегда стремится к определенному пределу. Очевидно, методом Бернулли нельзя определить старший по модулю корень x_1 уравнения (1), если этот корень – комплексный.

Д.Бернулли предложил свой метод без доказательства. Исследованию этого метода посвящена 17-я глава первого тома “Введение в анализ бесконечных” Эйлера, где выясняются условия применения алгоритма Д.Бернулли. Методом Бернулли занимался также Лагранж. Алгоритм Бернулли применим также для нахождения нулей рядов. В [448] отмечается, что метод Д.Бернулли имеет более теоретический интерес, чем практическое значение.

10. Следующий этап развития теории решения уравнений связан с творчеством Эйлера, который, как и все предшественники, считал возможным решение уравнений любых степеней в радикалах. Резольвенту кубического уравнения $x^3 = ax+b$ Эйлер получил, положив

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\ .$$

Для уравнения четвертой степени

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

Эйлер рассматривал подстановки

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \quad \text{и} \quad x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}\ .$$

и тем самым открыл новый способ решения уравнения четвертой степени.

Эйлер в 1732г. пытался получить решение уравнения n-й степени

$$x^n = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + g$$

при помощи подстановки

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \ldots + \sqrt[n]{G}\ ,$$

где число слагаемых равно $n-1$. Однако при $n=5$ Эйлеру удалось найти решение в радикалах только для случая возвратных уравнений, которые незадолго до него изучал Муавр, установивший, что возвратное уравнение четной степени $2n$ приводится к уравнению степени n и что в случае нечетной степени оно делением на $x+1$ приводится к возвратному же уравнению.

Тридцать лет спустя, в работе “О решении уравнений любой степени” (De resolutione aequationun cujusvis gradus. Novi Commentarii, (1762-63) 1764) Эйлер приходит к иной подстановке

$$x = \omega + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \ldots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}\ .$$

Эйлер был уверен, что на этом пути можно найти решение любых алгебраических уравнений в радикалах, но фактически он решил таким образом только уравнения третьей и четвёртой степени и отдельные виды уравнений пятой степени, допускающие решение вида

$$x = \omega + A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}\ .$$

Например, для уравнения

$$x^5 - 40x^3 - 72x^2 + 50x + 98 = 0$$

Эйлер получил решение в следующем виде

$$x = \sqrt[5]{-31+3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-31-3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18+10\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18-10\sqrt{-7}}.$$

В последствие оказалось, что если уравнения пятой степени разрешимо в радикалах, его корень представляется именно в указанном Эйлером виде. Норвежский ученый Нильс Абель в своем доказательстве невозможности решений в радикалах уравнения пятой степени общего вида исходил именно из этого выражения.

Уверенность Эйлера в том, что всякое алгебраическое уравнение допускает решения в радикалах, лежала в основе одного доказательства основной теоремы алгебры, предложенного Эйлером в "Исследованиях о мнимых корнях уравнений" (1749г.). Эйлер писал: "Итак, вот новое доказательство общей теоремы, которую я поставил себе целью здесь доказать и против которого ничего нельзя возразить, кроме того, что мы не знаем, как выражены корни уравнений степени выше 4-й. Но это возражение не будет иметь никакой силы, если только согласятся со мной, что выражения для корней не содержат никаких других операций, кроме извлечения корней, не считая четырёх обычных операций, а ведь никто не будет утверждать, что туда будут примешаны трансцендентные операции". После многих бесплодных попыток Эйлер пришел в конце концов к убеждению, что "нельзя дать общее правило, позволяющее находить корни уравнений высших степеней" [219].

Эйлер предложил метод приближённого решения некоторых алгебраических уравнений, который был основан на идее Ньютона.

Два оригинальных метода приближённого решения алгебраических уравнений были даны И.Г.Ламбертом.

11. Исследования Эйлера продолжил Э.Безу (*Bezout Etienne*, 1739-1783). Безу исходил из того, что уравнение

$$x^n - a = 0$$

разрешимо в радикалах.

В самом деле, одним из корней этого уравнения будет арифметический корень n-й степени из a, остальные запишутся в виде

$$x_k = r(\cos 2k\pi/n + i\sin 2k\pi/n), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1,$$

где r - арифметический корень.

Выражение

$$\cos 2k\pi/n + i\sin 2k\pi/n$$

определяет корни уравнения

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0,$$

которое в радикалах Безу решать не умел.

Безу в мемуарах 1762 и 1765гг. следовал Чирнгаузу и стремился найти подстановки, переводящие уравнение общего вида в двучленные. Хотя по отношению к уравнениям пятой степени Безу потерпел неудачу, как и его предшественники, но эта задача дала повод усовершенствовать общую теорию исключения неизвестных.

Шведский математик Бринг (*Bring Erland Semuel*, 1736-1798) в своей диссертации 1786г. показал, что всякое уравнение пятой степени можно привести к следующему простому виду

$$x^5 + Gx + H = 0.$$

Ш.Эрмит (Hermit Charles, 1822-1901) использовал трехчленную форму для решения уравнений пятой степени в эллиптических модулярных функциях (1858), положив начало новым методам изучения и решения уравнений высших степеней с помощью трансцендентных функций.

Английский математик Жерар (*Jerrard*) пришел к тому же результату в 1834г. Пользуясь, как и Бринг, преобразованием Чирнгауза, Жерар дал общий способ для освобождения от $(n-1)$-й, $(n-2)$-й, $(n-3)$-й степени неизвестного в уравнении степени n. Что касается уравнения пятой степени, то, видоизменяя преобразование, можно освободиться от трех любых промежуточных членов, то есть привести уравнение пятой степени к виду

$$x^5 + Gx^k + H = 0,$$

где k обозначает 1, 2, 3 или 4. Освободится от члена Gx^k никому не удалось.

12. Установлением границ корней алгебраических уравнений занимался также крупнейший английский математик второй половины восемнадцатого века Эдвард Варинг (Warning Edward, 1734-1798). Как свидетельствуют историки математики [426], именно Варинг первым установил интерполяционную формулу, известную теперь как формула Лагранжа. В 1762г. он опубликовал "Аналитические этюды об алгебраических уравнениях и свойствах кривых" (Micellanea analytica de aeqtionibus algebraicis et curvarum proprietatibus, Cantabriqiae, 1762). Этот труд был впоследствии переработан и разделен на две книги: "Алгебраические размышления" (Meditationes algebraical. Ed. 1. Cantabriqiae, 1770) и "Свойства алгебраических кривых" (Proprietates algebraicum curvarum. Cantabriqiae, 1772).

Варинг развил далее теорию симметрических функций корней алгебраических уравнений. Он явно выразил степенные суммы S_n через коэффициенты и обратно (формулы Варинга). Следует отметить, что выражение для S_1, S_2, S_3, S_4 нашёл ещё Жирар (1629), а Ньютон (1707) опубликовал рекуррентное соотношение между $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1$. Симметрические функции Варинг использовал для нахождения уравнений, корни которого выражаются определенным образом через корни данного.

Уравнение, корни которого обратны разностям корней данного уравнения, позволило Варингу установить границы действительных корней данного уравнения. Для отделения корней исходного уравнения Варинг использовал также уравнение, корни которого суть квадраты разностей корней данного. Варинг указал некоторые условия существования мнимых корней уравнений третьей, четвёртой и пятой степеней.

В "Аналитических этюдах" (1762) Варинг предложил идею приближенного метода, восходящую ко "Всеобщей арифметике" (1707) Ньютона, где изложен приём вычисления наибольшего по абсолютной величине корня уравнения с действительными корнями как предела последовательности $\sqrt[2n]{S_n}$ при $n \to \infty$. Прием Варинга заключается в следующем. Для данного уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с действительными различными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенными в порядке убывания их абсолютных величин, строится уравнение

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y + A_n = 0$$

с корнями $\beta_1 = \alpha_1^k, \beta_2 = \alpha_2^k, \ldots, \beta_n = \alpha_n^k$. При достаточно большом четном k каждое из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ весьма велико по сравнению со всеми, за ним следующими, так что равенство

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = -A_1$$

можно заменить приближенным равенством $\beta_1 = \alpha_n^k = -A_1$. Аналогично находятся $\beta_2, \beta_3, \ldots$ с помощью других элементарных симметрических функций. Эта идея Варинга была впоследствии успешно разработана независимо друг от друга бельгийским математиком Ж.Д.Данделеном (1826), Н.И.Лобачевским (1834) и учеником Гаусса швейцарцем К.Г.Греффе (1837). Этот метод применим к вычислению всех комплексных корней.

13. Как отмечают историки математики, мысль, что уравнение n-й степени имеет n корней высказал в 1629г. Альберт Жирар в главном своём труде “Новое открытие в алгебре”. Не установлено, была ли книга Жирара известна Декарту. Декарт в своей “Геометрии” (1637) ставит вопрос [426]: “Сколько корней может иметь любое уравнение?” И тут же отвечает: “Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений”, т.е. число корней уравнения может быть равно показателю степени уравнения.

Маклорен и Эйлер дали в 40-х годах XVIII в. основной теореме алгебры формулировку, равносильную современной: всякое уравнение с действительными коэффициентами можно разложить в произведения множителей 1-й и 2-й степени с действительными коэффициентами, иными словами, уравнение степени n имеет n корней, действительных или комплексных.

Основную теорему алгебры называют часто теоремой Даламбера. Жан Даламбер (1717-1783) писал: “Алгебра щедра, она часто даёт больше, чем у неё просят”. Эта фраза перекликается со знаменитой фразой великого физика Герца: “… в математике формулы живут самостоятельной жизнью, порою кажется, что они умнее нас, умнее даже своего автора и дают больше, нежели в своё время в эти формулы было вложено” [177].

Первое доказательство основной теоремы алгебры было дано в 1746г. Даламбером и носило преимущественно “аналитический” характер, будучи связано с понятием непрерывности. Это вызвало недовольство многих математиков, стремившихся найти чисто алгебраическое доказательство [29], основанное на теории уравнений. Три года спустя Эйлер дал иное доказательство. Доказательство Эйлера, как и доказательство Даламбера, не было лишено недочётов. На это обратил внимание Лагранж, а после него Гаусс, предложивший своё первое доказательство основной теоремы алгебры в 1799г.

Гаусс считал теорему о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень столь важной, что дал четыре различных её доказательства, причём последнее в 70-летнем возрасте. Все доказательства Гаусса не чисто алгебраические. В доказательстве 1816г. Гаусс использовал комплексные интегралы. Сейчас установлено, что без использования свойств непрерывности теорему доказать нельзя, т.е. не существует чисто алгебраического доказательства. Основная теорема алгебры относится, таким образом, к алгебре в смысле постановки вопроса, а большинство методов её доказательства в равной мере относится и к анализу. Сейчас иногда перемещают эту теорему из алгебры в анализ, ограничивая алгебру теми процессами, которые могут быть выполнены за конечное число шагов [38]. Можно лишний раз обратить внимание, что даже корни простейшего уравнения, как $x^2 - a = 0$, не могут быть вычислены точно за любое конечное число шагов.

Первое доказательство Гаусса содержится в докторской диссертации, опубликованной в 1799г.: “Новое доказательство теоремы о том, что всякая рациональная функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой и второй степени”. Гаусс критиковал доказательства основной теоремы алгебры при помощи рассуждений, когда заранее предполагается существование корней уравнения. Такой подход, по мнению Гаусса, содержит порочный круг. Гаусс писал: “Так как помимо действительных и воображаемых величин $a + b\sqrt{-1}$, нельзя представить никаких других видов величин, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предлагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды величин, как $F, F', F'', \ldots$, то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением x, либо значением вида $a + b\sqrt{-1}$, либо вида F, либо F' и т.д. Поэтому это предложение может иметь только такой смысл. Каждое уравнение может удовлетворятся либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида $a + b\sqrt{-1}$, либо, может быть, некоторым значением другого, еще не известного вида, либо значением, которое вообще не содержится ни в каком виде. Как эти величины, о которых мы не можем составить никакого представления, - эти тени теней – должны складываться и умножаться, этого нельзя понять с ясностью, требующейся в математике ". [344].

14. Несмотря на то, что комплексные числа используются в математике более четырех столетий, они ещё полны тайн. Впечатляюще об этом сказал академик Н.Н.Лузин (1883-1950), специалист в теории функций. Он писал [144]: "… осторожным должен быть каждый, кто берётся за работу в теории функций комплексной переменной. Здесь всегда нужно быть, выбирая слова, образы, понятия и знаки, таким осмотрительным, как если бы за каждое неудачное слово угрожала смертельная казнь".

Можно было бы привести бесчисленное количество цитат, где говорится о нужности и важности использования комплексных чисел. Ограничимся одной. Американский физик-теоретик Юджин Вигнер [144] высказался на сей счет следующим образом: "… использование комплексных чисел в квантовой механике никак нельзя назвать вычислительным трюком прикладной математики, а является необходимым при формировании законов квантовой механики. Кроме того, очевидно, не только комплексным числам, а и так называемым аналитическим функциям, предназначено играть решающую роль в формировании квантовой теории".

Природа комплексных чисел на протяжении столетий было покрыта густой пеленой скептицизма. Даже тогда, когда в пользе мнимых чисел почти не сомневались, всё же не хотели признавать их числами, равноправными с действительными. Математики долгое время не могли примириться с фактом наличия мнимых в конечном результате при решении той или иной задачи; в этом случае они не были уверены в правильном решении задачи. Более терпимо относились к мнимым тогда, когда они не фигурировали в условии или в результатах, а появились только в процессе решения, как например, при решении кубических уравнений в так называемом неприводимом случае.

Разноречивы оценки роли математиков XVIII в. в выяснении природы мнимых. Так, известный историк математики Б.А.Розенфельд утверждал, что Эйлер ясно представлял себе комплексное число как наиболее общий вид математических величин, частным случаем которых является вещественное число. Однако, как отмечает другой историк математики С.Е.Белозеров [39], автор монографии "Основные этапы развития общей теории аналитических функций", "факты говорят о том, что у Эйлера, так же, как и у других математиков XVIII в. оставалось еще много неясностей, связанных с мнимыми. Например, в "Универсальной арифметике" Эйлер о мнимых числах говорил, что они не могут причисляться к возможным числам… они являются невозможными (мнимыми) числами… ибо они существуют только в воображении". Следует сказать, что в той же "Универсальной арифметике" Эйлер писал о мнимых: "Хотя сии числа, как $\sqrt{-4}$, по свойству их и совсем невозможны, но однако имеем мы об них довольное понятие, зная, что ими означается такое число, которое если само на себя помноженное будет, то произведение даст -4, а сего довольно для знания, как с сими числами в выкладках поступать надлежит… два невозможных числа, помноженные сами собою, произвести могут возможное, или действительное, число".

Большую роль в выяснении природы мнимых сыграли работы, в которых рассматривался вопрос о корнях алгебраических уравнений. Даламбер, предпринявший попытку доказать основную теорему алгебры, писал: “Пусть $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + ... + q$ такой полином, что не существует никакого действительного количества, которое, будучи поставлено на место x, привело бы к его исчезновению. Я утверждаю, что всегда найдется количество $p + g\sqrt{-1}$, подставив которое вместо x, превратим многочлен в нуль”.

Приведём некоторые подробности, относящиеся к символике и терминологии. Мнимую единицу, то есть $\sqrt{-1}$, изобразить буквой i (от восходящего к термину Декарта imaginaire – “мнимый”) предложил в 1777г. Эйлер (опубликовано 1794г.). В общее употребление это обозначение ввёл Гаусс (1801г.). Интересная деталь: один из создателей теории функций комплексного переменного Огюстен Коши (Cauchy Augustin Louis, 1783-1853) начал пользоваться знаком “i” только с 1847г. Термин “комплексное число” ввёл Л.Карно (1803). Буквальное значение выражения - “сложное, составное число”. Именно такой термин “составное переменное” употреблялся в русской литературе до конца XIX в.

Считается, что впервые комплексные числа стали употреблять итальянские математики Кардано (1545) и Бомбелли (1572). Однако в неявном виде эти числа можно найти и в более ранних работах. С другой стороны, ещё долго после работ Кардано и Бомбелли даже выдающиеся математики не имели отчётливого понятия о комплексных числах. Лейбниц писал (1702): “Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание бытия с небытием”. Бомбелли в своей “Алгебре” (1572) дал первое формальное обоснование действий над комплексными числами.

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними было впервые предложено норвежцем Каспаром Весселем (Gaspar Wessel, 1745-1818), работавшим геодезистом-картографом Датской академии наук (1799). Понятия, в течении двухсот пятидесяти лет представлявшиеся только удобными фикциями, получили ясный реальный смысл, а сам термин “мнимое число” стал лишь историческим пережитком.

Термин “модуль” для комплексного числа ввёл французский математик Арган (Jean Robert Argand, 1768-1822) в 1814г. Любопытно, но “абсолютная величина” и обозначение $|z|$ появились, по предложению Вейерштрасса, лишь в 1841 году. Термин “аргумент” для угла φ комплексного числа z употребил впервые Коши (1847). Название привилось не сразу: угол φ называли также “амплитудой”, “аномалией”, “азимутом” и “аркусом” комплексной переменной. Коши также ввёл термин “сопряженное число” (1831). В тригонометрической форме комплексные числа были представлены Эйлером и Даламбером.

15. Оценивая ситуацию с решением алгебраических уравнений в радикалах, известный историк математики А.П.Юшкевич [558] писал: “В течение многих веков задачей алгебры было отыскание корней алгебраических уравнений. Почти триста лет после того, как были решены в радикалах уравнения 3-й и 4-й степени, математики занимались поисками аналогичного решения буквенных уравнений выше четвертой степени, прежде всего уравнения пятой степени. Однако все попытки такого рода остались безуспешными и ещё Лагранж в конце XVIII века пришёл к мысли, что в такой постановке задача, вообще говоря, неразрешима, что корни общего уравнения пятой степени нельзя точно выразить формулой, в которой над коэффициентами уравнения производится *конечное* число сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня с натуральным показателем. Предположение Лагранжа оказалось правильным.

В своих “Размышлениях об алгебраическом решении уравнений”, (Reflexiones sur la resolution algebrique des equationes, Nouv. Mem. Ac. Berlin, (1770) Лагранж подверг критическому пересмотру все существовавшие до него способы решения уравнений первых четырех степеней с тем, чтобы выяснить, почему не один из этих способов не годится для уравнений пятой степени, и найти общие приемы решения уравнений всех степеней.

Подход Лагранжа был чисто алгебраическим. Он рассматривал уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с произвольными буквенными коэффициентами, т.е. по существу, рассматривал вопрос об их решение над полем рациональных функций от коэффициентов уравнения. Лагранж показал, что все существовавшие методы решения уравнений в радикалах сводились к нахождению рациональных функций корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ уравнений, которые принимали бы при всевозможных перестановках корней $k < n$ различных значений. После тщательного разбора всех приемов, использовавшихся при решении уравнений третьей и четвертой степени, Лагранж обобщает эти методы и показывает, почему они оказались бессильными по отношению к уравнениям высших степеней. Он находит “почти невозможным” добиться при помощи этих методов окончательного результата, т.е. получить общие формулы для решения уравнений выше четвертой степени. “Из этих рассуждений, - пишет Лагранж, - следует, что можно сильно сомневаться в том, чтобы те методы, о которых мы говорили, вели к полному решению уравнений пятой, а тем более высших степеней” [558]. Однако Лагранж не высказывает той мысли, что уравнения выше четвертой степени в общем виде неразрешимы в радикалах, то есть что их решения не могут быть выражены при помощи первых четырех арифметических действий и извлечения корня. Возвышение в степень с натуральным показателем можно рассматривать как частный случай умножения. В упомянутом мемуаре Лагранж также приходит к резольвентам, которые для уравнений выше четвертой степени оказываются более высоких степеней, нежели данные уравнения.

И все же основной вклад в проблему разрешимости уравнений в радикалах сделал Лагранж. Лагранж рассматривал группы подстановок корней уравнений и их подгрупп, чем дал импульс теории Галуа. Понятия группы Лагранжем не вводилось, использовались подстановки корней. Вопрос о разрешимости уравнений в радикалах Лагранж свел к отысканию подгруппы с индексами, меньшими n, и функций, инвариантных при подстановках из этих подгрупп. Установив это, Лагранж отметил, что подстановки играют важнейшую роль в проблеме решения уравнений. Лагранж писал, что подстановки являются “истинной метафизикой решения уравнений” [558]. Лагранж определил, что уравнение пятой степени может быть сведено к уравнению шестой степени. “Отсюда следует, - писал Лагранж, - что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени” [558]. И далее: “Вот, если не ошибаюсь, - заключал свой мемуар Лагранж, - истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению. Как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получают apriori результаты, которые следует ожидать”.

В мемуаре “О решении числовых уравнений” (Sur la resolution des equations numeriques. Mem. Ac. Berlin, (1767) Лагранж предложил метод приближенного решения алгебраических уравнений с помощью непрерывных дробей. Если корень x заключен в пределах $p < x < p+1$ и если подставить в уравнение $x = p + 1/y$, получится уравнение той же степени относительно y. Поскольку $1 > 1/y > 0$, новое уравнение имеет корень, больший единицы. Если целая часть приближенного значения y равна q, то полагаем $y = q + \frac{1}{r}$ и т.д., так что

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots}} .$$

Корень x рационален, если эта цепная дробь обрывается, и иррационален, если дробь бесконечна.

В добавление к этому мемуару, напечатанном в "Mem. Ac. Berlin" за 1768г. (1770), Лагранж показал, что для корней квадратного уравнения эти дроби периодичны. Как известно, Эйлером в первом томе книги "Введение в анализ бесконечных", напечатанном в 1748г., было показано, что периодическая непрерывная дробь с числителями, равными единице, представляет корень квадратного уравнения.

16. Гаусс изложил теорию решения в радикалах уравнения деления круга, т.е. уравнения $x^n - 1 = 0$, в седьмом разделе "Арифметических исследований" (1801). Корни уравнения $x^n - 1 = 0$ лежат в вершинах вписанного в круг правильного n-угольника в комплексной плоскости, поэтому это уравнение называется уравнением деления круга. Гаусс для этого уравнения по существу построил теорию Галуа, которая была разработана лишь в 1830г., через 30 лет после выхода в свет "Арифметических исследований".

Решения уравнения $x^n - 1 = 0$, т.е. корни n-й степени из единицы, могут быть записаны в виде

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Гаусс рассматривал корни многочлена

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Было установлено, что в случае простого n многочлен неприводим в поле рациональных чисел, т.е. его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами. Гаусс доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильные n-угольники, у которых n - простое число вида $2^{2^k} + 1$. Это так называемые простые числа Ферма. В частности, при $k = 0, 1, 2, 3$ имеем $n = 3, 5, 17, 257$. Гаусс привел выражение

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{16}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

позволяющее фактически построить правильный 17-угольник с помощью циркуля и линейки. Гаусс высоко ценил свой результат. Не случайно, пьедестал памятника Гаусса в Геттингене имеет семнадцатигранную форму. Здесь можно вспомнить, что на памятной доске в честь Якова Бернулли изображена логарифмическая спираль, а на надгробии итальянского математика Фаньяно (Fagnano de Toschi, 1715-1797)- лемниската с латинским текстом: Deo veritatis gloria (Слава Господу истины).

Историки математики не раз отмечали, что выдающиеся вычислительные способности Гаусса сыграли особую роль в его творчестве. Ф.Клейн, исследовавший творчество Гаусса, отмечал, что тот, будучи еще юношей, накопил такой эмпирический материал, каким не обладал никто из математиков ни до, ни после него. Как пример, Клейн привел представление Гауссом дробей $1/p$ от 1 до 1000 в виде десятичных дробей. Гаусс искал при этом полные периоды, что иногда требовало определения несколько сотен десятичных знаков.

Приведем несколько разложений в периодические десятичные дроби:

$$
\begin{array}{ll}
1/3 = 0,(3) & s = 1 \\
1/7 = 0,(142857) & s = 6 \\
1/11 = 0,(09) & s = 2 \\
1/13 = 0,(076923) & s = 6 \\
1/17 = 0,(0588235294117647) & s = 16 \\
1/19 = 0,(052631578947368421) & s = 18 \\
1/23 = 0,(0434782608695652173913) & s = 22 \\
1/29 = 0,(0344827586206896551724137931) & s = 28 \\
1/31 = 0,(032258064516129) & s = 15
\end{array}
$$

Длина периодов дроби $1/109$ составляет 108 десятичных знака, период дроби $1/983$ составляет 982 десятичных знака, а период дроби $1/1709$ составляет 1708 десятичных знака. Из обильного эмпирического материала у Гаусса возникли многие идеи теории чисел.

17. Доказательству невозможности решения в радикалах уравнений пятой и более высоких степеней посвятил несколько работ, вышедших в 1798-1813гг., Паоло Руффини (*Puffini Pao1lo,* 1765-1822). Руффини, как и Лагранж, изучал подстановки корней уравнений, исследовал конечные перестановки, ввел термин “группа”. Доказательства неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geq 5$, данные Руффини, не были вполне удовлетворительными.

Теорему о неразрешимости в радикалах уравнений пятой и высших степеней исчерпывающе доказал Нильс Абель (*Abel Niels Henrik,* 1802-1829). В начале исследований Абель пытался найти формулы для решения уравнения пятой степени в общем виде, используя арифметические операции и операцию извлечения корня. В течение нескольких недель упорного труда формулы были получены. Работу Абеля читали многие ученые и не могли обнаружить погрешностей. Лишь когда по совету одного старого профессора Абель стал применять формулы к конкретным уравнениям, он убедился в их ошибочности.

Статья Абеля “Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвертой степени” была опубликована в первом номере журнала Августа Крелле (Crelle August Leopold, 1780-1855) за 1826г. Это доказательство стало известно широким кругам математиков. В этой работе однако не снимался вопрос о разрешимости некоторых классов уравнений в радикалах и о возможности такой разрешимости для уравнений с числовыми коэффициентами. Эту проблему Абель рассмотрел в “Мемуаре об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений” (1829). Класс таких уравнений впервые был найден Лагранжем. Это так называемые циклические уравнения. Абель также открыл важный класс разрешимых уравнений. Такие уравнения в настоящее время называются нормальными с абелевой группой Галуа.

Известный историк математики А.Н.Боголюбов в своём биографическом справочнике [51] утверждает, что впервые дал строгое доказательство алгебраической неразрешимости уравнений степени выше четвертой итальянский математик Пьетро Аббати Марескотти (Abbati-Marescotti Pietro, 1786-1842).

18. Создание теории групп выпало на долю прожившего всего 21 год Галуа (Galois Evariste, 1811-1832). Как когда-то и Абель, Галуа одно время считал, что он нашел решение в радикалах общего уравнения пятой степени. С помощью групп подстановок корней уравнений Галуа сформулировал необходимое и достаточное условие разрешимости алгебраических уравнений. В “Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах” Галуа определил область рациональности.

Для уравнения

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

областью рациональности будет совокупность рациональных функций коэффициентов $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения в радикалах состоит в разрешимости соответствующей группы Галуа.

Зная числовые значения коэффициентов алгебраического уравнения, можно построить соответствующую группу Галуа и фактически проверить её разрешимость. Для неприводимого в основном поле уравнения простой степени Галуа получил критерий: необходимое и достаточное условие разрешимости в радикалах состоит в том, чтобы все корни рационально выражались через любые два из них.

Теория Галуа завершила длинный ряд исследований математиков XVII-XIX веков. Основное значение работ Галуа состоит не столько в окончательном решении проблемы разрешимости уравнений в радикалах, сколько в аппарате групп и полей, которые были при этом введены и которым суждено было изменить всю структуру современной алгебры.

Теория групп сделала, как отмечает Д.Я.Стройк [426], возможным синтез геометрических и алгебраических трудов Монжа, Понселе, Гаусса, Кэли, Клебша, Грассмана и Римана. Ф.Клейн, который вооружал многочисленных своих учеников пониманием единства математики, применил понятие группы к линейным дифференциальным уравнениям, к эллиптическим и модулярным функциям, к абелевым и автоморфным функциям. Софус Ли (Sophus Lie, 1842-1899) всю жизнь посвятил систематическому изучению групп непрерывных преобразований и их инвариантов, выявляя их основное значение в качестве классификационного принципа в геометрии, механике, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

19. Метод решения алгебраических уравнений пятой и шестой степени с помощью эллиптических и ультраэллиптических функций разработал итальянский математик Франческо Бриоски (Brioschi Francesco, 1824-1897). В 1854г. Бриоски - опубликовал книгу “Теория определителей”. Бриоски - один из основателей итальянской математической школы. Его учениками были Ф.Казарати, Л.Кремона, Э.Бельтрами.

Трёхчленное уравнение

$$x^5 + ax + b = 0,$$

к которому сводится с помощью преобразования Бринга (1786), вновь открытого Дж.Джеррардом (1834), с совершенно новой точки зрения исследовал Шарль Эрмит, который показал (1858), что корни этого уравнения выражаются в эллиптических модулярных функциях. Одновременно к тому же результату пришел Леопольд Кронекер. Это открытие повлекло за собой целую серию исследований, первые итоги которых подвёл Феликс Клейн, установивший глубокую связь с группой вращения правильного икосоэдра вокруг его осей симметрии (1884).

Теория автоморфных, в частности, эллиптических и модулярных функций одного переменного была создана в конце XIX и начале XX веков Клейном, Пуанкаре, Кебе и другими математиками. И. Шафаревич в предисловии редактора перевода книги К.Зигеля “Автоморфные функции нескольких комплексных переменных” отмечал [170]: “Для теории автоморфных функций особенно характерным является наличие многочисленных связей с другими частями математики: теорией групп, топологией, теорией римановых поверхностей, теорией алгебраических функций, дифференциальными уравнениями".

Выше уже отмечалось, что Гауссом в диссертации 1799г. была доказана основная теорема алгебры: "Всякий многочлен ненулевой степени с любыми числовыми коэффициентами имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный". Эта теорема впервые была высказана голландским математиком Альбертом Жираром (1595-1632) в книге "Новые открытия в алгебре", вышедшей в 1629г. в Амстердаме. Словом, задолго до Гаусса математики знали, что всякое алгебраическое уравнение степени n с комплексными, в частности, с действительными коэффициентами, имеет n корней. Но как выразить эти корни через коэффициенты исходного уравнения? Через какие функции? Столетиями математики искали решения в радикалах, другие функции не подворачивались. В 1858г. Эрмит показал, что для решения уравнений пятой степени может быть использован особый класс трансцендентных функций, а именно модулярные функции, тесно связанные с эллиптическими функциями, введенными Абелем. В монографии В.Н.Комарова, изданной в 1929г. [219], отмечалось: "В новейшее время были найдены еще и другие классы функций, которые могут служить для решения в общем виде уравнения какой – угодно степени". Здесь речь идет о функциях Фукса.

20. Остановимся подробнее на истории возникновения функций Фукса. Ситуация с решением алгебраических уравнений оказалась несколько сходной с той, с какой столкнулись математики, занимавшиеся дифференциальными уравнениями.

Анри Пуанкаре пытался построить функции, через которые выражаются решения дифференциальных уравнений как выражаются решения алгебраических уравнений через абелевы трансцендентные функции. В мемуаре 1880г., посвященном теории интегрирования линейных дифференциальных уравнений, Пуанкаре рассматривает функции, которые он предложил называть фуксовыми. Фуксова функция, по Пуанкаре, имеет большую аналогию с эллиптическими функциями. Фуксова функция существует лишь внутри определенной окружности и остается мероморфной внутри этой окружности. Она выражается на всей окружности частным двух сходящихся рядов.

Интересный подход предложили французские математики Брио и Буке [447] : "Случаи, когда можно интегрировать дифференциальное уравнение, в высшей степени редкие и должны рассматриваться как исключения. Но можно рассмотреть дифференциальное уравнение как определяющее функцию и заняться изучением свойств этой функции по данному дифференциальному уравнению". Из самого дифференциального уравнения предлагалось извлекать информацию о той неизвестной функции, которая является его решением. Этот новый подход превращал все нерешенные до сих пор дифференциальные уравнения в неисчерпаемый источник новых трансцендентных функций. Приняв в качестве определения искомой функции линейное дифференциальное уравнение с алгебраическими коэффициентами, Пуанкаре пришел к важному результату: функция, являющаяся решением такого уравнения, должна оставаться неизменной при дробно-линейных преобразованиях переменной величины, от которой она зависит. Обычные периодические функции и двоякопериодические эллиптические функции остаются неизменными при простом прибавлении периода к их переменным величинам. Новая функция должна принимать одинаковые значения при более сложных, более общих операциях, произведенных над ее переменной. Чтобы построить эту трансцендентную периодическую функцию более высокого порядка, нужно было найти порождающую ее группу преобразований. Эти преобразования оказались простым переносом, только на неевклидовой плоскости.

21. Цепные дроби, как известно, могут рассматриваться как композиция дробно-линейных преобразований. Поэтому не случайно, алгебраические уравнения решаются при помощи фуксовых или автоморфных функций. Эти же алгебраические уравнения решаются при помощи непрерывных дробей Хессенберга и более общих дробно-рациональных конструкций, которые мы назвали непрерывными дробями Никипорца.

Нелишне здесь отметить, что многие математики, внесшие заметный вклад в теорию непрерывных дробей, такие, например, как Ф.Клейн, А.Н.Хованский, В.Я.Скоробогатько, были большими знатоками гиперболической геометрии Лобачевского.

По мнению Ф.Клейна, “значение введения в алгебру комплексных чисел в том и заключается, что они дают возможность установить основную теорему алгебры в общей форме, не допускающей никаких исключений”. В книге Ф.Клейна [207] рассматривается уравнение диэдра. Так называют уравнение

$$\omega = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Умножая на z^n, находим, что степень этого уравнения равна $2n$. О диэдре Ф.Клейн пишет:

“Представим себе, что наша двойная пирамида сплюснута в плоскость оснований, и станем рассматривать получающийся при этом правильный n-угольник. ... Я всегда был склонен причислять эту фигуру, называя ее *диэдром*, к пяти правильным многогранникам, которые известны со времен Платона. Действительно, она удовлетворяет всем условиям, которыми обыкновенно определяют правильный многогранник: все ее ребра равны между собой (стороны правильного n-угольника), и углы ее также равны между собой (углы n-угольника); единственное различие заключается в том, что она не представляет собой тела в прямом смысле слова, так как заключает в себе объем, равный нулю”.

В 1884 г. Ф.Клейн выпустил книгу: “Лекции об икосаэдре и о решении уравнений пятой степени” [208]. Икосаэдр – двадцатиугольник. Теория автоморфных функций рассматривает деления сферы на бесчисленное множество треугольников. Отделение корней, по Ф.Клейну [170],- представляет большей частью крайне утомительную работу, которая должна предшествовать численному вычислению корней. Так называется задача определения таких отдельных промежутков, в которых, наверно, заключается только по одному корню. Уравнение икосаэдра имеет 4 вещественных корня и 56 мнимых корней.

Численное определение корня представляет, собственно говоря, задачу анализа, а не алгебры, так как оно необходимо требует применения бесконечных процессов, чтобы представить с любым приближением иррациональные, обыкновенно, значения корней. Клейн пишет: “Всеобщая боязнь комплексных чисел создали, во всяком случае, возможность для множества недоразумений”. Для уравнений октаэдра, тетраэдра и икосаэдра элементарных трансцендентных функций недостаточно, но зато можно получить совершенно аналогичное решение с помощью эллиптических модулярных функций. Что касается уравнений диэдра, тетраэдра и октаэдра, то с помощью алгебраической теории легко убедиться в том, что их возможно свести к двучленным уравнениям. Достаточно показать это на примере уравнения диэдра

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\omega .$$

Если положить $z^n = \xi$, то уравнение примет вид

$$\xi^2 - 2\omega\xi + 1 = 0 ,$$

и отсюда непосредственно следует:

$$\xi = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}$$

и, таким образом,

$$z = \sqrt[n]{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}}\ ,$$

что и представляет искомое решение в радикалах. Между тем, для уравнения икосаэдра подобное решение в радикалах невозможно, так что это уравнение определяет некоторую существенно новую алгебраическую функцию.

Известна лемма Абеля: “Если алгебраическое уравнение разрешимо с помощью ряда радикалов, то каждый входящий в это выражение радикал может быть представлен в виде рациональной функции всех корней первоначального уравнения”. Ф.Клейн отмечает: “Слово “корень” теперь употребляют почти всегда в двояком смысле: во-первых, для обозначения решения всякого алгебраического уравнения и, во-вторых, для обозначения решения именно двучленного уравнения. Это словоупотребление ведет начало, конечно, с тех времен, когда занимались исключительно двучленными уравнениями. В настоящее время оно является, если и не прямо-таки вредным, то, во всяком случае, довольно неудобным. В гораздо большей степени дает повод к недоразумениям другое заблуждение, сохранившееся из элементов алгебры, согласно которому алгебраическое уравнение, которое неразрешимо в радикалах, т.е. которое не сводится к двучленным уравнениям, называют неразрешимым алгебраически. Это стоит в самом резком противоречии с современным значением слова алгебраический. В настоящее время алгебраически разрешимым называют уравнение, которое можно свести к цепи таких простых уравнений, для которых зависимость решений от параметров, взаимная связь различных значений корней и т.д. известны с такою же полнотой, как это имело с давних пор для двучленного уравнения; но это отнюдь не должны быть непременно двучленные уравнения. В этом смысле мы можем отнести уравнение икосаэдра к числу тех, которые вполне разрешимы алгебраически. То обстоятельство, что оно неразрешимо в радикалах, делает его, скорее, особенно интересным, так как вследствие этого оно является подходящим нормальным уравнением, к которому можно пытаться свести другие уравнения, тоже неразрешимые алгебраически в старинном смысле слова, чтобы вполне овладеть и их решением.

Можно сказать, что самое общее уравнение третьей степени сводится к уравнению *диэдра* при $n=3$,четвертой степени - сводится к уравнению тетраэдра или октаэдра, пятой степени сводится к уравнению икосаэдра. Этот результат представляет самый последний триумф правильных тел, которым с самого начала истории математики все снова и снова приходилось играть важную роль”.

Ф.Клейн далее пишет: “Хотя и невозможно свести уравнение пятой степени, данное в общем виде, к двучленным уравнениям, но зато удается – и в этом именно и заключается собственно задача алгебраического решения – свести его к уравнению икосаэдра как к простейшему нормальному уравнению. Уравнение икосаэдра, в свою очередь, можно разрешить посредством эллиптических модуль – функций, что является полным аналогом решения двучленных уравнений посредством логарифмов. Можно и для уравнений шестой и высших степеней развить подобные теории, прибегая к помощи правильных тел в пространстве многих измерений.”

Поучительны следующие слова Ф.Клейна; которые можно было бы ставить эпиграфом любой математической книги: “В самом деле, когда что-либо не удается на обычном пути, то не должно сразу отказываться от дальнейших попыток и удовлетворяться констатацией невозможности, но надо стараться подойти к вопросу с такой стороны, чтобы можно было его разрабатывать дальше. Математическая мысль, как таковая, никогда не имеет конца, и если вам кто-нибудь скажет, что в некотором пункте прекращается математическое понимание, то будьте уверены, что там как раз должна найти свое место наиболее интересная постановка вопроса”.

Редактор перевода книги Ф.Клейна В.Ф.Каган замечает в своих комментариях: “В уравнениях первой степени корень непосредственно выражается рационально в тех параметрах, от которых зависит уравнение. Следующий шаг заключается в решении двучленных уравнений вида $x^n = a$, содержащих один параметр a. С давних времен были указаны методы вычисления корней этих уравнений в зависимости от параметра. Извлечение корня было отнесено к числу операций хорошо известных. Классическая постановка задачи об алгебраическом решении уравнений в том именно и заключалась, что старались свести решение всякого уравнения к решению двучленных уравнений. Как известно, это удалось для уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Относительно же уравнений более высоких степеней было обнаружено, что их решение, вообще говоря, не может быть сведено к извлечению корней, т.е. к решению двучленных уравнений. Когда это вполне выяснилось, то дальнейшее развитие теории алгебраического решения уравнений, естественно, пошло двумя путями. Во-первых, старались выделить те алгебраические уравнения высших степеней, которые все же могут быть разрешены в радикалах. Это течение идет от Абеля и Галуа и в работе Кронекера до известной степени получило свое завершение. Другое течение ставит себе задачу более широкую. Если прежние средства отказались служить, то нужно найти новые. Подобно тому, как были изучены двучленные уравнения, нужно подыскать новую категорию уравнений, найти непосредственные пути к вычислению их корней, изучить, таким образом, определяемую этими уравнениями функциональную зависимость и попытаться свести обширные группы уравнений к этим новым основным типам. К этому направлению относится известная работа Клейна об икосаэдре. Но для того чтобы искать новые основные типы уравнений, нужна руководящая нить. Этой руководящей нитью служило изображение функциональной зависимости, определяемой этими уравнениями, на римановых поверхностях.”

22. Главным предметом алгебры Н.И.Лобачевский считал решение уравнений. В книге “Алгебра, или Вычисление конечных”, вышедшей в Казани в 1834г. [302] Н.И.Лобачевский описал способ приближенного решения уравнений с численными коэффициентами. В предисловии к “Алгебре” сказано, что метод “кажется, заслуживает внимание по кратности и легкости вычисления в сравнении с другими известными мне способами”.

Численные методы решения алгебраических уравнений высших степеней давно привлекали внимание математиков. Как указывает А.П.Юшкевич [558], первый систематический приём был предложен китайскими учёными не позднее VII века, который по существу совпадает с методом, вновь открытым итальянцем П.Руффини в 1809 г. и англичанином У.Горнером в 1819 г. Различные приемы вычисления действительных корней алгебраических уравнений предложил И.Ньютон, Д.Бернулли, Л.Эйлер, Лагранж, Ж.Фурье и другие математики.

Изложению метода Лобачевского с многочисленными примерами посвящена вторая глава известной монографии академика А.Н.Крылова “Лекции о приближенных вычислениях” [261], вышедшей первым изданием в 1911г. В 1954г. было выпущено шестое издание книги А.Н.Крылова.

В начале второй главы “Решение численных уравнений” А.Н.Крылов пишет: “Для уравнений, степень коих выше 4, не существует формул, которые выражали бы величины корней через коэффициенты уравнения, и разыскание иррациональных корней может быть производимо лишь помощью приближений”. Вновь хотелось бы обратить внимание на распространённое заблуждение относительно “точных” формул решения алгебраических уравнений при $n \le 4$. Очевидно, что извлечение даже квадратного корня из числа, не являющемся полным квадратом, не может быть выполнено за конечное число арифметических операций, т.е. формулы для решения алгебраических уравнений второй-четвертой степени также дают приближенные решения.

А.Н.Крылов так излагает суть способа Лобачевского. Предлагается для простоты рассуждений, что уравнение

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{4}$$

имеет только вещественные и положительные корни и, притом, неравные. Пусть эти корни будут

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n,$$

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots. > \alpha_n.$$

Таким образом

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \tag{5}$$

Если в (4) заменить x на $-x$ и затем умножить на $(-1)^n$, то, каково бы ни было число n, четное или нечетное, получается уравнение

$$f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = 0,$$

корни которого есть:

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots., -\alpha_n,$$

и следовательно, левая часть этого уравнения разлагается на произведение сомножителей

$$(x + \alpha_1), (x + \alpha_2), \ldots, (x + \alpha_n).$$

Положим, что по данному уравнению (4) составляется такое, корни которого есть

$$-\alpha_1^{2k}, -\alpha_2^{2k}, \ldots, -\alpha_n^{2k}.$$

Пусть это уравнение будет

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1} z + a_n = 0.$$

Так как

$$F(z) = \left(z + \alpha_1^{2k}\right)\left(z + \alpha_2^{2k}\right)\ldots\left(z + \alpha_n^{2k}\right),$$

то будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1^{2k} + \alpha_2^{2k} + \ldots + \alpha_n^{2k}, \\
A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^{2k} + (\alpha_1\alpha_3)^{2k} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)^{2k}, \\
A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^{2k} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{2k}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если показатель $2k$ взят достаточно большим, то в каждой из сумм (6) первый член будет насколько велик по сравнению с другими, что с принятою степенью точности можно этими членами пренебречь. Тогда система (6) заменяется такою:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = \alpha_1^{2k}, \\ &A_2 = (\alpha_1\alpha_2)^{2k}, \\ &A_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{n-1} = (\alpha_1\alpha_2..\alpha_{n-1})^{2k}, \\ &A_n = (\alpha_1\alpha_2..\alpha_n)^{2k}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отсюда непосредственно следует

$$\alpha_1^{2k} = A_1, \quad \alpha_2^{2k} = \frac{A_2}{A_1}, \dots, \quad \alpha_n^{2k} = \frac{A_n}{A_{n-1}}, \qquad (8)$$

и корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, будут найдены из равенств (8). В этом состоит сущность метода Лобачевского.

Самый невыгодный случай, когда имеется несколько пар мнимых корней, имеющих равные модули. В качестве примера в книге А.Н.Крылова рассматривается уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 .$$

Метод Лобачевского-Греффе был подробно разработан и пояснён многими примерами астрономом Энке в мемуаре, опубликованном в 1841г.

Н.А.Крылов пишет, что алгебраические уравнения высокой степени надо численно решать при интегрировании систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, относящихся к малым колебаниям какой-нибудь материальной системы или к вопросу о распределении токов в цепи, заключающей самоиндукцию и емкость. В этих случаях надо знать не только вещественные, но и комплексные корни.

23. В России алгебраическими уравнениями занимались многие математики. Академик Петербургской академии наук Фридрих Теодор Шуберт (Friedrich Theodor von Schubert, 1758-1825), звавшийся в Петербурге Фёдором Ивановичем, основные работы которого относились к астрономии, в мемуаре 1793г “Об определении делителей” предложил общее правило для разложения многочлена вида

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots$$

на рациональные множители в виде многочленов первой, второй и высших степеней. Ф.И.Шуберт рассматривал геометрическое решение алгебраических уравнений до шестой степени включительно с помощью конхоиды.

В 1813г. в Дерптском университете защитил диссертацию о суммировании рядов К.Я.Купер (1789-1838). В 1819г. он издал работу об определении числа мнимых корней алгебраического уравнения произвольной степени. Известно, что профессор Дерптского университета, выдающийся геометр Фердинанд Миндинг (1806-1885) читал в университете теорию алгебраических уравнений высших степеней. Многие годы теорию алгебраических уравнений читал в Казанском университете ученик Лобачевского М.И.Мельников (1807-1885). Н.И.Лобачевский предложил численный метод решения алгебраических уравнений, который получил очень широкую известность как метод Лобачевского-Греффе и был кратко рассмотрен выше.

Другой великий математик П.Л.Чебышев также интересовался алгебраическими уравнениями. В 1838г. при переходе на второй курс университета П.Л.Чебышев написал работу “Вычисление корней уравнений”, которая была удостоена серебряной медали. Известны алгебраические теоремы П.Л.Чебышева об отделении действительных корней уравнений.

Проникновение теории групп началось в России довольно рано. В 1864 преподаватель Харьковского университета, впоследствии профессор Даниил

Михайлович Деларю (1839-1905) подготовил магистерскую диссертацию “Общая теория алгебраического решения уравнений”. На 114 страницах автор изложил историю проблемы решения уравнений в радикалах, важнейшие положения теории Галуа и, в частности, теорию абелевых уравнений, которые называются также циклическими. Небезынтересно напомнить, что первое систематическое и подробное изложение теории Галуа, благодаря которому она получила широкую известность, дал в 1870г. К.Жордан. До этого существовала только специальная мемуарная литература.

В книге 1880г. “Начала Евклида” М.Е. Ващенко-Захарченко (1825-1912) поставил весьма неутешительный диагноз: “Алгебра наука - скорее механическая, чем мыслительная. А геометрия – наука постоянного мышления”. Ващенко-Захарченко опубликовал в Киеве двухтомный курс алгебры. Первый том под названием “Алгебраический анализ или высшая алгебра” вышел в Киеве в 1887г. Второй том – “Высшая алгебра. Теория представлений и приложение её к алгебраическим вопросам” (Киев, 1890) содержал детальное изложение теории групп подстановок, теории Галуа и, наконец, решение по Кронекеру уравнений пятой степени в эллиптических функциях.

В предисловии ко второй части “Высшей алгебры”, которая называлась “Начала теории чисел”(1888), Ю.В.Сохоцкий пишет, что прежде чем приступить к общей теории алгебраических уравнений, надо знать теорию перестановок. Так как эта теория многое заимствует из теории чисел, необходимо ознакомиться с основными свойствами целых чисел. Сохоцкий сравнивал переход от изучения целых чисел к изучению целых алгебраических чисел с переходом в геометрии от изучения прямой линии к изучению кривых линий. Он отмечал: “Исследование целых алгебраических чисел “второго порядка” привело к столь важным последствиям, как и исследование свойств кривых второго порядка в геометрии”. Целым алгебраическим числом Ю.В.Сохоцкий называл *всякий* корень уравнения вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - обыкновенные целые числа.

Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842-1923) в 1868 защитил магистерскую диссертацию “Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями”. При защите Сохоцкий встретился с трудностями, поскольку его диссертация была первой научной работой на русском языке, специально посвящённой теории функций комплексного переменного. П.Л.Чебышев не считал нужным пользоваться этой теорией. По словам учеников Сохоцкого, ему пришлось два года уговаривать Чебышева допустить диссертацию к защите. С 1869г. Ю.В. Сохоцкий читал в Петербургском университете курс лекций по теории функций от мнимых величин и лекции о непрерывных дробях с их приложением к интегрированию.

Длительное время ректором Московского университета был Павел Алексеевич Некрасов (1858-1924). Магистерская диссертация Некрасова, опубликованная в “Математическом сборнике” за 1884г. посвящена теории трёхчленных уравнений вида $u^m - pa^n - q = 0$. Некрасову удалось определить области, в которых находились корни уравнения, существенно использовав при этом методы теории функций комплексного переменного. Он представил корни уравнения и их степени в виде рядов, получив таким образом общие формулы. Можно отметить, что разложение корней в бесконечные ряды приводили ещё Ламберт, Эйлер и Лагранж. Некрасов показал приложения этих рядов к интегралам и дифференциальным уравнениям. Связь между трёхчленными уравнениями и рядом Лагранжа рассматривалась в докторской диссертации Некрасова. В 1888г. Некрасов выразил корни трёхчленного уравнения посредством определённых интегралов от логарифмических функций.

Профессор Московского университета Леонид Кузьмич Лахтин (1853-1927), ученик Н.В.Бугаева, посвятил несколько больших работ решению алгебраических уравнений высших степеней в специальных функциях, зависящих от интегралов дифференциальных уравнений, главным образом линейных уравнений второго и третьего порядков. Такие дифференциальные уравнения называют дифференциальными резольвентами соответствующих алгебраических уравнений.

Работа Л.К.Лахтина объёмом в 430 страниц “Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях”, вышла в 1893г. Через три года была опубликована обширная монография Л.К.Лахтина “Дифференциальные резольвенты алгебраических уравнений высших рядов”. В работах Лахтина нашли применения теория функций, дифференциальные уравнения, теоретико-групповые методы.

Докторская диссертация профессора Казанского университета Александра Васильевича Васильева (1853-1929), известного популяризатора математики, прежде всего теории чисел и геометрии Лобачевского, имела название: “Теория отделения корней систем алгебраических уравнений” (1884г.). Васильев развивает метод характеристик Кронекера, причём, использует геометрию многомерных пространств, теорию кратного интегрирования и теорию потенциалов в этих пространствах. В 1886г. в Казани был опубликован курс лекций А.В.Васильева: “Алгебраический анализ. Теория буквенных уравнений в связи с теорией субституций” с приложением “Теория деления круга”. Под “субституциями” следует понимать подстановки.

Дмитрий Фёдорович Селиванов (1855-1932) в магистерской диссертации “Теория алгебраического решения уравнений”(1885) вполне успешно выполнил поставленную задачу – “расположить в систематическом порядке все важнейшие результаты, до сих пор полученные, и насколько возможно облегчить изучение теории алгебраических уравнений”. В докторской диссертации “Об уравнениях пятой степени с целыми коэффициентами” (СПб, 1899) Д.Ф.Селиванов рассматривал необходимые и достаточные условия разрешимости в радикалах уравнений пятой степени.

В эти же годы (1888-1901) задачами разрешимости в радикалах уравнений того или иного вида занимался Иван Петрович Долбня (1853-1912). Теорией алгебраических уравнений интересовался А.Кнезер (1862-1930).

В 1914г. Дмитрий Александрович Граве (1863-1939) издает семисотстраничные “Элементы высшей алгебры”. В главе 11 после доказательства теоремы Штурма Д.А. Граве показывает её связь с непрерывными дробями. В главе 12, излагая способ вычисления корней трехчленных уравнений Гаусса, Д.А.Граве привел также свой способ вычисления вещественных корней подобных уравнений. Этот способ основан на методе итераций и был найден автором в 1883г. ещё в студенческие годы. Алгоритм Граве представляет некоторое обобщение алгоритма непрерывных дробей. Обобщение заключается в том, что в случае непрерывных дробей чередуется две операции – деление и сложение; здесь же чередовались три операции: возвышение в степень, деление и сложение.

Самой значительной работой Граве по алгебре был “Трактат по алгебраическому анализу”. Трактат задумывался как монументальное сочинение в 17-ти томах. В 1938 году в Киеве вышло две книги: “Начала науки.” “. Исторический обзор.” О “Трактате” Граве Н.Г. Чеботарев писал, что он “ценен тем, что вводит читателя, пользуясь элементарными средствами, в круг современных идей по алгебре, содержащий в то же время много важного, но полузабытого материала, которого не найти ни в каких других руководствах”.

Об оригинальности и простоте изложения работ Граве писал академик А.Н.Крылов: “Вы по-старинному дорожите временем и трудом читателя так, чтобы ему не приходилось подолгу размышлять над каждой строчкой”.

В письме к В.А.Стеклову Д.А.Граве писал: “В последнее время моего преподавания я упростил теорию Галуа в такой степени, что дальше идти некуда”. В этом же письме он сообщает: “Из моего изложения с простотой и ясностью вы увидите, что группу Галуа можно определить так: “Группа Галуа есть совокупность подстановок, из которых каждая не нарушает всякого соотношения между корнями”.

Известна статья 1910г., в которой Граве ставит задачу об отыскании алгебраических разрешимых уравнений пятой степени с рациональными коэффициентами при неизвестных и произвольным свободным членом. К этому же кругу вопросов Д.А.Граве обращается и спустя почти три десятилетия, публикуя в 1937 году в Журнале института математики АН УССР статью, в которой рассматривает новые грани старой проблемы – невозможности алгебраического решения общего уравнения выше четвертой степени. Алгебраическим решением уравнений, степень которых есть степень простого числа, занимался и его самый знаменитый ученик О.Ю.Шмидт, правда, быстро оставивший эту тематику, переключившись на более глобальные теории.

Книги и трактаты Д.А.Граве, как правило, завершались обширными приложениями, включавшими разнообразными числовые таблицы. Для составления таблицы индексов Д.А.Граве организовал коллективную работу.

Известно, что при рассмотрении показательных сравнений $a^x = b(\mathrm{mod}\; k)$ строится теория, аналогичная теории логарифмов. Показательное сравнение $a^x = b(\mathrm{mod}\; p)$, где a так называемый первообразный корень простого числа p, можно решить при всяком числе b, не делящемся на p. Число x называется индексом числа, а первообразный корень a - основанием индексов. Индексы в теории чисел дают возможность достигать вычислительных выгод, аналогичных тем, которые дают логарифмы, а именно, умножение чисел, заменяется сложением индексов, возвышение в степень заменяется умножением индекса на числа.

Карл Якоби составил таблицу индексов для всех простых модулей до 1000. Эта работа под заглавлением “Canon arithmeticus” была издана в 1839г. Д.А.Граве обратился к студентам-математикам Киевского университета с предложением принять участие в составлении таблицы индексов второй тысячи. На предложение откликнулись 63 человека и впечатляющий проект был успешно реализован в шесть недель. При вычислениях использовались арифмометры. В 1932г. в сборнике “Математика та її значення в соціалістичному будівництві” Д.А.Граве утверждал: “Математику надо механизировать. Я уверен, что будущее в математике принадлежит вычислительным машинам”. Эти строчки писались в 1932г. когда собственно быстродействующих электронных вычислительных машин не было и в помине. Примечательно, что с таким откровением выступил доктор чистой математики. Официальным оппонентом на защите докторской диссертации Д.А.Граве в апреле 1896 г. был А.А.Марков, известный своей суровостью к технике доказательств математических результатов. Д.А.Граве смотрел на математику как философ. В той же публикации Д.А.Граве писал: “Математика, которую создала сама материя, способна всё более приближаться к объяснению самой природы”.

Трудной и важной частью алгебры – решение уравнений в радикалах, что требовало хорошего знания теории групп, занимались многие математики. Серию исследований, в которых определялись необходимые и достаточные условия решения в радикалах алгебраических уравнений, выполнили Василий Петрович Ермаков (1845-1922), более известный своим признаком сходимости бесконечных рядов (1870), и его ученик Георгий Васильевич Пфейффер (1872-1946), основные работы которого относятся к теории дифференциальных уравнений с частными производными. Отметим ещё ряд математиков, занимавшихся различными аспектами алгебраических уравнений. В 1861г. в Киеве Павел Эмильевич Ромер (1835-1899) защитил магистерскую диссертацию “Разыскание первых приближённых величин корней алгебраических уравнений”. В докторской диссертации П.Э.Ромер изложил теорию кватернионов Гамильтона.

Оригинальный метод приближенного решения алгебраических уравнений предложил в 1882г. Владимир Павлович Максимович (1850-1889) в диссертационной работе "Рассуждение о разложении в ряды функций от корней уравнений и о некоторых формулах приближения". В 1885г. В.П.Максимович доказал невозможность нахождения в квадратурах интеграла общего линейного уравнения второго порядка.

Работы об отделении корней алгебраических уравнений выполнили А.А.Макаров (1886), П.С.Назимов (1886) и В.А.Стеклов (1893). Определением числа корней трёхчленного уравнения, по модулю не превосходящих данного предела, занимался П.Г.Боль (1908). Численным решением уравнений высших степеней интересовался известный московский профессор Николай Васильевич Бугаев (1837-1903). Н.В.Бугаев полагал, что чистая математика делится на два равноправных раздела: анализ, или теорию непрерывных функций, и теорию чисел, или теорию прерывных функций. Ученик Н.В.Бугаева профессор Киевского университета Пётр Михайлович Покровский (1857-1901) исследовал вопрос о решениях алгебраических уравнений через функции Вейерштрасса.

24. В заключительном параграфе отметим недавние публикации, в которых получены существенные результаты в теории алгебраических уравнений.

Еще в 1921 г. Меллин [1144] привел интегральную формулу для алгебраического уравнения

$$z^n + x_1 z^{n_1} + \cdots + x_p z^{n_p} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \cdots > n_p > 0. \tag{9}$$

Формула Меллина следующая:

$$z(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n} z_1 - \dots - \frac{n_p}{n} z_p\right)\Gamma(z_1)\dots\Gamma(z_p)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n} z_1 + \dots + \frac{n_p'}{n} z_p + 1\right)} x_1^{-z_1} \dots x_p^{-z_p}\, dz, \tag{10}$$

где Γ- гамма-функция Эйлера, γ- точка из многогранника.

Формула была получена для ветви $z(x)$ с условием $z(0) = 1$ и названа главным решением уравнения (9). Все остальные ветви получаются из $z(x)$ по формуле

$$z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x), j = 1, \dots, n - 1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ - первообразный корень.

В недавно опубликованной работе [328] предложена иная интегральная формула для общего алгебраического уравнения. Доказана теорема:

Ветвь алгебраической функции z(x) решения уравнения (9) с условием z(0) = 1 допускает представление в виде интеграла

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln\left(1 + \sum_{k=1}^p e^{-\frac{n_k'}{n}\pi i} y_k\right) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln\left(1 + \sum_{k=1}^p e^{\frac{n_k'}{n}\pi i} y_k\right)\right] dt, \tag{11}$$

где $n_i' = n - n_i, y_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n_i'}{n}}$.

В формуле Е.Н. Михалкина подынтегральная функция является элементарной, а интегрирование осуществляется по отрезку. Преимущество полученной формулы перед формулой Меллина (10) состоит в расширении интервала сходимости интеграла.

В монографии И.Ф. Корчагина "Алгебраические уравнения" [237] описан способ предельного общего решения алгебраического уравнения произвольной степени. Подчеркивается, что решения пригодны как для вычисления корней, так и для их исследования. Для решения строится последовательность нелинейных отображений уравнения на плоскости всё более высоких порядков. Производится расчленение образов на элементарные уравнения первого и второго порядков, осуществляется решение уравнений – образов в своём пространстве, выполняется перенос на плоскость уравнения-оригинала. Отмечается, что с повышением точности решения становятся всё более громоздкими.

Автор отмечает, что только аппарат симметричных моментов позволил произвести нелинейное отображение функций и построить теорию предельного решения общих алгебраических уравнений. Симметричными моментами называются моменты точек плоскости, построенных как суммы их всевозможных сочетаний.

В [237] приводятся моменты корней пятой степени.

$$Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z^1 - p_{11111} = 0$$

$p_1 = (Z_1 + \ldots)_5 = p_1$

$p_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_{10} = p_{11}$

$p_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_{10} = p_{111}$

$p_{1111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots)_5 = p_{1111}$

$p_{11111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 + \ldots)_1 = p_{11111}$

$p_2 = (Z_1^2 + \ldots)_5 = p_1^2 - 2p_{11}$

$p_{22} = (Z_1^2 Z_2^2 + \ldots)_{10} = p_{11}^2 - 2p_{11} p_{111} + 2p_{1111}$

$p_{222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots)_{10} = p_{111}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111}$

$p_{2222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots)_5 = p_{1111}^2 - 2p_{111} p_{11111}$

$p_{22222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5^2 + \ldots)_1 = p_{11111}^2$

$p_3 = (Z_1^3 + \ldots)_5 = p_1^3 - 3p_1 p_{11} + 3p_{111}$

$p_{33} = (Z_1^3 Z_2^3 + \ldots)_{10} = p_{11}^3 - 3p_1 p_{11} p_{111} - 3p_{11} p_{1111} + 3p_{111}^2 + 3p_1^2 p_{1111} - 3p_1 p_{11111}$

$p_{333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots)_{10} = p_{111}^3 - 3p_{11} p_{111} p_{1111} - 3p_1 p_{11} p_{1111} + 3p_1 p_{1111}^2 -$
$-3p_{1111} p_{11111} + 3p_{11}^2 p_{11111}$

$p_{3333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 + \ldots)_5 = p_{1111}^3 - 3p_{111} p_{1111} p_{11111} + 3p_{11} p_{11111}^2$

$p_{33333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 Z_5^3 + \ldots)_1 = p_{11111}^3$

$p_4 = (Z_1^4 + \ldots)_5 = p_1^4 - 4p_1^2 p_{11} + 2p_{11}^2 + 4p_1 p_{111} - 4p_{1111}$

$p_{44} = (Z_1^4 Z_2^4 + \ldots)_{10} = p_{11}^4 - 4p_1 p_{11}^2 p_{111} - 4p_{11}^2 p_{1111} + 4p_{11} p_{111}^2 + 4p_1^2 p_{11} p_{1111} +$
$+8p_1 p_{11} p_{11111} + 2p_1^2 p_{111}^2 - 8p_1 p_{111} p_{1111} - 4p_1^3 p_{11111} + 6p_{1111}^2 - 4p_{111} p_{11111}$

$p_{444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots)_{10} = p_{111}^4 + 3p_{11}^2 p_{1111}^2 - 4p_1^2 p_{11111}^2 - 4p_{11} p_{111}^2 p_{1111} -$
$-8p_1 p_{11} p_{1111} p_{11111} + 2p_{11}^2 p_{111} p_{11111} + 2p_1 p_{111} p_{1111}^2 - 2p_{1111}^3 +$
$+4p_{111} p_{1111} p_{11111} + 16p_{11} p_{11111}^2$

$p_{4444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^4 + \ldots)_5 = p_{1111}^4 - 4p_{11\,1} p_{1111}^2 p_{11111} + 2p_{111}^2 p_{11111}^2 +$
$+4p_{11} p_{1111} p_{11111}^2 - 4p_1 p_{11111}^3$

$p_5 = (Z_1^5 + \ldots)_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_{11} + 5p_1^2 p_{111} + 5p_1 p_{11}^2 - 5p_1 p_{1111} - 5p_{11} p_{111} + 5p_{11111}$

$p_{55} = (Z_1^5 Z_2^5 + \ldots)_{10} = p_{11}^5 - 5p_1 p_1^3 p_{111} - 5p_{11}^3 p_{1111} + 5p_{11}^2 p_{111}^2 + 5p_1^2 p_{11}^2 p_{1111} +$
$+10p_1 p_{11}^2 p_{11111} + 5p_1^2 p_{11} p_{111}^2 - 5p_1 p_{11} p_{111} p_{1111} - 15p_{11} p_{111} p_{11111} -$
$-5p_1^3 p_{11} p_{11111} + 5p_{11} p_{1111}^2 + 5p_{111}^3 p_{1111} + 5p_1^2 p_{1111}^2 - 15p_1 p_{1111} p_{11111} -$
$-5p_1 p_{111}^3 - 5p_1^3 p_{111} p_{1111} + 10p_1^2 p_{111} p_{11111} + 10p_{11111}^2$

В [237] имеются многочисленные примеры решения уравнения пятой степени методом симметричных моментов.

В книге Г.П. Кутищева “Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы” [279] изложены вопросы, относящиеся к теории алгебраических уравнений и способам их аналитического и численного решения. В книге введены понятия сцентрированного многочлена и квадратично-сопряженных корней. Для численного решения уравнений высоких степеней сконструированы новые итерационные методы. Для уравнений специального вида, какими являются трехчленные алгебраические уравнения, предлагается наглядный и простой графоаналитический способ их решения.

Автор отмечает, что теория алгебраических уравнений представляет собой в значительной мере завершенную часть науки и «чтобы решиться написать на эту тему что-нибудь более или менее новое, надо быть очень смелым человеком». Г.П. Кутищев пишет: “Несмотря на длительную историю этой темы и наличие многочисленных публикаций, до сих пор нет книги, в которой с единых позиций рассматривались бы все вопросы, относящиеся к теории и алгоритмической реализации алгебраических уравнений именно с точки зрения их практической направленности. Предлагаемая монография и должна устранить этот пробел. “

Главная цель книги, как определил автор,- заключается в разработке математических средств, которые позволяли бы создавать эффективные алгоритмы численного нахождения всех корней обыкновенных алгебраических уравнений произвольной степени. Обыкновенными называются полиномиальные уравнения одной переменной с действительными коэффициентами.

Как уже отмечалось выше, в книге вводятся “квадратичные числа”, определяемые двумя компонентами как сумма одного действительного числа (вещественная часть) и корня квадратного из другого действительного числа (радикальная часть). Для обыкновенных алгебраических уравнений становится возможным переход от разнообразных частных случаев к одному типу корней, которые называются квадратично-сопряженными. Таким образом, все корни уравнения любой степени будут только квадратично-сопряженными или действительными или комплексными, в зависимости от знака подкоренного числа радикальной части. Появляется возможность отделять по паре корней и понижать степень уравнения на две единицы. при этом обе компоненты отделяемой пары корней определяются из системы двух сопряженных уравнений, которая решается специальным итеративным способом. Продолжая процесс редукции (уменьшения степени) уравнения, поочередно находятся все его корни. Это, собственно, и есть общая схема алгоритма численного решения обыкновенных алгебраических уравнений произвольной степени, которая рассматривается в [279].

Автор пишет: «Интересно было бы довести до какой-то конкретной алгоритмической реализации результаты работ по решению алгебраических уравнений с использованием специальных функций и рядов — бета, гамма, эллиптических, гипергеометрических и др., тем более, что по этой тематике имеется достаточно обширная литература.»

В книге приведено большое число оригинальных методов численного решения алгебраических уравнений и их алгоритмические реализации, однако вопросы эффективности и сходимости этих методов не исследовались.

В [279] предпринята попытка классификации существующих методов решения алгебраических уравнений. Эти методы разбиты на три группы.

Аппроксимационные методы. Эти методы используются для нахождения только действительных корней, когда в окрестности предполагаемого корня многочлен заменяется более простой функцией или более простым уравнением, корень которого и берется за очередное приближение к искомому корню. В зависимости от вида аппроксимирующей функции это будет:

- интерполяционный метод, или метод хорд, когда кривая-многочлен в окрестности корня заменяется отрезком прямой, концы которого лежат на кривой, а очередное приближение к корню получается как решение уравнения первой степени (интерполяция), т. е. как точка пересечения отрезка с горизонтальной осью;
- метод линеаризации, когда кривая-многочлен в текущей точке заменяется также прямой линией — касательной к кривой, пересечение которой с горизонтальной осью дает очередное приближение к корню (метод Ньютона—Рафсона);
- метод парабол, когда кривая-многочлен в окрестности корня заменяется параболой и решается уравнение второй степени, т. е. пересечение параболы с

горизонтальной осью дает очередное приближение к искомому корню (метод Мюллера).

Методы, связанные с использованием степенных сумм. Имеются две разновидности таких методов:

- метод степенных сумм И. Бернулли, и его модификация — метод Хильдебрапдта;
- метод квадрирования корней, использующий последовательное возведение корней уравнения в квадрат. (методы Данделена, Греффе, Энке, Лобачевского и др.)

Методы, связанные с разложением многочленов на множители. Если выделяется многочлен первой степени, то, приравнивая остаток от деления нулю, с помощью вычислительной схемы Горнера можно найти действительный корень. Это будут методы последнего остатка. Если же выделяется многочлен второй степени, то приравнивая коэффициенты остатка от деления нулю, находим из системы двух уравнений коэффициенты этого квадратичного множителя. Это так называемые методы предпоследнего остатка — методы Хитчкока, Фридмана, Берстоу, Белостоцкого и др.

ГЛАВА I
НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ r/φ – АЛГОРИТМА

1. Определение значений расходящихся цепных дробей и рядов

Непрерывной, или цепной дробью, называют выражение вида

$$\omega = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \vdots + \cfrac{a_n}{b_n + \vdots}}}, \tag{1}$$

В [521] конструкцию (1) предложено именовать “цепной дробью”, оставляя за цепными дробями с другими графами термин “непрерывная дробь”. Например, ветвящиеся непрерывные дроби, непрерывные дроби Хессенберга, непрерывные дроби Никипорца и т.д..

Помимо естественной записи (1), предложенной Лейбницем в 1696 г., часто используются компактные формы записи цепных дробей:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \ldots + \frac{a_n}{b_n +} \ldots, \qquad \text{(У.Гершель, 1820 г.)}$$

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots \cdot \qquad \text{(А.Прингсхейм, 1898 г.)}$$

В книге мы используем запись цепных дробей, предложенную Гершелем.

Цепная дробь называется *сходящейся*, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Такое общепринятое ныне определение сходимости цепных дробей будем называть “сходимостью по Зейделю”, – по имени немецкого математика, который одним из первых в середине XIX века обратился к систематическому изучению сходимости цепных дробей. Цепная дробь называется *расходящейся*, если последовательность ее подходящих дробей предела не имеет. Имеется большое количество признаков сходимости, при помощи которых можно сказать, существует предел последовательности подходящих дробей или нет. Наиболее широкое применение, пожалуй, получил достаточный признак Ворпицкого [142]. По признаку Ворпицкого цепная дробь

$$\frac{a_1}{1 +} \frac{a_2}{1 +} \ldots + \frac{a_n}{1 + \ldots}.$$

сходится, если $|a_n| \le 1/4,\ n = 2,3\ldots$.

При положительных элементах значение цепной дроби (1) больше любой ее подходящей дроби четного порядка и меньше любой ее подходящей дроби нечетного порядка.

Из соотношения

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\ \dots\ a_n}{Q_{n-1}Q_n}$$

следует , что

$$\left|\omega-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{a_1a_2\ \dots\ a_n}{Q_{n-1}Q_n}\quad .$$

Для знакоположительных цепных дробей существует практически удобная оценка погрешности аппроксимации:

$$\Delta_n=\left|\omega-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|\ .$$

Ниже будет рассмотрено несколько задач из разных разделов вычислительной математики, решенных при помощи так называемого r/φ - алгоритма, – нового метода суммирования расходящихся непрерывных дробей. Этот алгоритм описывается формулами (3) и (4), приведенных в предисловии.

Известно, что цепные дроби целесообразнее использовать для аппроксимации функций, нежели степенные ряды, так как цепные дроби зачастую сходятся в более широкой области. Например, ряд Меркатора

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

представляет логарифмическую функцию в единичном круге, в то время как цепная дробь Лагранжа

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}\,\frac{x}{+2}\,\frac{x}{+3}\,\frac{2x}{+2}\,\frac{2x}{+5}+\dots+\frac{nx}{2}\,\frac{nx}{+2n+1}+\dots \tag{2}$$

сходится к функции $\ln(1+x)$ на всей плоскости комплексного переменного, за исключением выреза от -1 до $-\infty$ [471].

При отрицательных значениях аргумента логарифмическая функция имеет комплексное значение и, естественно, что цепные дроби, получающиеся из цепной дроби Лагранжа (2) при $x<-1$ будут расходящимися в классическом смысле.

На рис. 1 (а,б,в,г,д,е) показано распределение подходящих цепной дроби Лагранжа (2) при x = –10, –100, –1000 на начальных участках $(n=1\div100$ и $n=1\div500)$.

В табл. 1 представлены результаты суммирования расходящейся цепной дроби

$$\ln(-2)=-\frac{3}{1}\,\frac{3}{-2}\,\frac{3}{-3}\,\frac{6}{-2}\,\frac{6}{-5}-\dots-\frac{3n}{2}\,\frac{3n}{-2n+1}-\dots\ . \tag{3}$$

Цепная дробь (3) имеет комплексное значение

$$\ln(-2)=3{,}2171505117\dots e^{i1{,}35363984544}, \tag{4}$$

которое, естественно, не может приближаться цепной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, суммирование при помощи r/φ - алгоритма позволяет установить значение этой цепной дроби, по ее подходящим дробям.

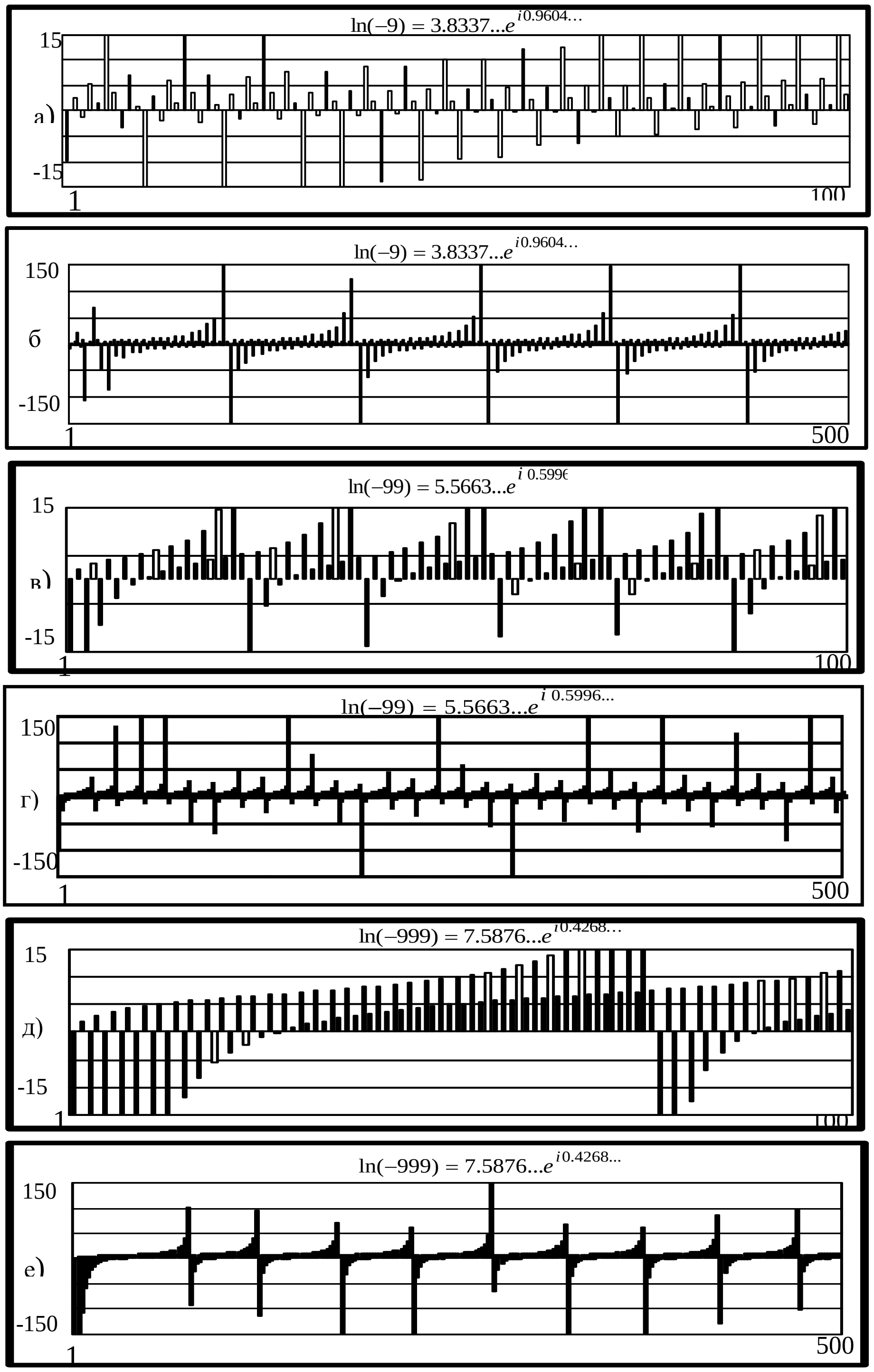


Рис.1. Распределение значений подходящих цепной дроби логарифмической функции.

Определение значения расходящейся цепной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1-}\,\frac{3}{2-}\,\frac{3}{3-}\,\frac{6}{2-}\,\frac{6}{5-}\ldots-\frac{3n}{2}-\frac{3n}{2n+1-}\ldots .$$

$r_0 = 3.2171505117\ldots$, $\varphi_0 = 1.3536398454\ldots$. Таблица 1

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		3.1415926535	1.7879528081	m
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754		1.5707963267	0.2171564813	m
4	-3.0000000	3.0000000000	0.2171505117		1.5707963267	0.2171564813	
8	-97.5000000	4.9614481602	1.7442976485		1.5707963267	0.2171564813	
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386		1.3744467859	0.0208069405	m
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367		1.3744467859	0.0208069405	
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	m	1.3744467859	0.0208069405	
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	m	1.3499030933	0.0037367521	m
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	m	1.3621749396	0.0085350941	
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618		1.3499030933	0.0037367521	
1024	-15.4772571	3.2219262392	0.0047757275		1.3560390164	0.0023991710	m
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336		1.3529710549	0.0006687905	m
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676		1.3529710549	0.0006687905	
8192	-0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	m	1.3533545501	0.0002852953	m
16384	-1.7591587	3.2167104407	0.0004400709		1.3533545501	0.0002852953	
32768	-6.4347291	3.2170964982	0.0000540134		1.3536421715	0.0000023260	m
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610		1.3536421715	0.0000023260	
131072	-3.9038315	3.2171884212	0.0000379094		1.3536182030	0.0000216423	
262144	16.0431708	3.2171480639	0.0000024477		1.3535942346	0.0000456108	
524288	-0.0551483	3.2171287791	0.0000217325		1.3536421715	0.0000023260	
1048576	-0.2709104	3.2171427009	0.0000078107		1.3536361793	0.0000036660	
2097152	-0.7308612	3.2171496552	0.0000008564	m	1.3536361793	0.0000036660	
4194304	-1.8537413	3.2171502478	0.0000002638	m	1.3536391754	0.0000006699	m
8388608	-7.2124648	3.2171495794	0.0000009323		1.3536399244	0.0000000790	m

В первой колонке таблицы даны номера n подходящих дробей разложения (3). Номера подходящих дробей составляют степень 2: $n = 2^i$, $i = 1 \div 23$. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения асимптотически приближаются к величине 3.2171505117..., то есть к модулю комплексного числа $\ln(-2)$. Даже беглого взгляда на колонки 6 и 7 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (3) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Найдены представления элементарных и некоторых специальных функции в виде непрерывных дробей Хессенберга [520]. Например,

$$\frac{1}{ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \ldots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \ldots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & x/1! & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & \ldots \\ -1 & x/1! & x/2! & \ldots \\ 0 & -1 & x/1! & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

Непрерывная дробь (5) определяет логарифмическую функцию на всей плоскости комплексного переменного с разрезом от 0 до -1. Комплексное значение логарифмической функции на разрезе определяется из (5) суммированием по формулам (3) и (4), предисловия. В качестве подходящих дробей (5) будем брать последовательность отношений определителей:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{x/1!}{1},\qquad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}{x/1!},\qquad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! \\ -1 & x/1! & x/2! \\ 0 & -1 & x/1! \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}},\ \ldots$$

В табл. 2 приведены результаты вычисления комплексного числа 1/ln(-2) при помощи функциональной непрерывной дроби Хессенберга (5) и алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Определение значения непрерывной дроби (5) *при* $x=-1/3$

$x=-1/3$, $r_0=0.3108340739..$, $\varphi_0=-1.3536398454..$. Таблица 2

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
20	0.85127256	0.99198117	0.68114710	m	-1.41371669	0.06007684	m
21	0.02044264	0.82455439	0.51372032	m	-1.34639685	0.00724299	m
42	-0.02832422	0.50977666	0.19894259	m	-1.42119667	0.06755683	
84	-0.14445825	0.40513373	0.09429965	m	-1.38379676	0.03015691	
168	-0.75441728	0.35654051	0.04570644	m	-1.36509680	0.01145696	
336	0.32678464	0.33285231	0.02201823	m	-1.35574682	0.00210698	m
672	2.01078357	0.32176153	0.01092745	m	-1.35574682	0.00210698	
1344	-0.03019484	0.31569144	0.00485737	m	-1.35574682	0.00210698	
2688	-0.14954713	0.31342156	0.00258748	m	-1.35457808	0.00093823	m
5376	-0.81466750	0.31217034	0.00133626	m	-1.35399370	0.00035386	m
10752	0.30407891	0.31149855	0.00066447	m	-1.35370152	0.00006167	m
21504	1.28357034	0.31116989	0.00033582	m	-1.35370152	0.00006167	
43008	-0.09454281	0.31099243	0.00015836	m	-1.35370152	0.00006167	
86016	-0.38364272	0.31091665	0.00008257	m	-1.35366499	0.00002515	m
172032	0.81555456	0.31087600	0.00004193	m	-1.35364673	0.00000689	m
344064	-0.22761506	0.31085447	0.00002039	m	-1.35364673	0.00000689	
688128	-10.07498787	0.31084454	0.00001047	m	-1.35364217	0.00000232	m
1376256	0.08515530	0.31083902	0.00000495	m	-1.35363988	0.00000004	m
2752512	0.10347124	0.31083657	0.00000249	m	-1.35363988	0.00000004	
5505024	0.14104327	0.31083533	0.00000126	m	-1.35363988	0.00000004	
11010048	0.22449739	0.31083471	0.00000064	m	-1.35363988	0.00000004	

Приведём ещё пример нахождения значения расходящейся в классическом смысле цепной дроби при помощи описанного выше алгоритма суммирования.

Известна цепная дробь Лагранжа для степенной функции [471]:

$$(1+x)^\nu=1+\frac{\nu x}{1+}\,\frac{(1-\nu)x}{2+}\,\frac{(1+\nu)x}{3+}\ldots+\frac{(m-\nu)x}{2+}\,\frac{(m+\nu)x}{2m+1+\ldots}. \tag{6}$$

Цепная дробь (6) сходится на всей плоскости комплексного переменного, разрезанной по вещественной оси от - 1 до $-\infty$. При $x<-1$ подкоренное выражение функции $y=(1+x)^\nu$ становится отрицательным, следовательно, значение функции $(1+x)^\nu$ при $x<-1$ становится комплексной величиной , которая, очевидно, не может приближаться вещественной последовательностью подходящих дробей разложения (6), элементы которого при $x<-1$ остаются действительными величинами.

В табл. 3 приведены результаты вычисления значения расходящейся цепной дроби для $\sqrt[3]{-9}$ при помощи r/φ - алгоритма.

Определение значения расходящейся цепной дроби

$$\sqrt[3]{-9}=1-\frac{10}{3}\,\underset{-}{}\,\frac{2\cdot 10}{2}\,\underset{-}{}\,\frac{4\cdot 10}{9}\,\underset{-}{}\,\frac{5\cdot 10}{2}\,\underset{-}{}\ldots\underset{-}{}\,\frac{(3n-1)10}{2}\,\underset{-}{}\,\frac{(3n+1)10}{3(2n+1)}\,\underset{-}{}\ldots.$$

$r_0=2.080083\ldots$, $\varphi_0=1.047197\ldots$.

Таблица 3

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
2	2.4285714	8.095238095238	6.015154272186	m	0.000000000000	1.047197551196	m
4	7.9230769	1.892578548704	0.187505274347	m	0.000000000000	1.047197551196	
8	0.0083609	0.946908431432	1.133175391618		0.785398163397	0.261799387799	m
16	2.3793179	1.514212477498	0.565871345553		0.785398163397	0.261799387799	
32	3.4334933	1.931910874242	0.148172948809	m	0.687223392972	0.359974158223	
64	-6.6957404	2.285828469458	0.205744646406		0.932660319034	0.114537232162	m
128	1.8056646	2.171608471371	0.091524648319	m	0.957204011640	0.089993539555	m
256	2.7046939	2.095947975804	0.015864152753	m	1.043106935762	0.004090615434	m
512	14.0355053	2.077080542151	0.003003280900	m	1.043106935762	0.004090615434	
1024	0.4131559	2.063579787259	0.016504035792		1.046174897338	0.001022653858	m
2048	-0.5703198	2.085479528230	0.005395705178		1.044640916550	0.002556634646	
4096	-33.5321135	2.082858835017	0.002775011965	m	1.046174897338	0.001022653858	
8192	1.1197769	2.079900863342	0.000182959709	m	1.048092373322	0.000894822126	m
16384	1.0914866	2.080396700069	0.000312877017		1.047133635330	0.000063915866	m
32768	1.0349376	2.080307362394	0.000223539343		1.047229509129	0.000031957933	m
65536	0.9216825	2.079865087605	0.000218735446		1.047229509129	0.000031957933	
131072	0.6914169	2.080106476321	0.000022653270	m	1.047205540679	0.000007989483	m
262144	0.1869493	2.079930141859	0.000153681192		1.047193556454	0.000003994741	m
524288	-1.4500205	2.080071498760	0.000012324291	m	1.047199548567	0.000001997370	m
1048576	5.5741164	2.080081877069	0.000001945982	m	1.047190560398	0.000006990797	
2097152	-0.8763266	2.080075907132	0.000007915919		1.047195054483	0.000002496713	
4194304	15.7595707	2.080077041783	0.000006781268		1.047199548567	0.000001997370	
8388608	0.4758782	2.080083260804	0.000000562247	m	1.047197301525	0.000000249671	m

На рис. 2 показано распределение подходящих дробей расходящейся цепной дроби для $\sqrt[3]{-9}$.

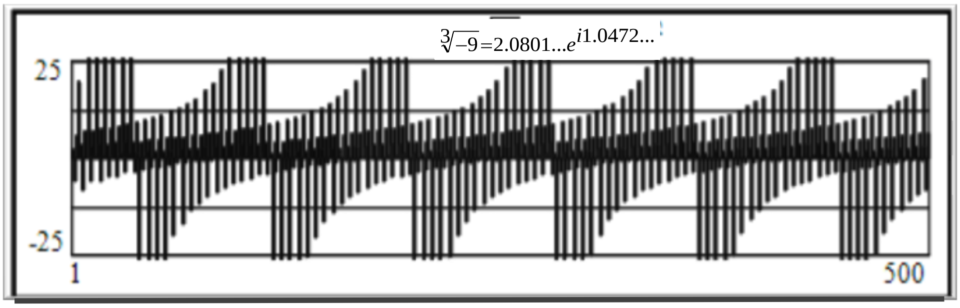


Рис. 2. Распределение значений подходящих цепной дроби для $\sqrt[3]{-9}$.

Расходящиеся ряды нередко суммируются через так называемые соответствующие цепные дроби [520]. Для степенного ряда

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{7}$$

можно построить цепную дробь

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1} - \frac{\omega_2 x}{1} + \frac{\omega_3 x}{1} - \ldots + \frac{\omega_{2n-1} x}{1} - \frac{\omega_{2n} x}{1} + \ldots \tag{8}$$

такую, что разложение *n-й* подходящей этой цепной дроби будет совпадать с исходным рядом (7) вплоть до члена $c_n x^n$ включительно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \gamma_{n+1} x^{n+1} + \ldots\ .$$

Такую цепную дробь называют соответствующей ряду или *соответствующей* цепной дробью.

Используя коэффициенты c_i степенного ряда (7), можно построить соответствующую цепную дробь (8) по формулам Хейлерманна – Стилтьеса [142]:

$$\omega_0 = c_0, \qquad \omega_1 = c_1,$$

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1} \cdot \psi_{n+1}}{\varphi_n \cdot \psi_n}, \qquad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1} \cdot \psi_n}{\varphi_n \cdot \psi_{n+1}};$$

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \varphi_0 = 1, \quad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+1} \\ . & . & . & . \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad \psi_1 = 1. \tag{9}$$

На практике, однако, для построения соответствующих цепных дробей вместо “явных” формул (9) используются эффективные итерационные алгоритмы Хлопонина и Рутисхаузера, описанные в [521].

Прежде чем рассматривать расходящиеся ряды, приведём пример ускорения медленно сходящихся рядов при помощи соответствующих цепных дробей. Предложено много алгоритмов ускорения сходимости рядов и последовательностей [44]. Как показывает практика, пожалуй, самым эффективным и надёжным способом ускорения сходимости медленно сходящихся рядов является их суммирование через соответствующие цепные дроби [543]. В табл. 4 приведены результаты вычисления ln2 с использованием ряда Меркатора.

Определение значения ряда Меркатора

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

$\ln 2 = 0.69314718055994\ldots$ Таблица 4

Число членов ряда	Значения частичных сумм ряда	Погрешность аппроксимации
2	0.50000000000000	0.19314718055994
10	0.64563492063492	0.04751225992502
100	0.68817217931020	0.00497500124974
1000	0.69264743055982	0.00049975000012
10000	0.69309718305996	0.00004999749998
100000	0.69314218058498	0.00000499997496
1000000	0.69314668056025	0.00000049999969
10000000	0.69314713056010	0.00000004999984
100000000	0.69314717556042	0.00000000499952

В табл. 5 константа ln2 определена при помощи цепной дроби Лагранжа.

Определение значения цепной дроби Лагранжа

$$\ln 2 = \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{2}{2+}\frac{2}{5+}\ldots+\frac{n}{2+}\frac{n}{2n+1+}\ldots \;.$$

$\ln 2 = 0{,}69314718055994\ldots$ Таблица 5

Число звеньев	Значения подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0.66666666666666	0.02648051389328
3	0.70000000000000	0.00685281944005
4	0.69230769230769	0.00083948825225
5	0.69333333333333	0.00018615277339
6	0.69312169312169	0.00002548743825
7	0.69315245478036	0.00000527422042
8	0.69314641744548	0.00000076311446
9	0.69314733235438	0.00000015179444
10	0.69314715785304	0.00000002270690
11	0.69314718496213	0.00000000440219
12	0.69314717988653	0.00000000067341
13	0.69314718068816	0.00000000012822
14	0.69314718054001	0.00000000001993
15	0.69314718056369	0.00000000000375
16	0.69314718055936	0.00000000000058
17	0.69314718056005	0.00000000000012
18	0.69314718055993	0.00000000000001

Таким образом, использование цепной дроби, содержащей 18 звеньев, обеспечивает точность вычисления $\ln 2$ с 14 десятичными разрядами. Для сравнения: применение для определения $\ln 2$ ряда Меркатора, включающего 100 миллионов членов, позволяет вычислить $\ln 2$ с точностью всего 8 десятичных знаков. Разница в эффективности аппроксимации фантастическая.

Области сходимости степенного ряда (7) и соответствующей цепной дроби (8) для одной и той же функции могут быть различны. Например, расходящийся ряд Эйлера

$$1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + 4!x^4 - \ldots \tag{10}$$

имеет соответствующую непрерывную дробь

$$\frac{1}{1+}\frac{1x}{1+}\frac{1x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{2x}{1+}\ldots+\frac{nx}{1+}\frac{nx}{1+}\ldots \;. \tag{11}$$

Как отмечается в [32], ряд (10) представляет функцию $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$, которая "является аналитической функцией от x в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной действительной полуоси, причём, эта функция тесно связана с так называемой интегральной показательной функцией $Ei(x)$."

Числовой ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{12}$$

суммируется через значение цепной дроби (8) при x=1, если ряд (12) рассматривать как степенной ряд (7) при x = 1.

Расходящийся всюду, кроме $x=0$, ряд Эйлера [471] при $x=1$ принимает вид

$$1-1!+2!-3!+4!-\ldots\ . \qquad (13)$$

Определяя значение ряда (13) через соответствующую цепную дробь (11) при x = 1, получим

$$1-1!+\ 2!\ -\ 3!\ +\ 4!\ -\ldots=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{2}{1+}\ldots+\frac{n}{1+}\frac{n}{1+}\ldots = 0{,}5963473623231945\ldots \qquad (14)$$

Именно это значение ряда (13) указал Эйлер в письме к Гольдбаху [558]. Выше уже отмечалось, что ряд Эйлера (10) связан с интегральной показательной функцией $Ei(x)$.Действительно, известен быстро сходящийся ряд

$$-eEi(-1)=-e\left(C-1+\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 3!}+\ldots\right) = 0{,}5963473623231945\ldots ,$$

где e - неперово число, равное 2.718281… ,
С - постоянная Эйлера, имеющая значение 0.577215… .

Определив по расходящимся рядам соответствующие цепные дроби, можем найти значения других расходящихся рядов. Например,

$$1 + 1 - 1 + 2 - 5 + 14 - 42 + 132-\ldots=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\ldots\frac{1}{+1+\ldots} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033\cdots . \qquad (15)$$

$$1-1+1\cdot 3-1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\ldots=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots+\frac{n}{1+\ldots}=0.655679\cdots . \qquad (16)$$

Расходящийся ряд (15) имеет своим значением “отношение золотого сечения”, а расходящийся ряд (16) связан с неполной гамма-функцией, так как [521]

$$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots+\frac{n}{1+\ldots}=\sqrt{\frac{e}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.6556795424\ldots .$$

Расходящимся рядам могут соответствовать конечные цепные дроби, то есть эти ряды связаны с рациональными функциями:

$$1-1+1-1+1-\ldots=1-\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{1}{2},$$

$$1+2+4+8+16+\ldots=1+\frac{2}{1-}\frac{2}{1}=-1,$$

$$1-2+3-4+5-\ldots=1-\frac{2}{1-}\frac{3}{2-}\frac{1}{3+}\frac{2}{1}=\frac{1}{4}.$$

Нередки случаи, когда соответствующая цепная дробь, построенная для расходящегося ряда, не сходится в классическом смысле.

Построим для ряда

$$1+1!+2!+3!+4!+\ldots \tag{17}$$

соответствующую цепную дробь. По формулам (9) получим:

$$1+1!+2!+3!+4!+\ldots=\frac{1}{1}\,\frac{1}{-1}\,\frac{1}{-1}\,\frac{2}{-1}\,\frac{2}{-1}\,-\ldots-\frac{n}{1}\,\frac{n}{-1}-\ldots\,. \tag{18}$$

Цепная дробь (18), в отличие от цепной дроби (14), имеет отрицательные частные числители. Цепная дробь (18) является в классическом смысле расходящейся.

На рис. 3 (а, б, в, г) показано распределение значений подходящих дробей расходящейся в классическом смысле цепной дроби (18), представляющей интегральную показательную функцию. Распределение значений подходящих показано на начальных и удалённых интервалах.

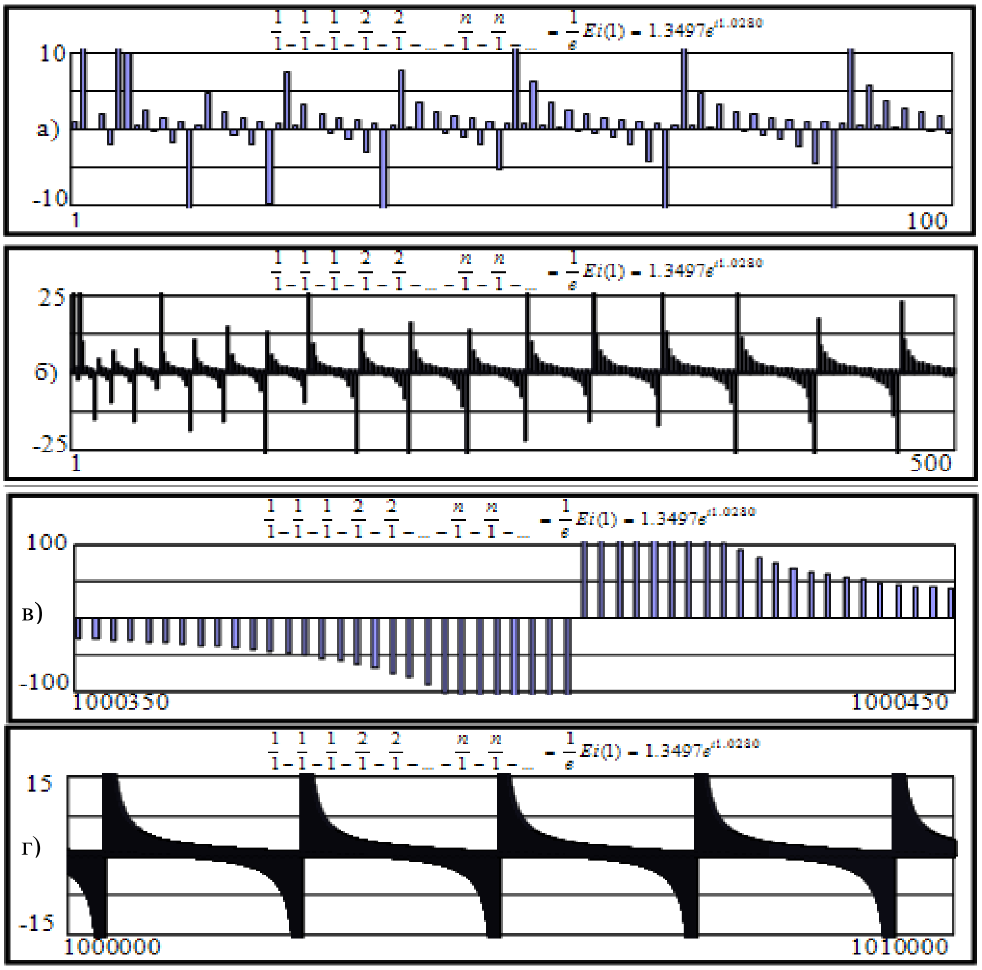


Рис. 3. Распределение значений подходящих цепной дроби интегральной показательной функции.

Найдём значение расходящейся цепной дроби (18) при помощи r/φ–алгоритма, который описывается формулами (3) и (4) предисловия. В табл. 6 приведены результаты вычислений цепной дроби, представляющей Ei(1).

Определение значения расходящейся цеп*ной дроби*

$$Ei(1)=e\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{2}{1}-\frac{2}{1}-\frac{3}{1}-\frac{3}{1}-...-\frac{n}{1}-\frac{n}{1}-...\right)=3.6689338967\ldots e^{i1.0280017377}$$

$r_0=3.6689338967..$, $\varphi_0=1.028001737\ldots$

Таблица 6

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$
1	2	3	4	5	6
4	5.43656365	3.23260009	0.43633380	0.00000000	1.02800173
6	1.08731273	3.84423102	0.17529713	0.39269908	0.63530265
16	1.26199375	4.12365173	0.44717838	0.78539816	0.24260357
32	-3.22229391	3.21557146	0.45336243	0.88357293	0.14442880
64	-5.44198600	3.40441763	0.26451626	0.98174770	0.04625403
128	3.40902451	3.44911711	0.21981677	1.03063508	0.00283335
256	2.26696092	3.60976107	0.05917282	1.04310693	0.01510519
512	2.46414684	3.65055907	0.01837481	1.04310693	0.01510519
1024	1.67450019	3.69927410	0.03034020	1.02163120	0.00637053
2048	5.89710924	3.70773799	0.03880409	1.02623314	0.00176889
4096	1.76596456	3.69848222	0.02954832	1.03236907	0.00436733
8192	-2.16761507	3.67756787	0.00863398	1.03428654	0.00628480
16384	-5.45891725	3.66492493	0.00400896	1.02968460	0.00168286
32768	-1.02199219	3.66736597	0.00156791	1.02728775	0.00071397
65536	1.98286910	3.67009386	0.00115907	1.02968460	0.00168286
131072	5.57106207	3.66798677	0.00094711	1.02721585	0.00078588
262144	-8.97247936	3.66782858	0.00110530	1.02751545	0.00048627
524288	6.23221177	3.66849563	0.00043826	1.02756938	0.00043234
1048576	5.89027864	3.66844670	0.00048718	1.02773716	0.00026457
2097152	8.12082269	3.66953895	0.00060305	1.02787255	0.00017918
4194304	7.05859556	3.66906517	0.00013127	1.02781431	0.00018742
8388608	2.28589509	3.66933307	0.00039917	1.02805737	0.00005563

Таким образом, удалось просуммировать расходящийся ряд (17), связанный с интегральной показательной функцией:

$$\frac{1}{e}Ei(1)=1+1!+2!+3!+4!+\ldots=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{2}{1}-\frac{2}{1}-\frac{3}{1}-\frac{3}{1}-\ldots-\frac{n}{1}-\frac{n}{1}-\ldots=1{,}34970..e^{i1.02800..}. \quad (19)$$

Аналогичным образом, преобразуя ряды в соответствующие цепные дроби, а затем находя значения расходящихся в классическом смысле цепных дробей при помощи r/φ - алгоритма, то есть формул (3) и (4) предисловия, можно просуммировать и другие расходящиеся ряды. Например,

$$1+1+1+2+5+14+42+132+\ldots=1-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\ldots-\frac{1}{1}-\ldots=e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad (20)$$

$$1+1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot7+\ldots=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{2}{1}-\frac{3}{1}-\frac{4}{1}-\ldots-\frac{n}{1}-\ldots=1{,}050318..e^{i0.809229..}. \quad (21)$$

Цепная дробь (20) представляет комплексный корень квадратного уравнения

$$x^2-2\cos\frac{\pi}{3}x+1=0.$$

Подходящие дроби разложения (20) определяются формулой

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\sin(n+1)\,\pi/3}{\sin n\,\pi/3}.\quad n=1,2,\ldots$$

Можно записать другие цепные дроби, подходящие которых периодически повторяются:

$$e^{i\pi/4}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-}\,\frac{1}{\sqrt{2}-}\ldots\frac{1}{\sqrt{2}-\ldots}\ldots$$

$$e^{i\pi/6}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-}\,\frac{1}{\sqrt{3}-}\ldots\frac{1}{\sqrt{3}-\ldots}\ldots$$

Цепная дробь (21) связана с неполной гамма функцией [541]:

$$\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-}\ldots\frac{n}{1-\ldots}=i\sqrt{\frac{1}{2e}}\Gamma(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=i\sqrt{\frac{\pi}{2e}}erfc(\frac{i}{\sqrt{2}})=1{,}0503178040\ldots e^{i0.8092294339\ldots}. \qquad (22)$$

В табл. 7 приведены результаты определения значения расходящейся цепной дроби (22).

Определение значения расходящейся цепной дроби

$$i\sqrt{\frac{1}{2e}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=i\sqrt{\frac{\pi}{2e}}\,erfc\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-}\ldots\frac{n}{1-\ldots}.$$

r_0 = 1.050317804055…, φ_0 = 0.80922943390… . Таблица 7

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль Комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
8	0.909090	1.018429678599	0.031888125466	m	0.897597901025	0.088368467122	m
16	-0.255298	1.017392202149	0.032925601915		0.837758040957	0.028528607054	m
32	1.232969	1.051369832722	0.001052028657	m	0.709391889520	0.099837544382	
64	5.097151	1.188307933456	0.137990129391		0.847731350968	0.038501917065	
128	2.897390	1.137523550255	0.087205746189		0.816319350932	0.007089917029	m
256	0.485401	1.099518268902	0.049200464837		0.813118098576	0.003888664673	m
512	0.152295	1.073023887296	0.022706083231		0.786935146104	0.022294287798	
1024	0.215155	1.069492823824	0.019175019759		0.798449745780	0.010779688122	
2048	-1.789037	1.045731096537	0.004586707527		0.813406988960	0.004177555057	
4096	-1.076242	1.043640648366	0.006677155698		0.810906821695	0.001677387792	m
8192	1.238412	1.046287186312	0.004030617752		0.805821775752	0.003407658150	
16384	1.513253	1.050413791934	0.000095987869	m	0.804813792780	0.004415641123	
32768	2.634049	1.053561869047	0.003244064982		0.809583067321	0.000353633417	m
65536	-18.763236	1.050054380996	0.000263423069		0.811536156750	0.002306722846	
131072	0.007903	1.050452714611	0.000134910545		0.807694983945	0.001534449958	
262144	0.785107	1.049839458591	0.000478345473		0.810292489546	0.001063055643	
524288	-12.041543	1.050061241159	0.000256562905		0.809985345715	0.000755911812	
1048576	0.846676	1.049973494523	0.000344309541		0.809607069807	0.000377635904	
2097152	0.815962	1.050125044812	0.000192759252		0.809540770488	0.000311336585	m
4194304	0.975265	1.050106631988	0.000211172077		0.809297147852	0.000067713949	m
8388608	0.909983	1.050176943924	0.000140860141		0.809317649265	0.000088215362	
16777216	1.286952	1.050235875462	0.000081928602	m	0.809141582712	0.000087851190	

Метод суммирования расходящихся цепных дробей может быть эффективно использован при решении такой практически важной проблемы, как решение бесконечных расходящихся систем линейных алгебраических уравнений. Расходящиеся СЛАУ, или что эквивалентно, – расходящиеся разностные схемы, будут подробно рассмотрены в третьем параграфе.

Можно указать ещё ряд задач в вычислительной математике, решение которых обеспечивается алгоритмом суммирования расходящихся непрерывных дробей.

2. Построение итерационных алгоритмов решения систем алгебраических уравнений

В книге Г.И Марчука "Методы вычислительной математики" [321] дается такое определение сходимости итерационного метода:

"Мы будем называть итерационный метод

$$B_j \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} = -\left(A\varphi^j - f\right),$$

где $\{B_j\}$ - последовательность невырожденных матриц,$\{\tau_j\}$ - последовательность вещественных параметров, сходящимся, если последовательность $\{\varphi^j\}$ сходится к точному решению φ системы

$$A\varphi = f$$

при любом начальном векторе, и расходящимся – в противном случае".

В этом параграфе рассматривается иной подход к сходимости итерационных алгоритмов, связанный с суммированием рядов, в том числе и расходящихся, преобразованием их в соответствующие цепные дроби. Более подробно этот метод изложен в работе [550].

Рассмотрим систему стандартного вида

$$Ax = b, \tag{23}$$

где $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ – матрица n x n, а $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ и $b = (b_1,\ldots,b_n)^T$ - n-мерные векторы-столбцы, которая тем или иным способом может быть преобразована к эквивалентной системе вида

$$x = Bx + c, \tag{24}$$

где x – тот же вектор неизвестных, а B и c – некоторые новые матрица и вектор, соответственно. В методе простых итераций последовательность приближений $x^{(k)}$ к решению системы x^* начинается с некоторого вектора $x^{(0)} = (x_1^0,\ldots,x_n^{(0)})^T$ и определяется рекуррентным равенством:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0,1,2\ldots \tag{25}$$

Получив приближения $x^{(k)}$, мы можем рассматривать эти приближения x_i как частичные суммы ряда, который сходится, когда сходится итерационный процесс, и расходится в противном случае. Зная частичные суммы ряда, можно найти элементы ряда, первый из которых будет равен $p_i^{(0)} = x_i^{(0)}$, а последующие $p_i^{(j)} = x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}$, то есть можно рассматривать ряд

$$p_i^{(0)} + p_i^{(1)} + p_i^{(2)} + \ldots + p_i^{(k)} + \ldots, \tag{26}$$

частичная k - я сумма которого совпадает со значением $x_i^{(k)}$ приближенного решения СЛАУ (23).

Ряд (26) может медленно сходиться и даже расходиться. Для суммирования ряда (26) будем использовать соответствующие цепные дроби. После того, как найдены коэффициенты соответствующей цепной дроби, можно просуммировать ряд (26), то есть для каждого x_i, получить приближенные значения.

Рассмотрим рекуррентную схему вычисления коэффициентов соответствующих цепных дробей, так как формулы Хейлерманна – Стилтьеса [142] весьма наглядные и удобные в теоретическом отношении, непригодны для практического применения, поскольку подразумевают нахождение значений определителей Ганкеля n-го порядка.

Одним из эффективных рекуррентных алгоритмов является алгоритм Рутисхаузера [398].

Запишем алгоритм Рутисхаузера в несколько модифицированных обозначениях и приведем граф этого алгоритма.

$$\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}x^2 + \alpha_{12}x^3 + \ldots + \alpha_{1k-1}x^k + \ldots = \tag{27}$$

$$\alpha_{00} + \frac{\alpha_{10}x}{1} \,+\, \frac{\alpha_{20}x}{1} \,+\, \frac{\alpha_{30}x}{1} \,+ \ldots +\, \frac{\alpha_{2n,0}x}{1} \,+\, \frac{\alpha_{2n+1,0}x}{1} \,+ \ldots. \tag{28}$$

Коэффициенты непрерывной дроби находятся по рекуррентным формулам

$$\alpha_{2,\nu} = \frac{\alpha_{1,\nu+1}}{\alpha_{1,\nu}},$$

$$\alpha_{3,\nu} = -\alpha_{2,\nu+1} + \alpha_{2,\nu},$$

$$\alpha_{4,\nu} = \frac{\alpha_{2,\nu+1} \cdot \alpha_{3,\nu+1}}{\alpha_{3,\nu}},$$

$$\alpha_{5,\nu} = \alpha_{3,\nu+1} - \alpha_{4,\nu+1} + \alpha_{4,\nu},$$

. . . .

$$\alpha_{2n,\nu} = \frac{\alpha_{2n-2,\nu+1} \cdot \alpha_{2n-1,\nu+1}}{\alpha_{2n-1,\nu}},$$

$$\alpha_{2n+1,\nu} = \alpha_{2n-1,\nu+1} - \alpha_{2n,\nu+1} + \alpha_{2n,\nu}. \tag{29}$$

Элемент таблицы Рутисхаузера определяется по формулам (29) за две операции: при нахождении элемента нечетной строки нужны операции сложения и операция вычитания, при нахождении элемента четной строки используются операции умножения и операция деления.

На рис. 4 приведена граф-схема *QD* - алгоритма Рутисхаузера. Первая строка этой схемы составлена из коэффициентов исходного степенного ряда.

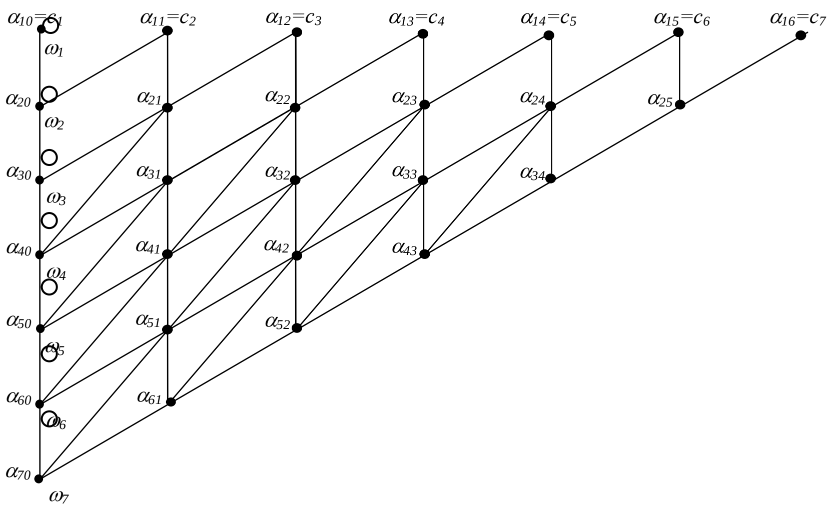


Рис. 4. Схема алгоритма Рутисхаузера.

Заполнение граф - схемы выполнялось по формулам Рутисхаузера (29). Крайний левый столбец этой схемы, то есть коэффициенты a_{i0} , – искомые коэффициенты цепной дроби (28), соответствующей степенному ряду (27).

При приближенных вычислениях особый интерес представляет оценка погрешности аппроксимации. В данном случае неизвестные определяются цепной дробью

$$x_i = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots \quad (30)$$

Предположим, для приближения x_i используется отрезок цепной дроби (30), содержащий *k* звеньев

$$x_i = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k}.$$

Чтобы оценить погрешность, которая возникает при усечении цепной дроби (30), запишем её в аддитивной форме

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a^*_{k+1}}{b^*_{k+1}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots \quad (31)$$

Такая аддитивная запись, то есть запись цепной дроби (30) в виде суммы цепных дробей, позволяет определить погрешность аппроксимации при усечении цепной дроби (30).

В [508] приведены формулы, по которым могут быть найдены значения элементов a^*_{k+1} и b^*_{k+1} аддитивной цепной дроби (31).

$$b^*_{k+1} = \frac{Q_{k+1}}{Q_k}, \qquad a^*_{\kappa+1} = b^*_{\kappa+1}\left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k}\right), \quad (32)$$

где

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k},$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}},$$

$$\frac{Q_{k+1}}{Q_k} = b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{b_k} + \frac{a_k}{b_{k-1}} + \ldots + \frac{a_2}{b_1}.$$

Определив значения a^*_{k+1} и b^*_{k+1}, можем установить значение цепной дроби

$$\frac{a^*_{k+1}}{b^*_{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots,$$

то есть определить погрешность, которую мы допускаем отбрасывая “хвост” цепной дроби (30).

Приведем пример решения СЛАУ итерационным методом с использованием непрерывных дробей. Система (33) относится к системам класса Ab, то есть к системам, имеющим постоянные элементы по диагоналям и “возрастающую” правую часть.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 & 1000 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1 & 1000 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1 & 1000 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1 & 1000 & \dots \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \end{pmatrix} \qquad (33)$$

Из табл. 8 видно, что значения $x_1^{(\kappa)}$,получаемые методом простых итераций, растут по модулю чрезвычайно быстро, как элементы геометрической прогрессии со знаменателем $q = 10^6$. Ряд, образованный по значениям $x_1^{(\kappa)}$, то есть по данным колонки 2 табл. 8, является знакопеременным и расходящимся. Его элементы по модулю возрастают как члены геометрической прогрессии с тем же знаменателем, что и элементы $x_1^{(\kappa)}$, помещенные во второй колонке табл. 8. Тем не менее, соответствующая цепная дробь на нечетных подходящих приближает x_1 с приемлемой точностью.

x_1=5.12512989039E-01 Таблица 8

$n_{\text{итер}}$	Значение x_1 по методу итераций	Коэффициенты ряда	Коэффициенты дроби	Значение x_1 по методу цепных дробей	Погрешность абсолютная
1	-5.24798999000E+08	-5.24798999000E+08	-5.24798999000E+08	-5.24798999000E+08	5.24798999513E+08
2	5.36345076201E+14	5.36345601000E+14	5.36345601000E+14	5.36345076201E+14	5.36345076201E+14
3	-5.48681537254E+20	-5.48682073599E+20	-1.02300097656E+06	-5.13011986298E+05	5.13012498811E+05
4	5.61301212086E+26	5.61301760768E+26	-9.77518970102E-01	-5.13012498788E+08	5.13012499301E+08
5	-5.74211139965E+32	-5.74211701266E+32	9.99999045444E+02	5.12498711876E-01	1.42771628328E-05
6	5.87417996184E+38	5.87418570395E+38	9.58672990404E-05	4.97428564227E+01	4.92303434336E+01
7	-6.00928610096E+44	-6.00929197514E+44	3.80970931376E+07	5.12497419642E-01	1.55693967074E-05
8	6.14749968129E+50	6.14750569057E+50	3.69359547213E+07	-1.56550764823E+03	1.56602016122E+03
9	-6.28889217396E+56	-6.28889832146E+56	1.36713747589E+04	5.09006198930E-01	3.50679010944E-03
…	…	…	…	…	…
191	-3.94402341146E+1150	-3.94402726681E+1150	-2.43652930791E+06	7.16836480402E-01	2.04323491364E-01
192	4.03473594993E+1156	4.03473989395E+1156	-7.42302705734E+05	-3.30064478048E+05	3.30064990561E+05
193	-4.12753487678E+1162	-4.12753891151E+1162	-9.31951174554E+05	7.71214975746E-01	2.58701986707E-01
194	4.22246817894E+1168	4.22247230648E+1168	-3.78214283247E+06	-1.26711004448E+05	1.26711516961E+05
195	-4.31958494706E+1174	-4.31958916953E+1174	-7.80794970642E+05	5.07807998907E-01	4.70499013174E-03
196	4.41893540084E+1180	4.41893972042E+1180	-2.48738996781E+05	1.35672824415E+05	1.35672311902E+05
197	-4.52057091506E+1186	-4.52057533399E+1186	-3.27191164487E+05	7.08055931520E-01	1.95542942481E-01
198	4.62454404610E+1192	4.62454856668E+1192	-2.56671615264E+06	1.84328906334E+05	1.84328393821E+05
199	-4.73090855917E+1198	-4.73091318371E+1198	-2.51162975447E+06	5.03416129713E-01	9.09685932632E-03
200	4.83971945603E+1204	4.83972418693E+1204	-5.91110804443E+04	1.13520546672E+04	1.13515421542E+04

В табл. 9 приведены абсолютная и относительная погрешности в определении x_i (i = 1, 2, ..., 1024) для системы (33). Минимальные погрешности для x_i достигаются при различном числе итераций: 5, 7, 13.

Таблица 9

i	Значение x_i по методу Гаусса	Значение x_i по методу цепных дробей	$n_{\text{итер,}}$ min e	Погрешность абсолютная	Погрешность относительная
1	5.12512989039E-01	5.12498711876E-01	5	1.42771628328E-05	2.78571726729E-05
2	5.11511988038E-01	5.11473135150E-01	5	3.88528888324E-05	7.59569467401E-05
4	5.09509986036E-01	5.09516682086E-01	13	6.69605009377E-06	1.31421371068E-05
8	5.05505982032E-01	5.05528205833E-01	7	2.22238006875E-05	4.39634771445E-05
16	4.97497974024E-01	4.97505374027E-01	7	7.40000247835E-06	1.48744374143E-05
32	4.81481958008E-01	4.81552866439E-01	13	7.09084308240E-05	1.47271210571E-04
64	4.49449925976E-01	4.49554637436E-01	13	1.04711460030E-04	2.32976921294E-04
128	3.85385861912E-01	3.85452658841E-01	13	6.67969286001E-05	1.73324803013E-04
256	2.57257733784E-01	2.57225276117E-01	5	3.24576676351E-05	1.26167898464E-04
512	1.00147752789E-03	1.08105412130E-03	13	7.95765934114E-05	7.94591902415E-02
1024	-5.11511034985E-01	-5.11444332725E-01	13	6.67022596167E-05	1.30402386370E-04

3.Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Г.И.Марчук [321] отмечал во введении к курсу «Методы вычислительной математики»: «Всякая редукция задач математической физики в конечном итоге обычно сводится к алгебраическим уравнениям той или иной структуры». Известно, однако, что при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений встречаются принципиальные трудности. С.К.Годунов и В.С.Рябенький [115] в книге «Разностные схемы» пишут: «Из рассмотрения примеров может сложиться впечатление, что составление разностной схемы и решение по ней дифференциального уравнения не представляет трудностей. Это впечатление обманчиво. Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, часто бывает, что ,казалось бы, разумная разностная схема имеет решение, не сходящееся при измельчении сетки к истинному решению дифференциального уравнения».

В книге В.В.Воеводина. "Вычислительные основы линейной алгебры" [89] есть такие слова: "Теория решения линейных систем достаточно проста и давно известна". В книге В.В.Воеводина рассматриваются СЛАУ конечной размерности и с приведенной выше фразой трудно не согласиться. Но если брать бесконечные СЛАУ, то столь же уверенно можно говорить, что сколь - нибудь вразумительной теории решения бесконечных СЛАУ по сей день не существует.

Довольно часто возникает следующая ситуация: решения системы существуют, но при измельчении шага сетки значения решений системы изменяются, причем, скачкообразно, то есть с ростом размерности СЛАУ не можем найти пределы, к которым бы эти решения стремились. В этом случае говорят, что система является «расходящейся» и решения не могут быть записаны. Возникает вопрос: что это означает для рассматриваемой СЛАУ? Ответ состоит в следующем: если решаемая система «расходится», то возможно существование комплексных решений у данной СЛАУ, которые в силу особенностей традиционных методов решения СЛАУ не могут быть установлены.

Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи r/φ–алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX=B, \tag{34}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{pmatrix}, \quad X=[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], \; B=[b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots]^T.$$

где A – матрица коэффициентов, X – вектор искомых решений, B – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Для того чтобы узнать, «расходится» данная система или нет, решаем одним из классических методов подсистемы смежных порядков, например 1, 2, 3,…, и строим последовательности, состоящие из их решений $\{\bar{x}_i\}$, т.е. последовательности вида

$$\left\{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_1^{(3)}, \dots, \bar{x}_1^{(m)}\right\}, \left\{\bar{x}_2^{(2)}, \bar{x}_2^{(3)}, \bar{x}_2^{(4)}, \dots, \bar{x}_2^{(m)}\right\}, \dots, \left\{\bar{x}_n^{(n)}, \bar{x}_n^{(n+1)}, \bar{x}_n^{(n+2)}, \dots, \bar{x}_n^{(m)}\right\}. \tag{35}$$

Если эти последовательности стремятся к некоторым «своим» пределам с ростом размерности m системы, то последовательность корней $\left\{\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, \bar{x}_3^{(m)}, \dots, \bar{x}_i^{(m)}\right\}$, $m\to\infty$, будет являться, с некоторой степенью точности, искомым решением для рассматриваемой БСЛАУ. В случае если пределы последовательностей (35) отсутствуют, требуется использовать уже упомянутый выше r/φ–алгоритм, что составляет следующий этап решения расходящихся БСЛАУ. Следует отметить, что при решении «расходящейся» СЛАУ m>>n, что обусловлено r/φ-алгоритмом, требующим для определения комплексного числа большого количества вещественных «отсчетов».Предложенный в [518] r/φ–алгоритм позволяет использовать полученные в общем случае «по Гауссу» вещественные решения расширяющейся системы (34) для получения множества комплексных решений исходной системы, если они имеются.

При решении расходящихся БСЛАУ модуль r_i комплексного корня $\overline{x}_i$ находится по формуле

$$r_i = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\prod_{p=i}^{m} \overline{x}_i^{(p)}},\ i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{36}$$

где $\overline{x}_i^{(p)}$ - значение вещественной неизвестной $\overline{x}_i$, полученное «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ размерности p.

Модуль аргумента φ_i комплексного корня x_i БСЛАУ определяется следующим образом:

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m\to\infty} \frac{k_i^{(m)}}{m} \tag{37}$$

где $k_i^{(m)}$ – количество отрицательных значений $\overline{x}_i$, полученных «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ из общего количества m значений $\overline{x}_i$, найденных из «расширяющейся» системы.

Коэффициенты r_i и $|\varphi_i|$ комплексных решений x_i определяются следующим образом:

$$r_1^{(1)} = \left|\overline{x}_1^{(1)}\right|, \qquad \left|\varphi_1^{(1)}\right| = \pi \cdot k_1^{(1)};$$

$$r_1^{(2)} = \sqrt{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)}\right|}, \qquad \left|\varphi_1^{(2)}\right| = \pi \cdot k_1^{(2)} / 2,$$

$$r_1^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)} \cdot \overline{x}_1^{(3)}\right|}, \qquad \left|\varphi_1^{(3)}\right| = \pi \cdot k_1^{(3)} / 3,$$

$$r_1^{(4)} = \sqrt[4]{\left|\overline{x}_1^{(1)} \cdot \overline{x}_1^{(2)} \cdot \overline{x}_1^{(3)} \cdot \overline{x}_1^{(4)}\right|}, \quad \left|\varphi_1^{(4)}\right| = \pi \cdot k_1^{(4)} / 4,$$

……………..…………………………………...…………….

$$r_2^{(1)} = \left|\overline{x}_2^{(1)}\right|, \qquad \left|\varphi_2^{(1)}\right| = \pi \cdot k_2^{(1)};$$

$$r_2^{(2)} = \sqrt{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)}\right|}, \qquad \left|\varphi_2^{(2)}\right| = \pi \cdot k_2^{(2)} / 2,$$

$$r_2^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)} \cdot \overline{x}_2^{(4)}\right|}, \qquad \left|\varphi_2^{(3)}\right| = \pi \cdot k_2^{(3)} / 3,$$

$$r_2^{(4)} = \sqrt[4]{\left|\overline{x}_2^{(2)} \cdot \overline{x}_2^{(3)} \cdot \overline{x}_2^{(4)} \cdot \overline{x}_2^{(5)}\right|}, \quad \left|\varphi_2^{(4)}\right| = \pi \cdot k_2^{(4)} / 4,$$

……………..…………………………………...…………….

Несмотря на кажущуюся сложность, данный метод решения БСЛАУ достаточно экономичен, а главное – метод позволяет решать расходящиеся в традиционном смысле БСЛАУ, что не обеспечивают известные алгоритмы решения СЛАУ.

В качестве примера рассмотрим решение при помощи r/φ–алгоритма расходящейся бесконечной системы (38)

Решить систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}. \qquad (38)$$

В табл.10-14 приведены результаты решения системы (38) с использованием r/φ-алгоритма, то есть формул (36) и (37). В первых колонках таблиц указана размерность решаемых систем. Во вторых колонках помещены значения неизвестных x_i (i=1,2,512,1024,2048), полученные по методу прогонки. Как видно из таблиц, значения x_i, полученные «по прогонке» для расходящихся систем, не стремятся к каким-либо пределам. В то же время в колонках 3 и 4 таблиц 1-5 с ростом размерности системы (38) устанавливаются значения, соответственно, модулей и аргументов комплексных решений x_i системы (38).

Для достижения необходимой точности при определении модуля и аргумента комплексного числа необходимо брать значительное число значений подходящих расходящихся цепных дробей. Классические алгоритмы, – обратный рекуррентный алгоритм (BR-алгоритм) и прямой рекуррентный алгоритм (FR-алгоритм), оказываются неэффективными при вычислении значений длинных серий подходящих дробей. BR-алгоритм требует недопустимо больших затрат машинного времени, так как каждую подходящую дробь приходится вычислять заново, а FR-алгоритм приводит к переполнению разрядной сетки компьютера или появлению «машинного нуля». В [508] были рассмотрены алгоритмы, эффективные при вычислении значений длинных последовательностей подходящих цепных дробей. Нами использовался так называемый Δ – алгоритм. Определим число операций, необходимых при нахождении значений подходящей дроби Δ – алгоритмом.

Известна формула

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{Q_{n-1} \cdot Q_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_n \cdot Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\varphi_n} - 1, \qquad \varphi_n = Q_n / Q_{n-1},$$

$$\varphi_n = b_n + \frac{a_n}{\varphi_{n-1}}, \quad \varphi_1 = b_1, \quad n = 1,2,\dots \qquad (39)$$

Таким образом, можно записать

$$\Delta f_n = \left(\frac{b_n}{\varphi_n} - 1 \right) \cdot \Delta f_{n-1}, \quad \Delta f_1 = \frac{a_1}{b_1}. \qquad (40)$$

Так как $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$, то используя формулы (39) и (40), можно находить значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления.

Таблица 10

Размерность системы, m	Значение $x_1^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_1^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_1^{(m)}$
1	1,000000000000E+00	---	---
2	2,500000000000E-01	5,000000000000E-01	0,000000000000E+00
3	1,176470588235E-01	3,086789594993E-01	0,000000000000E+00
4	-2,000000000000E-01	2,769413275131E-01	7,853981633974E-01
7	5,511811023622E-02	2,222264956834E-01	4,487989505128E-01
8	-4,250000000000E+00	3,213623350779E-01	7,853981633974E-01
15	-4,316594612571E-01	2,586318164389E-01	8,377580409573E-01
16	3,566826367091E-01	2,638802890571E-01	7,853981633974E-01
31	2,368807660622E-01	2,338062307929E-01	7,093918895203E-01
32	1,059969835469E-01	2,280970928948E-01	6,872233929728E-01
63	3,535238227882E-01	2,262750841807E-01	7,479982508547E-01
64	1,745241108523E-01	2,253588030476E-01	7,363107781851E-01
127	-3,252270368534E-01	2,200670942025E-01	7,421085008480E-01
128	3,769412205239E-01	2,209942810126E-01	7,363107781851E-01
255	2,545459857837E-01	2,245282017180E-01	7,022383578612E-01
256	1,213393341306E-01	2,239890962004E-01	6,994952392759E-01
511	4,544313219042E-01	2,191004764571E-01	7,070120453284E-01
512	2,021042090470E-01	2,190659250807E-01	7,056311624274E-01
1023	-1,468533026117E-02	2,191323997622E-01	7,063209289596E-01
1024	8,316406972992E-01	2,194179980411E-01	7,056311624274E-01
2047	7,182382967496E-01	2,184842239440E-01	7,029064168755E-01
2048	2,349945882313E-01	2,184919957063E-01	7,025632008516E-01
4095	8,970276633117E-02	2,184996917478E-01	7,027347669568E-01
4096	-5,225224025607E-01	2,185462070065E-01	7,033301912456E-01

Таблица 11

Размерность системы, m	Значение $x_2^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_2^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_2^{(m)}$
2	2,500000000000E-01	---	---
3	2,941176470588E-01	2,711630722733E-01	0,000000000000E+00
4	4,000000000000E-01	3,086789594993E-01	0,000000000000E+00
7	3,149606299213E-01	2,796171509701E-01	0,000000000000E+00
8	1,750000000000E+00	3,633672992415E-01	0,000000000000E+00
15	4,772198204190E-01	3,146580878184E-01	0,000000000000E+00
16	2,144391210970E-01	3,067161002707E-01	0,000000000000E+00
31	2,543730779793E-01	2,852720846243E-01	-1,047197551197E-01
32	2,980010054844E-01	2,856740808728E-01	-1,013416985029E-01
63	2,154920590706E-01	2,840796761355E-01	-1,013416985029E-01
64	2,751586297159E-01	2,839358375615E-01	-9,973310011396E-02
127	4,417423456178E-01	2,821002267203E-01	-1,246663751425E-01
128	2,076862598254E-01	2,814208206787E-01	-1,236847501413E-01
255	2,484846714054E-01	2,878711791825E-01	-1,607901751837E-01
256	2,928868886231E-01	2,878906799017E-01	-1,601596254771E-01
511	1,818562260319E-01	2,819164885233E-01	-1,601596254771E-01
512	2,659652636510E-01	2,818843567438E-01	-1,598462015525E-01
1023	3,382284434204E-01	2,832864475979E-01	-1,629201669670E-01
1024	5,611976756693E-02	2,828384811551E-01	-1,627609097168E-01
2047	9,392056775013E-02	2,818434626748E-01	-1,658318702775E-01
2048	2,550018039229E-01	2,818296832207E-01	-1,657508581278E-01
4095	3,034324112229E-01	2,820287811482E-01	-1,657508581278E-01
4096	5,075074675202E-01	2,820692462138E-01	-1,657103817278E-01

Таблица 12

Размерность системы, m	Значение $x_{512}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{512}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{512}^{(m)}$
512	2,021042090470E-01	---	---
1023	3,757442030826E-01	2,582764972776E-01	-4,479223900626E-01
1024	-3,021300469698E-01	2,583554658512E-01	-4,531732092898E-01
2047	-2,112991322592E-01	2,569327328361E-01	-4,561036209313E-01
2048	1,757602938211E-01	2,568692692281E-01	-4,558068716659E-01
4095	2,921333954416E-01	2,568295399474E-01	-4,540583132141E-01
4096	7,825019575690E-01	2,569093653590E-01	-4,539316581756E-01

Таблица 13

Размерность системы, m	Значение $x_{1024}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{1024}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{1024}^{(m)}$
1024	8,316406972992E-01	---	---
2047	7,202060392628E-01	2,256697856946E-01	6,626797003666E-01
2048	2,453475076446E-01	2,256881929093E-01	6,620331835858E-01
4095	1,025767690142E-01	2,257655616882E-01	6,616570465080E-01
4096	-4,990251548082E-01	2,258238406288E-01	6,624640545155E-01

Таблица 14

Размерность системы, m	Значение $x_{2048}^{(m)}$ по методу прогонки	Модуль комплексного числа, $r_{2048}^{(m)}$	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{2048}^{(m)}$
2048	2,349945882313E-01	---	---
4095	3,056479485523E-01	2,768277496489E-01	-2,454369260617E-01
4096	6,033643987254E-01	2,769330325520E-01	-2,453171423008E-01

В табл. 15 приведены результаты проверки решения расходящейся бесконечной системы (38), полученного при помощи r/φ-алгоритма. В первой колонке табл.15 указаны номера строк системы (38) , по которым проводилась проверка. Во второй колонке приведены значения проверяемых строк системы (38) после подстановки найденных комплексных x_i из решаемой системы (38) размерностью 4096. В третьей колонке даны значения правой части системы (38), в четвертой – абсолютные погрешности, допущенные при решении системы (38) при помощи r/φ-алгоритма.

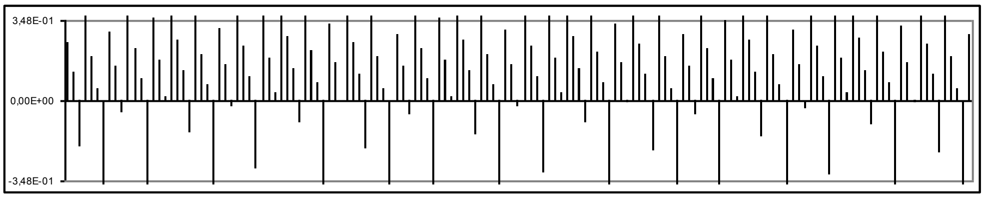
Таблица 15

Номер строки, n	Значение левой части системы	Значение правой части	Абсолютная погрешность
1	1,001299469052E+00 + i1,762678328659E-03	1	1,299469051622E-03 + i1,762678328659E-03
2	1,001615385287E+00 + i1,823158910945E-03	1	1,615385286690E-03 + i1,823158910945E-03
4	1,001420584071E+00 + i1,786263723479E-03	1	1,420584071188E-03 + i1,786263723479E-03
8	1,000966887833E+00 + i1,224856975491E-03	1	9,668878325528E-04 + i1,224856975491E-03
16	1,001094874798E+00 + i1,078635879098E-03	1	1,094874797582E-03 + i1,078635879098E-03
32	1,001217090677E+00 + i1,378751449401E-03	1	1,217090677040E-03 + i1,378751449401E-03
64	1,000939873348E+00 + i9,321736272402E-04	1	9,398733476283E-04 + i9,321736272402E-04
128	1,001321599553E+00 + i3,972567037168E-04	1	1,321599553336E-03 + i3,972567037168E-04
256	1,000792866804E+00 + i1,707477617846E-03	1	7,928668038036E-04 + i1,707477617846E-03
512	1,001030405321E+00 + i1,250966938645E-03	1	1,030405321258E-03 + i1,250966938645E-03
1024	1,000587637913E+00 + i2,199988158475E-03	1	5,876379127570E-04 + i2,199988158475E-03
2048	1,000849453587E+00 + i4,776958470371E-03	1	8,494535870614E-04 + i4,776958470371E-03

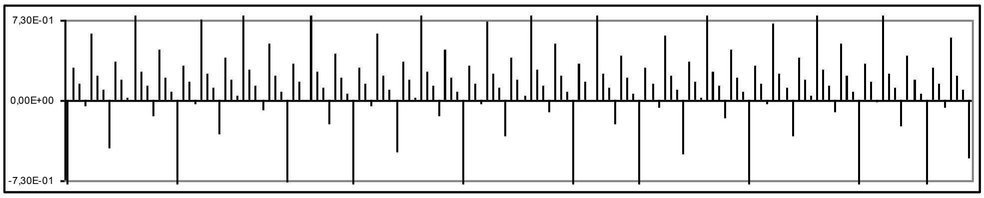
Из табл.15 можно заключить, что погрешности, допущенные при решении системы (38) с использованием r/φ – алгоритма, весьма невелики ($\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$).

На рис. 5 показаны вещественные значения $\bar{x}_i^{(m)}$ (i = 1, 2, 4), полученные методом прогонки из решения «расширяющейся» системы (38). Как видно из графиков, значения $\bar{x}_i^{(m)}$ с расширением системы (38) не стремятся к каким-либо пределам, а осциллируют. Для каждого $\bar{x}_i^{(m)}$ (i = 1, 2, 4) приведены значения первых и последних 150 “подходящих”, полученных из расширяющихся СЛАУ.

$\overline{x}_1^{(m)}$

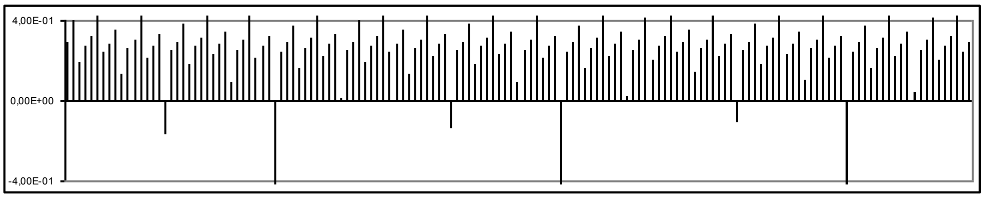


1 150

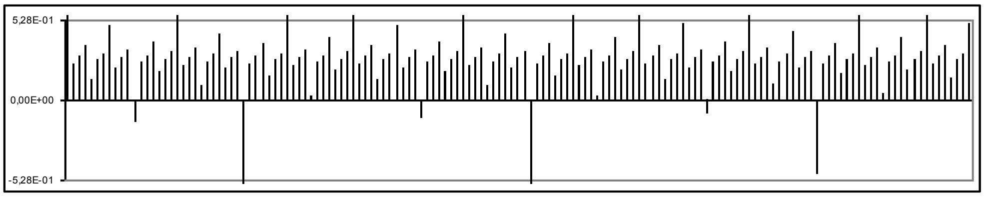


3946 4096

$\overline{x}_2^{(m)}$

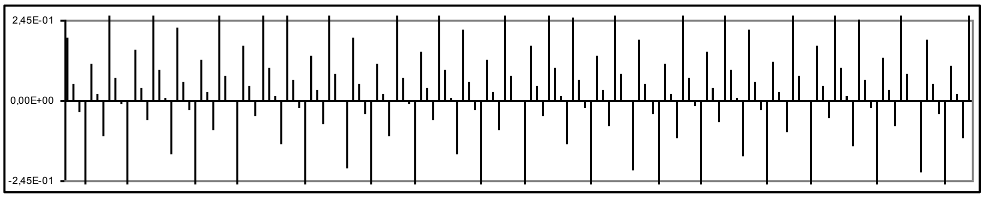


1 150

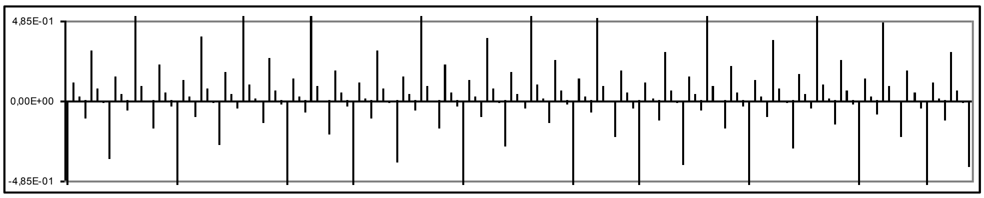


3945 4095

$\overline{x}_4^{(m)}$



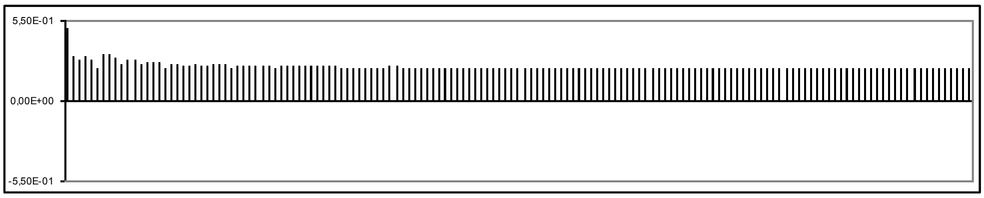
1 150



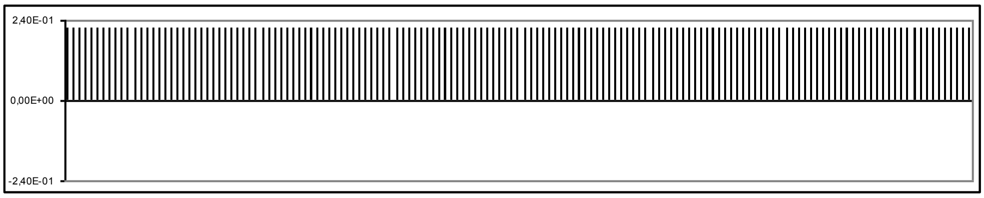
3943 4093

Рис. 5. Значения $\bar{x}_i^{(m)}$ (i = 1, 2, 4) расширяющейся системы (38).

$r_1^{(m)}$

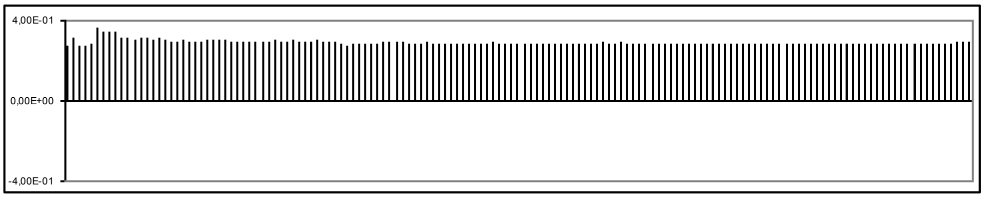


1 150

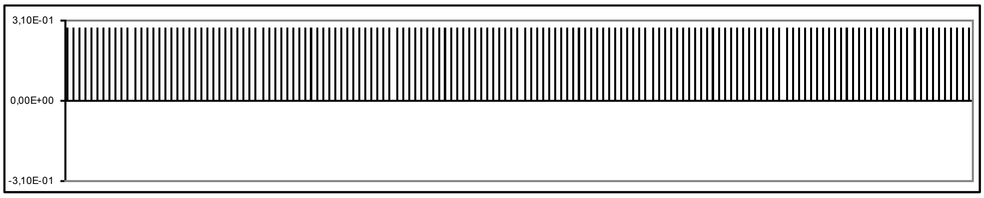


3946 4096

$r_2^{(m)}$

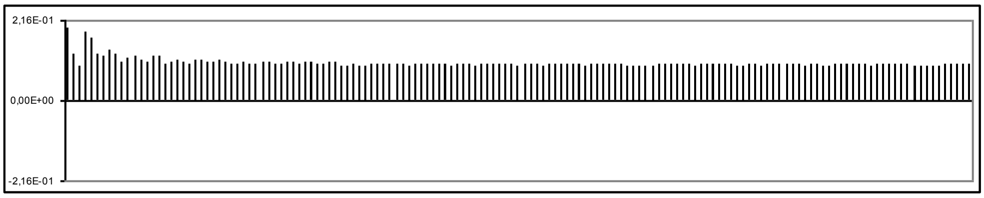


1 150

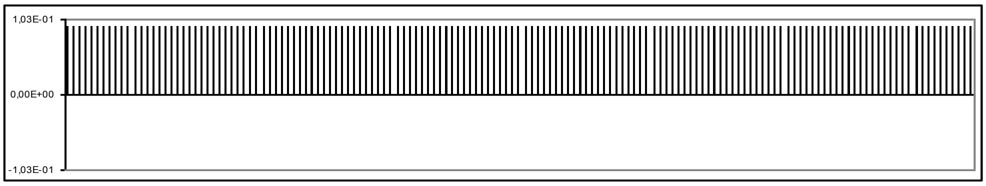


3945 4095

$r_4^{(m)}$



1 150



3943 4093

Рис.6. Значения модуля $r_i^{(m)}$ комплексных $x_i^{(m)}$ (i = 1, 2, 4) системы (38).

На рис.6 показаны значения модулей $r_i^{(m)}$ комплексных неизвестных x_i (i = 1, 2, 4), полученные при решении «расширяющейся» системы (38) с использованием r/φ-алгоритма. Алгоритм позволяет устанавливать комплексное число, являющееся значением расходящейся цепной дроби, по вещественным подходящим дробям. Для определения модуля комплексного числа используется формула (36).

В случае определения комплексных неизвестных расходящихся бесконечных систем вместо значений подходящих дробей берутся последовательные значения $\bar{x}_i^{(m)}$, получаемые из решения «расширяющихся» систем по методу прогонки, которые приведены во вторых колонках табл. 10-14.

Таким образом, при помощи вычислительной процедуры, описываемой формулой (36) из осциллирующих последовательностей значений $\bar{x}_i^{(m)}$, показанных на рис. 5, получены «сходящиеся» последовательности (рис. 6), которые позволяют установить значения модулей комплексных x_i (i=1, 2, …), являющихся решениями расходящейся системы (38).

Рассматриваемый способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет, при определенных условиях, за последовательностью вещественных «подходящих дробей» усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой последовательностью «подходящих дробей» или «отсчетов». Признаком комплексности такой последовательности служат перемены знаков ее элементов, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, признак комплексности устанавливается из «поведения» подходящих дробей. Параметры же комплексного числа $r_0 e^{i\varphi_0}$,то есть его модуль r_0 и аргумент φ_0, могут быть определены r/φ-алгоритмом, в данном случае определяемом формулами (36) и (37).

Оценим вычислительную сложность r/φ – алгоритма. Оценку проведем на примере расходящихся обыкновенных цепных дробей, хотя r/φ – алгоритм применим к непрерывным дробям со значительно более сложными графами.

При вычислении значения n-звенной цепной дроби по классическому BR-алгоритму требуется выполнения $2n$ операций – n операций сложения и n операций деления, причем, во многих практически важных случаях имеет место высокая скорость сходимости, то есть используются цепные дроби с небольшим количеством звеньев.

При определении значения расходящейся в классическом смысле цепной дроби при помощи r/φ – алгоритма необходимо вычислять длинную серию значений подходящих дробей. Чтобы определить комплексное число, которое является значением расходящейся цепной дроби с действительными элементами с точностью 7-8 десятичных разрядов, надо взять число отсчетов, то есть значений подходящих дробей, порядка 10^6 [521]. Поэтому следует подчеркнуть, что при использовании r/φ – алгоритма для решения разнообразных практически важных задач, в частности, разностных задач, необходимы компьютеры с высокими техническими характеристиками.

По «отсчетам», приведенным во вторых колонках табл. 10 – 14, можно, помимо модулей, найти аргументы φ_i комплексных x_i «расширяющейся» системы (38). Для этого надо использовать формулу (37).

Формула (37) определяет модуль аргумента комплексного x_i, но не знак аргумента. Знак аргумента определяется из динамики распределения на «периоде» отсчетов $\bar{x}_i^{(m)}$, полученных по прогонке. Можно сформулировать следующие алгоритмы.

Алгоритм Z_1.

Если модуль аргумента комплексного числа, являющегося значением «расходящейся» цепной дроби, установленный из анализа знаков подходящих дробей по формуле (37), лежит в интервале $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, *то знак аргумента комплексного числа будет* ***положительным,*** *если на «периодах» положительные подходящие дроби, составляют* ***убывающие*** *последовательности. Если на периодах положительные подходящие дроби составляют* ***возрастающие*** *последовательности, то разложение определяет значение комплексного числа с* ***отрицательным*** *аргументом (рис 7).*

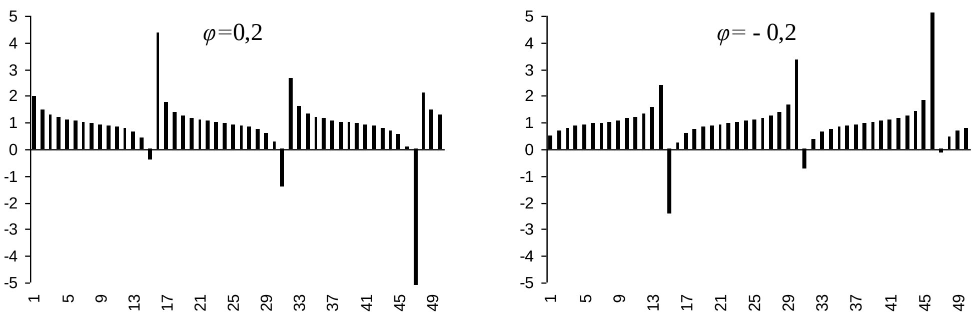


Рис.7. Определение знака аргумента ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

Алгоритм Z_2.

Если модуль аргумента комплексного числа, являющегося значением «расходящейся» цепной дроби, определенный по формуле (37), лежит в интервале $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi$, *то знак аргумента этого комплексного числа будет* ***положительным****, если на «периоде» модули подходящих дробей, имеющих отрицательные значения, составляют* ***убывающую*** *последовательность. Если «на периоде» отрицательные подходящие дроби составляют по модулю* ***возрастающую*** *последовательность, то цепная дробь определяет значение комплексного числа, которое имеет* ***отрицательный*** *аргумент (рис. 8).*

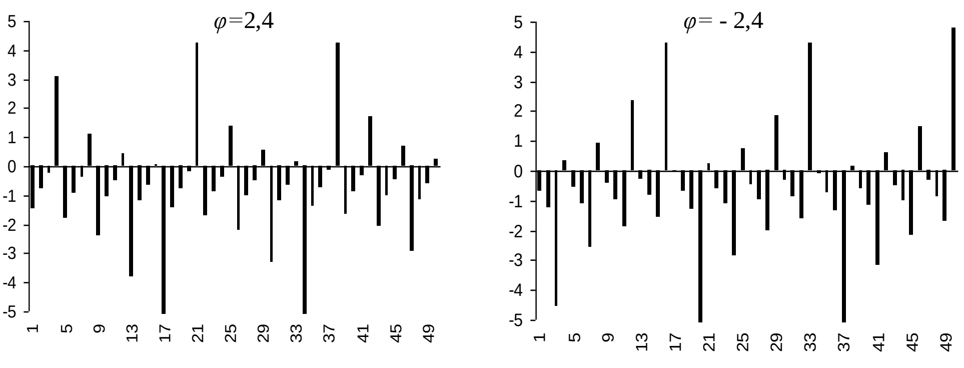


Рис. 8. Определение знака аргумента ($\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$).

Графики аргументов φ_i (i = 1, 2, 4) комплексных решений x_i БСЛАУ (38) приведены на рис. 9.

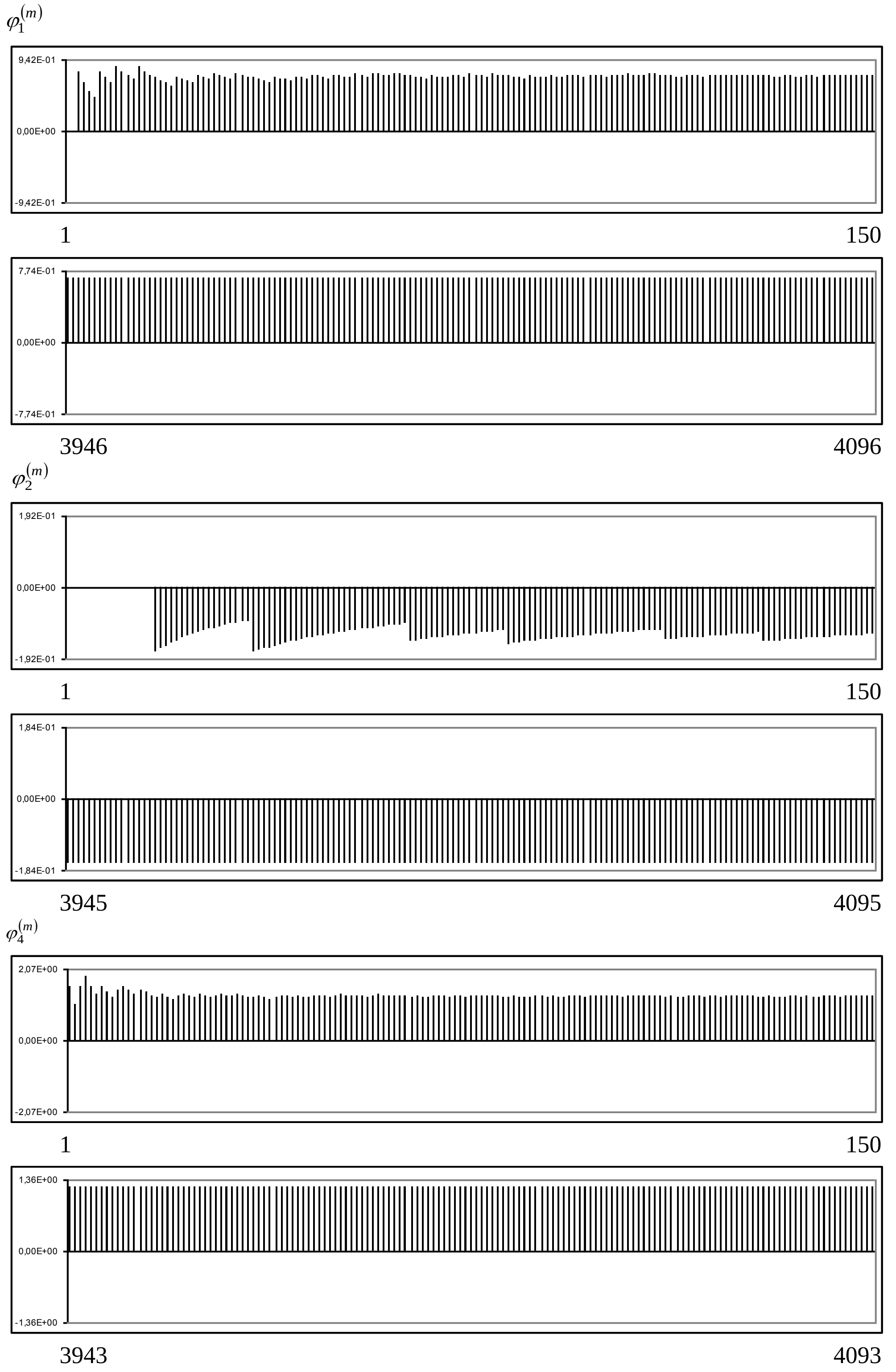


Рис. 9. Значения аргумента φ_i комплексных x_i $(i=1,2,4)$ системы (38).

На рис. 10 показано размещение в комплексной плоскости значений неизвестных x_i (i=1,2,…, 2048) бесконечной системы (38).

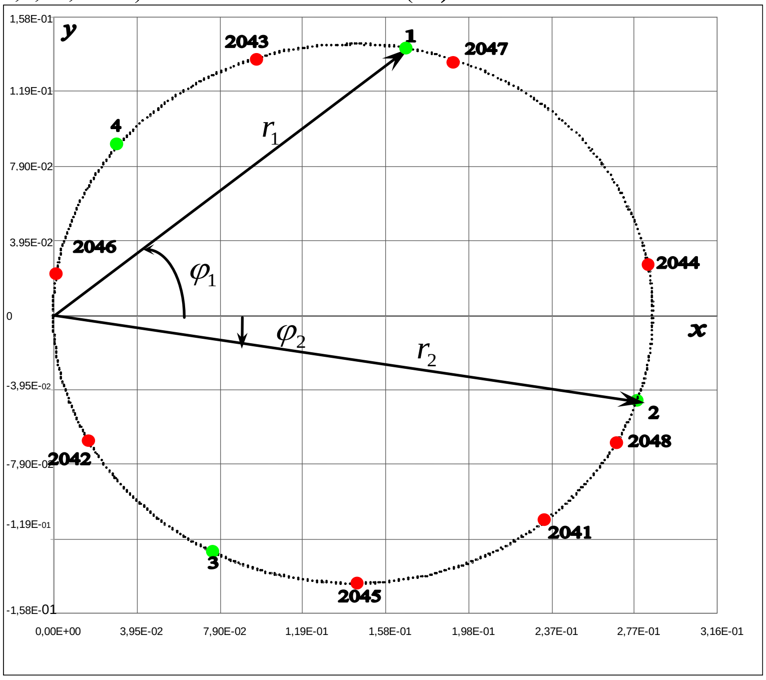


Рис.10. Расположение x_i БСЛАУ (38) на комплексной плоскости.

Запишем значения неизвестных x_i (i=1,2,…, 2048) системы (5), которые получены при помощи r/φ-алгоритма.

$$x_1 = 0.218546e^{i0.703330}, \qquad x_{64} = 0.228523e^{-i0.644988},$$
$$x_2 = 0.282089e^{-i0.165710}, \qquad x_{128} = 0.275002e^{i0.279410},$$
$$x_4 = 0.094043e^{i1.238062}, \qquad x_{256} = 0.151392e^{-i1.010936},$$
$$x_8 = 0.177653e^{i0.902756}, \qquad x_{512} = 0.256909e^{-i0.453931},$$
$$x_{16} = 0.278352e^{i0.232482}, \qquad x_{1024} = 0.2258232e^{i0.662464},$$
$$x_{32} = 0.127645e^{-i1.106706}, \qquad x_{2048} = 0.276933e^{-i0.245317}.$$

Для x_1 и x_2 на рис.10 показаны модули и аргументы комплексных неизвестных. Там же на комплексной плоскости точками отмечены расположения значений x_3, x_4, x_{2041} - x_{2048}. Все значения неизвестных x_i (i=1,2,…, 2048) системы (38) расположены на окружности, что закономерно для неизвестных x_i системы с трехдиагональной матрицей, содержащих одинаковые элементы по диагоналям и с постоянной правой частью.

Комплексные неизвестные x_i укладываются на окружности, которая соприкасается с мнимой осью в начале координат. С ростом размерности системы (38) неизвестные x_i все более плотно располагаются на окружности. Теоретически, каждая неизвестная x_i имеет свою индивидуальную координату. Если смотреть на процесс размещения x_i из центра этой окружности, то можно заметить, что неизвестные x_i укладываются на окружности, двигаясь по часовой стрелке с постоянным «шагом», несколько превышающим угол π/2. Таким образом, предложенный выше r/φ–алгоритм позволяет найти не только действительные, но и комплексные решения БСЛАУ, если они имеются, что недоступно классическим алгоритмам решения БСЛАУ.

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА И НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ

Г. Вебер [76] писал в самом начале XX века в своей "Энциклопедии": "Ближайшая цель заключается в том, чтоб изучить свойства специальных категорий алгебраических чисел. Исследователю открывается здесь неизмеримое поле для дальнейших изысканий. В настоящее время мы имеем более или менее точные сведения только о тех алгебраических числах, к которым приводит деление окружности на равные части и комплексное умножение эллиптических функций".

С тех пор, как писались эти строки, прошло столетие, и немало воды утекло. Вышло множество книг и обзорных статей с кратким и внушительным названием "Теория алгебраических чисел". И вступив в XXI век, обращаясь к алгебраическим числам, то есть корням алгебраических уравнений, можно смело утверждать вслед за Г. Вебером: "Исследователю открывается здесь неизмеримое поле для дальнейших изысканий". Алгебраические уравнения породили много глубоких математических теорий. Именно алгебраические уравнения вызвали к жизни важнейшие классы трансцендентных функций, играющие заметную роль в современной математике – эллиптические и автоморфные функции. Из алгебраических уравнений вышли теории, покоящиеся в основании современного естествознания, – теория функций комплексного переменного и теория групп. Со временем алгебраические уравнения приведут к новым, еще неведомым теориям.

В реферативных журналах "Математика" постоянно появляются сведения о новых публикациях по проблеме нулей полиномов. Некоторые работы помещаются в теоретическом разделе "Поля и многочлены", другие – в выпуске "Вычислительная математика" под рубрикой "Численные методы алгебры". В книге приведена обширная библиография работ по этой тематике. Разумеется, эта библиография не претендует на полноту, но, тем не менее, она может дать некоторое представление о круге идей, используемых при исследовании нулей полиномов.

Мы изучаем алгебраические уравнения с помощью непрерывных дробей – математического объекта, имеющего не менее древнюю историю, чем сами алгебраические уравнения. Из соприкосновения двух фундаментальных теорий можно ожидать интересных результатов. Действительно, при помощи непрерывных дробей, точнее при помощи математических конструкций, являющихся далекими обобщениями классических цепных дробей, удалось предельно просто представленить в аналитической форме корни алгебраических уравнений n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. При этом для получения комплексных корней необходимо использовать r/φ-алгоритм, упоминавшийся в предисловии.

Новый способ определения значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей был разработан в последние годы [518-521]. Этот метод, получивший название "r/φ-алгоритм", распространяется не только на классические цепные дроби, но и на непрерывные дроби иных типов, в частности, на непрерывные дроби Хессенберга и непрерывные дроби Никипорца. Непрерывные дроби Никипорца, или функции Никипорца, которыми можно в аналитическом виде выразить все корни произвольного алгебраического уравнения степени n через его коэффициенты, записываются отношениями определителей Теплица бесконечного порядка. Значения подходящих непрерывных дробей Никипорца, задаваемые отношениями определителей Теплица n-го и $(n-1)$-го порядков, можно находить при помощи стандартных программ для вычисления определителей общего вида. Такой подход показывает возможность решения задачи “в принципе”, но не позволяет установить значения большого числа подходящих дробей, что ограничивает точность при нахождении всех корней полинома. Между тем, для определения подходящих непрерывных дробей, записываемых отношением определителей Теплица, то есть определителей не общего, а весьма специального вида, может быть эффективно использован, после незначительной модификации, известный рекуррентный QD-алгоритм Рутисхаузера. Метод решения алгебраических уравнений названный нами методом Рутисхаузера – Никипорца, будет рассмотрен в третьей главе.

2.1. Функции Никипорца

1. Пусть имеется алгебраическое уравнение степени n:

$$x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=0\,. \tag{1}$$

Запишем следующую производящую функцию

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n}=1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m+\ldots\,. \tag{2}$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного соотношения

$$c_m=-\left(\alpha_1c_{m-1}+\alpha_2c_{m-2}+\ldots+\alpha_nc_{m-n}\right),\quad c_0=1,\ c_1=-\alpha_1\,. \tag{3}$$

Для определения корней алгебраического уравнения (1) Эйткен в статье “On Bernulli’s numerical solution of algebraic equations” (О численном решении алгебраических уравнений методом Бернулли) [577] предложил формулы:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+1}}{c_m}=x_1\,, \tag{4}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+2}&c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}\\c_{m+1}&c_{m+2}\end{vmatrix}}:\frac{c_{m+1}}{c_m}\right)=\frac{x_1x_2}{x_1}=x_2\,, \tag{5}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}&c_{m+3}\\c_{m+2}&c_{m+3}&c_{m+4}\\c_{m+3}&c_{m+4}&c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+1}&c_{m+2}&c_{m+3}\\c_{m+2}&c_{m+3}&c_{m+4}\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+2}&c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}\\c_{m+1}&c_{m+2}\end{vmatrix}}\right)=\frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2}=x_3\,, \tag{6}$$

Для x_i можно записать:

$$x_n=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_i^{(m+1)}}{H_i^{(m)}}:\frac{H_{i-1}^{(m+1)}}{H_{i-1}^{(m)}}\right),$$

где

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \cdots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}, \quad H_0^{(m)} = 1.$$

Таким образом, корень x_i может быть представлен выражением:

$$x_n = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \cdots & c_{m+i+1} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \cdots & c_{m+2i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \cdots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \cdots & c_{m+i} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \cdots & c_{m+2i-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+i-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i-1} \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \cdots & c_{m+2i-4} \end{vmatrix}} \right) \tag{7}$$

Очевидно, что используя формулы Эйткена можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (1), описываемый формулой (4), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Для определения комплексных корней алгебраического уравнения (1) будет использоваться описанный в [520] r/φ - алгоритм.

Запишем формулы Эйткена (4) - (7) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (1).

Формулу (4) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

По аналогии с конструкцией (8) запишутся выражения в виде отношения бесконечных определителей, составленных из коэффициентов α_i исходного алгебраического уравнения (1), для других корней этого уравнения. Сдвигая всякий раз диагональные элементы определителей (8) влево, получим:

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \tag{9}$$

$$x_3=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

– –

$$x_i=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Следует отметить, что формулы (9) – (11) получены из несколько модифицированной записи формул Эйткена, о чём более подробно будет сказано в третьей главе.

Бесконечные поиски решений алгебраических уравнений в радикалах оказались безуспешными. В 1826 г. Абелем было установлено, что невозможно выразить корень уравнения степени выше четвертой какой-либо комбинацией радикалов. Эту задачу, то есть аналитическое представление всех корней алгебраических уравнений n-й степени, можно решить, если ввести новую функцию, которая была названа *функцией Никипорца* [540].

Функцию Никипорца определим отношениями определителей (11). Введём обозначения для функции Никипорца:

$$X_i(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n).$$

Индекс i в обозначении функции Никипорца определяет номер корня. Вместо обозначения $X_i(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ для функции Никипорца иногда будем использовать более компактную запись: $X_i^{(n)}$, где второй индекс соответствует степени алгебраического уравнения. Корни x_i уравнения (1) будут располагаться в порядке уменьшения их модулей:

$$|x_1|\ge|x_2|\ge|x_3|\ge\dots\ge|x_n|.$$

Записывая вместо x_i их выражения в виде отношения определителей (11), получим неравенства, которые назовём *неравенствами Никипорца*. Важно отметить, что формулы (8) - (11) позволяют определять, как действительные корни, так и комплексные. В случае комплексных корней дополнительно используется r/φ-алгоритм, устанавливающий значения комплексных корней, что подробно будет рассматриваться ниже. Приведем функции Никипорца для уравнений второй-пятой степеней.

2. Функции Никипорца для квадратного уравнения:

$$X_1(\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = x_1, \qquad (12)$$

$$X_2(\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = x_2. \qquad (13)$$

Функции Никипорца (12) и (13) определяют корни квадратного уравнения

$$x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 = 0.$$

3. Функции Никипорца для кубического уравнения имеют вид:

$$X_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = x_1, \qquad (14)$$

$$X_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = x_2, \qquad (15)$$

$$X_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=-\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_3 & 0 & 0 & \dots\\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}=x_3\,. \qquad (16)$$

Функции Никипорца (14), (15) и (16) определяют корни кубического уравнения

$$x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=0\,.$$

Определители, входящие в формулы (12)-(16), бесконечно высокого порядка. Для определения комплексных корней необходимо использовать r/φ-алгоритм.

Пример. Определим при помощи функций Никипорца (14)–(16) корни кубического уравнения

$$x^3-2x^2-5x+6=0\,. \qquad (17)$$

Коэффициенты α_i этого уравнения будут:

$$\alpha_1=-2\,,\ \alpha_2=-5\,,\ \alpha_3=6\,.$$

Подставляя значения коэффициентов α_i в формулы (14)–(16), получим:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 0 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}, \qquad (18)$$

$$x_2=-\frac{\begin{vmatrix}5 & -6 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ 2 & 5 & -6 & 0 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -6 & 0 & 0 & \dots\\ 2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 0 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 5 & -6 & 0 & \dots\\ -1 & 2 & 5 & -6 & \dots\\ 0 & -1 & 2 & 5 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}, \qquad (19)$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5 & -6 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 5 & -6 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & -6 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5 & -6 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 5 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5 & -6 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 5 & -6 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & 5 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5 & -6 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 5 & -6 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & 5 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (20)$$

Для обыкновенных цепных дробей фундаментальное значение имеет понятие подходящих дробей. В [520] подходящие дроби для непрерывных дробей Хессенберга представлялись отношением определителей. Запишем несколько подходящих дробей непрерывной дроби Хессенберга (18):

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = 4{,}5\ ,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = 2{,}4444444444\ ,\ \dots .$$

Введём по аналогии подходящие дроби для конструкций вида (11), которые были названы *непрерывными дробями Никипорца* [54] . Для выражения (19) подходящие дроби будут иметь вид

$$\frac{P_0}{Q_0} = -\frac{5}{1} : \frac{2}{1} = -2{,}5\ ,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{5} : \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = -1{,}6444444444\ ,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = -2{,}3108108108\ ,\ \dots .$$

Для выражения (20) подходящие дроби будут определяться следующим образом:

$$\frac{P_0}{Q_0} = -\frac{-6}{1} : \frac{5}{1} = 1{,}2\ ,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}}{-6} : \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{5} = 0{,}8108108108\ ,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = 1{,}062200956938\ ,\ \ldots .$$

В табл. 1-3 приведены результаты вычислений корней полинома

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

при использовании формул (18)–(20). Значения корней полинома (17):

$$x_1 = 3\ ,\ x_2 = -2\ ,\ x_3 = 1\ .$$

Значения определителей, входящих в формулы (8)–(11), находились по стандартной программе вычислений определителей общего вида. Этим обстоятельством, собственно, объясняется сравнительно небольшое число подходящих дробей, использовавшихся при решении уравнений при помощи функций Никипорца, то есть соотношений (8)–(11), составленных из определителей, что зачастую не позволяло получить этим методом корни уравнений с высокой точностью.

В третьей главе будет рассмотрен QD-алгоритм Рутисхаузера, обеспечивающий нахождение большого числа подходящих дробей Никипорца, то есть конструкций вида (11).

Нахождение нулей полинома
$x^3 – 2x^2 – 5x + 6 = 0$

$x_1=3$ Таблица 1

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 – r_i$	min
0	2,000000000000	1,000000000000	m
1	4,500000000000	-1,500000000000	
2	2,444444444444	0,555555555556	m
3	3,500000000000	-0,500000000000	m
4	2,727272727273	0,272727272727	m
5	3,204761904762	-0,204761904762	m
6	2,873699851412	0,126300148588	m
7	3,088417786970	-0,088417786970	m
8	2,942909760589	0,057090239411	m
9	3,038855387416	-0,038855387416	m
10	2,974446337308	0,025553662692	m
11	3,017188424405	-0,017188424405	m
12	2,988608416130	0,011391583870	m
13	3,007624034519	-0,007624034519	m
14	2,994930426515	0,005069573485	m
15	3,003385514051	-0,003385514051	m
16	2,997745560607	0,002254439393	m
17	3,001504098495	-0,001504098495	m
18	2,998997773022	0,001002226978	m
19	3,000668375563	-0,000668375563	m
20	2,999554515860	0,000445484140	m
21	3,000297033640	-0,000297033640	m
22	2,999801997213	0,000198002787	m
23	3,000132010583	-0,000132010583	m
24	2,999911996821	0,000088003179	m
25	3,000058670508	-0,000058670508	m
26	2,999960887093	0,000039112907	m
27	3,000026075611	-0,000026075611	m
28	2,999982616410	0,000017383590	m
29	3,000011589127	-0,000011589127	m
30	2,999992273945	0,000007726055	m

Нахождение нулей полинома
$x^3 – 2x^2 – 5x + 6 = 0$

$x_2=–2$ Таблица 2

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 – r_i$	min
0	-2,500000000000	0,500000000000	m
1	-1,644444444444	-0,355555555556	m
2	-2,310810810811	0,310810810811	m
3	-1,789473684211	-0,210526315789	m
4	-2,162745098039	0,162745098039	m
5	-1,890925599372	-0,109074400628	m
6	-2,078522298714	0,078522298714	m
7	-1,947421824366	-0,052578175634	m
8	-2,036452475127	0,036452475127	m
9	-1,975598351914	-0,024401648086	m
10	-2,016595826604	0,016595826604	m
11	-1,988899155589	-0,011100844411	m
12	-2,007476804607	0,007476804607	m
13	-1,995003419603	-0,004996580397	m
14	-2,003348809774	0,003348809774	m
15	-1,997763843389	-0,002236156611	m
16	-2,001494933957	0,001494933957	m
17	-1,999002347568	-0,000997652432	m
18	-2,000666085714	0,000666085714	m
19	-1,999555659926	-0,000444340074	m
20	-2,000296461321	0,000296461321	m
21	-1,999802283277	-0,000197716723	m
22	-2,000131867519	0,000131867519	m
23	-1,999912068343	-0,000087931657	m
24	-2,000058634744	0,000058634744	m
25	-1,999960904974	-0,000039095026	m
26	-2,000026066670	0,000026066670	m
27	-1,999982620881	-0,000017379119	m
28	-2,000011586892	0,000011586892	m
29	-1,999992275063	-0,000007724937	m
30	-2,000005150158	0,000005150158	m

На рис. 1 показано расположение значений подходящих дробей, определяемых по формулам (18), (19) и (20). Из табл. 1-3 можно заметить, что значения подходящих дробей для всех трёх нулей полинома имеют свойство “вилки”, характерное для знакоположительных обыкновенных цепных дробей. Наличие “вилки” обеспечивает очень простую оценку погрешности аппроксимации действительных нулей полинома.

Нахождение нулей полинома

$x^3 – 2x^2 – 5x + 6 = 0$

$x_3 = 1$ Таблица 3

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 – r_i$	min
0	1,200000000000	-0,200000000000	m
1	0,810810810811	0,189189189189	m
2	1,062200956938	-0,062200956938	m
3	0,957983193277	0,042016806723	m
4	1,017225747960	-0,017225747960	m
5	0,990104511744	0,009895488256	m
6	1,004512063777	-0,004512063777	m
7	0,997597087711	0,002402912289	m
8	1,001152014606	-0,001152014606	m
9	0,999407402199	0,000592597801	m
10	1,000290739459	-0,000290739459	m
11	0,999852770088	0,000147229912	m
12	1,000072993089	-0,000072993089	m
13	0,999963295723	0,000036704277	m
14	1,000018282782	-0,000018282782	m
15	0,999990835462	0,000009164538	m
16	1,000004574546	-0,000004574546	m
17	0,999997710151	0,000002289849	m
18	1,000001144065	-0,000001144065	m
19	0,999999427681	0,000000572319	m
20	1,000000286064	-0,000000286064	m
21	0,999999856936	0,000000143064	m
22	1,000000071521	-0,000000071521	m
23	0,999999964236	0,000000035764	m
24	1,000000017881	-0,000000017881	m
25	0,999999991059	0,000000008941	m
26	1,000000004470	-0,000000004470	m
27	0,999999997765	0,000000002235	m
28	1,000000001118	-0,000000001118	m
29	0,999999999441	0,000000000559	m
30	1,000000000279	-0,000000000279	m

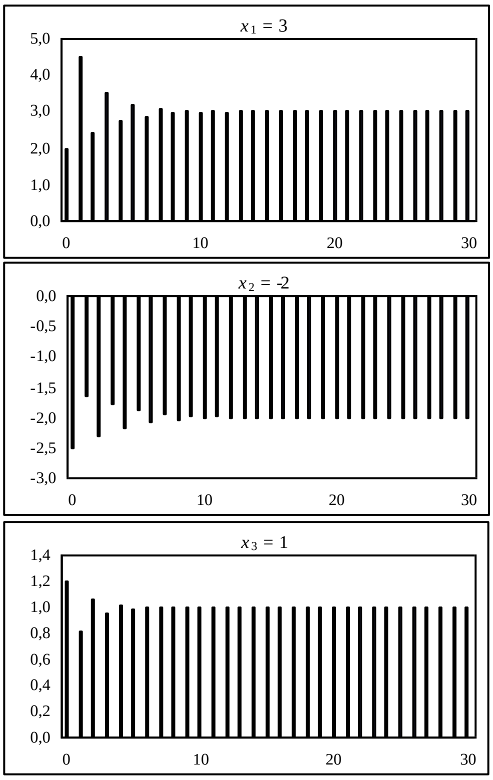


Рис. 1. Распределение значений подходящих дробей (18)–(20).

4. Запишем функции Никипорца для уравнения четвёртой степени

$$x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 . \qquad (21)$$

Старший по модулю корень определяется выражением, эквивалентным непрерывной дроби Хессенберга:

$$X_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$$
$$= -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} . \qquad (22)$$

$$X_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (23)$$

$$X_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (24)$$

$$X_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (25)$$

Решим уравнение четвёртой степени при помощи функций Никипорца.

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0\,. \qquad (26)$$

Это уравнение рассматривал Декарт. Корни уравнения (26):

$$x_1=-5\,,\ x_2=4\,,\ x_3=3\,,\ x_4=2\,. \qquad (27)$$

Запишем функции Никипорца для корней уравнения (26). Здесь $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = -19$, $\alpha_3 = 106$, $\alpha_4 = -120$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{28}$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 19 & -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{29}$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} -106 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 19 & -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{30}$$

$$x_4 = -\frac{\begin{vmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -106 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -106 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -106 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 19 & -106 & 120 & 0 & \dots \\ 4 & 19 & -106 & 120 & \dots \\ -1 & 4 & 19 & -106 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{31}$$

Результаты вычисления корней уравнения (26) по формулам (28)-(31) приведены в табл. 4-7.

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$

$x_1=-5$ Таблица 4

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	4,000000000000	-9,000000000000	m
1	8,750000000000	-13,750000000000	
2	3,142857142857	-8,142857142857	m
3	7,281818181818	-12,281818181818	
4	2,576779026217	-7,576779026217	m
5	7,759205426357	-12,759205426357	
6	1,971276927880	-6,971276927880	m
7	9,752961672474	-14,752961672474	
8	1,239112571898	-6,239112571898	m
9	15,599529780564	-20,599529780564	
10	0,370695586645	-5,370695586645	m
91	-5,000000195821	0,000000195821	m
92	-4,999999843343	-0,000000156657	m
93	-5,000000125325	0,000000125325	m
94	-4,999999899740	-0,000000100260	m
95	-5,000000080208	0,000000080208	m
96	-4,999999935833	-0,000000064167	m
97	-5,000000051333	0,000000051333	m
98	-4,999999958933	-0,000000041067	m
99	-5,000000032853	0,000000032853	m
100	-4,999999973717	-0,000000026283	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$

$x_2=4$ Таблица 5

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	-4,750000000000	8,750000000000	m
1	-4,721804511278	8,721804511278	m
2	-6,458888245512	10,458888245512	
3	-3,572699954990	7,572699954990	m
4	-8,020653078210	12,020653078210	
5	-2,877843621613	6,877843621613	m
6	-10,432003524636	14,432003524636	
7	-2,156750735897	6,156750735897	m
8	-16,450444092013	20,450444092013	
9	-1,314045381192	5,314045381192	m
10	-54,598295384016	58,598295384016	
91	3,999999843347	0,000000156653	m
92	4,000000125329	-0,000000125329	m
93	3,999999899742	0,000000100258	m
94	4,000000080210	-0,000000080210	m
95	3,999999935835	0,000000064165	m
96	4,000000051334	-0,000000051334	m
97	3,999999958934	0,000000041066	m
98	4,000000032854	-0,000000032854	m
99	3,999999973718	0,000000026282	m
100	4,000000021026	-0,000000021026	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$

$x_3=3$ Таблица 6

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	5,578947368421	-2,578947368421	m
1	2,044994591996	0,955005408004	m
2	3,575644019439	-0,575644019439	m
3	2,608174703061	0,391825296939	m
4	3,138053955553	-0,138053955553	m
5	2,828776865113	0,171223134887	
6	3,017880902229	-0,017880902229	m
7	2,917327009881	0,082672990119	
8	2,987841507588	0,012158492412	m
9	2,956424218239	0,043575781761	
10	2,984340675797	0,015659324203	
91	2,999999999997	0,000000000003	m
92	2,999999999998	0,000000000002	m
93	2,999999999998	0,000000000002	m
94	2,999999999999	0,000000000001	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$

$x_4=2$ Таблица 7

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	1,132075471698	0,867924528302	m
1	1,420276909335	0,579723090665	m
2	1,653272948792	0,346727051208	m
3	1,768512738180	0,231487261820	m
4	1,850264987049	0,149735012951	m
5	1,899757261770	0,100242738230	m
6	1,933587301567	0,066412698433	m
7	1,955508286959	0,044491713041	m
8	1,970313349955	0,029686650045	m
9	1,980125074033	0,019874925967	m
10	1,986718557535	0,013281442465	m
61	1,999999999986	0,000000000014	m
62	1,999999999991	0,000000000009	m
63	1,999999999994	0,000000000006	m
64	1,999999999996	0,000000000004	m

На рис. 2 показано распределение значений подходящих непрерывных дробей Никипорца (28)-(31), записанных для уравнения (26). Можно обратить внимание на поведение первых подходящих дробей для x_1 и x_2: они имеют значения со знаком, противоположным знаку корней x_1 и x_2, что может привести к совершенно неверному заключению относительно корней x_1 и x_2, если делать выводы по значениям первых подходящих дробей. Из таблиц 4-7 наблюдаем, что подходящие дроби для x_1 и x_2 в "стационарном режиме" имеют свойство "вилки", то есть точные значения x_1 и x_2 находятся между значениями соседних подходящих дробей. Подходящие дроби для x_3 и x_4 приближают корни "снизу", что не даёт возможность получить простую, как в случае "вилки", оценку аппроксимации корней подходящими дробями. Термин "подходящие дроби" был введён для функций Никипорца (8)-(11), по аналогии с обыкновенными непрерывными дробями, где понятие "подходящие дроби" вводится совершенно естественным образом. Конструкции (8)-(11), помимо названия "функции Никипорца", будут именоваться непрерывными дробями Хессенберга и Никипорца. Примеры обозначения подходящих непрерывных дробей Хессенберга (8) и подходящих непрерывных дробей Никипорца (11) были рассмотрены выше.

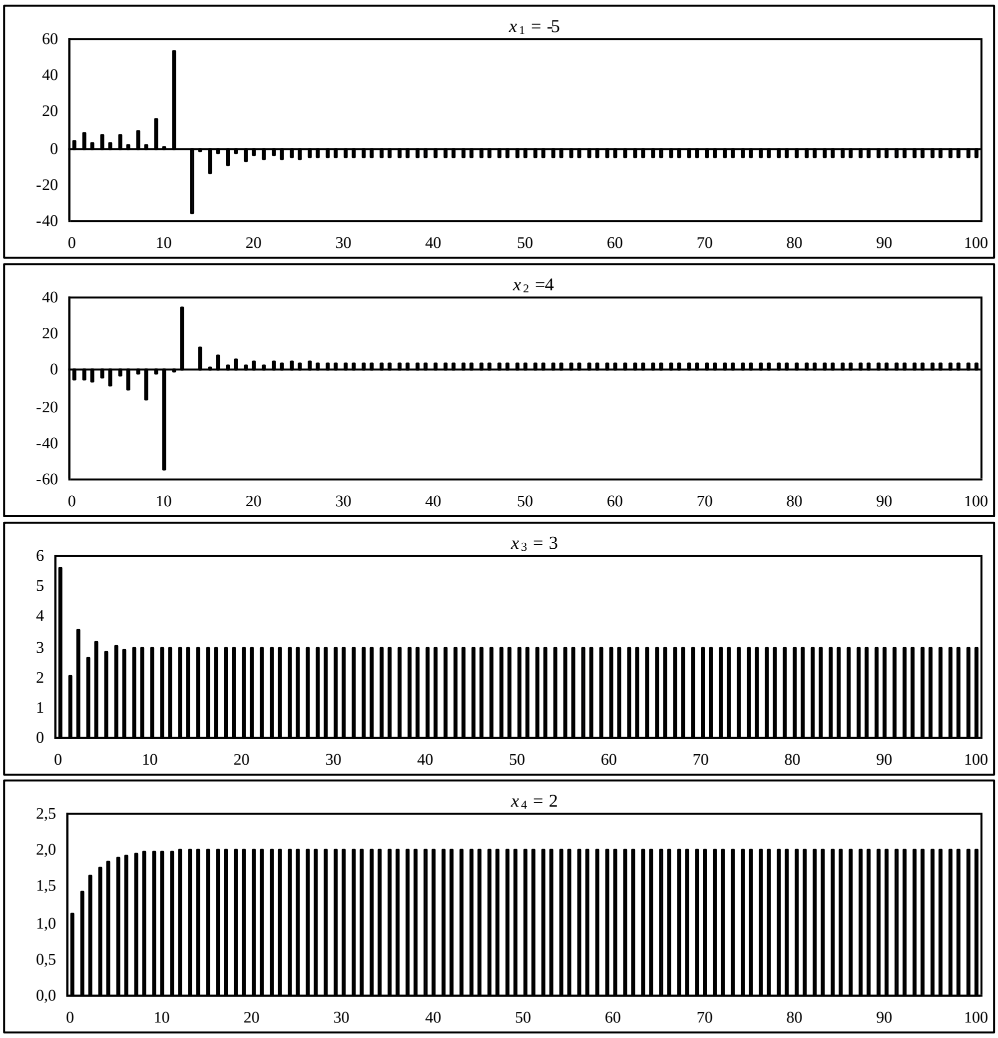


Рис. 2. Распределение значений подходящих дробей (28)–(31).

5. Известно, что попытки найти решения алгебраических уравнений степеней выше четвёртой в радикалах стимулировалось тем обстоятельством, что для уравнений 2, 3 и 4 степени решения в радикалах были найдены. Казалось, что решения в радикалах вот-вот будут найдены для уравнений пятой степени. Не единожды объявлялось, что проблема решена. Но вскоре устанавливалась ошибка. Лишь в 1826 Н. Абель строго доказал теорему о том, что общее алгебраическое уравнение при $n > 4$ неразрешимо в радикалах.

Метод аналогии при решении уравнений в радикалах не сработал. И здесь уместно подчеркнуть, что совершенно аналогичным образом, как то было сделано для алгебраических уравнений 2, 3 и 4 степеней, строятся функции Никипорца для уравнений степени $n > 4$. Например, для уравнения пятой степени функции Никипорца имеют вид:

$$X_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \qquad (32)$$

$$X_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \qquad (33)$$

$$X_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \qquad (34)$$

$$X_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \qquad (35)$$

$$X_5(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (36)$$

Несложно по приведённой схеме записать аналитические выражения для представления корней алгебраических уравнений шестой, седьмой и вообще произвольной степени n через коэффициенты исходного уравнения.

В табл. 8-12 приведены результаты вычисления корней полинома пятой степени

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0 \qquad (37)$$

с использованием непрерывных дробей Хессенберга – формула (38), и непрерывных дробей Никипорца – отношения определителей (39)-(42).

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -15 & -85 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -15 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (38)$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -15 & -85 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -15 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (39)$$

$$x_3=-\frac{\begin{vmatrix} 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (40)$$

$$x_4=-\frac{\begin{vmatrix} -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & -225 & -274 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & 225 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (41)$$

$$x_5=-\frac{\begin{vmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ 0 & -1 & 15 & -85 & -225 & -274 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -274 & 120 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 225 & -274 & 120 & 0 & 0 & \dots \\ -85 & 225 & -274 & 120 & 0 & \dots \\ 15 & -85 & 225 & -274 & 120 & \dots \\ -1 & 15 & -85 & 225 & -274 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (42)$$

На рис. 3а показаны значения подходящих непрерывных дробей Хессенберга (38), приведённые в табл. 8. На рис. 3б даны значения подходящих дробей непрерывной дроби Никипорца, которые были получены при вычислении определителей, входящих в формулу (39). На рис. 3в и 3г показаны значения подходящих дробей, соответствующие данным колонок 2 таблиц 10 и 11. Эти подходящие дроби получены из непосредственного вычисления определителей, входящих, соответственно, в формулы (40) и (41). На рис. 3д приведены значения подходящих дробей непрерывной дроби Никипорца (42), которые имеются во второй колонке таблицы 12. Как уже отмечалось, во всех примерах этого параграфа значения определителей вычислялись непосредственно по стандартным программам.

Нахождение нулей полинома
$x^5–15x^4+85x^3–225x^2+274x–120=0$

$x_1=5$ Таблица 8

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min
0	15,000000000000	-10,000000000000	m
1	9,333333333333	-4,333333333333	m
2	7,500000000000	-2,500000000000	m
3	6,620000000000	-1,620000000000	m
4	6,117824773414	-1,117824773414	m
5	5,801998824221	-0,801998824221	m
6	5,590726705305	-0,590726705305	m
7	5,443309409888	-0,443309409888	m
8	5,337288361552	-0,337288361552	m
9	5,259307197112	-0,259307197112	m
10	5,200961090099	-0,200961090099	m
11	5,156723574200	-0,156723574200	m
12	5,122831734502	-0,122831734502	m
13	5,096650243475	-0,096650243475	m
14	5,076290544887	-0,076290544887	m
15	5,060373395885	-0,060373395885	m
16	5,047875626332	-0,047875626332	m
17	5,038028289069	-0,038028289069	m
18	5,030247217367	-0,030247217367	m
19	5,024084613947	-0,024084613947	m
20	5,019194639535	-0,019194639535	m
21	5,015308532626	-0,015308532626	m
22	5,012216350514	-0,012216350514	m
23	5,009753394033	-0,009753394033	m
24	5,007789999702	-0,007789999702	m
25	5,006223788378	-0,006223788378	m
26	5,004973729402	-0,004973729402	m
27	5,003975562059	-0,003975562059	m
28	5,003178242197	-0,003178242197	m
29	5,002541170081	-0,002541170081	m
30	5,002032018220	-0,002032018220	m

Нахождение нулей полинома
$x^5–15x^4+85x^3–225x^2+274x–120=0$

$x_2=4$ Таблица 9

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min
0	5,666666666667	-1,666666666667	m
1	4,852941176471	-0,852941176471	m
2	4,480000000000	-0,480000000000	m
3	4,279902499313	-0,279902499313	m
4	4,163422791423	-0,163422791423	m
5	4,092525665915	-0,092525665915	m
6	4,048404394623	-0,048404394623	m
7	4,020794877446	-0,020794877446	m
8	4,003691840923	-0,003691840923	m
9	3,993400202935	0,006599797065	
10	3,987561427201	0,012438572799	
11	3,984630148375	0,015369851625	
12	3,983575786614	0,016424213386	
13	3,983703981041	0,016296018959	
14	3,984545300917	0,015454699083	
15	3,985783471995	0,014216528005	
16	3,987207740721	0,012792259279	
17	3,988680507724	0,011319492276	
18	3,990114929175	0,009885070825	
19	3,991459210071	0,008540789929	
20	3,992685499820	0,007314500180	
21	3,993782015720	0,006217984280	
22	3,994747463902	0,005252536098	
23	3,995587111380	0,004412888620	
24	3,996310050464	0,003689949536	m
25	3,996927324590	0,003072675410	m
26	3,997450674220	0,002549325780	m
27	3,997891725783	0,002108274217	m
28	3,998261493627	0,001738506373	m
29	3,998570099730	0,001429900270	m
30	3,998826641776	0,001173358224	m

Нахождение нулей полинома
$x^5–15x^4+85x^3–225x^2+274x–120=0$

$x_3=3$ Таблица 10

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min
0	2,647058823529	0,352941176471	m
1	2,682222222222	0,317777777778	m
2	2,720070422535	0,279929577465	m
3	2,757802301754	0,242197698246	m
4	2,793525448142	0,206474551858	m
5	2,826162134370	0,173837865630	m
6	2,855229254944	0,144770745056	m
7	2,880623123560	0,119376876440	m
8	2,902462140986	0,097537859014	m
9	2,920988156530	0,079011843470	m
10	2,936508359255	0,063491640745	m
11	2,949360085993	0,050639914007	m
12	2,959887544419	0,040112455581	m
13	2,968425253466	0,031574746534	m
14	2,975286260908	0,024713739092	m
15	2,980754440889	0,019245559111	m
16	2,985080377289	0,014919622711	m
17	2,988480209428	0,011519790572	m
18	2,991136700284	0,008863299716	m
19	2,993201784118	0,006798215882	m
20	2,994799944548	0,005200055452	m
21	2,996031917610	0,003968082390	m
22	2,996978365030	0,003021634970	m
23	2,997703295104	0,002296704896	m
24	2,998257111869	0,001742888131	m
25	2,998679246633	0,001320753367	m
26	2,999000373784	0,000999626216	m
27	2,999244240855	0,000755759145	m
28	2,999429156849	0,000570843151	m
29	2,999569187600	0,000430812400	m
30	2,999675106046	0,000324893954	m

Нахождение нулей полинома
$x^5–15x^4+85x^3–225x^2+274x–120=0$

$x_4=2$ Таблица 11

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min
0	1,217777777778	0,782222222222	m
1	1,444246100358	0,555753899642	m
2	1,592858951392	0,407141048608	m
3	1,698923698492	0,301076301508	m
4	1,778157476373	0,221842523627	m
5	1,838245359330	0,161754640670	m
6	1,883604528541	0,116395471459	m
7	1,917354840626	0,082645159374	m
8	1,942028332116	0,057971667884	m
9	1,959758019839	0,040241980161	m
10	1,972305680274	0,027694319726	m
11	1,981073533550	0,018926466450	m
12	1,987137212974	0,012862787026	m
13	1,991296375254	0,008703624746	m
14	1,994130789130	0,005869210870	m
15	1,996052660477	0,003947339523	m
16	1,997350673726	0,002649326274	m
17	1,998224678331	0,001775321669	m
18	1,998811802607	0,001188197393	m
19	1,999205500499	0,000794499501	m
20	1,999469130662	0,000530869338	m
21	1,999645477181	0,000354522819	m
22	1,999763342764	0,000236657236	m
23	1,999842072516	0,000157927484	m
24	1,999894636284	0,000105363716	m
25	1,999929717836	0,000070282164	m
26	1,999953125238	0,000046874762	m
27	1,999968740102	0,000031259898	m
28	1,999979155012	0,000020844988	m
29	1,999986100801	0,000013899199	m
30	1,999990732591	0,000009267409	m

Из правых крайних колонок таблиц 8-12 видно, что для всех корней, кроме x_2, наблюдается монотонное увеличение точности с ростом числа подходящих.

Нахождение нулей полинома
$x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120=0$

$x_5=1$ Таблица 12

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	0,437956204380	0,562043795620	m
1	0,683917131209	0,316082868791	m
2	0,82429848 145	0,1757015178 5	m
3	0,903966584745	0,096033415255	m
4	0,948442146728	0,051557853272	m
5	0,972773309864	0,027226690136	m
6	0,985821725354	0,014178274646	m
7	0,992698509954	0,007301490046	m
8	0,996271738029	0,003728261971	m
9	0,998108203644	0,001891796356	m
10	0,999044396103	0,000955603897	m
11	0,999518836758	0,000481163242	m
12	0,999758265511	0,000241734489	m
13	0,999878740191	0,000121259809	m
14	0,999939237143	0,000060762857	m
15	0,999969573724	0,000030426276	m
16	0,999984771779	0,000015228221	m
17	0,999992380829	0,000007619171	m
18	0,999996188719	0,000003811281	m
19	0,999998093792	0,000001906208	m
20	0,999999046706	0,000000953294	m
21	0,999999523290	0,000000476710	m
22	0,999999761624	0,000000238376	m
23	0,999999880805	0,000000119195	m
24	0,999999940400	0,000000059600	m
25	0,999999970199	0,000000029801	m
26	0,999999985099	0,000000014901	m
27	0,999999992550	0,000000007450	m
28	0,999999996275	0,000000003725	m
29	0,999999998137	0,000000001863	m
30	0,999999999069	0,000000000931	m

Из таблиц 8-12 видно, что непрерывная дробь Хессенберга (38) аппроксимирует старший по модулю корень $x_1=5$ уравнения пятой степени (37) “с избытком”. Отношение определителей (39), представляющее второй по модулю корень $x_2=4$, на начальном участке приближает корень “с избытком”, затем, после восьмой подходящей дроби, – “с недостатком”. Также “снизу”, то есть с недостатком, вычисляются по формулам (40)-(42) и остальные три корня уравнения (37), причём для всех этих корней, как впрочем и для x_1, точность в определении корней увеличивается с каждой новой подходящей дробью, то есть монотонно. Из таблиц 8-12 можно также отметить, что с уменьшением модулей корней точность их вычислений растёт.

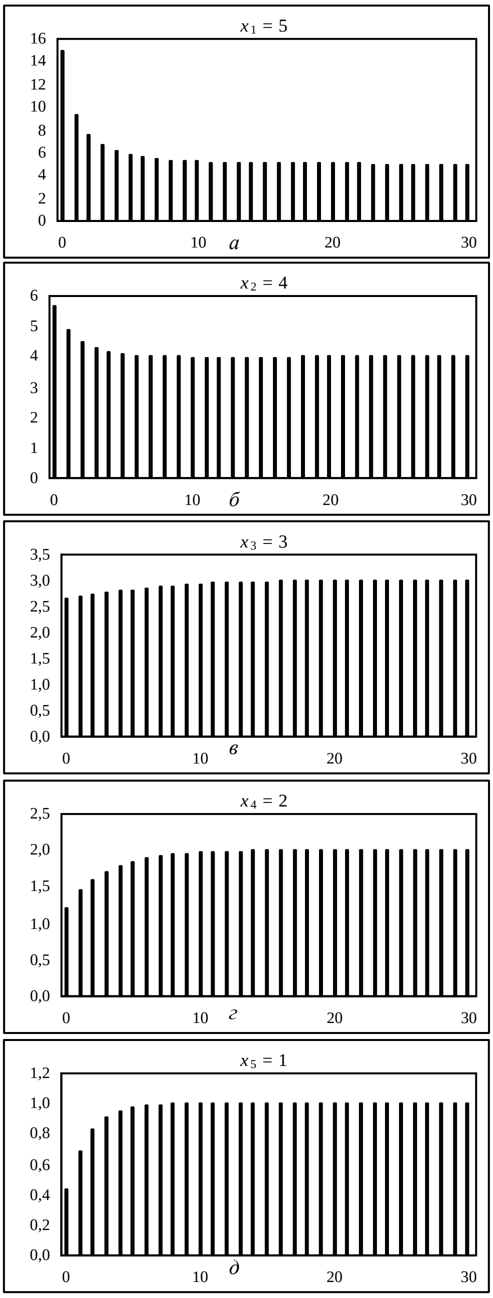


Рис. 3. Распределение значений подходящих дробей (38)–(42)

Рассмотренный пример уравнения пятой степени подтверждает, что функции Никипорца (8)-(11) имеют одну и ту же структуру как для уравнений второй, третьей, четвёртой степени, как и для уравнений степени выше четвёртой. В следующем парафе будут рассмотрим пример решения алгебраического уравнения, корни которых кратные.

2.2. Кратные корни

Известно, что случай кратных корней наиболее “тяжёлый” для любых алгоритмов, определяющих нули полиномов. Об этом писал, в частности, А. Н. Крылов в своей книге “Лекции о приближённых вычислениях” [261]. Найдём, используя функции Никипорца (22)-(25), корни уравнения

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0. \tag{43}$$

Корни алгебраического уравнения (43) равны между собой, т. е. кратные, причём, кратность равна четырём:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$$

Для определения корней уравнения (43) можно записать:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_4=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -6 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 4 & -1 & \dots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}.$$

Результаты вычислений кратных корней полинома (43) приведены в табл. 13-16.

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

$x_1=1$ Таблица 13

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
6	4,000000000000	-3,000000000000	m
1	2,500000000000	-1,500000000000	m
2	2,000000000000	-1,000000000000	m
3	1,750000000000	-0,750000000000	m
4	1,600000000000	-0,600000000000	m
5	1,500000000000	-0,500000000000	m
6	1,428571428571	-0,428571428571	m
7	1,375000000000	-0,375000000000	m
8	1,333333333333	-0,333333333333	m
9	1,300000000000	-0,300000000000	m
10	1,272727272727	-0,272727272727	m
91	1,032608695652	-0,032608695652	m
92	1,032258064516	-0,032258064516	m
93	1,031914893617	-0,031914893617	m
94	1,031578947368	-0,031578947368	m
95	1,031250000000	-0,031250000000	m
96	1,030927835052	-0,030927835052	m
97	1,030612244898	-0,030612244898	m
98	1,030303030303	-0,030303030303	m
99	1,030000000000	-0,030000000000	m
100	1,029702970297	-0,029702970297	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

$x_2=1$ Таблица 14

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	1,500000000000	-0,500000000000	m
1	1,333333333333	-0,333333333333	m
2	1,250000000000	-0,250000000000	m
3	1,200000000000	-0,200000000000	m
4	1,166666666667	-0,166666666667	m
5	1,142857142857	-0,142857142857	m
6	1,125000000000	-0,125000000000	m
7	1,111111111111	-0,111111111111	m
8	1,100000000000	-0,100000000000	m
9	1,090909090909	-0,090909090909	m
10	1,083333333333	-0,083333333333	m
91	1,010752688172	-0,010752688172	m
92	1,010638297872	-0,010638297872	m
93	1,010526315789	-0,010526315789	m
94	1,010416666667	-0,010416666667	m
95	1,010309278351	-0,010309278351	m
96	1,010204081633	-0,010204081633	m
97	1,010101010101	-0,010101010101	m
98	1,010000000000	-0,010000000000	m
99	1,009900990099	-0,009900990099	m
100	1,009803921569	-0,009803921569	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

$x_3=1$ Таблица 15

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	0,666666666667	0,333333333333	m
1	0,750000000000	0,250000000000	m
2	0,800000000000	0,200000000000	m
3	0,833333333333	0,166666666667	m
4	0,857142857143	0,142857142857	m
5	0,875000000000	0,125000000000	m
6	0,888888888889	0,111111111111	m
7	0,900000000000	0,100000000000	m
8	0,909090909091	0,090909090909	m
9	0,916666666667	0,083333333333	m
10	0,923076923077	0,076923076923	m
91	0,989361702128	0,010638297872	m
92	0,989473684211	0,010526315789	m
93	0,989583333333	0,010416666667	m
94	0,989690721649	0,010309278351	m
95	0,989795918367	0,010204081633	m
96	0,989898989899	0,010101010101	m
97	0,990000000000	0,010000000000	m
98	0,990099009901	0,009900990099	m
99	0,990196078431	0,009803921569	m
100	0,990291262136	0,009708737864	m

Нахождение нулей полинома
$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

$x_4=1$ Таблица 16

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	0,250000000000	0,750000000000	m
1	0,400000000000	0,600000000000	m
2	0,500000000000	0,500000000000	m
3	0,571428571429	0,428571428571	m
4	0,625000000000	0,375000000000	m
5	0,666666666667	0,333333333333	m
6	0,700000000000	0,300000000000	m
7	0,727272727273	0,272727272727	m
8	0,750000000000	0,250000000000	m
9	0,769230769231	0,230769230769	m
10	0,785714285714	0,214285714286	m
91	0,968421052632	0,031578947368	m
92	0,968750000000	0,031250000000	m
93	0,969072164948	0,030927835052	m
94	0,969387755102	0,030612244898	m
95	0,969696969697	0,030303030303	m
96	0,970000000000	0,030000000000	m
97	0,970297029703	0,029702970297	m
98	0,970588235294	0,029411764706	m
99	0,970873786408	0,029126213592	m
100	0,971153846154	0,028846153846	m

Для всех корней наблюдается монотонное увеличение точности их вычисления с ростом числа подходящих.

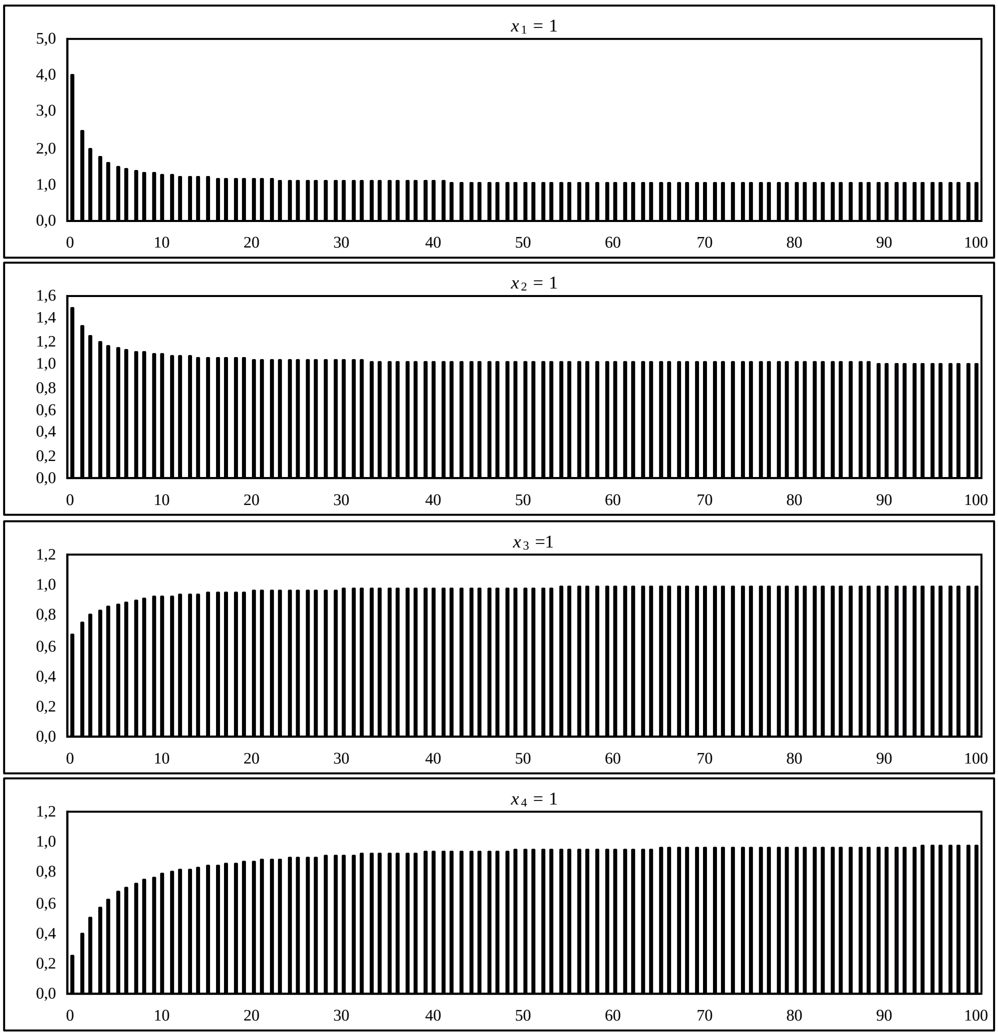


Рис. 4. Распределение значений подходящих дробей уравнения (43).

На рис. 4 показано распределение значений подходящих непрерывных дробей, записанных для уравнения (43). Из таблиц 13-16 видно, что первые два кратных корня уравнения (43) находятся “с избытком”, а два последующих корня – “с недостатком”. Можно также обратить внимание, что четвёртый кратный корень определяется с меньшей точностью, чем два предшествующие корня.

2.3. Нахождение нулей полиномов при помощи r/φ-алгоритма

Функции Никипорца для алгебраического уравнения n-й степени строятся по уже описанной выше схеме, то есть по формуле (11). Если все корни уравнения n-й степени действительны, то значения этих корней со все большей точностью могут быть установлены непосредственно, вычисляя последовательно значения определителей, входящих в формулу (11). Для комплексных корней, определяемых также формулой (11), непосредственное вычисление их значений невозможно. В самом деле, при действительных значениях коэффициентов α_i алгебраического уравнения (1) значения определителей, входящих в формулу (11), не могут иметь комплексные величины. Для вычисления комплексных корней алгебраического уравнения n-й степени (1) должно быть использовано суммирование по Никипорцу, в частности, может быть использован рассматривавшийся в [520] r/φ-алгоритм, когда модуль и аргумент искомого комплексного числа определяются формулами

$$r_i = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\prod_{p=i}^{m} \left|\bar{x}_i^{(p)}\right|}, \tag{44}$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m\to\infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \tag{45}$$

где $\bar{x}_i^{(p)}$ - p-я подходящая дробь непрерывной дроби Никипорца (11),

$k_i^{(m)}$- число отрицательных подходящих дробей для i-го корня из m подходящих дробей.

Следует отметить, что в данном случае, как и в случае суммирования расходящихся непрерывных дробей, последовательность подходящих дробей может быть составлена достаточно произвольным образом. Подробно этот вопрос был рассмотрен в [520].

Функция Никипорца $X_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ представляется непрерывной дробью Хессенберга, подходящие которой рассматривались выше.

Подходящие дроби для функции Никипорца $X_{2n}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ определяются следующим образом:

$$\bar{x}_2^{(1)} = \frac{|-\alpha_2|}{1} : \frac{|-\alpha_1|}{1},$$

$$\bar{x}_2^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|-\alpha_1|},$$

$$\bar{x}_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_4 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}.$$

. . . .

Аналогично, используя формулы (11), записываются подходящие дроби для функции Никипорца, определяющего i-й корень уравнения n-й степени.

Здесь следует отметить, что понятие подходящей дроби для функций Никипорца введено по аналогии с тем, как определены подходящие дроби обобщённых непрерывных дробей, когда n-я подходящая дробь представлялась отношением определителей n-го и ($n-1$)-го порядков. Функции Никипорца (11) иногда будем называть непрерывной дробью Никипорца с тем, чтобы термин “подходящая дробь” воспринимался более естественно.

2.4. Определение комплексных корней

Выше был рассмотрен так называемый r/φ-алгоритм, который позволяет использовать функции Никипорца для определения комплексных корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами.

Следует напомнить, что первоначально r/φ-алгоритм был введён для суммирования расходящихся в классическом смысле обыкновенных цепных дробей [518, 519].

Составим алгебраическое уравнение, корни которого:

$$x_1 = 2e^{i\varphi},\ x_2 = 2e^{-i\varphi},\ x_3 = 2e^{i\alpha},\ x_4 = 2e^{-i\alpha}.$$

Уравнение имеет вид:

$$x^4 - 4(\cos\varphi + \cos\alpha)x^3 + (8 + 16\cos\varphi\cos\alpha)x^2 - 16(\cos\varphi + \cos\alpha)x + 16 = 0. \qquad (46)$$

Положим $\varphi = 0$, $\alpha = 0{,}1$. Корни, следовательно, равны:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2e^{i0,1},\ x_4 = 2e^{-i0,1}.$$

Уравнение (46) при $\varphi = 0$, $\alpha = 0{,}1$ следующее:

$$x^4 - 4(1 + \cos 0{,}1)x^3 + (8 + 16\cos 0{,}1)x^2 - 16(1 + \cos 0{,}1)x + 16 = 0. \qquad (47)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = -4(1 + \cos 0{,}1),\ \alpha_2 = 8 + 16\cos 0{,}1,\ \alpha_3 = -16(1 + \cos 0{,}1),\ \alpha_4 = 16.$$

Результаты вычислений корней полинома (47) приведены в табл. 17-20.

Запишем функцию Никипорца для первого корня:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & 16(1+\cos 0{,}1) & -16 & 0 & \dots \\ -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & 16(1+\cos 0{,}1) & -16 & \dots \\ 0 & -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & 16(1+\cos 0{,}1) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & 16(1+\cos 0{,}1) & -16 & \dots \\ -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & 16(1+\cos 0{,}1) & \dots \\ 0 & -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & -(8+16\cos 0{,}1) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4(1+\cos 0{,}1) & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (48)$$

Функции Никипорца для последующих корней уравнения (47) можно записать по формулам, которые были рассмотрены в первом параграфе. Ввиду их громоздкости, они не приводятся. Результаты вычисления корней полинома (47) даны в табл. 17-20.

Нахождение нулей полинома
x^4–4($cos\varphi$+cosα)x^3+(8+16$cos\varphi$cosα)x^2–
–16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0; α=0,1

x_1=2

Таблица 17

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0–r_i	min
0	7,980016661112	-5,980016661112	m
1	4,982520833689	-2,982520833689	m
2	3,982027027078	-1,982027027078	m
3	3,480784014624	-1,480784014624	m
4	3,179241352088	-1,179241352088	m
5	2,977548737142	-0,977548737142	m
6	2,832913062730	-0,832913062730	m
7	2,723937682311	-0,723937682311	m
8	2,638735500109	-0,638735500109	m
9	2,570174209039	-0,570174209039	m
10	2,513715037030	-0,513715037030	m
91	2,043561409007	-0,043561409007	m
92	2,042685733104	-0,042685733104	m
93	2,041636634971	-0,041636634971	m
94	2,040430517357	-0,040430517357	m
95	2,039083908473	-0,039083908473	m
96	2,037613258264	-0,037613258264	m
97	2,036034781634	-0,036034781634	m
98	2,034364343379	-0,034364343379	m
99	2,032617379120	-0,032617379120	m
100	2,030808846508	-0,030808846508	m

Нахождение нулей полинома
x^4–4($cos\varphi$+cosα)x^3+(8+16$cos\varphi$cosα)x^2–
–16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0; α=0,1

x_4=2

Таблица 18

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0–r_i	min
0	0,501252086289	1,498747913711	m
1	0,802806477587	1,197193522413	m
2	1,004513523590	0,995486476410	m
3	1,149166389869	0,850833610131	m
4	1,258161793024	0,741838206976	m
5	1,343386910885	0,656613089115	m
6	1,411974145139	0,588025854861	m
7	1,468462375618	0,531537624382	m
8	1,515877586001	0,484122413999	m
9	1,556314737707	0,443685262293	m
10	1,591270267741	0,408729732259	m
91	1,957367164192	0,042632835808	m
92	1,958206265004	0,041793734996	m
93	1,959212492314	0,040787507686	m
94	1,960370601191	0,039629398809	m
95	1,961665227889	0,038334772111	m
96	1,963081062501	0,036918937499	m
97	1,964602980303	0,035397019697	m
98	1,966216136759	0,033783863241	m
99	1,967906031449	0,032093968551	m
100	1,969658546090	0,030341453910	m

Нахождение нулей полинома

$x^4–4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2–16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0$, $\varphi=0$; $\alpha=0,1$

$x_2=2e^{i0,1}$

Таблица 19

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
0	2,997495827423	2,997495827423	-0,997495827423	m	0,000000000000	0,100000000000	m
1	2,663542405315	2,825589716519	-0,825589716519	m	0,000000000000	0,100000000000	
2	2,496221101812	2,711234513033	-0,711234513033	m	0,000000000000	0,100000000000	
3	2,395546675364	2,628611917165	-0,628611917165	m	0,000000000000	0,100000000000	
4	2,328189398038	2,565575735164	-0,565575735164	m	0,000000000000	0,100000000000	
5	2,279863926601	2,515584175120	-0,515584175120	m	0,000000000000	0,100000000000	
6	2,243426510554	2,474770873325	-0,474770873325	m	0,000000000000	0,100000000000	
7	2,214907385523	2,440689697237	-0,440689697237	m	0,000000000000	0,100000000000	
8	2,191923721556	2,411710137218	-0,411710137218	m	0,000000000000	0,100000000000	
9	2,172958226984	2,386699464854	-0,386699464854	m	0,000000000000	0,100000000000	
10	2,156998441264	2,364843860987	-0,364843860987	m	0,000000000000	0,100000000000	
91	2,608592884285	2,030478736282	-0,030478736282	m	0,068295492469	0,031704507531	m
92	2,448276188155	2,034568097367	-0,034568097367		0,067561132335	0,032438867665	
93	2,348416380269	2,037675514550	-0,037675514550		0,066842396885	0,033157603115	
94	2,279451023535	2,040081926211	-0,040081926211		0,066138792707	0,033861207293	
95	2,228382424324	2,041958941699	-0,041958941699		0,065449846950	0,034550153050	
96	2,188587248148	2,043419288111	-0,043419288111		0,064775106260	0,035224893740	
97	2,156324060470	2,044540983121	-0,044540983121		0,064114135788	0,035885864212	
98	2,129309469494	2,045380128093	-0,045380128093		0,063466518254	0,036533481746	
99	2,106061551932	2,045978202569	-0,045978202569		0,062831853072	0,037168146928	
100	2,085567600673	2,046366469542	-0,046366469542		0,062209755517	0,037790244483	

Нахождение нулей полинома

$x^4–4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2–16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0$, $\varphi=0$; $\alpha=0,1$

$x_3=2e^{-i0,1}$

Таблица 20

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
0	1,334447228719	1,334447228719	0,665552771281	m	-0,000000000000	-0,100000000000	m
1	1,501759458388	1,415633691125	0,584366308875	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
2	1,602422156073	1,475342682742	0,524657317258	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
3	1,669765002342	1,521715691038	0,478284308962	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
4	1,718073281912	1,559104237375	0,440895762625	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
5	1,754490675224	1,590087916581	0,409912083419	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
6	1,782986864594	1,616311248493	0,383688751507	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
7	1,805944585379	1,638881011596	0,361118988404	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
8	1,824881021480	1,658574112316	0,341425887684	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
9	1,840808511792	1,675954622232	0,324045377768	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
10	1,854428785612	1,691443594222	0,308556405778	m	-0,000000000000	-0,100000000000	
91	1,533393740395	1,969978768320	0,030021231680	m	-0,068295492469	-0,031704507531	m
92	1,633802599295	1,966019227952	0,033980772048		-0,067561132335	-0,032438867665	
93	1,703275464099	1,963021085270	0,036978914730		-0,066842396885	-0,033157603115	
94	1,754808486210	1,960705571971	0,039294428029		-0,066138792707	-0,033861207293	
95	1,795024030139	1,958903246444	0,041096753556		-0,065449846950	-0,034550153050	
96	1,827663029374	1,957503300117	0,042496699883		-0,064775106260	-0,035224893740	
97	1,855008749997	1,956429356527	0,043570643473		-0,064114135788	-0,035885864212	
98	1,878543282368	1,955626704817	0,044373295183		-0,063466518254	-0,036533481746	
99	1,899279722537	1,955055041631	0,044944958369		-0,062831853072	-0,037168146928	
100	1,917943105133	1,954684099616	0,045315900384		-0,062209755517	-0,037790244483	

Как видно из таблиц 17-20, для действительных корней уравнения (47) наблюдается монотонное увеличение точности их вычисления с ростом числа подходящих, что не имеет места в случае пары комплексных корней.

На рис. 5 показано распределение подходящих дробей функции Никипорца для уравнения (47). Модули корней уравнения (47) равны между собой, поэтому выстроить корни по старшинству модулей нельзя. Функции Никипорца тем не менее располагают корни уравнения (47). Первым с использованием непрерывной дроби Хессенберга определяется один из действительных корней, равных 2. Затем с использованием конструкций, включающих отношения определителей Теплица, которые мы назвали функциями Никипорца, а также непрерывными дробями Никипорца, что дало возможность ввести понятие подходящей дроби для таких выражений, определяются сопряжённые комплексные корни: $x_2 = 2e^{i0,1}$ и $x_3 = 2e^{-i0,1}$. Как уже отмечалось, формула для определения аргумента разыскиваемого комплексного числа

$$|\varphi_0| = \pi \lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n},$$

которая входит в r/φ-алгоритм, позволяет определить не аргумент комплексного числа, а модуль аргумента.

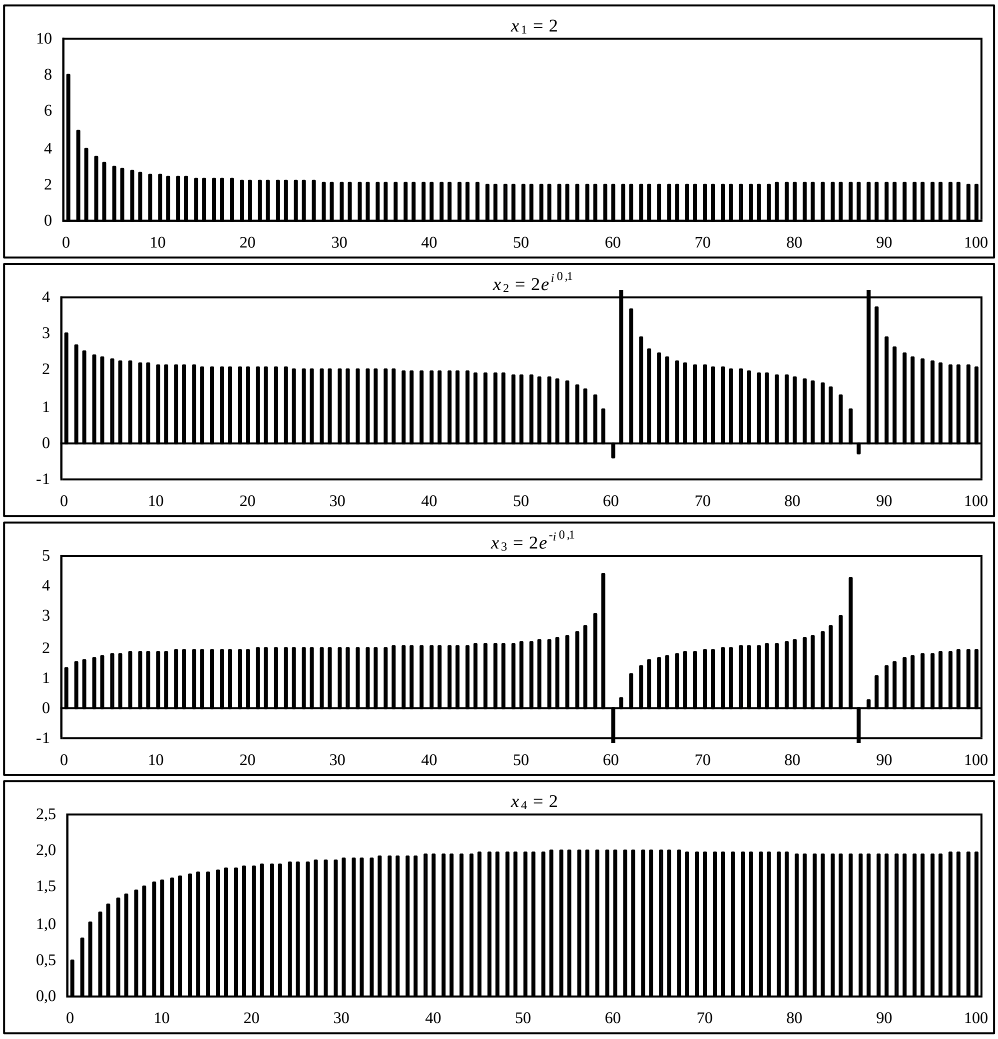


Рис. 5. . Распределение значений подходящих дробей уравнения (47).

Знак аргумента устанавливается из анализа динамики распределения значений подходящих дробей “на периоде”. Для периодических непрерывных дробей

$$e^{i\varphi}=2\cos\varphi-\frac{1}{2\cos\varphi-}\,\frac{1}{2\cos\varphi-}\ldots\frac{1}{2\cos\varphi-\ldots}, \qquad (49)$$

$$e^{-i\varphi}=\frac{1}{2\cos\varphi-}\,\frac{1}{2\cos\varphi-}\,\frac{1}{2\cos\varphi-}\ldots\frac{1}{2\cos\varphi-\ldots} \qquad (50)$$

была проведена калибровка, которая позволила установить, что при $\varphi<\pi/2$ комплексное число $e^{i\varphi}$ представляется периодически повторяющимися последовательностями подходящих дробей (рис. 6а), а сопряжённому комплексному числу $e^{-i\varphi}$ соответствуют периодические последовательности подходящих дробей (рис. 6б). Несложно заметить, что подходящие дроби для комплексного числа $e^{i\varphi}$ образуют ниспадающие последовательности. Естественно, подходящие дроби для сопряжённого числа

$e^{-i\varphi}$ будут давать на периоде возрастающие последовательности. Более детально вопрос установления аргумента комплексного числа по подходящим дробям рассмотрен в [521].

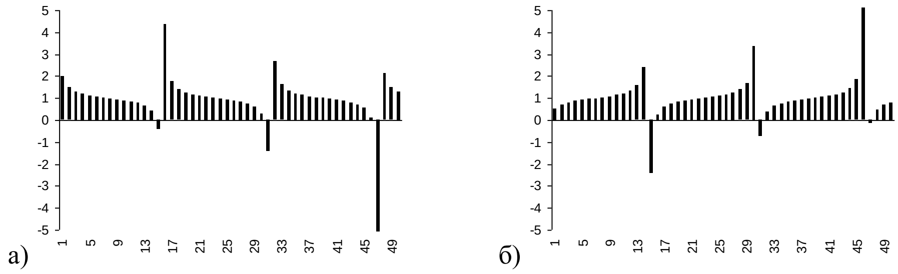


Рис. 6. Распределение подходящих дробей разложений (49) и (50).

Графики, показанные на рис. 6а и 6б, определяются, соответственно, значениями подходящих дробей разложений (49) и (50) при $\varphi = 0{,}2$. Поэтому график, представленный на рис. 6а, будем связывать с корнем $2e^{i0,2}$, а рис. 6б связан с сопряжённым комплексным корнём $x_3 = 2e^{-i0,2}$. Следует обратить внимание, что четвёртым определяется кратный действительный корень $x_4 = 2$. Если подходящие дроби для $x_1 = 2$ приближали корень "с избытком", то подходящие дроби для $x_4 = 2$ давали значение корня "с недостатком".

Рассмотрим алгебраическое уравнение четвёртой степени, которое имеет пару комплексных корней. Вернёмся к уравнению

$$x^4 - 4(\cos\varphi + \cos\alpha)x^3 + (8 + 16\cos\varphi\cos\alpha)x^2 - 16(\cos\varphi + \cos\alpha)x + 16 = 0 \qquad (51)$$

Положим $\varphi = 0{,}1$, $\alpha = 1$. Корни уравнения (51) при этом будут:

$$x_1 = 2e^{i0,1},\ x_2 = 2e^{-i0,1},\ x_3 = 2e^{i},\ x_4 = 2e^{-i}. \qquad (52)$$

Определим значения корней уравнения (51) при помощи функций Никипорца (22)–(25) и r/φ-алгоритма. В данном примере

$$\alpha_1 = -4(\cos 0{,}1 + \cos 1),\ \alpha_2 = 8 + 16\cos 0{,}1\cos 1,\ \alpha_3 = -16(\cos 0{,}1 + \cos 1),\ \alpha_4 = 16. \qquad (53)$$

Подставляя значения коэффициентов α_i в формулу (22), получим:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & -(8 + 16\cos 0{,}1\cos 1) & 16(\cos 0{,}1 + \cos 1) & 16 & \dots \\ -1 & 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & -(8 + 16\cos 0{,}1\cos 1) & 16(\cos 0{,}1 + \cos 1) & \dots \\ 0 & -1 & 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & -(8 + 16\cos 0{,}1\cos 1) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & -(8 + 16\cos 0{,}1\cos 1) & 16(\cos 0{,}1 + \cos 1) & \dots \\ -1 & 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & -(8 + 16\cos 0{,}1\cos 1) & \dots \\ 0 & -1 & 4(\cos 0{,}1 + \cos 1) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (54)$$

Используя коэффициенты α_i, устанавливаемые выражениями (53), в формулах (23)–(25), получим представления последующих корней x_2, x_3 и x_4 уравнения (51). Ввиду громоздкости, непрерывные дроби Никипорца для корней x_2, x_3 и x_4 не приводятся.

Так как модули корней уравнения (51) равны между собой, то вообще-то говоря, заранее, до вычислений, нельзя сказать, какой именно корень определяет каждая из этих формул. Результаты вычислений комплексных корней (52) уравнения (51) приведены в табл. 21-24. Корни, согласно таблицам, расположились в таком порядке:

$$x_1 = 2e^{i0,1},\ x_2 = 2e^{i},\ x_3 = 2e^{-i},\ x_4 = 2e^{-i0,1}.$$

Сделаем некоторые выводы из таблиц 21-24, а также графиков подходящих, приведённых на рис. 7. Непрерывные дроби, представляющие сопряжённые корни $x_1 = 2e^{i0,1}$ и $x_4 = 2e^{-i0,1}$, обрамляют дроби, связанные с другой парой сопряжённых корней: $x_2 = 2e^{i}$ и $x_3 = 2e^{-i}$. Обращает внимание достаточно сложный характер в распределении подходящих дробей для корней с аргументом $\varphi = 1$. Несмотря на нерегулярный характер графиков 7б и 7в, точность в определении модулей корней x_2 и x_3 на порядок выше точности, с которой определяются при том же числе подходящих модули x_1 и x_4, чьи графики имеют значительно более простой вид (рис. 7а и 7г). Моду-

Нахождение нулей полинома

$x^4-4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2-16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0,\ \varphi=0,1;\ \alpha=1$

$x_1=2e^{i0,1}$

Таблица 21

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	6,141225884585	6,141225884585	-4,141225884585	m	0,000000000000	0,100000000000	m
1	3,437914032916	4,594889187774	-2,594889187774	m	0,000000000000	0,100000000000	
2	2,475733205909	3,738964215891	-1,738964215891	m	0,000000000000	0,100000000000	
3	2,015505774364	3,203756447637	-1,203756447637	m	0,000000000000	0,100000000000	
4	1,894542126864	2,884220424126	-0,884220424126	m	0,000000000000	0,100000000000	
5	2,119042902278	2,739767217514	-0,739767217514	m	0,000000000000	0,100000000000	
6	2,448201889214	2,696079817825	-0,696079817825	m	0,000000000000	0,100000000000	
7	2,467250412812	2,666353986234	-0,666353986234	m	0,000000000000	0,100000000000	
8	2,229208812648	2,613828097674	-0,613828097674	m	0,000000000000	0,100000000000	
9	1,971978317097	2,541204018761	-0,541204018761	m	0,000000000000	0,100000000000	
10	1,835311651619	2,467126271014	-0,467126271014	m	0,000000000000	0,100000000000	
91	0,454696837263	1,988686107487	0,011313892513	m	0,136590984939	-0,036590984939	m
92	-5,799409576148	2,011704919435	-0,011704919435		0,168902830838	-0,068902830838	
93	3,725920940273	2,024938437684	-0,024938437684		0,167105992212	-0,067105992212	
94	2,177146745966	2,026483860928	-0,026483860928		0,165346981768	-0,065346981768	
95	1,884180689035	2,024947500742	-0,024947500742		0,163624617374	-0,063624617374	
96	2,271643037595	2,027348790983	-0,027348790983		0,161937765649	-0,061937765649	
97	2,855230648874	2,034444979995	-0,034444979995		0,160285339469	-0,060285339469	
98	2,804862256990	2,041054928431	-0,041054928431		0,158666295636	-0,058666295636	
99	2,410204367648	2,044450897077	-0,044450897077		0,157079632679	-0,057079632679	
100	2,057942528882	2,044584043096	-0,044584043096		0,155524388792	-0,055524388792	

Нахождение нулей полинома

$x^4-4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2-16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0,\ \varphi=0,1;\ \alpha=1$

$x_2=2e^{i}$

Таблица 22

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	2,703311851668	2,703311851668	-0,703311851668	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	2,185826173484	2,430837263263	-0,430837263263	m	0,000000000000	1,000000000000	
2	1,644412672578	2,133900647157	-0,133900647157	m	0,000000000000	1,000000000000	
3	0,650708102770	1,585722542105	0,414277457895		0,000000000000	1,000000000000	
4	-3,740649513692	1,882656827661	0,117343172340	m	0,628318530718	0,371681469282	m
5	2,777743489031	2,008744309263	-0,008744309263	m	0,523598775598	0,476401224402	
6	0,122629611618	1,347252642808	0,652747357192		0,448798950513	0,551201049487	
7	-30,594176616665	1,990548482394	0,009451517606		0,785398163397	0,214601836603	m
8	2,666139220613	2,056240354342	-0,056240354342		0,698131700798	0,301868299202	
9	1,184379536435	1,945877873551	0,054122126449		0,628318530718	0,371681469282	
10	-0,930207562196	1,819600172811	0,180399827189		0,856797996434	0,143202003566	m
91	8,967424284445	2,046164869055	-0,046164869055		0,887841402101	0,112158597899	m
92	-0,692527017195	2,022466991063	-0,022466991063		0,912075286526	0,087924713474	m
93	0,942956874648	2,006115903347	-0,006115903347	m	0,902372357946	0,097627642054	
94	0,704795037471	1,984147651355	0,015852348645		0,892873701547	0,107126298453	
95	-2,879386097443	1,991859183224	0,008140816776		0,916297857297	0,083702142703	m
96	2,837913184651	1,999141733954	0,000858266046	m	0,906851487634	0,093148512366	
97	-0,196061404539	1,952330164372	0,047669835628		0,929654968919	0,070345031081	m
98	22,371953110057	2,001021503248	-0,001021503248		0,920264514688	0,079735485312	
99	2,503550449169	2,005509860244	-0,005509860244		0,911061869541	0,088938130459	
100	1,240806728832	1,995998637795	0,004001362205		0,902041454991	0,097958545009	

ли аргументов комплексных корней, напротив, точнее определяются при помощи r/φ-алгоритма для комплексных корней с меньшими аргументами, то есть для корней $x_1 = 2e^{i0,1}$ и $x_2 = 2e^{-i0,1}$, что естественно. Не ясна природа появления на графиках 7а и 7г в районе шестидесятой подходящей серии из трёх отрицательных подходящих. При $\varphi = 0,1$ подходящие с отрицательными значениями должны появляться через каждые 31-32 подходящих, хотя такая простая закономерность имеет, по-видимому, место лишь для классических цепных дробей.

Нахождение нулей полинома

$x^4-4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2-16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0,\ \varphi=0,1;\ \alpha=1$

$x_3=2e^{-i}$

Таблица 23

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,479666505191	1,479666505191	0,520333494809	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	1,829971682343	1,645523565256	0,354476434744	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	2,432479429710	1,874501516895	0,125498483105	m	0,000000000000	-1,000000000000	
3	6,147149517538	2,522509388489	-0,522509388489		0,000000000000	-1,000000000000	
4	-1,069333008976	2,124656996023	-0,124656996023	m	-0,628318530718	-0,371681469282	m
5	1,440017775506	1,991293755783	0,008706244217	m	-0,523598775598	-0,476401224402	
6	32,618549037472	2,969005124134	-0,969005124134		-0,448798950513	-0,551201049487	
7	-0,130743835669	2,009496395280	-0,009496395280		-0,785398163397	-0,214601836603	m
8	1,500296747099	1,945297878992	0,054702121008		-0,698131700798	-0,301868299202	
9	3,377295771287	2,055627464791	-0,055627464791		-0,628318530718	-0,371681469282	
10	-4,300115546856	2,198285128661	-0,198285128661		-0,856797996434	-0,143202003566	m
91	0,446058965554	1,954876686866	0,045123313134		-0,887841402101	-0,112158597899	m
92	-5,775947942359	1,977782588134	0,022217411866		-0,912075286526	-0,087924713474	m
93	4,241975542617	1,993902741774	0,006097258226	m	-0,902372357946	-0,097627642054	
94	5,675408859794	2,015979000993	-0,015979000993		-0,892873701547	-0,107126298453	
95	-1,389185008413	2,008174088655	-0,008174088655		-0,916297857297	-0,083702142703	m
96	1,409486386558	2,000858634515	-0,000858634515	m	-0,906851487634	-0,093148512366	
97	-20,401771625555	2,048833784877	-0,048833784877		-0,929654968919	-0,070345031081	m
98	0,178795296965	1,998979018220	0,001020981780		-0,920264514688	-0,079735485312	
99	1,597730935012	1,994505277333	0,005494722667		-0,911061869541	-0,088938130459	
100	3,223709145877	2,004009383703	-0,004009383703		-0,902041454991	-0,097958545009	

Нахождение нулей полинома

$x^4-4(cos\varphi+\cos\alpha)x^3+(8+16cos\varphi\cos\alpha)x^2-16(\cos\varphi+\cos\alpha)x+16=0,\ \varphi=0,1;\ \alpha=1$

$x_2=2e^{-i0,1}$

Таблица 24

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,651335755299	0,651335755299	1,348664244701	m	0,000000000000	-0,100000000000	m
1	1,163496225241	0,870532419072	1,129467580928	m	0,000000000000	-0,100000000000	
2	1,615682978462	1,069814999298	0,930185000702	m	0,000000000000	-0,100000000000	
3	1,984613515316	1,248534358144	0,751465641856	m	0,000000000000	-0,100000000000	
4	2,111328084649	1,386856554562	0,613143445438	m	0,000000000000	-0,100000000000	
5	1,887644651130	1,459978050117	0,540021949883	m	0,000000000000	-0,100000000000	
6	1,633852182544	1,483635600680	0,516364399320	m	0,000000000000	-0,100000000000	
7	1,621237949431	1,500175903369	0,499824096631	m	0,000000000000	-0,100000000000	
8	1,794358598129	1,530322519511	0,469677480489	m	0,000000000000	-0,100000000000	
9	2,028419869184	1,574057010169	0,425942989831	m	0,000000000000	-0,100000000000	
10	2,179466357373	1,621319527499	0,378680472501	m	0,000000000000	-0,100000000000	
91	8,797070206330	2,011378258711	-0,011378258711	m	-0,136590984939	0,036590984939	m
92	-0,689725384538	1,988363184558	0,011636815442		-0,168902830838	0,068902830838	
93	1,073560084639	1,975368695443	0,024631304557		-0,167105992212	0,067105992212	
94	1,837267059472	1,973862253296	0,026137746704		-0,165346981768	0,065346981768	
95	2,122938645576	1,975359854284	0,024640145716		-0,163624617374	0,063624617374	
96	1,760840032436	1,973020142262	0,026979857738		-0,161937765649	0,061937765649	
97	1,400937609568	1,966138204441	0,033861795559		-0,160285339469	0,060285339469	
98	1,426094985603	1,959770873523	0,040229126477		-0,158666295636	0,058666295636	
99	1,659610302633	1,956515564017	0,043484435983		-0,157079632679	0,057079632679	
100	1,943688875594	1,956388153134	0,043611846866		-0,155524388792	0,055524388792	

Из таблиц 21-24 можно заметить, что при вычислении комплексных корней с достаточно высокой точностью необходимо иметь значительное число подходящих дробей выражений (22)–(25). Значения модулей комплексных корней при учёте различного числа подходящих устанавливались как “с избытком” так и “с недостатком”. Аргументы для сопряжённых корней $x_1 = 2e^{i0,1}$ и $x_4 = 2e^{-i0,1}$ устанавливались “с избытком”, а аргументы для сопряжённых корней $x_2 = 2e^{i}$, $x_3 = 2e^{-i}$ определялись “с недостатком”. Из графиков рис. 7 хорошо видно, что сопряжённые корни $x_2 = 2e^{i}$ и $x_3 = 2e^{-i}$ расположились на второй и третьей позиции, тогда как подходящие дроби другой сопряжённой комплексной пары корней $x_1 = 2e^{i0,1}$ и $x_4 = 2e^{-i0,1}$ как бы обрамляют первую пару корней. Закономерности, которые управляют очередностью вычисления комплексных корней, имеющих одинаковые модули, и отличаются только своими аргументами, пока не выяснены.

Распределение значений подходящих дробей для функций Никипорца (22)-(25) при значениях α_i, задаваемых выражениями (53), приведены на рис. 7.

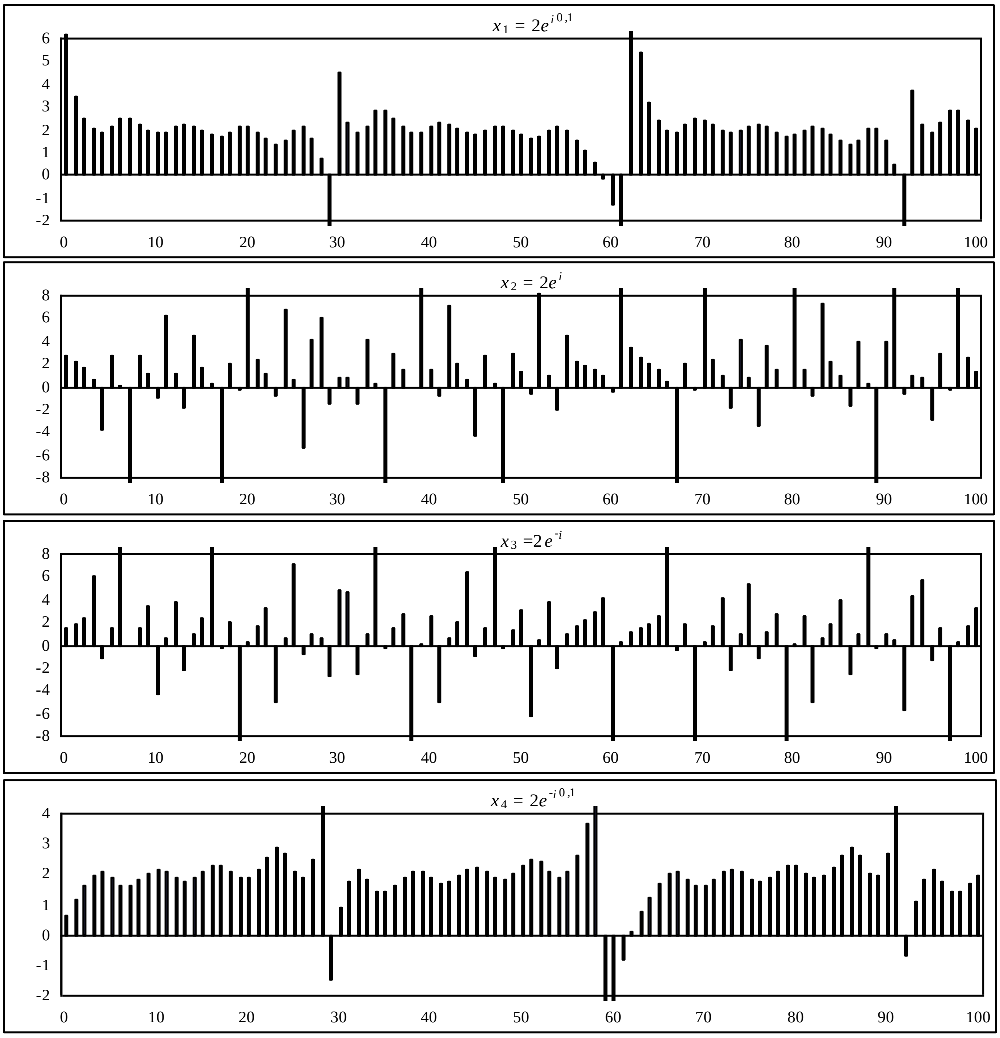


Рис. 7. Распределение подходящих дробей, представляющих корни уравнения (51).

Из рассмотрения графиков видно, что при малом φ, равном 0,1 примерно на каждые 30 положительных подходящих выпадает одна подходящая с отрицательным значением, что и следовало ожидать, если пользоваться формулой (45).

Подходящие дроби сопряжённых корней есть обратные величины друг друга, то есть минимумы и максимумы на соответствующих графиках совпадают. Это также заметно для графиков подходящих дробей корней $2e^{i}$ и $2e^{-i}$, хотя при больших значениях аргумента φ характер поведения подходящих дробей не столь легко уловим.

Использование при определении комплексных значений непрерывных дробей сопряжённых величин может привести к более эффективным вычислительным алгоритмам, чем r/φ-алгоритм.

2.5. Применение формул Никипорца для решений алгебраических уравнений

Рассмотрим ещё несколько примеров применения непрерывных дробей Никипорца, то есть формул (8)–(11), для решения алгебраических уравнений, имеющих комплексные корни.

Найдём при помощи алгоритма Никипорца корни уравнения 6-й степени

$$x^6 - 18\cos 1 x^5 + \left(29 + 104\cos^2 1\right)x^4 - \left(324\cos 1 + 192\cos^3 1\right)x^3 + \left(244 + 864\cos^2 1\right)x^2 - 1248\cos 1 x + 576 = 0 \quad (55)$$

Корни этого уравнения

$$x_1 = 4e^{i},\ x_2 = 4e^{-i},\ x_3 = 3e^{i},\ x_4 = 3e^{-i},\ x_5 = 2e^{i},\ x_6 = 2e^{-i}.$$

Результаты вычисления комплексных корней алгебраического уравнения (55) приведены в таблицах 25-30.

Нахождение нулей полинома

x^6-18cosφx^5+(81+52cos2φ)x^4-12(39cosφ+4cos3φ)x^3+(676+432cos2φ)x^2-1248cosφx+576=0

$x_1=4e^{i}$ Таблица 25

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	9,725441505627	9,725441505627	-5,725441505627	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	3,621825082125	5,934968237473	-1,934968237473	m	0,000000000000	1,000000000000	
2	-0,834560729130	3,086253397084	0,913746602916	m	1,047197551197	-0,047197551197	m
3	29,798789497209	5,440306165686	-1,440306165686		0,785398163397	0,214601836603	
4	4,215936043620	5,169844444865	-1,169844444865		0,628318530718	0,371681469282	
5	0,393100956084	3,364975551792	0,635024448208	m	0,523598775598	0,476401224402	
6	-39,927517454494	4,791284612451	-0,791284612451		0,897597901026	0,102402098974	
7	4,936424231238	4,809191079424	-0,809191079424		0,785398163397	0,214601836603	
8	1,058106283318	4,064543056435	-0,064543056435	m	0,698131700798	0,301868299202	
9	-11,241221506327	4,499786476782	-0,499786476782		0,942477796077	0,057522203923	
10	5,856205586507	4,608866463438	-0,608866463438		0,856797996434	0,143202003566	
91	63,812233249929	4,064247474877	-0,064247474877	m	0,990284640805	0,009715359195	m
92	4,071682824872	4,064327352618	-0,064327352618		0,979636418861	0,020363581139	
93	0,392839280742	3,964543745912	0,035456254088	m	0,969214754831	0,030785245169	
94	-36,406706119692	4,058167158772	-0,058167158772		0,992081890607	0,007918109393	m
95	4,761897919421	4,064932805869	-0,064932805869		0,981747704247	0,018252295753	
96	0,962413618881	4,005003888091	-0,005003888091	m	0,971626593894	0,028373406106	
97	-12,302450202151	4,051131082199	-0,051131082199		0,993769104707	0,006230895293	m
98	5,622972380276	4,064569698809	-0,064569698809		0,983731032942	0,016268967058	
99	1,476948308033	4,023630415290	-0,023630415290		0,973893722613	0,026106277387	
100	-6,510729817605	4,042848844576	-0,042848844576		0,995356088266	0,004643911734	m

Нахождение нулей полинома

x^6-18cosφx^5+(81+52cos2φ)x^4-12(39cosφ+4cos3φ)x^3+(676+432cos2φ)x^2-1248cosφx+576=0

$x_2=4e^{-i}$ Таблица 26

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	6,103616423502	6,103616423502	-2,103616423502	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	7,100760684597	6,583336504681	-2,583336504681		0,000000000000	-1,000000000000	
2	-24,896550904336	10,256765619312	-6,256765619312		-1,047197551197	0,047197551197	m
3	0,696967346820	5,236739028589	-1,236739028589	m	-0,785398163397	-0,214601836603	
4	4,452820646558	5,069624415949	-1,069624415949	m	-0,628318530718	-0,371681469282	
5	44,466775198450	7,280352831477	-3,280352831477		-0,523598775598	-0,476401224402	
6	-0,437395532747	4,871740304637	-0,871740304637	m	-0,897597901026	-0,102402098974	
7	3,451582757582	4,666334846943	-0,666334846943	m	-0,785398163397	-0,214601836603	
8	15,654905179010	5,338068986709	-1,338068986709		-0,698131700798	-0,301868299202	
9	-1,470884860125	4,692492980944	-0,692492980944		-0,942477796077	-0,057522203923	
10	2,804388077940	4,477952614033	-0,477952614033	m	-0,856797996434	-0,143202003566	
91	0,250735622077	4,061335783117	-0,061335783117	m	-0,990284640805	-0,009715359195	m
92	3,929579166207	4,059895810511	-0,059895810511	m	-0,979636418861	-0,020363581139	
93	40,729124566639	4,160715066101	-0,160715066101		-0,969214754831	-0,030785245169	
94	-0,439479472474	4,063421523975	-0,063421523975		-0,992081890607	-0,007918109393	m
95	3,360004828065	4,055383784700	-0,055383784700	m	-0,981747704247	-0,018252295753	
96	16,624868649097	4,114799950251	-0,114799950251		-0,971626593894	-0,028373406106	
97	-1,300553933330	4,066721544595	-0,066721544595		-0,993769104707	-0,006230895293	m

98	2,845470138912	4,052078654289	-0,052078654289	m	-0,983731032942	-0,016268967058	
99	10,833148264550	4,092122583970	-0,092122583970		-0,973893722613	-0,026106277387	
100	-2,457481795165	4,071514429784	-0,071514429784		-0,995356088266	-0,004643911734	m

В табл. 25 и 26 даны результаты вычисления при помощи функций Никипорца и r/φ-алгоритма старших по модулю корней уравнения (55). Значение модуля и аргумента комплексных корней x_1 и x_2 приведены, соответственно, в колонках 3 и 6. Погрешности в определении модуля и аргумента показаны в колонках 4 и 7. В колонках 5 и 8 символом *m* отмечены номера подходящих дробей непрерывных дробей Никипорца, при которых погрешность определения r_i и φ_i минимальна в сравнении с погрешностью, достигнутой ранее. Из колонок 5 и 8 видно, что точность нахождения r_i и φ_i с ростом номера *n* растет асимптотически, но не монотонно.

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos\varphi x^5+(81+52\cos2\varphi)x^4\text{-}12(39\cos\varphi+4\cos3\varphi)x^3+(676+432\cos2\varphi)x^2\text{-}1248\cos\varphi x+576=0,\ \varphi=1$$

$x_3=3e^i$

Таблица 27

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	3,459241550160	3,459241550160	-0,459241550160	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	2,406624935853	2,885324413953	0,114675586047	m	0,000000000000	1,000000000000	
2	-0,055520762795	0,773181715447	2,226818284553		1,047197551197	-0,047197551197	m
3	156,366351919580	2,915727999262	0,084272000738	m	0,785398163397	0,214601836603	
4	3,190937462013	2,968802208407	0,031197791593	m	0,628318530718	0,371681469282	
5	0,584133797192	2,264139124629	0,735860875371		0,523598775598	0,476401224402	
6	-11,783303430617	2,865766600696	0,134233399304		0,897597901026	0,102402098974	
7	3,939115421175	2,982020007980	0,017979992020	m	0,785398163397	0,214601836603	
8	1,019703983493	2,646846322860	0,353153677140		0,698131700798	0,301868299202	
9	-5,473198937897	2,846295442639	0,153704557361		0,942477796077	0,057522203923	
10	4,829018313704	2,986419304462	0,013580695538	m	0,856797996434	0,143202003566	
91	-86,656522954994	2,991474468767	0,008525531233	m	0,990284640805	0,009715359195	m
92	3,345672144923	2,995076093482	0,004923906518	m	0,979636418861	0,020363581139	
93	0,551771413195	2,941659825314	0,058340174686		0,969214754831	0,030785245169	
94	-13,069288524880	2,988201763380	0,011798236620		0,992081890607	0,007918109393	m
95	3,930451168668	2,996745345350	0,003254654650	m	0,981747704247	0,018252295753	
96	0,952000372637	2,961526940357	0,038473059643		0,971626593894	0,028373406106	
97	-6,211963976944	2,983997643607	0,016002356393		0,993769104707	0,006230895293	m
98	4,690630994065	2,997661881812	0,002338118188	m	0,983731032942	0,016268967058	
99	1,323095434340	2,973245229416	0,026754770584		0,973893722613	0,026106277387	
100	-3,560416575698	2,978555398821	0,021444601179		0,995356088266	0,004643911734	m

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos\varphi x^5+(81+52\cos2\varphi)x^4\text{-}12(39\cos\varphi+4\cos3\varphi)x^3+(676+432\cos2\varphi)x^2\text{-}1248\cos\varphi x+576=0,\ \varphi=1$$

$x_4=3e^{-i}$

Таблица 28

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	2,416577976901	2,416577976901	0,583422023099	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	3,509203788788	2,912089386067	0,087910613933	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	-153,4939876968	10,918599193874	-7,918599193874		-1,047197551197	0,047197551197	m
3	0,054500642831	2,902188381647	0,097811618353		-0,785398163397	-0,214601836603	
4	2,696776411030	2,859890910709	0,140109089291		-0,628318530718	-0,371681469282	
5	14,895812250504	3,765320260694	-0,765320260694		-0,523598775598	-0,476401224402	
6	-0,738697180447	2,983692038810	0,016307961190	m	-0,897597901026	-0,102402098974	
7	2,222808198950	2,875891484154	0,124108515846		-0,785398163397	-0,214601836603	
8	8,663225174513	3,250756171276	-0,250756171276		-0,698131700798	-0,301868299202	
9	-1,615307186153	3,031178198409	-0,031178198409		-0,942477796077	-0,057522203923	
10	1,835785660378	2,896092464415	0,103907535585		-0,856797996434	-0,143202003566	
91	-0,103858309716	2,992706486961	0,007293513039	m	-0,990284640805	-0,009715359195	m
92	2,690042422012	2,989277421392	0,010722578608		-0,979636418861	-0,020363581139	
93	16,311102360087	3,043727480343	-0,043727480343		-0,969214754831	-0,030785245169	
94	-0,688637333460	2,996483710487	0,003516289513	m	-0,992081890607	-0,007918109393	m
95	2,289813462571	2,988100026451	0,011899973549		-0,981747704247	-0,018252295753	
96	9,453777812153	3,023792170388	-0,023792170388		-0,971626593894	-0,028373406106	
97	-1,448817158857	3,001175156137	-0,001175156137	m	-0,993769104707	-0,006230895293	m
98	1,918718400869	2,987644485682	0,012355514318		-0,983731032942	-0,016268967058	
99	6,802230410906	3,012327188329	-0,012327188329		-0,973893722613	-0,026106277387	
100	-2,527794096182	3,007101434346	-0,007101434346		-0,995356088266	-0,004643911734	m

В табл. 27 и 28 даны результаты вычисления средних по модулю корней уравнения (55). Из сравнения колонок 5 и 8 табл. 25–30 видно, что нет прямой связи между номерами $i_{\min}^{(r)}$ и $i_{\min}^{(\varphi)}$, т. е. между номерами подходящих, когда достигается минимум погрешности в определении модуля комплексного числа и его аргумента.

В [528] описан простой алгоритм нахождения номера подходящей дроби, гарантирующего минимальную погрешность в отыскании аргумента комплексного числа.

В табл. 29 и 30 приведены результаты вычисления младших по модулю корней уравнения (55).

Нахождение нулей полинома

x^6-18cosφx^5+(81+52cos2φ)x^4-12(39cosφ+4cos3φ)x^3+(676+432cos2φ)x^2-1248cosφx+576=0, φ=1

$x_5=2e^i$

Таблица 29

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,358855089194	1,358855089194	0,641144910806	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	1,152933041265	1,251666461412	0,748333538588		0,000000000000	1,000000000000	
2	-0,359472610164	0,825811662662	1,174188337338		1,047197551197	-0,047197551197	m
3	10,994756108651	1,577455653829	0,422544346171	m	0,785398163397	0,214601836603	
4	1,807251012821	1,620949267707	0,379050732293	m	0,628318530718	0,371681469282	
5	0,138410137829	1,075645510677	0,924354489323		0,523598775598	0,476401224402	
6	-25,263791894264	1,688503384921	0,311496615079	m	0,897597901026	0,102402098974	
7	2,290162021475	1,754072216720	0,245927783280	m	0,785398163397	0,214601836603	
8	0,463176035510	1,512835683910	0,487164316090		0,698131700798	0,301868299202	
9	-6,355972255178	1,746347967773	0,253652032227		0,942477796077	0,057522203923	
10	2,773659092228	1,821362734690	0,178637265310	m	0,856797996434	0,143202003566	
91	19,566380845122	1,975425740304	0,024574259696	m	0,990284640805	0,009715359195	m
92	1,956776935679	1,975224273281	0,024775726719		0,979636418861	0,020363581139	
93	0,117031408891	1,916725330173	0,083274669827		0,969214754831	0,030785245169	
94	-32,017649579400	1,974384679474	0,025615320526		0,992081890607	0,007918109393	m
95	2,286140317808	1,977402200568	0,022597799432	m	0,981747704247	0,018252295753	
96	0,411535343509	1,945661579553	0,054338420447		0,971626593894	0,028373406106	
97	-7,558490586253	1,972791826664	0,027208173336		0,993769104707	0,006230895293	m
98	2,690415412771	1,978983852918	0,021016147082	m	0,983731032942	0,016268967058	
99	0,674449973948	1,957795498472	0,042204501528		0,973893722613	0,026106277387	
100	-3,769549401342	1,970536012593	0,029463987407		0,995356088266	0,004643911734	m

Нахождение нулей полинома

x^6-18cosφx^5+(81+52cos2φ)x^4-12(39cosφ+4cos3φ)x^3+(676+432cos2φ)x^2-1248cosφx+576=0, φ=1

$x_6=2e^{-i}$

Таблица 30

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,854222638930	0,854222638930	1,145777361070	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	2,300218266990	1,401748379040	0,598251620960	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	-9,049253509739	2,610062818645	-0,610062818645		-1,047197551197	0,047197551197	m
3	0,295992632017	1,514636593512	0,485363406488	m	-0,785398163397	-0,214601836603	
4	1,972929454385	1,596868181524	0,403131818476	m	-0,628318530718	-0,371681469282	
5	27,361400491065	2,563975927230	-0,563975927230		-0,523598775598	-0,476401224402	
6	-0,149983607102	1,709187217965	0,290812782035	m	-0,897597901026	-0,102402098974	
7	1,685872833517	1,706255378295	0,293744621705		-0,785398163397	-0,214601836603	
8	8,498513113328	2,039490518354	-0,039490518354	m	-0,698131700798	-0,301868299202	
9	-0,619943267670	1,810525793601	0,189474206399		-0,942477796077	-0,057522203923	
10	1,426376416887	1,771696023053	0,228303976947		-0,856797996434	-0,143202003566	
91	0,204432287793	1,973164563133	0,026835436867	m	-0,990284640805	-0,009715359195	m
92	2,044177814581	1,973914869626	0,026085130374	m	-0,979636418861	-0,020363581139	
93	34,178858802873	2,034713172661	-0,034713172661		-0,969214754831	-0,030785245169	
94	-0,124931094335	1,975818572849	0,024181427151	m	-0,992081890607	-0,007918109393	m
95	1,749673879964	1,973318412332	0,026681587668		-0,981747704247	-0,018252295753	
96	9,719699809725	2,006022900409	-0,006022900409	m	-0,971626593894	-0,028373406106	
97	-0,529206189299	1,978931094576	0,021068905424		-0,993769104707	-0,006230895293	m
98	1,486759249524	1,973223267536	0,026776732464		-0,983731032942	-0,016268967058	
99	5,930758624815	1,995058193544	0,004941806456	m	-0,973893722613	-0,026106277387	
100	-1,061134786714	1,982626309355	0,017373690645		-0,995356088266	-0,004643911734	m

Значения подходящих дробей показаны на графиках, представленных на рис. 8. Значения подходящих непрерывных дробей Никипорца приведены во вторых колонках таблиц 25-30. Из графиков, приведенных на рис. 8, видно, что значения подходящих дробей периодически повторяются, точнее повторяются квазипериодически. Графики сопряженных корней различаются лишь динамикой в расположении подходящих дробей на “периоде”.

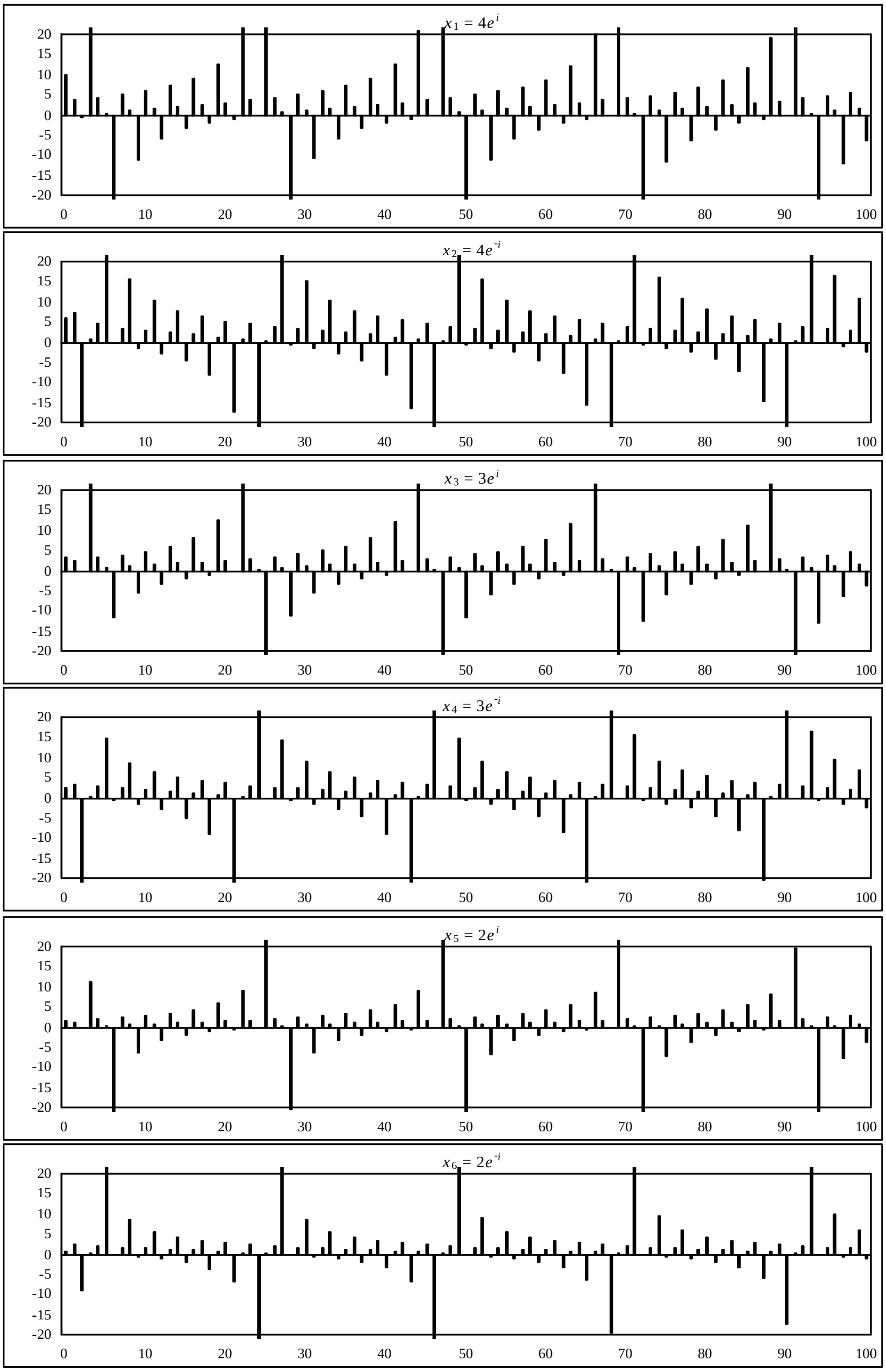


Рис.8.Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (55).

2.6. Числа Фибоначчи и непрерывные дроби Хессенберга

1. Как известно, квадратное уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{56}$$

тесно связано с числами Фибоначчи. Старший по модулю корень уравнения (56) равен:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{57}$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{58}$$

На рис. 9 показаны значения подходящих непрерывных дробей (57) и (58)

x^2 - x- 1=0

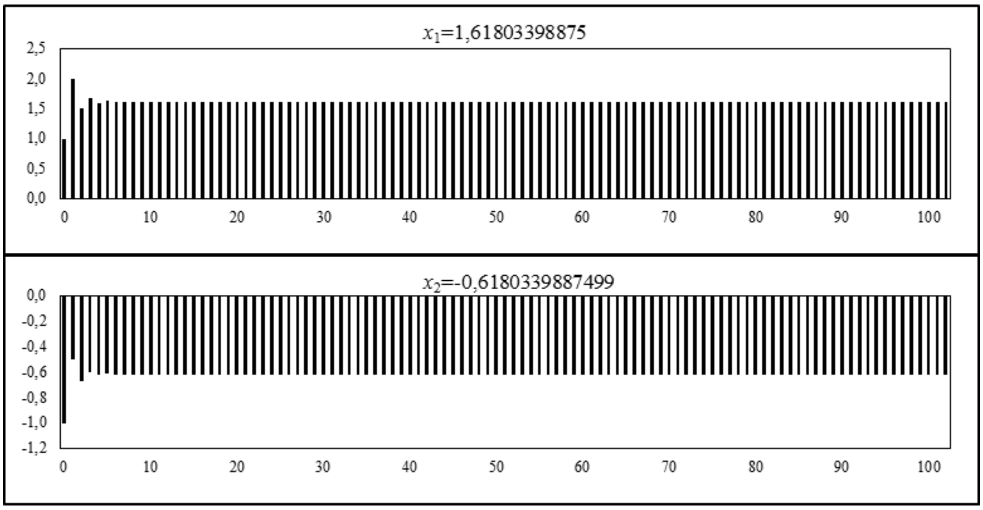


Рис. 9. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (56).

Число $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ известно, как “*золотое сечение*”. Это число равно: 0,61803399….

Корень $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ представляется отношением трёхдиагональных определителей, то есть может быть записан в виде обыкновенной цепной дроби:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\ldots\frac{1}{1+}\ldots. \tag{59}$$

Число $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ называют “*отношением золотого сечения*”. К этому числу, как к пределу, стремится отношение двух соседних чисел Фибоначчи F_n и F_{n-1}, если $n\to\infty$. Числа Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

находятся по рекуррентной формуле

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad F_0=1,\ F_1=1. \tag{60}$$

Числители и знаменатели подходящих дробей разложения (59) составляют последовательные числа Фибоначчи.

Числам Фибоначчи посвящена практически необозримая литература. В США, начиная с 1963 г., выходит специальный журнал: “The Fibonacci Quarterty”Много интересных сведений о числах Фибоначчи имеется в вышедшей в 2002 г. в переводе на русский язык книге М. Гозале: “Гномон. От фараонов до фракталов”.

Имеет место формула, позволяющая записать число Фибоначчи непосредственно, не прибегая к рекуррентным вычислениям:

$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{61}$$

Формула (61) известна как формула Бине. Эта формула впервые опубликована Даниилом Бернулли, но о ней, как отмечается в книге Р.Грехема, Д.Кнута и О.Паташника “Конкретная математика”, позабыли до 1843 г., пока она не была вновь открыта Жаком Бине. Можно обратить внимание, что $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и $\left(1-\sqrt{5}\right)/2$, входящие в формулу Бине, – это корни квадратного уравнения (56). Формула Бине – частный случай более общей формулы:

$$P_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}. \tag{62}$$

Формула (62) была названа обобщённой формулой Бине [520]. Формула (62) определяет числитель P_n подходящей дроби разложения

$$-p+\frac{q}{p-}\frac{q}{p-}\frac{q}{p-}\ldots\frac{q}{p-}\ldots, \tag{63}$$

которой представляется корень квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0. \tag{64}$$

Полагая в (62) $x_1=2$ и $x_2=1$, легко показать, что числа Мерсенна совпадают со значениями числителя P_n цепной дроби

$$3-\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\ldots\frac{2}{3-}\ldots$$

2. Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0\,, \tag{65}$$

старший корень которого, найденный по формуле Кардано, выражается следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}} = 1{,}839286754\ldots$$

Комплексные корни x_2 и x_3 определяются соотношениями:

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta)\,,$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta)\,,$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}}\,, \qquad \beta = \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}}\,.$$

Выполнив вычисления, найдём, что комплексные корни уравнения (65) равны:

$$x_{2,3} = 0{,}7373527057\,e^{\pm i 2{,}1762335454}\,.$$

Решим уравнение (65), используя функции Никипорца, которые были введены в [540]. Старший по модулю корень уравнения (65) определяется отношением бесконечных определителей:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}\,. \tag{66}$$

Рекуррентная последовательность для вычисления определителей (66):

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}\,, \quad F_0 = 1\,,\ F_1 = 1\,,\ F_2 = 2\,. \tag{67}$$

Рекуррентное соотношение (67) порождает последовательность чисел, которые назовём *числами Фибоначчи второго порядка* $F_n^{(2)}$. Запишем несколько первых чисел Фибоначчи второго порядка:

$$F_0^{(2)} = 1\,,\ F_1^{(2)} = 1\,,\ F_2^{(2)} = 2\,,\ F_3^{(2)} = 4\,,\ F_4^{(2)} = 7\,,\ F_5^{(2)} = 13\,,\ F_6^{(2)} = 24\,, \ldots.$$

Помимо рекуррентной формулы (67), числа Фибоначчи второго порядка могут определяться формулами Бине второго порядка [520]:

$$F_n = \frac{(x_2 - x_3)x_1^{n+2} - (x_1 - x_3)x_2^{n+2} + (x_1 - x_2)x_3^{n+2}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}\,, \qquad (68)$$

где x_1, x_2, x_3 – корни кубического уравнения

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0\,. \qquad (69)$$

Предел, к которому стремятся соседние числа Фибоначчи второго порядка $F_n^{(2)}$ при $n \to \infty$, равен старшему по модулю корню уравнения (69):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n^{(2)}}{F_{n-1}^{(2)}} = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}} = 1{,}839286753\ldots \qquad (70)$$

Запишем непрерывные дроби Никипорца, которыми представляются комплексно-сопряжённые корни уравнения (69):

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}\,, \qquad (71)$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}\,. \qquad (72)$$

В табл. 31-33 приведены результаты вычислений корней кубического уравнения при помощи непрерывных дробей Никипорца (66) и (71), (72). Комплексные корни устанавливались с использованием r/φ-алгоритма. Несмотря на то, что непрерывная дробь Хессенберга (66), представляющая старший по модулю корень кубического уравнения (65) имеет элементы, равные единице, скорость сходимости этой непрерывной дроби достаточно высока: двадцать четыре подходящих обеспечивают десять точных цифр после запятой.

Нахождение нулей полинома
x^3-x^2-x-1=0

x_1=1,839286755214161 Таблица 31

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0–r_i	min
16	1,839287397493	-0,000000642279	m
17	1,839286629427	0,000000125788	m
18	1,839286709390	0,000000045824	m
19	1,839286796340	-0,000000041126	m
20	1,839286743813	0,000000011402	m
21	1,839286753807	0,000000001407	m
22	1,839286757688	-0,000000002474	
23	1,839286754311	0,000000000903	m
24	1,839286755229	-0,000000000014	m
25	1,839286755353	-0,000000000139	
26	1,839286755149	0,000000000066	

Из табл. 31 видно, что хотя непрерывная дробь (66) знакоположительна, “вилки” при вычислениях нет, как нет и монотонной сходимости.

Таким образом, можно отметить, что “вилка” – это свойство знакоположительных классических цепных дробей, которые представляются отношением трёхдиагональных определителей. Непрерывные дроби Хессенберга записываются отношением определителей, у которых число диагоналей n≥4.

Нахождение нулей полинома
x^3-x^2-x-1=0

x_2=0,7373527057603276$e^{i2,17623354549187}$ Таблица 32

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
16	-0,839286629427	0,839286629427	-0,101933923666	m	3,141592653590	-0,965359108098	m
17	-0,191487967251	0,400890621754	0,336462084006		3,141592653590	-0,965359108098	
18	1,999998917946	0,685005173257	0,052347532503	m	2,094395102393	0,081838443099	m
19	-1,111131404007	0,773057404151	-0,035704698391	m	2,356194490192	-0,179960944700	
20	-0,349975589912	0,659746273928	0,077606431832		2,513274122872	-0,337040577380	
21	0,714218777367	0,668527585704	0,068825120056		2,094395102393	0,081838443099	
22	-1,600522709367	0,757325443544	-0,019972737783	m	2,243994752564	-0,067761207072	m
23	-0,499592098740	0,718950805368	0,018401900392	m	2,356194490192	-0,179960944700	
24	0,248979080577	0,639040632148	0,098312073612		2,094395102393	0,081838443099	
25	-3,022960224536	0,746481190099	-0,009128484339	m	2,199114857513	-0,022881312021	m
26	-0,659433574145	0,738114289289	-0,000761583529	m	2,284794657156	-0,108561111664	
107	-0,953930533639	0,738683426579	-0,001330720819		2,185455759019	-0,009222213527	m
108	-0,269340628615	0,730713271175	0,006639434585		2,195736800896	-0,019503255404	
109	1,179305892643	0,734443647529	0,002909058231		2,172377898759	0,003855646733	m
110	-1,300311342714	0,738873244690	-0,001520538929		2,182580159336	-0,006346613844	
111	-0,421164575677	0,734559608057	0,002793097703		2,192569872818	-0,016336327326	
112	0,451631437081	0,730885392342	0,006467313418		2,169966059696	0,006267485796	
113	-2,043120164612	0,738592408446	-0,001239702686		2,179880616777	-0,003647071285	m
114	-0,573179542281	0,736703232170	0,000649473590	m	2,189594879775	-0,013361334283	
115	0,109262473407	0,722777059356	0,014575646404		2,167698930977	0,008534614515	
116	-5,815277099752	0,737853871438	-0,000501165677	m	2,177341443082	-0,001107897590	m

Нахождение нулей полинома
x^3-x^2-x-1=0

x_3=0,7373527057603276$e^{-i2,17623354549187}$ Таблица 33

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
16	-0,647798742138	0,647798742138	0,089553963622	m	-3,141592653590	0,965359108098	m
17	-2,839285714286	1,356202681861	-0,618849976100		-3,141592653590	0,965359108098	
18	0,271844660194	0,793700525984	-0,056347820224	m	-2,094395102393	-0,081838443099	m
19	-0,489311163895	0,703297028075	0,034055677685	m	-2,356194490192	0,179960944700	
20	-1,553505535055	0,824087993513	-0,086735287753		-2,513274122872	0,337040577380	
21	0,761235955056	0,813263356270	-0,075910650510		-2,094395102393	-0,081838443099	
22	-0,339694656489	0,717906675593	0,019446030167	m	-2,243994752564	0,067761207072	m
23	-1,088265835929	0,756225586142	-0,018872880381	m	-2,356194490192	0,179960944700	
24	2,183673469388	0,850789400392	-0,113436694632		-2,094395102393	-0,081838443099	
25	-0,179853181077	0,728335830966	0,009016874794	m	-2,199114857513	0,022881312021	m
26	-0,824478816409	0,736591889804	0,000760815957	m	-2,284794657156	0,108561111664	
107	-0,569946126599	0,736024380026	0,001328325734		-2,185455759019	0,009222213527	m
108	-2,018592647857	0,744052465650	-0,006699759889		-2,195736800896	0,019503255404	
109	0,461024587500	0,740273284338	-0,002920578578		-2,172377898759	-0,003855646733	m
110	-0,418122179537	0,735835293864	0,001517411897		-2,182580159336	0,006346613844	
111	-1,290918192295	0,740156421871	-0,002803716111		-2,192569872818	0,016336327326	
112	1,203833409398	0,743877243768	-0,006524538008		-2,169966059696	-0,006267485796	
113	-0,266107212933	0,736115081830	0,001237623931		-2,179880616777	0,003647071285	m
114	-0,948549228621	0,738002749894	-0,000650044133	m	-2,189594879775	0,013361334283	
115	4,975990344538	0,752222285108	-0,014869579347		-2,167698930977	-0,008534614515	
116	-0,093493225407	0,736851878499	0,000500827261	m	-2,177341443082	0,001107897590	m

Ниже не раз упоминались непрерывные дроби Хессенберга и Никипорца, которые записывались отношениями определителей вида (66) или (71). Можно, тем не менее, непрерывную дробь Хессенберга записать в традиционном виде. Непрерывную дробь Хессенберга нетрудно записать, если предварительно изобразить граф этой непрерывной дроби (рис. 10).

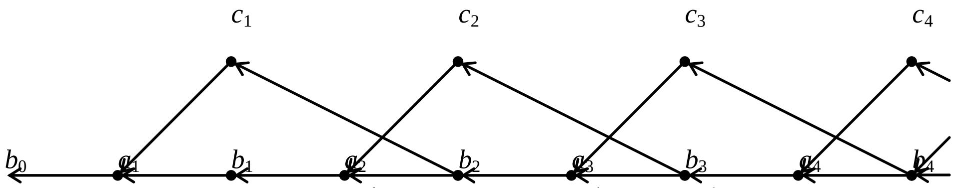


Рис.10. Граф непрерывной дроби Хессенберга.

Непрерывная дробь Хессенберга, которой представляется старший по модулю корень кубического уравнения (69), имеет вид:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}=1+\frac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}}}=1{,}8392286\ \dots . \tag{73}$$

Непрерывные дроби Хессенберга – это своеобразные непрерывные дроби, звенья которой идут как “вверх”, так и “вниз”. Числители и знаменатели непрерывной дроби Хессенберга удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям *n*-го порядка. Классические цепные дроби, как известно, удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям второго порядка, которые называются *формулами Валлиса*. Непрерывные дроби вида (73), удовлетворяющие линейным рекуррентным соотношениям третьего порядка, впервые описал немецкий математик Фюрстенау (Edward Furstenau) в 1874 г. [871].

Подходящие дроби разложения (73) – числа Фибоначчи 2-го порядка $F_n^{(2)}$:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 247, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, ….

Например,

$$\frac{F_4^{(2)}}{F_3^{(2)}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=1+\frac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1}}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{7}{4}\,.$$

Предел отношения чисел Фибоначчи 2-го порядка можно представить правильной цепной дробью:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n^{(2)}}{F_{n-1}^{(2)}}=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}+\sqrt{\frac{11}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}-\sqrt{\frac{11}{27}}}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{305+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+\ldots}. \qquad (74)$$

Цепная дробь (74) коренным образом отличается от простейшей цепной дроби Фибоначчи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+\ldots+}\frac{1}{1+\ldots}. \qquad (75)$$

На рис. 11 показано распределение подходящих дробей Никипорца (66), (71) и (72), представляющих корни кубического уравнения (69).

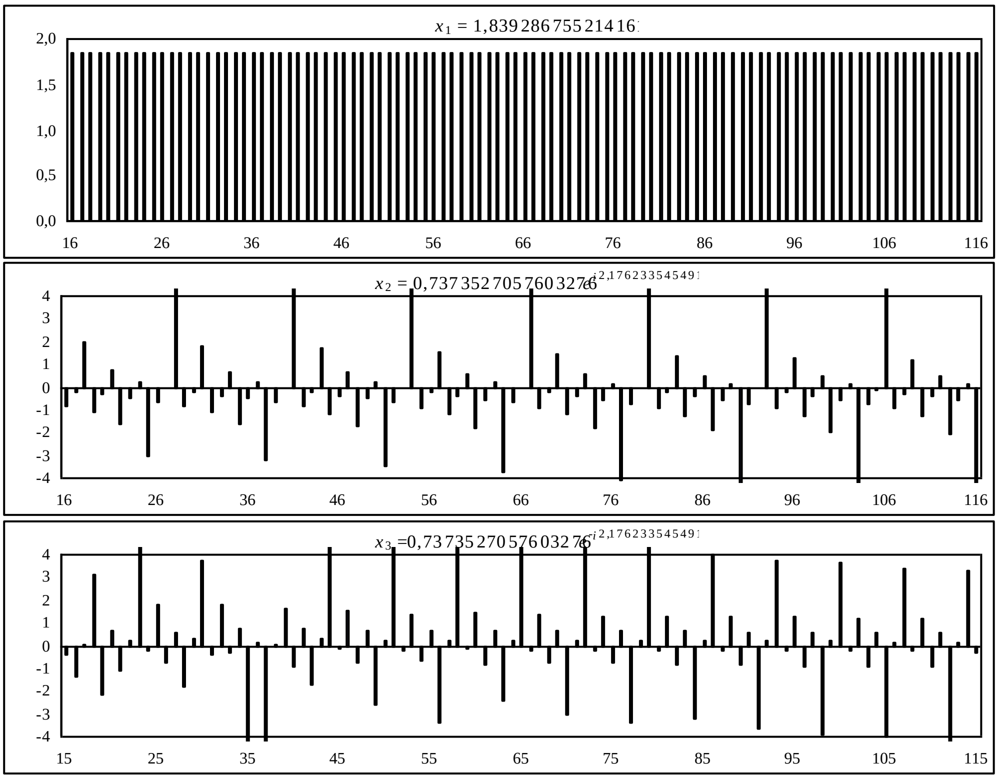


Рис.11. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (65).

На рис. 12 показаны произведения соответствующих друг другу подходящих непрерывных дробей Никипорца (71) и (72), которые представляют комплексно-сопряжённые корни уравнения (69).

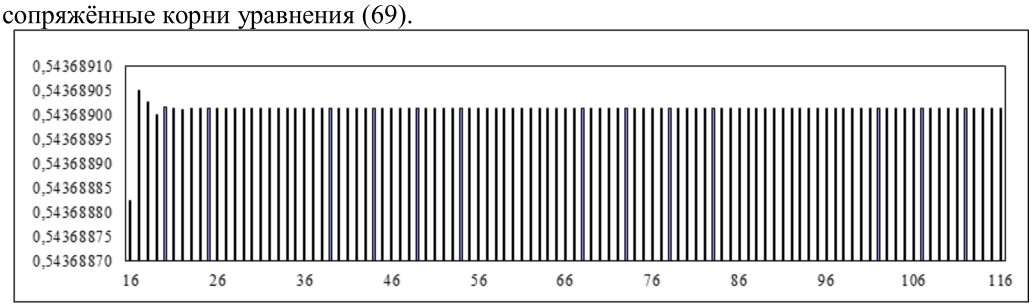


Рис.12. Произведение подходящих непрерывных дробей (71) и (72).

Из графика видно, что достаточно быстро значение произведения подходящих комплексно-сопряжённых корней принимает значение 0,5436890…, что соответствует квадрату модуля комплексно-сопряжённых корней. В самом деле,

$$\sqrt{0{,}5436890} = 0{,}7373527 \ \ldots .$$

Следует обратить внимание, что возможность определения квадрата модуля комплексного числа, как произведения соответствующих подходящих дробей комплексно-сопряжённых чисел, открывает путь к построению экономичного варианта r/φ-алгоритма.

Выше корни уравнения (69) определены при незначительном числе подходящих дробей. Если использовать число подходящих дробей, равное 4096, то точность в определении комплексных корней может быть значительно увеличена(табл. 34).

Таблица 34

Номер корня,	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_1	1,839286755214	0,000000000000	-	-
x_2	0,737352725141	-0,000000019381	2,176233507511	0,000000037981
x_3	0,737352725124	-0,000000019364	-2,176233507511	-0,000000037981

Из рис. 13 приведены графики подходящих непрерывных дробей (71) и (72) на “начальном” и “удаленных” участках.

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

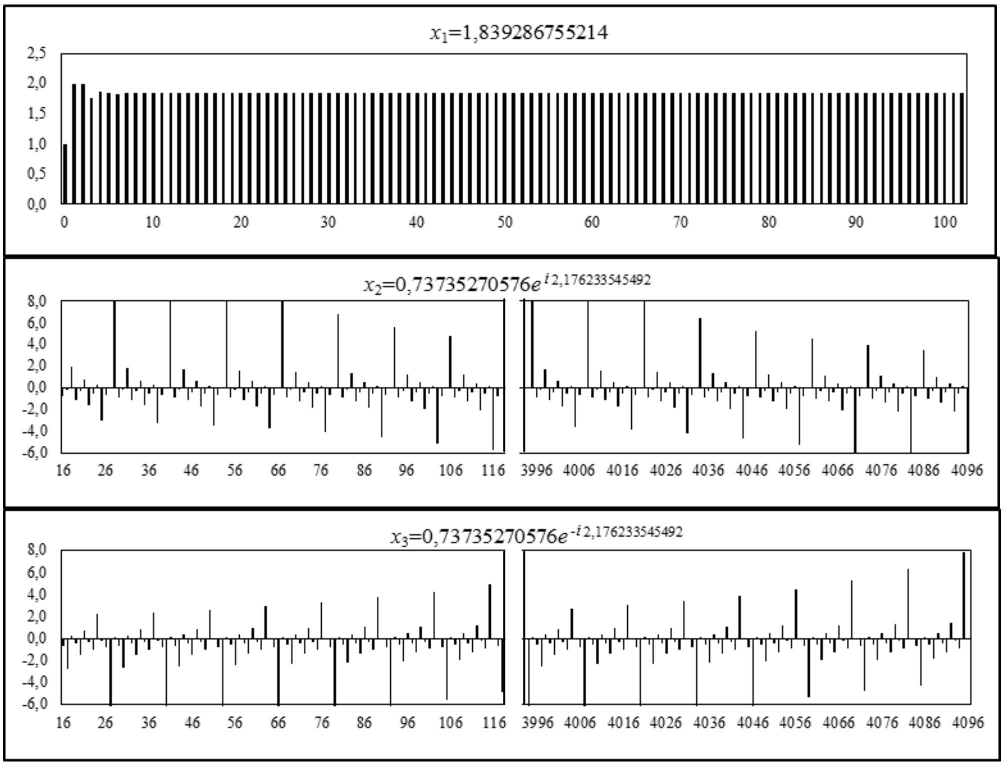


Рис. 13.Графики подходящих дробей (71) и (72) на “начальном” и “удаленном” участке.

3. Запишем числа Фибоначчи 3-го порядка. Для этого определим числители подходящих дробей разложения в непрерывную дробь Хессенберга старшего по модулю корня алгебраического уравнения

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 . \tag{76}$$

Числа Фибоначчи 3-го порядка представляются определителем Хессенберга с единичными элементами по диагоналям:

$$F_n^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

Числа Фибоначчи $F_n^{(3)}$ определяются рекуррентным соотношением

$$F_n^{(3)} = F_{n-1}^{(3)} + F_{n-2}^{(3)} + F_{n-3}^{(3)} + F_{n-4}^{(3)} \tag{77}$$

при начальных условиях:

$$F_0^{(3)} = 1,\ F_1^{(3)} = 1,\ F_2^{(3)} = 2,\ F_3^{(3)} = 4.$$

Запишем несколько первых чисел Фибоначчи третьего порядка:

1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, ….

Числа Фибоначчи третьего порядка могут быть определены не только с использованием рекуррентной формулы (77), но и из формулы Бине третьего порядка:

$$P_n = \frac{Ax_1^{n+3} - Bx_2^{n+3} + Cx_3^{n+3} - Dx_4^{n+3}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)}, \tag{78}$$

где

$$A = (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4), \qquad B = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4),$$

$$C = (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4), \qquad D = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Здесь x_i – корни алгебраического уравнения четвёртой степени (76).

Предел отношения двух рядом стоящих чисел Фибоначчи третьего порядка равен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n^{(3)}}{F_{n-1}^{(3)}} = 1{,}9275619754\dots.$$

Это число $\varphi^{(3)}$ совпадает со значением старшего по модулю корня уравнения

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Этот корень может быть вычислен при помощи непрерывной дроби Хессенберга:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n^{(3)}}{F_{n-1}^{(3)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = 1{,}9275619754\dots \tag{79}$$

Непрерывная дробь Хессенберга (79), представленная отношением определителей, записывается в “натуральном” виде. Как уже отмечалось, непрерывные дроби Хессенберга – своеобразные непрерывные дроби, звенья которых распространяются как “вниз”, так и “вверх”:

$$x_1 = 1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}{1+\cfrac{1+\dots}{1+\dots}}}} = 1{,}9275619754\dots . \tag{80}$$

Подходящие дроби непрерывной дроби Хессенберга определяются отношением определителей n-го и (n-1)-го порядков. Например, пятая подходящая дробь для разложения (79) будет иметь вид:

$$\frac{F_5^{(3)}}{F_4^{(3)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}{1+\cfrac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}}}{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}}{1+\cfrac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{15}{8} . \tag{81}$$

Числа 8 и 15 – соседние числа Фибоначчи третьего порядка.

Как уже отмечалось выше, предел отношения чисел Фибоначчи третьего порядка равен старшему по модулю корню алгебраического уравнения

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 .$$

Этот предел может быть представлен цепной дробью Евклида, или так называемой правильной цепной дробью:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n^{(3)}}{F_{n-1}^{(3)}} = 1+\frac{1}{1+}\frac{1}{12+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{21+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+\dots} . \tag{82}$$

Цепная дробь (82), как и цепная дробь (74), не имеет никакой видимой закономерности в значениях частных знаменателей, в то время как соответствующие этим дробям непрерывные дроби Хессенберга (73) и (79) имеют предельно простую, регулярную структуру. Это лишний раз свидетельствует о том, что алгебраические числа степени выше второй наиболее естественно изучать при помощи непрерывных дробей Хессенберга и Никипорца.

Непрерывную дробь Хессенберга (79) несложно изобразить, если пользоваться соответствующим графом. Запишем непрерывную дробь Хессенберга с четырьмя диагоналями, причём элементы, расположенные по диагоналям, различны:

$$
\omega = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & a_{56} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_{66} & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & a_{56} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{66} & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{83}
$$

Граф непрерывной дроби (83) имеет вид

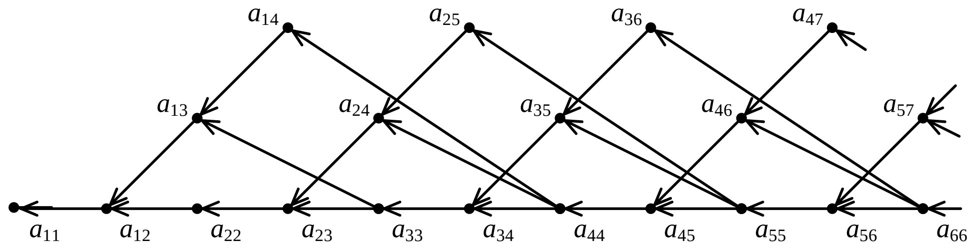


Рис.14. Граф непрерывной дроби (83).

Легко может быть доказана теорема: *Алгебраическое уравнение n-го порядка с отрицательными коэффициентами*

$$
x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \ldots - \alpha_{n-1} x - \alpha_n = 0 \tag{84}
$$

имеет, по меньшей мере, один вещественный корень, причём этот вещественный корень – наибольший по модулю.

Доказательство сводится к тому, что старший по модулю корень уравнения (84) представляется непрерывной дробью Хессенберга с положительными элементами (83), которая сходится в классическом смысле и определяет вещественный корень.

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = \alpha_1 + \cfrac{\alpha_2 + \cfrac{\alpha_3 + \cfrac{\alpha_4 + \ldots}{\alpha_1 + \ldots}}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_2 + \ldots}{\alpha_1 + \ldots}}}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_2 + \cfrac{\alpha_3 + \ldots}{\alpha_1 + \ldots}}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_2 + \ldots}{\alpha_1 + \ldots}}}.
$$

В табл. 35 приведены числа Фибоначчи первого-четвёртого порядков.

Таблица 35

n	$F_n^{(1)}$	$F_n^{(2)}$	$F_n^{(3)}$	$F_n^{(4)}$
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	4	4	4
4	5	7	8	8
5	8	13	15	16
6	13	24	29	31
7	21	44	56	61
8	34	81	108	120
9	55	149	208	236
10	89	274	401	464
11	144	504	773	912
12	233	927	1490	1793
13	377	1705	2872	3525
14	610	3136	5536	6930
15	987	5768	10671	13624
16	1597	10609	20569	26784

В табл. 36 и табл. 37 приведены результаты вычислений двух действительных корней уравнения

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0\,. \tag{85}$$

$$x_4 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}\,. \tag{86}$$

Нахождение нулей полинома

x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_1=1,927561975482925 Таблица 36

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 – r_i$	min
8	1,925925925926	0,001636049557	m
9	1,927884615385	-0,000322639902	m
10	1,927680798005	-0,000118822522	m
11	1,927554980595	0,000006994888	m
12	1,927516778523	0,000045196959	
13	1,927576601671	-0,000014626188	
14	1,927565028902	-0,000003053419	m
15	1,927560678474	0,000001297009	m
16	1,927560892605	0,000001082878	m
17	1,927562550444	-0,000000574961	m
18	1,927562022401	-0,000000046918	m
19	1,927561909417	0,000000066066	
20	1,927561955676	0,000000019807	m
21	1,927561995626	-0,000000020143	
22	1,927561974776	0,000000000707	m
23	1,927561972986	0,000000002497	
24	1,927561975375	0,000000000108	m
25	1,927561976115	-0,000000000633	
26	1,927561975382	0,000000000101	m
27	1,927561975405	0,000000000078	m
28	1,927561975496	-0,000000000013	m

Нахождение нулей полинома

x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_4=-0,7748041132154338 Таблица 37

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 – r_i$	min
8	-0,500000000000	-0,274804113215	m
9	-1,600000000000	0,825195886785	
10	-5,000000000000	4,225195886785	
11	-0,125000000000	-0,649804113215	
12	-0,400000000000	-0,374804113215	
13	-1,111111111111	0,336306997896	
14	-2,571428571429	1,796624458213	
15	-0,411764705882	-0,363039407333	
16	-0,354166666667	-0,420637446549	
17	-0,857142857143	0,082338743927	m
18	-1,750000000000	0,975195886785	
99	-0,781481155007	0,006677041792	m
100	-0,772959284981	-0,001844828235	m
101	-0,768556617479	-0,006247495736	
102	-0,775340827879	0,000536714664	m
103	-0,780546426497	0,005742313282	
104	-0,775334746675	0,000530633460	m
105	-0,769778806407	-0,005025306809	
106	-0,773445538027	-0,001358575188	
107	-0,779085126891	0,004281013675	
108	-0,776790713909	0,001986600694	

Запишем дроби Никипорца для комплексных корней уравнения (85):

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{87}$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{88}$$

В табл. 38 и 39 приведены результаты вычисления комплексных корней уравнения 4-й степени (85).

Нахождение нулей полинома
x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_2=0,8182760987795397$e^{-i1,66427367278103}$

Таблица 38

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
8	-1,427884615385	1,427884615385	-0,609608516605	m	-3,141592653590	1,477318980809	m
9	-0,200408070732	0,534938875945	0,283337222834	m	-3,141592653590	1,477318980809	
10	1,190092078228	0,698333637879	0,119942460901	m	-2,094395102393	0,430121429612	m
11	0,585303734297	0,668178573859	0,150097524920		-1,570796326795	-0,093477345986	m
12	-3,018485692580	0,903382889405	-0,085106790626	m	-1,884955592154	0,220681919373	
13	-0,372877528902	0,779508614575	0,038767484204	m	-2,094395102393	0,430121429612	
14	0,724613234569	0,771418862241	0,046857236539		-1,795195802051	0,130922129270	
15	-0,094876067703	0,593640546984	0,224635551795		-1,963495408494	0,299221735713	
16	14,923501279343	0,849410620113	-0,031134521334	m	-1,745329251994	0,081055579213	m
17	-0,613952554946	0,822279378719	-0,004003279940	m	-1,884955592154	0,220681919373	
18	0,412438090583	0,772284864524	0,045991234256		-1,713595992867	0,049322320086	m
99	2,199927284320	0,818748780655	-0,000472681876	m	-1,673239565499	0,008965892718	m
100	-0,451169929821	0,813519106625	0,004756992155		-1,689028308382	0,024754635601	
101	1,341549031240	0,817859699075	0,000416399704	m	-1,671059922122	0,006786249341	m
102	-0,657766310751	0,815986442947	0,002289655833		-1,686539214032	0,022265541251	
103	0,858243871764	0,816415718379	0,001860380401		-1,668971097220	0,004697424439	m
104	-0,926651201577	0,817482414054	0,000793684725		-1,684152762749	0,019879089968	
105	0,575065769105	0,814553537375	0,003722561405		-1,666967530476	0,002693857695	m
106	-1,324174798323	0,818561297012	-0,000285198233	m	-1,681862733740	0,017589060959	
107	0,348760151489	0,811607334525	0,006668764255		-1,665044106403	0,000770433622	m
108	-2,063441522059	0,819140316801	-0,000864218021		-1,679663398949	0,015389726168	

Нахождение нулей полинома
x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_3=0,8182760987795397$e^{i1,66427367278103}$ Таблица 39

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
8	-0,727272727273	0,727272727273	0,091003371507	m	3,141592653590	-1,477318980809	m
9	-1,617647058824	1,084652289093	-0,266376190314		3,141592653590	-1,477318980809	
10	0,087179487179	0,468092620777	0,350183478003		2,094395102393	-0,430121429612	m
11	7,090909090909	0,923473261888	-0,105197163109		1,570796326795	0,093477345986	m
12	-0,429687500000	0,792446596231	0,025829502549	m	1,884955592154	-0,220681919373	
13	-1,252173913043	0,855235616548	-0,036959517769		2,094395102393	-0,430121429612	
14	0,278426286208	0,728552245596	0,089723853183		1,795195802051	-0,130922129270	
15	-13,279635258359	1,047252442282	-0,228976343503		1,963495408494	-0,299221735713	
16	0,098155238427	0,805033285604	0,013242813175	m	1,745329251994	-0,081055579213	m
17	-0,985833333333	0,821509903955	-0,003233805175	m	1,884955592154	-0,220681919373	
18	0,718778077269	0,811593278604	0,006682820175		1,713595992867	-0,049322320086	m
99	0,301762183649	0,815757824753	0,002518274026	m	1,673239565499	-0,008965892718	m
100	-1,487629851716	0,821045048376	-0,002768949597		1,689028308382	-0,024754635601	
101	0,503163620249	0,816779200393	0,001496898386	m	1,671059922122	-0,006786249341	m
102	-1,017249229768	0,818668474112	-0,000392375332	m	1,686539214032	-0,022265541251	
103	0,774430053974	0,818194876156	0,000081222623	m	1,668971097220	-0,004697424439	m
104	-0,722081318091	0,817141493922	0,001134604858		1,684152762749	-0,019879089968	
105	1,171947569516	0,820153863091	-0,001877764311		1,666967530476	-0,002693857695	m
106	-0,506543320565	0,816171467393	0,002104631386		1,681862733740	-0,017589060959	
107	1,909325084603	0,823137510240	-0,004861411460		1,665044106403	-0,000770433622	m
108	-0,323664791308	0,815565338236	0,002710760543		1,679663398949	-0,015389726168	

На рис. 15 показаны значения квадрата модуля комплексных корней, которые получены как произведения соответствующих подходящих непрерывных дробей, представляющих комплексно-сопряжённые корни. Интересно отметить, что рис. 15 весьма похож на рис. 16 г, на котором приведены подходящие непрерывной дроби Никипорца (86), связанные со вторым вещественным корнем уравнения (76).

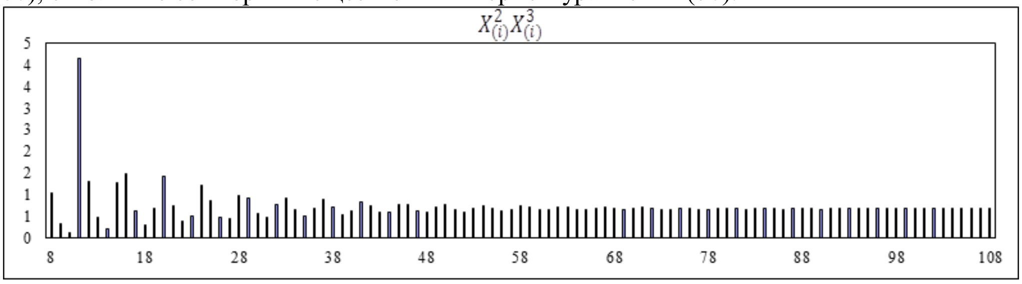


Рис.15. Произведение подходящих дробей (87) и (88).

На рис. 16 показано распределение подходящих непрерывных дробей Никипорца (79), (86), (87) и (88), представляющих корни уравнения (85). Комплексные корни уравнения (85) равны:

$$x_{2,3} = 0{,}81827609e^{\pm i1{,}66427367}.$$

Второй вещественный корень – минимальный по модулю и имеет отрицательное значение:

$$x_4 = -0{,}77480411.$$

Из рис. 16 г видно, что подходящие непрерывной дроби Никипорца, представляющие x_4, заметно осциллируют возле значения корня. Поэтому при вычислении модуля x_4 целесообразно использовать формулу

$$|r_0| = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |P_i/Q_i|},$$

по которой находится модуль комплексного числа в r/φ-алгоритме.

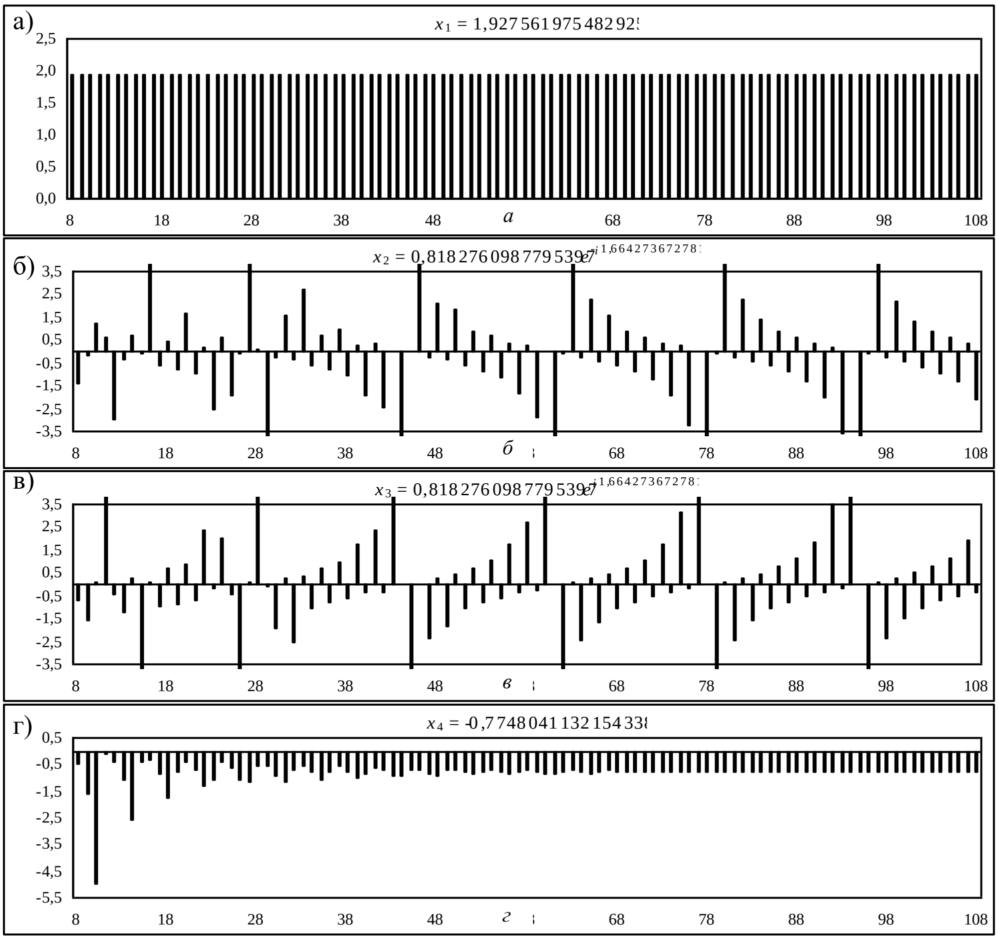


Рис.16. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (85).

Нахождение нулей полинома

x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_4=-0,7748041132154338 Таблица 40

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min
8	-0,500000000000	0,500000000000	0,274804113215	m
9	-1,600000000000	0,894427191000	-0,119623077784	m
10	-5,000000000000	1,587401051968	-0,812596938753	
11	-0,125000000000	0,840896415254	-0,066092302038	m
12	-0,400000000000	0,724779663678	0,050024449538	m
13	-1,111111111111	0,778271716226	-0,003467603011	m
14	-2,571428571429	0,923167015268	-0,148362902053	
15	-0,411764705882	0,834548121172	-0,059744007956	
16	-0,354166666667	0,758736492658	0,016067620558	
17	-0,857142857143	0,768045937660	0,006758175555	
18	-1,750000000000	0,827753279885	-0,052949166669	
99	-0,781481155007	0,776752663909	-0,001948550694	m
100	-0,772959284981	0,776711776040	-0,001907662824	m
101	-0,768556617479	0,776624565260	-0,001820452045	m
102	-0,775340827879	0,776611041172	-0,001806927957	m
103	-0,780546426497	0,776651932330	-0,001847819115	
104	-0,775334746675	0,776638341688	-0,001834228472	
105	-0,769778806407	0,776568038669	-0,001763925453	m
106	-0,773445538027	0,776536435320	-0,001732322105	m
107	-0,779085126891	0,776561880918	-0,001757767703	
108	-0,776790713909	0,776564146261	-0,001760033046	

Проанализируем графики, показанные на рис. 16а и 16г. График, представленный на рис. 16а, соответствует вещественному старшему по модулю корню уравнения (85).

Исходя из чисел, приведённых в третьей колонке табл. 40, график имеет довольно сложную структуру – ни о какой “вилке” в значениях подходящих дробей, представляющих вещественный корень, говорить не приходится. Нерегулярность в структуре графика, приведённого на рис. 16г, соответствующего второму вещественному корню, более очевидна.

В табл. 41 приведены результаты решения уравнения (85) с использованием 4096 подходящих дробей.

Таблица 41

Номер корня,	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0{-}r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_1	1,927561975483	0,000000000000	-	-
x_2	0,818223520113	0,000052578666	1,664273163420	0,000000509361
x_3	0,818276083103	0,000000015676	-1,664273163420	-0,000000509361
x_4	-0,774804094663	-0,000000000121	-	-

На рис. 17 показаны графики подходящих дробей (87) и (88) на “начальных” и ‘”удаленных” участках.

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1=0$$

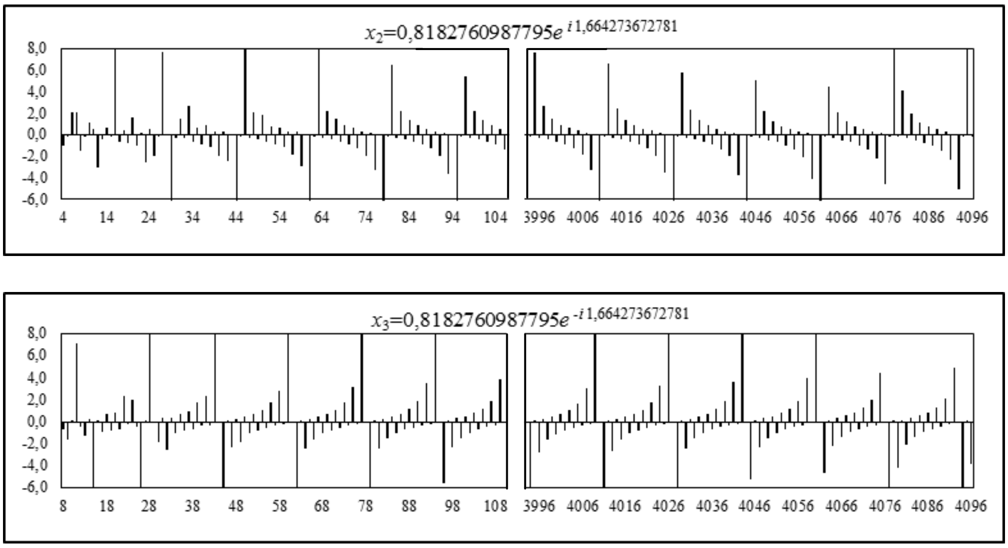


Рис.17. Графики подходящих дробей (87) и (88) на “начальном” и “удаленном” участке.

4. Числа Фибоначчи $F_n^{(4)}$ четвёртого порядка определяются рекуррентным соотношением

$$F_n^{(4)} = F_{n-1}^{(4)} + F_{n-2}^{(4)} + F_{n-3}^{(4)} + F_{n-4}^{(4)} + F_{n-5}\,. \tag{89}$$

Чтобы задать начальные условия, запишем определитель Хессенберга

$$F_n^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}. \tag{90}$$

Рассматривая (90), получим:

$$F_0^{(4)} = 1\,,\ F_1^{(4)} = 1\,,\ F_2^{(4)} = 2\,,\ F_3^{(4)} = 4\,,\ F_4^{(4)} = 8\,. \tag{91}$$

Таким образом, числа Фибоначчи четвёртого порядка составляют последовательность:

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, \ldots .$$

Числа Фибоначчи четвёртого порядка могут быть определены, помимо рекуррентной формулы (89), также с использованием обобщённой формулы Бине, которая по структуре аналогична формуле Бине третьего порядка (78) и составляется по корням алгебраического уравнения

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0\,. \tag{92}$$

Предел отношения соседних чисел Фибоначчи совпадает, очевидно, со значением старшего по модулю корня уравнения (92):

$$x_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n^{(4)}}{F_{n-1}^{(4)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} = 1{,}965948236645485\ldots\ . \tag{93}$$

Кроме вещественного корня (93), уравнение (92) имеет две пары комплексно-сопряжённых корней:

$$x_{2,3} = 0{,}8710479417\,e^{\pm i1{,}3445710146},$$

$$x_{4,5} = 0{,}8187881576\,e^{\pm i2{,}5471855514}.$$

В табл. 42-46 приведены результаты вычисления корней уравнения

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

при помощи непрерывных дробей Никипорца.

Данные табл. 42 показывают высокую скорость сходимости непрерывной дроби (93), которой представляется единственный вещественный корень уравнения (92). Несмотря на то, что непрерывная дробь Хессенберга (93) знакоположительна, эффект “вилки” отсутствует, как свидетельствуют числа колонки 3 табл. 42.

Нахождение нулей полинома

x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_1=1,965948236645485 Таблица 42

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	min
15	1,965942454492	0,000005782153	m
16	1,965949820789	-0,000001584143	m
17	1,965948799757	-0,000000563111	m
18	1,965948280026	-0,000000043380	m
19	1,965948121250	0,000000115395	
20	1,965948172439	0,000000064207	
21	1,965948271478	-0,000000034833	m
22	1,965948244643	-0,000000007997	m
23	1,965948235028	0,000000001618	m
24	1,965948234248	0,000000002397	
25	1,965948236206	0,000000000440	m
26	1,965948237310	-0,000000000665	
27	1,965948236718	-0,000000000073	m
28	1,965948236581	0,000000000064	m
29	1,965948236608	0,000000000037	m
30	1,965948236649	-0,000000000003	m

Запишем непрерывные дроби Никипорца для комплексных корней уравнения (92):

$$x_2=-\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&1&1&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&0&\dots\\-1&1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&0&-1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&0&\dots\\-1&1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&0&-1&1&1&\dots\\0&0&0&0&-1&1&\dots\\.&.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1&1&0&\dots\\1&1&1&1&1&\dots\\-1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&\dots\\-1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&\dots\\0&0&0&-1&1&\dots\\.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}, \tag{94}$$

$$x_3=-\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&1&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&0&\dots\\-1&1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1&1&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&0&\dots\\-1&1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&0&-1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1&0&0&\dots\\1&1&1&1&0&\dots\\1&1&1&1&1&\dots\\-1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1&1&0&\dots\\1&1&1&1&1&\dots\\-1&1&1&1&1&\dots\\0&-1&1&1&1&\dots\\0&0&-1&1&1&\dots\\.&.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}. \tag{95}$$

В табл. 43 и 44 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней уравнения (92), проведённые по формулам (94) и (95) с использованием r/φ-алгоритма. Сравнивая колонки 5 и 8 таблиц 43 и 44, 45 и 46, можно обратить внимание, что точность определения модулей комплексно-сопряжённых корней различна, в то время как погрешности в определении аргументов этих корней совпадают.

Нахождение нулей полинома

x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_2=0,8710479417371768$e^{i1,344571014601718}$

Таблица 43

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
15	-5,340949820789	5,340949820789	-4,469901879051	m	3,141592653590	-1,797021638988	m
16	-0,272496418805	1,206395332874	-0,335347391137	m	3,141592653590	-1,797021638988	
17	1,000718386641	1,133523144447	-0,262475202709	m	2,094395102393	-0,749824087791	m
18	0,600589118425	0,967090592961	-0,096042651224	m	1,570796326795	-0,226225312193	m
19	-0,633810653754	0,888721392189	-0,017673450452	m	1,884955592154	-0,540384577552	
20	3,803725432936	1,132416586390	-0,261368644653		1,570796326795	-0,226225312193	
21	-0,532683357579	1,016752405306	-0,145704463569		1,795195802051	-0,450624787450	
22	0,704394902227	0,971158985921	-0,100111044183		1,570796326795	-0,226225312193	
23	0,159361500265	0,794471738118	0,076576203619		1,396263401595	-0,051692386994	m
24	-4,936854245668	0,953708466036	-0,082660524298		1,570796326795	-0,226225312193	
25	1,109422285314	0,966911354869	-0,095863413131		1,427996660723	-0,083425646121	
106	4,390125607716	0,882873201575	-0,011825259837	m	1,365909849387	-0,021338834785	m
107	0,222304423853	0,869877323530	0,001170618207	m	1,351222646705	-0,006651632104	m
108	-3,029946932551	0,881502853426	-0,010454911689		1,370269136140	-0,025698121539	
109	0,642068870606	0,878566942400	-0,007519000663		1,355845250497	-0,011274235895	
110	-0,795505068753	0,877658508468	-0,006610566731		1,374446785946	-0,029875771344	
111	1,337912542695	0,881481533587	-0,010433591850		1,360277231451	-0,015706216850	
112	-0,172523993990	0,866931967200	0,004115974537		1,378453919432	-0,033882904831	
113	4,799388558207	0,882047751357	-0,010999809620		1,364530142468	-0,019959127867	
114	0,232691795613	0,870372151545	0,000675790193	m	1,350884841044	-0,006313826442	m
115	-2,876551748686	0,880735001784	-0,009687060047		1,368614621366	-0,024043606764	

Нахождение нулей полинома

x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_3=0,8710479417371768$e^{-i1,344571014601718}$ Таблица 44

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
15	-0,380952380952	0,380952380952	0,490095560785	m	-3,141592653590	1,797021638988	m
16	-1,341666666667	0,714920352984	0,156127588753	m	-3,141592653590	1,797021638988	
17	0,085636673368	0,352418233711	0,518629708027		-2,094395102393	0,749824087791	m
18	3,087217320025	0,606297221771	0,264750719966		-1,570796326795	0,226225312193	m
19	-2,159054235388	0,781629915587	0,089418026150	m	-1,884955592154	0,540384577552	
20	0,619366691884	0,751898038419	0,119149903318		-1,570796326795	0,226225312193	
21	-1,085115864528	0,792352707512	0,078695234225	m	-1,795195802051	0,450624787450	
22	0,234690265487	0,680558734958	0,190489206779		-1,570796326795	0,226225312193	
23	6,586290624847	0,875782371205	-0,004734429468	m	-1,396263401595	0,051692386994	m
24	-0,189070429428	0,751309603383	0,119738338354		-1,570796326795	0,226225312193	
25	1,765971311703	0,812009641520	0,059038300217		-1,427996660723	0,083425646121	
106	0,171506566694	0,857897869934	0,013150071803		-1,365909849387	0,021338834785	m
107	3,425720858122	0,870765787214	0,000282154523	m	-1,351222646705	0,006651632104	m
108	-0,250997007317	0,859318574791	0,011729366946		-1,370269136140	0,025698121539	
109	1,186207516899	0,862239574276	0,008808367461		-1,355845250497	0,011274235895	
110	-0,952856057563	0,863137585293	0,007910356444		-1,374446785946	0,029875771344	
111	0,563208963175	0,859347029743	0,011700911994		-1,360277231451	0,015706216850	
112	-4,404014338375	0,873796326011	-0,002748384274		-1,378453919432	0,033882904831	
113	0,158463117875	0,858856282764	0,012191658973		-1,364530142468	0,019959127867	
114	3,267672163701	0,870409608931	0,000638332806		-1,350884841044	0,006313826442	m
115	-0,264027277488	0,860189669466	0,010858272272		-1,368614621366	0,024043606764	

$$x_4=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (96)$$

Нахождение нулей полинома

x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_4=0,8187888157674695$e^{-i2,54718555142298}$ Таблица 45

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
15	-0,625000000000	0,625000000000	0,193788815767	m	-3,141592653590	0,594407102167	m
16	-1,252173913043	0,884651736929	-0,065862921162	m	-3,141592653590	0,594407102167	
17	-2,308243727599	1,217892000014	-0,399103184246		-3,141592653590	0,594407102167	
18	-0,039190897598	0,515825592710	0,302963223057		-3,141592653590	0,594407102167	
19	5,947368421052	0,841138045930	-0,022349230163	m	-2,513274122872	-0,033911428551	m
20	-0,647727272727	0,805294553097	0,013494262670	m	-2,617993877991	0,070808326569	
21	-1,026666666667	0,833724522949	-0,014935707181		-2,692793703077	0,145608151654	
22	-1,758241758242	0,915228588979	-0,096439773211		-2,748893571891	0,201708020468	
23	-0,136300093197	0,740690841881	0,078097973886		-2,792526803191	0,245341251768	
24	1,877038541843	0,812869065665	0,005919750103	m	-2,513274122872	-0,033911428551	
25	-0,938001905540	0,823518970069	-0,004730154301	m	-2,570393989301	0,023208437878	m
106	-0,713990250096	0,823390315009	-0,004601499241	m	-2,561080967600	0,013895416177	m
107	-0,410830999927	0,817257773815	0,001531041952	m	-2,567323028740	0,020137477317	
108	0,269140025004	0,807657722490	0,011131093277		-2,540011081626	-0,007174469797	m
109	-3,836117299088	0,821013190270	-0,002224374502		-2,546343519225	-0,000842032198	m
110	-1,182535216037	0,824139634295	-0,005350818528		-2,552544031042	0,005358479619	
111	-0,793851566699	0,823821565262	-0,005032749494		-2,558616697254	0,011431145831	
112	-0,506765649740	0,819746988619	-0,000958172851	m	-2,564565431502	0,017379880079	
113	-0,036008708749	0,794273382670	0,024515433097		-2,570393989301	0,023208437878	
114	17,220715630403	0,819088485466	-0,000299669699	m	-2,544690049408	-0,002495502015	
115	-1,393765654413	0,823410788339	-0,004621972572		-2,550599976182	0,003414424759	

$$x_5 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (97)$$

Нахождение нулей полинома

$x^5\text{-}x^4\text{-}x^3\text{-}x^2\text{-}x\text{-}1=0$

$x_5=0,8187888157674695e^{i2,54718555142298}$

Таблица 46

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
15	-0,400000000000	0,400000000000	0,418788815767	m	3,141592653590	-0,594407102167	m
16	-1,111111111111	0,666666666667	0,152122149101	m	3,141592653590	-0,594407102167	
17	-2,571428571429	1,045515917149	-0,226727101382		3,141592653590	-0,594407102167	
18	-7,000000000000	1,681792830507	-0,863004014740		3,141592653590	-0,594407102167	
19	0,062500000000	0,870550563296	-0,051761747529	m	2,513274122872	0,033911428551	m
20	-0,333333333333	0,741836375590	0,076952440177		2,617993877991	-0,070808326569	
21	-0,857142857143	0,757306542125	0,061482273643		2,692793703077	-0,145608151654	
22	-1,750000000000	0,840896415254	-0,022107599486	m	2,748893571891	-0,201708020468	
23	-3,555555555556	0,986998258526	-0,168209442758		2,792526803191	-0,245341251768	
24	0,290322580645	0,873318840150	-0,054530024383		2,513274122872	0,033911428551	
25	-0,276785714286	0,786695275845	0,032093539922		2,570393989301	-0,023208437878	m
106	-0,946189100007	0,815620723255	0,003168092512	m	2,561080967600	-0,013895416177	m
107	-1,625790709795	0,821692841080	-0,002904025313	m	2,567323028740	-0,020137477317	
108	2,485112577312	0,831424194167	-0,012635378399		2,540011081626	0,007174469797	m
109	-0,174097989794	0,817852499938	0,000936315830	m	2,546343519225	0,000842032198	m
110	-0,567470889778	0,814744680221	0,004044135546		2,552544031042	-0,005358479619	
111	-0,850337500394	0,815103906755	0,003684909013		2,558616697254	-0,011431145831	
112	-1,321059942912	0,819130068155	-0,000341252387	m	2,564565431502	-0,017379880079	
113	-18,574035217831	0,845367070142	-0,026578254375		2,570393989301	-0,023208437878	
114	0,038846972367	0,819725499605	-0,000936683837		2,544690049408	0,002495502015	
115	-0,480526313129	0,815402235681	0,003386580087		2,550599976182	-0,003414424759	

На рис. 18 показаны квадраты модулей двух пар комплексно-сопряжённых корней уравнения (92).

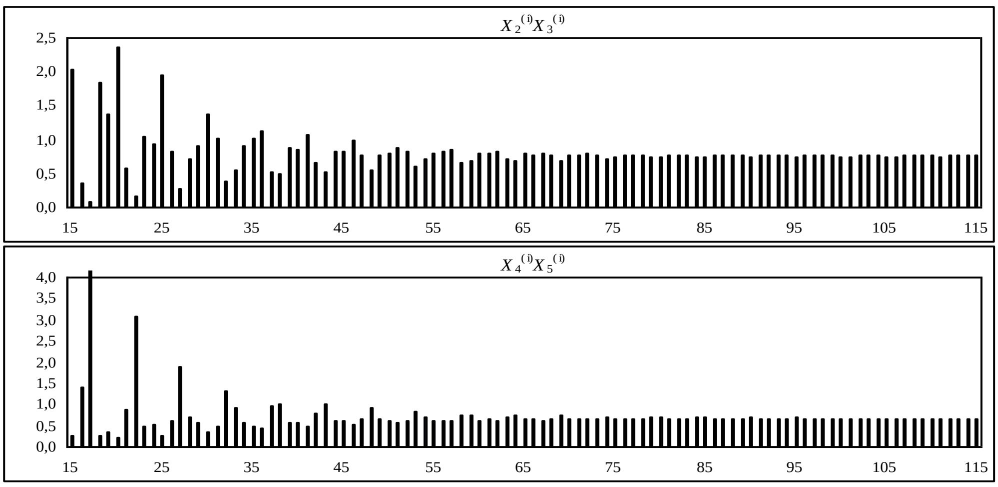


Рис.18. Квадраты модулей комплексно-сопряженных корней уравнения (92).

На рис. 19 приведены графики распределения подходящих непрерывных дробей (93)-(97), которые представляют корни алгебраического уравнения (92). Из графика 19а видно, что x_1 – вещественный корень. Графики также показывают, что имеются две пары комплексно-сопряжённых корней, причём, аргумент второй пары комплексных корней больше, чем аргумент первой пары. Знак аргумента определяется по динамике распределения подходящих “на периоде”. Из графиков рис. 19б и 19в можно заключить, что аргумент первой пары комплексных корней менее $\pi/2$. Из графиков рис. 19г и 19д видно, что аргумент второй пары лежит в интервале $\pi/2<\varphi<\pi$, причём φ ближе к π, чем к $\pi/2$.

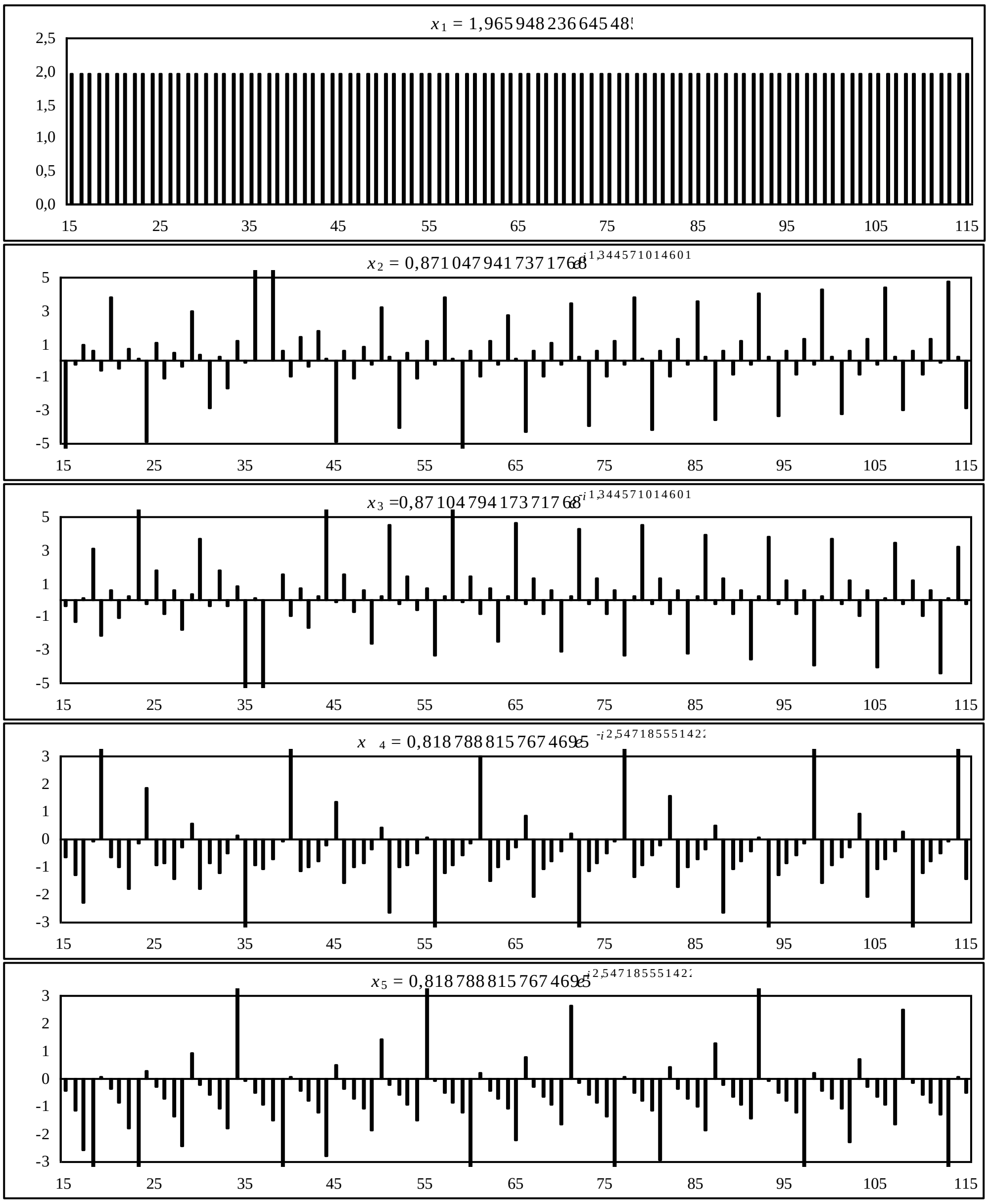


Рис.19. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (92).

Если на начальном участке наблюдается некоторая неупорядоченность в расположении подходящих дробей, то затем отчётливо просматривается регулярность графиков, представляющих две пары комплексно-сопряжённых корней.

На рис. 20 показано распределение значений подходящих дробей, вычисленных по формулам (93) - (97). Используя эти подходящие дроби, были определены значения двух пар комплексно – сопряженных корней уравнения

$$-x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1=0$$

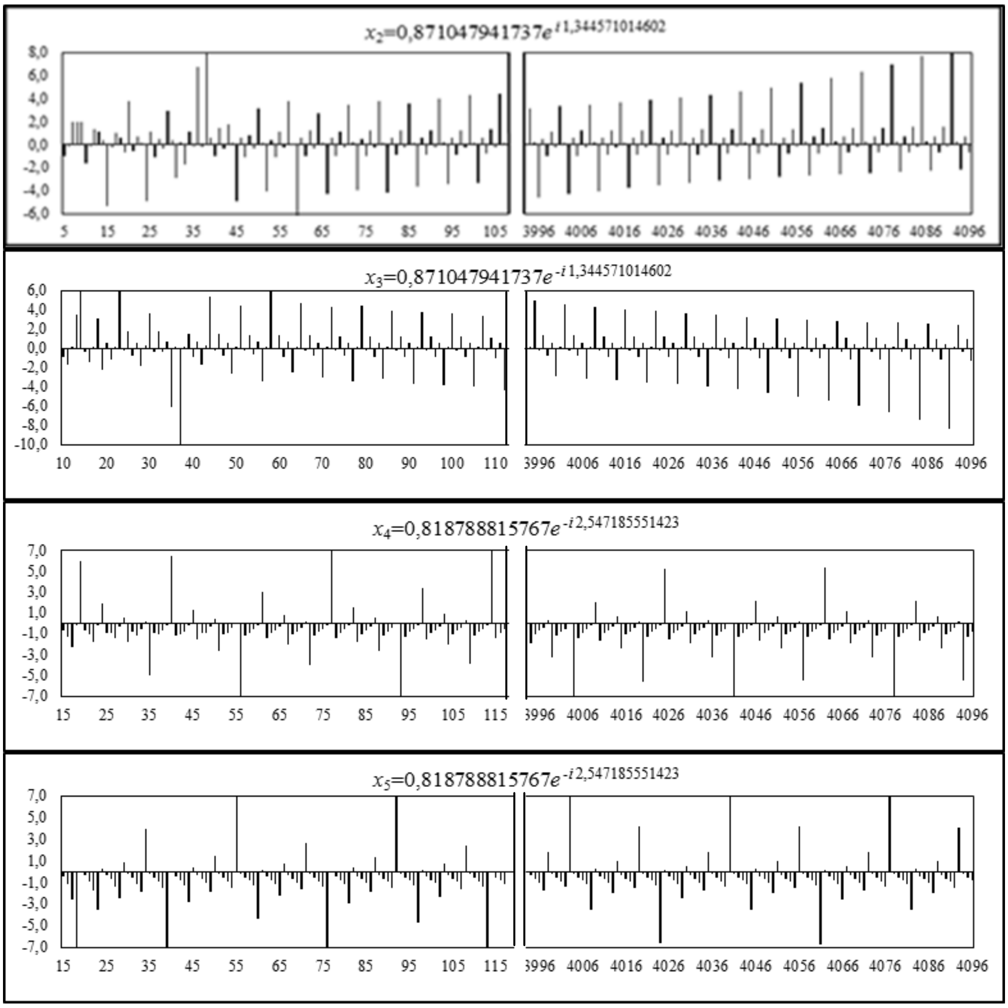


Рис.20. Графики подходящих дробей (93)–(97) на “начальном” и “удаленном” участке.

В табл. 47 приведены значения корней уравнения (92) при использовании 4096 подходящих дробей выражения (94) – (97).

Таблица 47

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,965948236645	0,000000000000	-	-
x_2	0,870906327607	0,000141614130	1,344570981113	0,000000033489
x_3	0,871048118257	-0,000000176520	-1,344570981113	-0,000000033489
x_4	0,818788783515	0,000000032252	2,547185796149	-0,000000244726
x_5	0,818788807863	0,000000007904	-2,547185796149	0,000000244726

5.Рассмотрим ещё один пример решения алгебраического уравнения, связанного с числами Фибоначчи.

$$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0\,. \tag{98}$$

В табл. 48-53 приведены результаты вычислений корней уравнения (98), найденные при помощи непрерывных дробей Никипорца и r/φ-алгоритма. Предел отношения соседних чисел Фибоначчи $F_n^{(5)}$ совпадает со значением старшего по модулю корня уравнения (98). Из табл. 48 следует, что $x_1 = 1{,}983582843424326\ldots$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}\,.$$

Нахождение нулей полинома
x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_1=1,983582843424326 Таблица 48

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0–r_i	min
25	1,983582845483	-0,000000002059	m
26	1,983582844134	-0,000000000710	m
27	1,983582843511	-0,000000000086	m
28	1,983582843321	0,000000000103	
29	1,983582843341	0,000000000083	m
30	1,983582843412	0,000000000012	m
31	1,983582843446	-0,000000000022	
32	1,983582843429	-0,000000000005	m
33	1,983582843424	0,000000000001	m
34	1,983582843423	0,000000000001	

Опуская запись остальных корней уравнения (98) через непрерывные дроби Никипорца, приведём результаты вычислений. Уравнение (98) имеет два вещественных корня:

$$x_1 = 1{,}9835828434\ldots,\quad x_6 = -0{,}8403090983\ldots,$$

модули которых как бы обрамляют модули двух пар комплексных корней.

В табл. 49-50 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней, а в табл. 51-52 – второй пары комплексно-сопряжённых корней.

Нахождение нулей полинома
x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_2=0,9062149638126795$e^{i1{,}125546101909268}$ Таблица 49

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
25	-0,431073269452	0,431073269452	0,475141694361	m	3,141592653590	-2,016046551681	m
26	0,917672460591	0,628954742309	0,277260221504	m	1,570796326795	-0,445250224886	m
27	0,601705227519	0,619737142790	0,286477821022		1,047197551197	0,078348550713	m
28	-0,208403107674	0,471934461945	0,434280501868		1,570796326795	-0,445250224886	
29	7,075314027083	0,811062827835	0,095152135977	m	1,256637061436	-0,131090959527	
30	0,957041619579	0,833746234276	0,072468729537	m	1,047197551197	0,078348550713	
31	-0,977122379596	0,852862258446	0,053352705367	m	1,346396851538	-0,220850749629	
32	0,686594530307	0,830054439074	0,076160524739		1,178097245096	-0,052551143187	m
33	0,244559231805	0,724665203519	0,181549760294		1,047197551197	0,078348550713	
34	-2,319026843124	0,814055931210	0,092159032603		1,256637061436	-0,131090959527	
35	1,611863649153	0,866212833244	0,040002130568	m	1,142397328578	-0,016851226669	m
116	1,074379565261	0,900893805934	0,005321157879	m	1,126875625744	-0,001329523835	m
117	0,012396640899	0,860317732103	0,045897231710		1,114758683532	0,010787418377	
118	-65,450629962784	0,900890951453	0,005324012360		1,136320747043	-0,010774645134	
119	0,789403225730	0,899639043431	0,006575920381		1,124359476022	0,001186625888	m
120	-0,254627430527	0,887888155997	0,018326807815		1,145372321621	-0,019826219712	
121	4,012496525282	0,901802472264	0,004412491548	m	1,133564359543	-0,008018257633	
122	0,577652692239	0,897712963894	0,008501999919		1,121997376282	0,003548725627	
123	-0,645431939807	0,894726196217	0,011488767596		1,142397328578	-0,016851226669	
124	2,050810112976	0,902178568257	0,004036395556	m	1,130973355292	-0,005427253383	
125	0,378419395485	0,894451245462	0,011763718351		1,119775599299	0,005770502610	

$$x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0$$

$x_3=0,9062149638126795e^{-i1,125546101909268}$

Таблица 50

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
25	-1,164927179102	1,164927179102	-0,258712215289	m	-3,141592653590	2,016046551681	m
26	0,100986438964	0,342989573413	0,563225390400		-1,570796326795	0,445250224886	m
27	2,352820264333	0,651703714054	0,254511249758	m	-1,047197551197	-0,078348550713	m
28	-5,409956280549	1,106206194012	-0,199991230199	m	-1,570796326795	0,445250224886	
29	0,175057180243	0,765076485966	0,141138477846	m	-1,256637061436	0,131090959527	
30	2,236712712800	0,914862331649	-0,008647367837	m	-1,047197551197	-0,078348550713	
31	-0,823221984606	0,901171292214	0,005043671598	m	-1,346396851538	0,220850749629	
32	0,259613026813	0,771342462320	0,134872501492		-1,178097245096	0,052551143187	m
33	3,981908646165	0,925661358467	-0,019446394655		-1,047197551197	-0,078348550713	
34	-0,374996403867	0,845686954824	0,060528008989		-1,256637061436	0,131090959527	
35	0,776136040051	0,839114619554	0,067100344258		-1,142397328578	0,016851226669	m
116	0,770192108306	0,899346753976	0,006868209837		-1,126875625744	0,001329523835	m
117	66,227183554168	0,941897433631	-0,035682469818		-1,114758683532	-0,010787418377	
118	-0,012543781538	0,899602568313	0,006612395499		-1,136320747043	0,010774645134	
119	1,031588615875	0,900899898000	0,005315065813		-1,124359476022	-0,001186625888	m
120	-3,226420024275	0,912951766384	-0,006736802571		-1,145372321621	0,019826219712	
121	0,204963687141	0,898999547954	0,007215415859		-1,133564359543	0,008018257633	
122	1,428776117562	0,903259592946	0,002955370867	m	-1,121997376282	-0,003548725627	
123	-1,273412681273	0,906398576572	-0,000183612760	m	-1,142397328578	0,016851226669	
124	0,400340312099	0,899021992583	0,007192971230		-1,130973355292	0,005427253383	
125	2,159621243896	0,906856781006	-0,000641817193		-1,119775599299	-0,005770502610	

$x_4=0,8547203934768322e^{-i2,14176160500064}$

Таблица 51

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
25	-1,140819964349	1,140819964349	-0,286099570873	m	-3,141592653590	0,999831048589	m
26	-1,768000000000	1,420200583358	-0,565480189881		-3,141592653590	0,999831048589	
27	-0,033555974561	0,407527021115	0,447193372362		-3,141592653590	0,999831048589	
28	2,619012234283	0,648861026492	0,205859366985	m	-2,356194490192	0,214432885192	m
29	1,293412189220	0,744849861423	0,109870532054	m	-1,884955592154	-0,256806012847	
30	-1,917130827721	0,871965381157	-0,017244987681	m	-2,094395102393	-0,047366502607	m
31	-1,026548205489	0,892534417565	-0,037814024088		-2,243994752564	0,102233147563	
32	-1,488569909623	0,951465411702	-0,096745018225		-2,356194490192	0,214432885192	
33	-0,095450088710	0,736945883894	0,117774509583		-2,443460952792	0,301699347791	
34	1,537235247409	0,793169619360	0,061550774116		-2,199114857513	0,057353252512	
35	0,181463354554	0,693636257022	0,161084136455		-1,999195325012	-0,142566279989	
116	-1,058150741720	0,854872146276	-0,000151752800	m	-2,151308012784	0,009546407784	m
117	-0,039032188599	0,826965558132	0,027754835345		-2,161956234728	0,020194629728	
118	22,030303823144	0,856352692567	-0,001632299090		-2,138956700316	-0,002804904684	m
119	-1,123837510045	0,858806471080	-0,004086077603		-2,149510762982	0,007749157982	
120	-0,391585131473	0,851809550129	0,002910843348		-2,159844949343	0,018083344342	
121	0,678641823941	0,849816109860	0,004904283617		-2,137578506566	-0,004183098434	
122	-1,674731681500	0,855719224768	-0,000998831291		-2,147823548883	0,006061943882	
123	-0,327302902677	0,847452402010	0,007267991467		-2,157861620648	0,016100015647	
124	1,722665464970	0,853485547351	0,001234846125		-2,136283004441	-0,005478600560	
125	-1,553063112339	0,858559422303	-0,003839028827		-2,146236565324	0,004474960323	

$x_5=0,8547203934768322e^{i2,14176160500064}$

Таблица 52

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
25	-1,026666666667	1,026666666667	-0,171946273190	m	3,141592653590	-0,999831048589	m
26	-1,758241758242	1,343550596415	-0,488830202939		3,141592653590	-0,999831048589	
27	-2,984693877551	1,753083554189	-0,898363160712		3,141592653590	-0,999831048589	
28	0,018970189702	0,565418325609	0,289302067867		2,356194490192	-0,214432885192	m
29	10,070175438597	1,005780732025	-0,151060338548	m	1,884955592154	0,256806012847	
30	-0,429956896552	0,872951762480	-0,018231369003	m	2,094395102393	0,047366502607	m
31	-0,872180451128	0,872841533396	-0,018121139920	m	2,243994752564	-0,102233147563	
32	-1,425000000000	0,927994358799	-0,073273965322		2,356194490192	-0,214432885192	
33	-2,259887005650	1,024458521738	-0,169738128261		2,443460952792	-0,301699347791	
34	0,082965803771	0,796773449637	0,057946943840		2,199114857513	-0,057353252512	
35	13,122459513518	1,027879398979	-0,173159005502		1,999195325012	0,142566279989	
116	-0,652035823213	0,856678182005	-0,001957788528	m	2,151308012784	-0,009546407784	m
117	-22,907821111380	0,887490224629	-0,032769831152		2,161956234728	-0,020194629728	
118	0,040934482825	0,858914673310	-0,004194279833		2,138956700316	0,002804904684	m
119	-0,693691803684	0,856985263768	-0,002264870291		2,149510762982	-0,007749157982	
120	-1,651470789383	0,862861391111	-0,008140997635		2,159844949343	-0,018083344342	
121	0,862664578124	0,862859361883	-0,008138968406		2,137578506566	0,004183098434	
122	-0,387970230366	0,855850195352	-0,001129801875	m	2,147823548883	-0,006061943882	
123	-2,543063012910	0,865316771943	-0,010596378466		2,157861620648	-0,016100015647	
124	0,522338854835	0,860959839201	-0,006239445725		2,136283004441	0,005478600560	
125	-0,521306162363	0,856693686860	-0,001973293383		2,146236565324	-0,004474960323	

Приведём значения двух пар комплексно-сопряжённых корней:

$$x_{2,3} = 0{,}9062149638e^{\pm i1{,}1255461019},$$

$$x_{3,4} = 0{,}8547203934e^{\pm i2{,}1417616050}.$$

В табл. 53 приведены результаты вычислений второго вещественного корня уравнения (98). Из колонки 6 табл. 50 следует, что второй вещественный корень имеет отрицательное значение.

Нахождение нулей полинома
x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_6=-0,8403090983405318

Таблица 53

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
25	-0,857142857143	0,857142857143	-0,016833758802	m	3,141592653590	0,000000000000	m
26	-1,750000000000	1,224744871392	-0,384435773051		3,141592653590	0,000000000000	
27	-3,555555555556	1,747160929473	-0,906851831132		3,141592653590	0,000000000000	
121	-1,047069417965	0,848035019133	-0,007725920793	m	3,141592653590	0,000000000000	
122	-0,940102123971	0,848927366555	-0,008618268215		3,141592653590	0,000000000000	
123	-0,736924600891	0,847714969718	-0,007405871377	m	3,141592653590	0,000000000000	
124	-0,682404061578	0,845878078159	-0,005568979818	m	3,141592653590	0,000000000000	
125	-0,761932879139	0,845003199799	-0,004694101459	m	3,141592653590	0,000000000000	

На рис. 21 и 22 представлены графики квадратов модулей двух пар комплексно-сопряжённых корней уравнения (98).

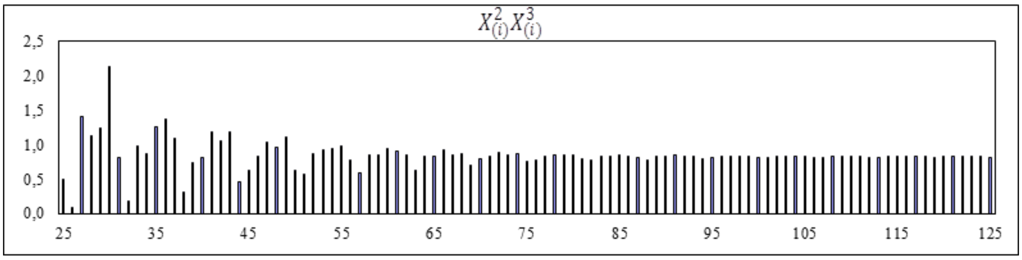


Рис.21. Графики квадратов модулей комплексно-сопряженных корней x_2 и x_3.

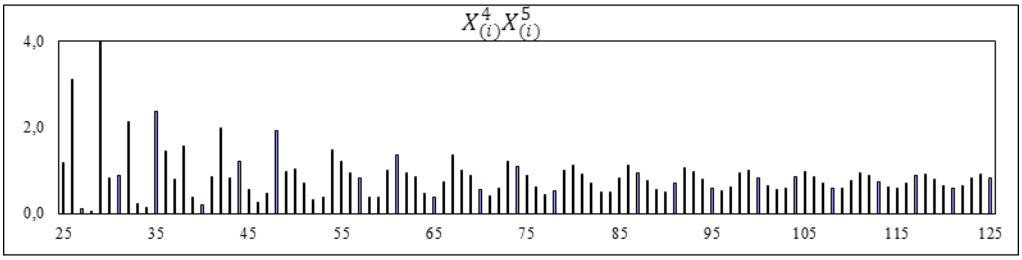


Рис.22 Графики квадратов модулей комплексно-сопряженных корней x_4 и x_5.

Графики, показанные на рис. 21 и 22, имеют “период”, состоящий из шести подходящих, причём биения на графике 22 затухают медленнее, а их огибающая более схожа с синусоидой.

На рис. 23 показаны распределения значений подходящих дробей Никипорца, представляющих корни уравнения шестой степени

$$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

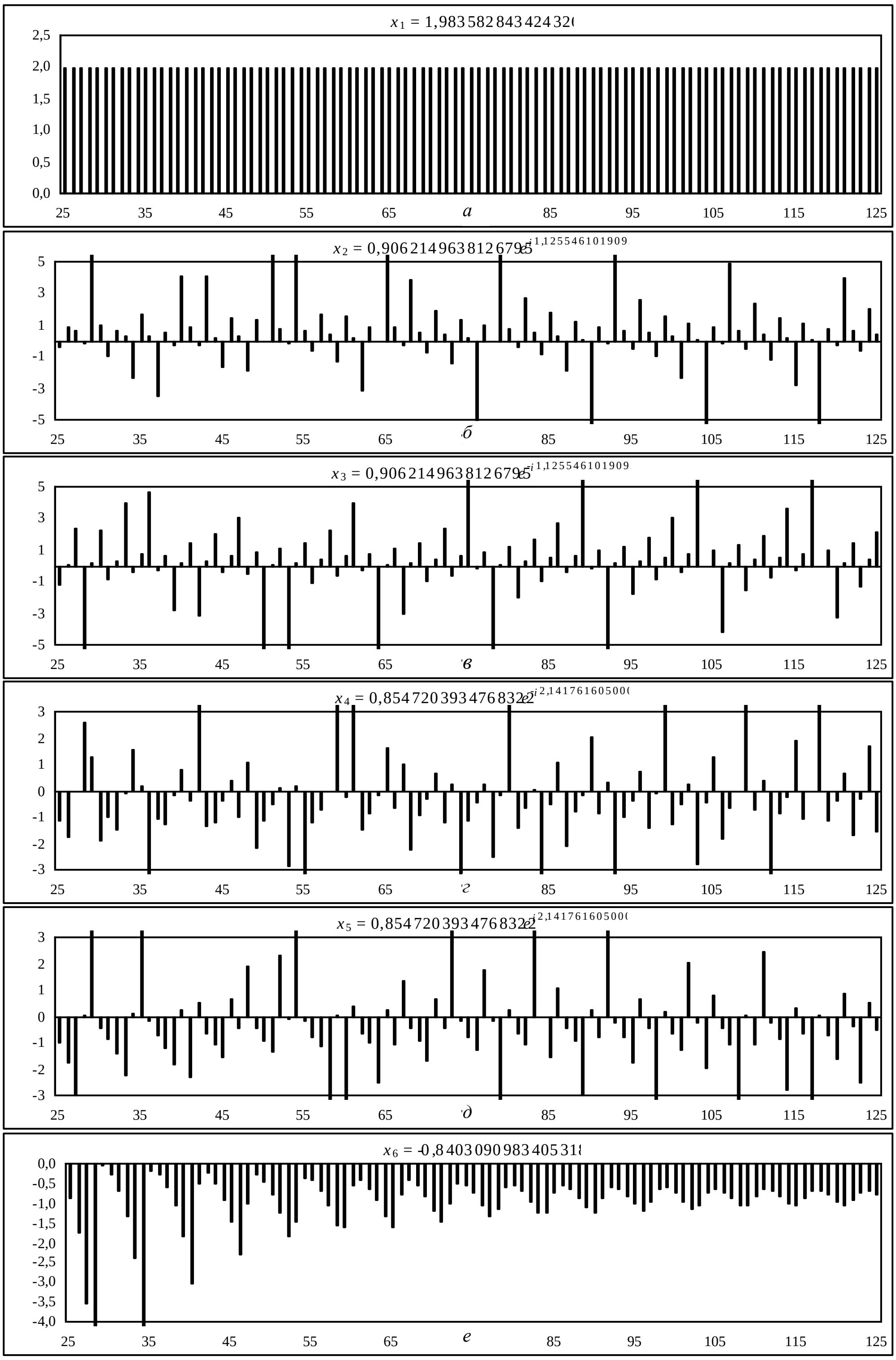


Рис.23. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (98).

Продолжим решение алгебраических уравнений вида

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 = 0$$

с использованием r/φ - алгоритма .

Ниже приведем результаты решения этим способом алгебраических уравнений:

$$x^8 - x^7 - \dots - x - 1 = 0 \qquad (99)$$

$$x^{16} - x^{15} - \dots - x - 1 = 0 \qquad (100)$$

$$x^{32} - x^{31} - \dots - x - 1 = 0 \qquad (101)$$

На рис. 24 показаны графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (99)

$$x^8 - x^7 - \dots - x - 1 = 0$$

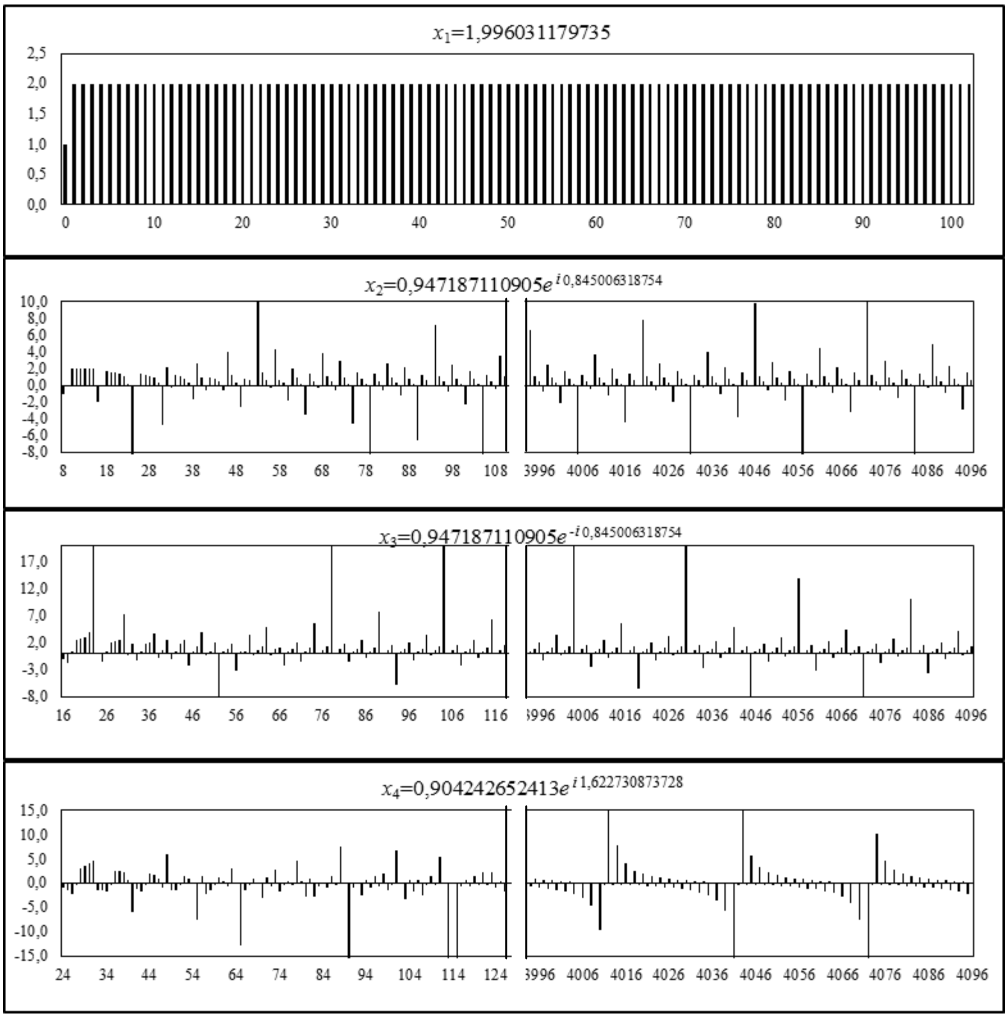


Рис. 24. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (99).

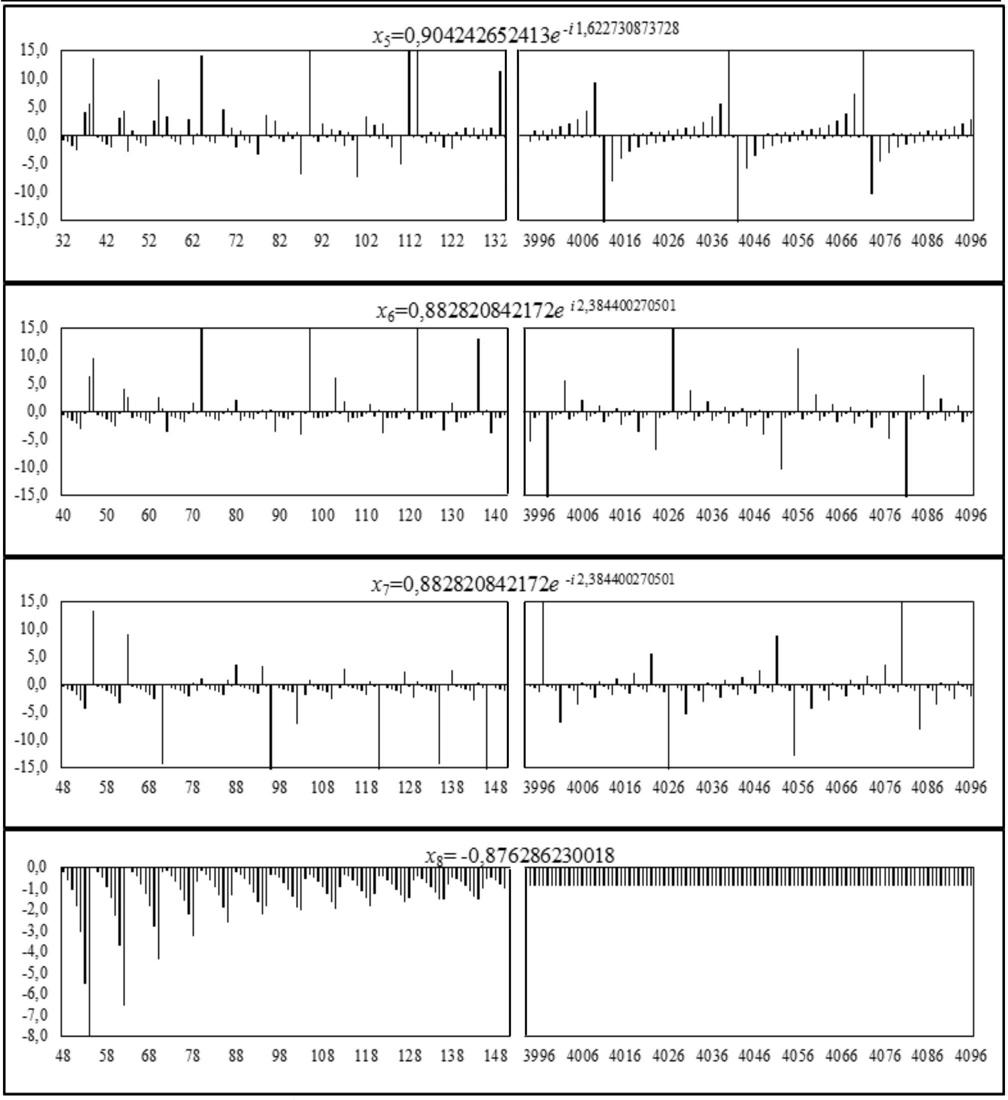


Рис. 24 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (99).

В табл. 54 приведены результаты решения уравнения (99) с использованием r/φ-алгоритма.

Таблица 54

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,996031179735	0,000000000000		
x_2	0,946829145502	0,000357965403	0,845006402878	-0,000000084124
x_3	0,947187157823	-0,000000046918	-0,845056133693	0,000049814939
x_4	0,904160605149	0,000082047264	1,622793433840	-0,000062560112
x_5	0,904242592809	0,000000059604	-1,622896997040	0,000166123312
x_6	0,882820882695	-0,000000040523	2,384400199874	0,000000070627
x_7	0,882820852410	-0,000000010238	-2,384425766301	0,000025495800
x_8	-0,876286230018	0,000000000000		

На рис. 25 показаны графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (100).

$$x^{16} - x^{15} - \ldots - x - 1 = 0$$

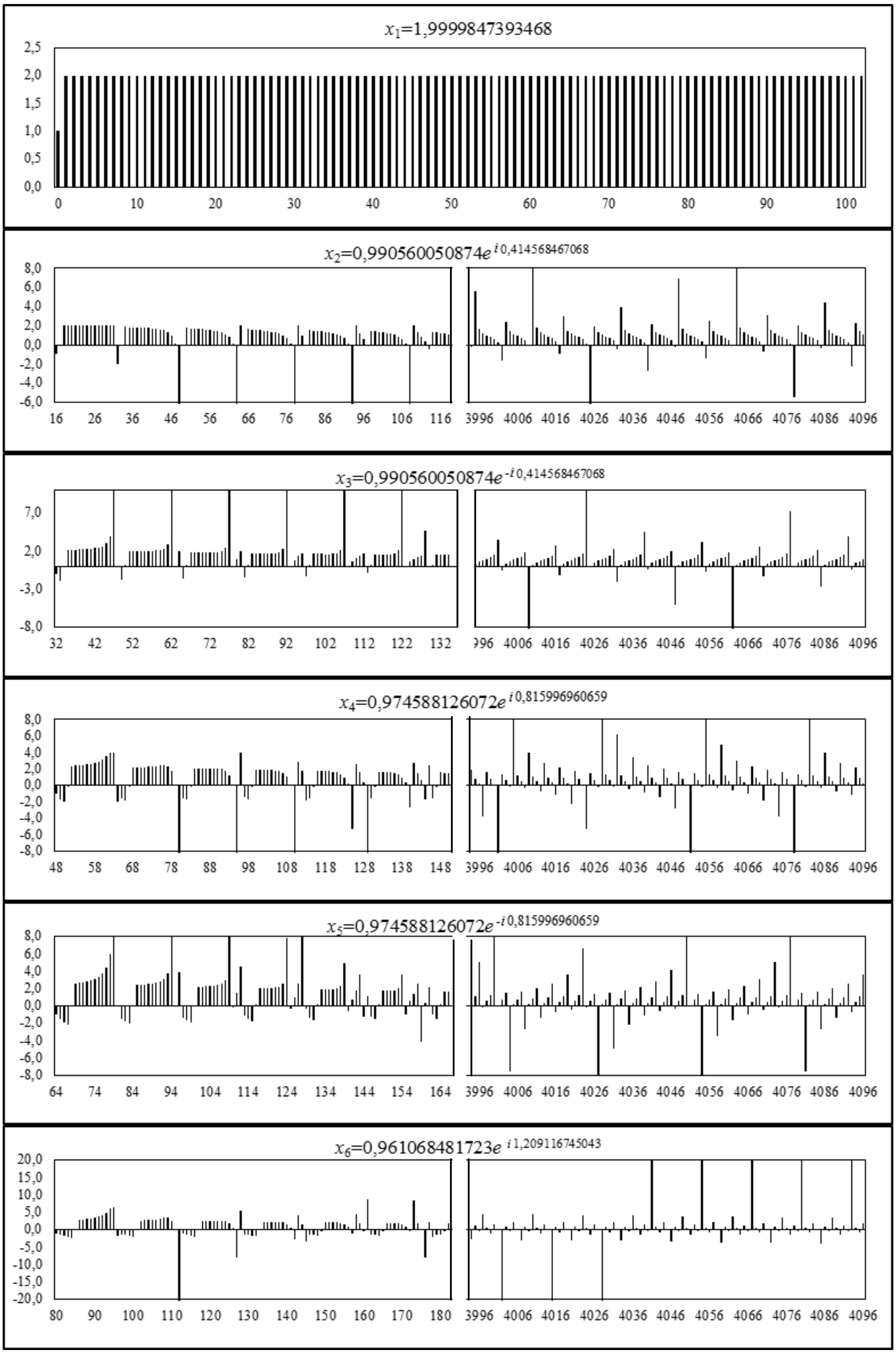


Рис. 25. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (100).

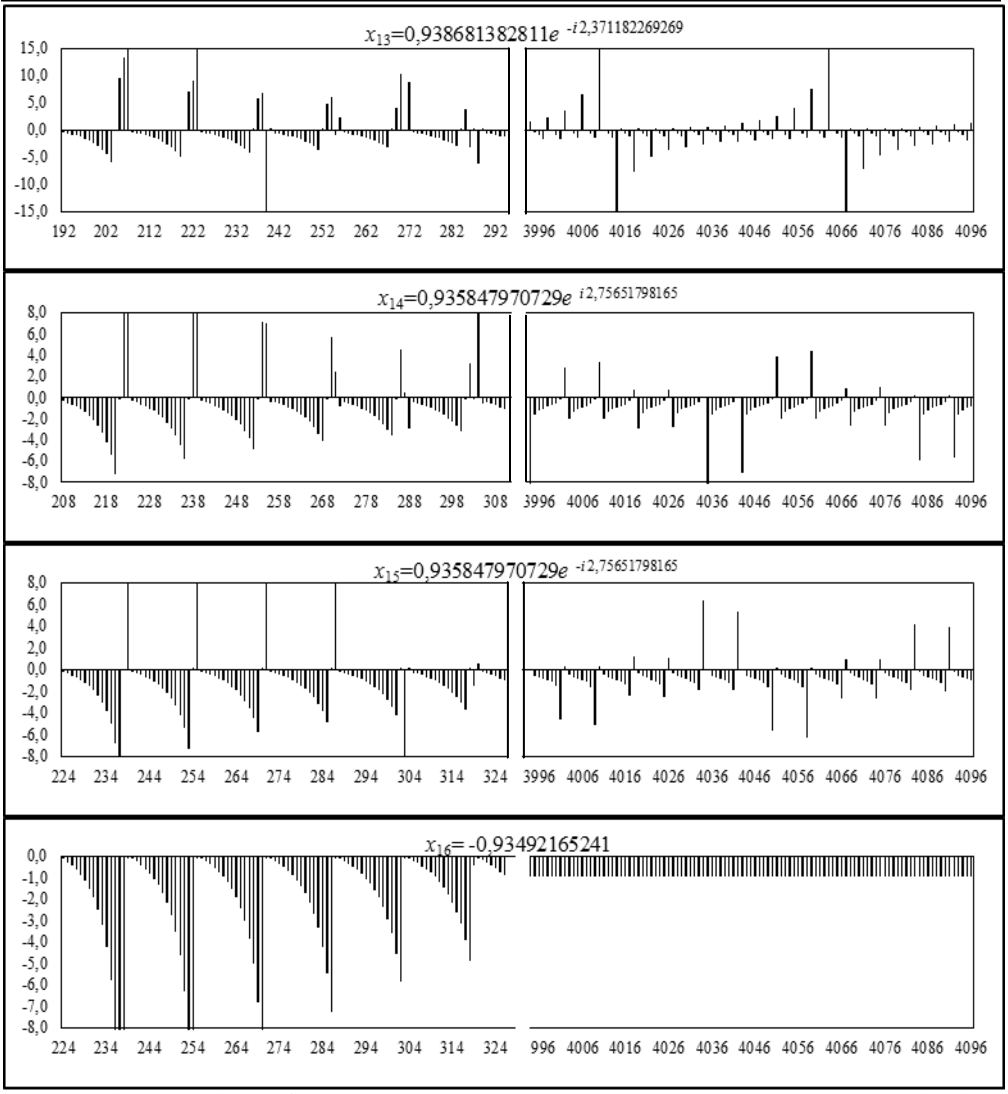


Рис. 25 (окончание) . Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (100).

В табл. 55 приведены результаты решения уравнения (100) при помощи r/φ – алгоритма.

Таблица 55

Номер корня,	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,999984739348	-0,000000000001	-	-
x_2	0,989850448553	0,000709602321	0,414568522084	-0,000000055016
x_3	0,990586306024	-0,000026255150	-0,414622338897	0,000053871829
x_4	0,973796823500	0,000791302572	0,815998091842	-0,000001131183
x_5	0,974510246177	0,000077879895	-0,816313188265	0,000316227606
x_6	0,960963430069	0,000105051654	1,209529086488	-0,000412341445
…				
x_{11}	0,943593839479	-0,000000021129	-1,985868828719	0,000615647906
x_{12}	0,938681288693	0,000000094118	2,371240432020	-0,000058162751
x_{13}	0,938681390807	-0,000000007996	-2,371240432020	0,000058162751
x_{14}	0,935847924447	0,000000046282	2,756518796778	-0,000000815128
x_{15}	0,935849487979	-0,000001517250	-2,756514902384	-0,000003079266
x_{16}	-0,934942144253	0,000020491843		

$x^{32} - x^{31} - \ldots - x - 1 = 0$

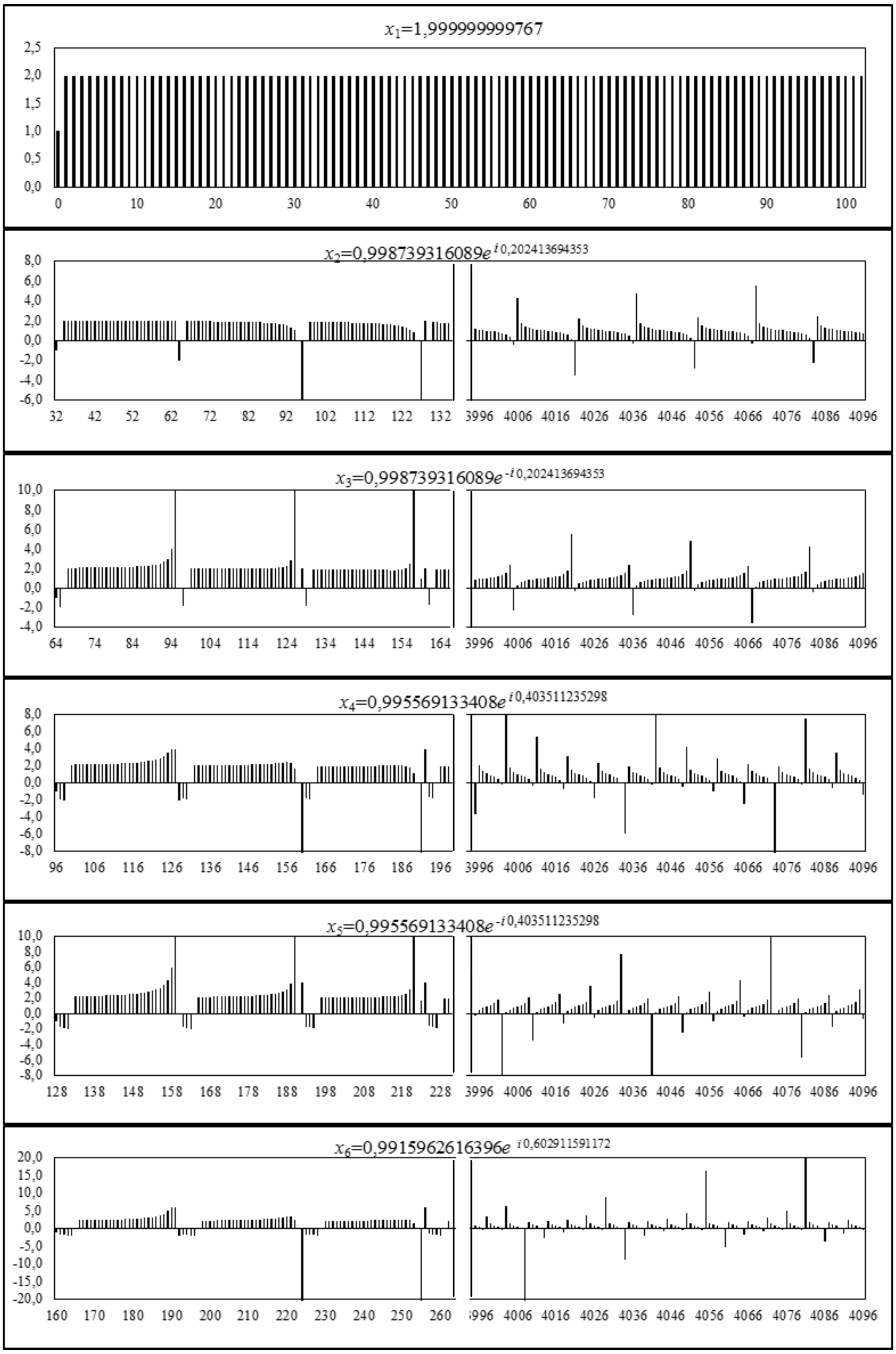


Рис. 26. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (101).

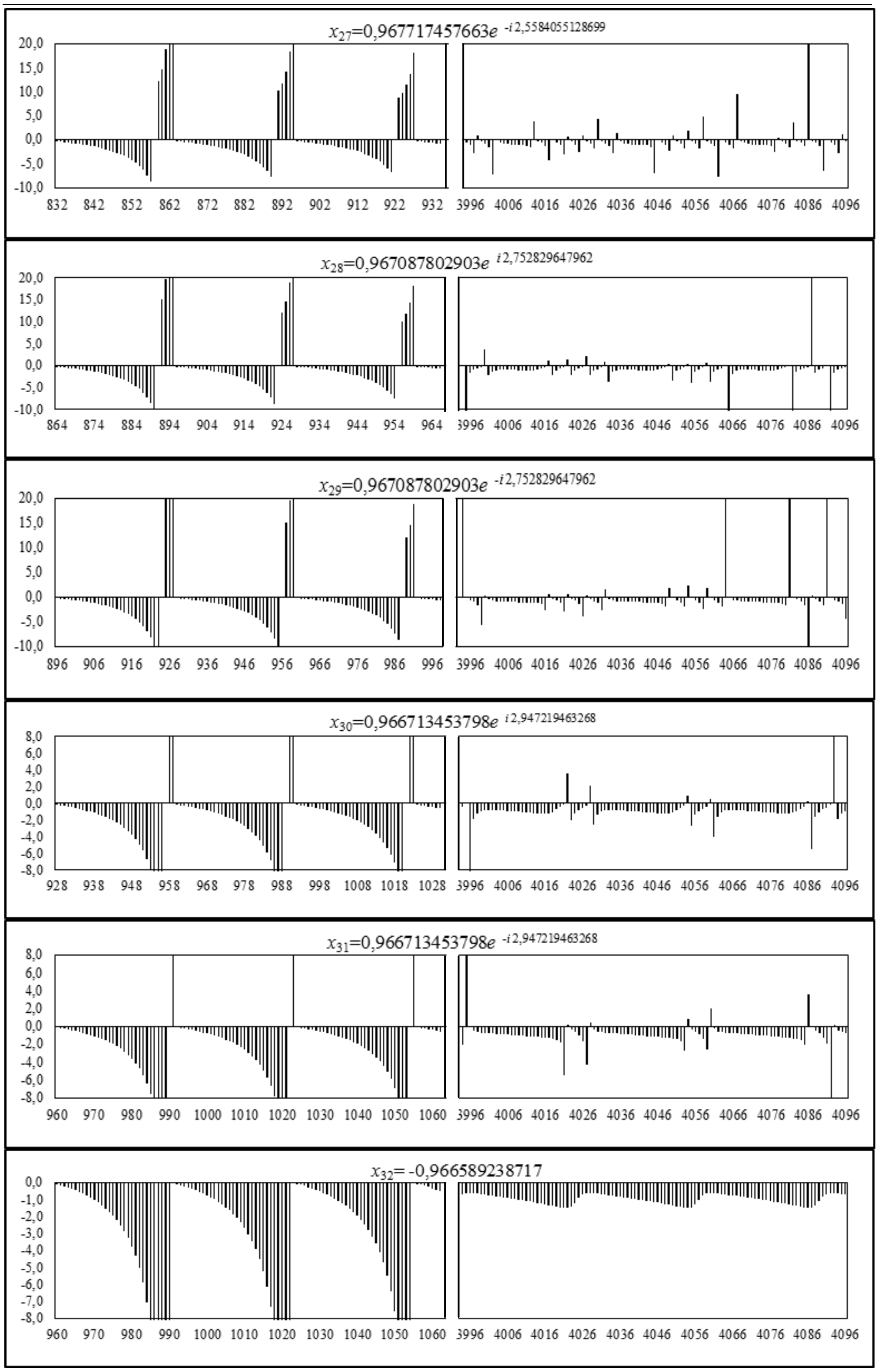


Рис. 26 (окончание) . Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (101).

В табл. 56 приведены результаты решения алгебраического уравнения (101) с использованием r/φ- алгоритма.

Таблица 56

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_1	1,999999999767	0,000000000000	-	-
x_2	0,997671221430	0,001068094659	0,202413584177	0,000000110176
x_3	0,998752745755	-0,000013429666	-0,202411338755	-0,000002355598
x_4	0,996996318804	-0,001427185396	0,403507313305	0,000003921993
x_5	0,995501283452	0,000067849956	-0,403507313305	-0,000003921993
x_6	0,991040309764	0,000555951876	0,603073589752	-0,000161998580
…	...	…	…	…
x_{27}	0,967717558240	-0,000000100577	-2,558401973144	-0,000003539726
x_{28}	0,967087774047	0,000000028856	2,752829118244	0,000000529718
x_{29}	0,967088355079	-0,000000552176	-2,752833696457	0,000004048495
x_{30}	0,966716981711	-0,000003527913	2,947219049231	0,000000414037
x_{31}	0,966726387870	-0,000012934072	-2,947219049231	-0,000000414037
x_{32}	-0,966666666667	0,000077427950	-	-

Числа Фибоначчи n-го порядка определяются линейным рекуррентным соотношением n-го порядка. Очевидно, пределом отношения соседних чисел Фибоначчи порядка n $(n \to \infty)$ является число 2. Можно записать значение определителей бесконечного порядка:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} = 2 .$$

2.7. Алгоритм вычисления главных миноров матрицы

Рассмотрим некоторую матрицу A. Её элементы будем обозначать, как $a_{i,j}$. Строку номер i будем обозначать, как $\vec{a}_i$. Размер матрицы равен N .

Все главные миноры матрицы, если они не равны нулю, можно вычислить следующим вычислительно эффективным алгоритмом: сначала привести матрицу к верхнетреугольному виду методом Гаусса, а затем, перемножая диагональные элементы, получить значения миноров. Основной операцией метода Гаусса является прибавление к строке матрицы другой её строки, умноженной на коэффициент. Такая операция не меняет значение определителя, поэтому значения миноров не меняются. Для результирующей треугольной матрицы они могут быть легко вычислены перемножением диагональных элементов.

Приведённый алгоритм имеет 2 недостатка:

- при вычислениях на компьютере полученные значения миноров в общем случае будут менее точными, чем могут быть вычислены с использованием имеющегося типа данных;

- алгоритм перестаёт работать, если хотя бы один минор кроме последнего равен нулю.

Рассмотрим первую проблему. Как известно, существует способ вычисления определителя с помощью только сложений и умножений. Поэтому, если мы, например, используем целочисленный тип данных, то все промежуточные результаты будут целыми, и значения самих миноров — тоже целые. Аналогичные рассуждения верны и для чисел с плавающей точкой: пока нам хватает бит для хранения промежуточных результатов, мы не допустим никакой погрешности.

Алгоритм Гаусса имеет операции деления, которые достаточно редко производятся «нацело». Чаще всего возникает периодическая двоичная дробь, которая обрезается, сколько бы бит на число мы ни хранили. Среди последующих (после деления) операций над числами обязательно будет умножение на то число, на которое было деление, так как в итоге должна получиться формула для вычисления определителя, не содержащая делений. Но из-за того, что биты отброшены, пара операций «деление-умножение» получается необратимой, что приводит к накоплению погрешности.

Из-за указанного недостатка часто вместо метода Гаусса для вычисления главных миноров используется метод LU-разложения, который даёт меньшую погрешность. Однако существует более простое решение проблемы точности - алгоритм Барейса. Алгоритм заключается в том, что обнуление элемента $a_{i,j}$ строки $\vec{a}_i$ осуществляется не по формуле $\vec{a}_i \leftarrow \vec{a}_i - (a_{i,j}/a_{j,j}) \cdot \vec{a}_j$, как в методе Гаусса, а по формуле

$$\vec{a}_i \leftarrow \frac{a_{j,j} \cdot \vec{a}_i - a_{i,j} \cdot \vec{a}_j}{a_{j-1,j-1}}, \tag{102}$$

где $a_{0,0} \equiv 1$ а операция «$\leftarrow$» означает присвоение нового значения переменной. В алгоритме Барейса деления выполняются точно, если перед этим были точно выполнены умножения.

Приведение матрицы к треугольному виду по формуле Барейса не сохраняет миноры неизменными. После приведения главные миноры исходной матрицы равны соответствующим диагональным элементам полученной треугольной матрицы.

Перейдём к рассмотрению второй проблемы: равенство нулю некоторых промежуточных миноров. Для её решения используется перестановка строк или столбцов. Однако при вычислении миноров перестановка строк или столбцов не может быть использована непосредственно: она «повредит» значения вычисляемых миноров. Кроме того, при перестановке строк точная делимость в формуле Барейса нарушается.

Построим алгоритм вычисления миноров, использующий перестановку строк и при этом выполняющий точные деления. Особенности алгоритма:

1. Матрица приводится к треугольному виду по строкам. Вначале в каждой строке обнуляются элементы слева от диагонали при помощи вычитания строк, находящихся сверху, затем вычисляется значение соответствующего минора.

2. Если некоторые элементы двух строк были «обнулены» путём вычитания из них некоторой третьей строки $\vec{a}_j$ по формуле, аналогичной формуле (102), то, если эти две строки в свою очередь начнут вычитаться друг из друга, то результат вычитания можно точно поделить на число $a_{j,j}$. Этот факт можно использовать.

Для того чтобы обеспечить точное деление при наличии перестановок строк, каждой строке $\vec{a}_j$ ставится в соответствие множество d_i номеров строк, которые были из неё вычтены. При вычитании двух строк разность делится на диагональные элементы тех строк, номера которых присутствуют во множествах обеих строк.

2.8. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями

Рассмотрим результаты вычисления корней уравнения

$$x^{12}-x^{11}-x^{10}-x^{9}-x^{8}-x^{7}-x^{6}-x^{5}-x^{4}-x^{3}-x^{2}-x-1=0 \tag{103}$$

при помощи непрерывных дробей класса $X_i^{(n)}$.

Предел отношения определителей, совпадает со значением старшего по модулю корня уравнения (103). Результаты вычисления корня x_1 уравнения (103) приведены в табл.57

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}=1{,}99975500937\dots\,.$$

x_1=1,999755500937 Таблица 57

Номер дроби, i	Значения Подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i
0	1,000000000000	0,999755500937
1	2,000000000000	-0,000244499063
12	1,999511718750	0,000243782187
13	1,999755799756	-0,000000298819
14	1,999755769935	-0,000000268998
15	1,999755740107	-0,000000239170
16	1,999755710272	-0,000000209335
17	1,999755680430	-0,000000179493
25	1,999755501135	-0,000000000198
26	1,999755501098	-0,000000000161
27	1,999755501066	-0,000000000129
28	1,999755501036	-0,000000000099
29	1,999755501011	-0,000000000074
30	1,999755500989	-0,000000000052
31	1,999755500970	-0,000000000033
32	1,999755500956	-0,000000000019
33	1,999755500945	-0,000000000008
34	1,999755500938	-0,000000000001

Данные табл. 57 показывают высокую скорость сходимости непрерывной дроби , которой представляется вещественный корень уравнения (103). Запишем непрерывную дробь для корня x_2 уравнения (103):

$$x_2=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{104}$$

На рис.27 показаны графики распределения подходящих непрерывных дробей, которые представляют корни алгебраического уравнения (103). Из графиков 27 *а* и 27*м* видно, что x_1 и x_{12}– вещественные корни. Также из графиков можно заключить, что уравнение (103) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней. «Периодичность» в расположении подходящих комплексных корней чётко видна в правой половине графиков, представленных на рис. 27.

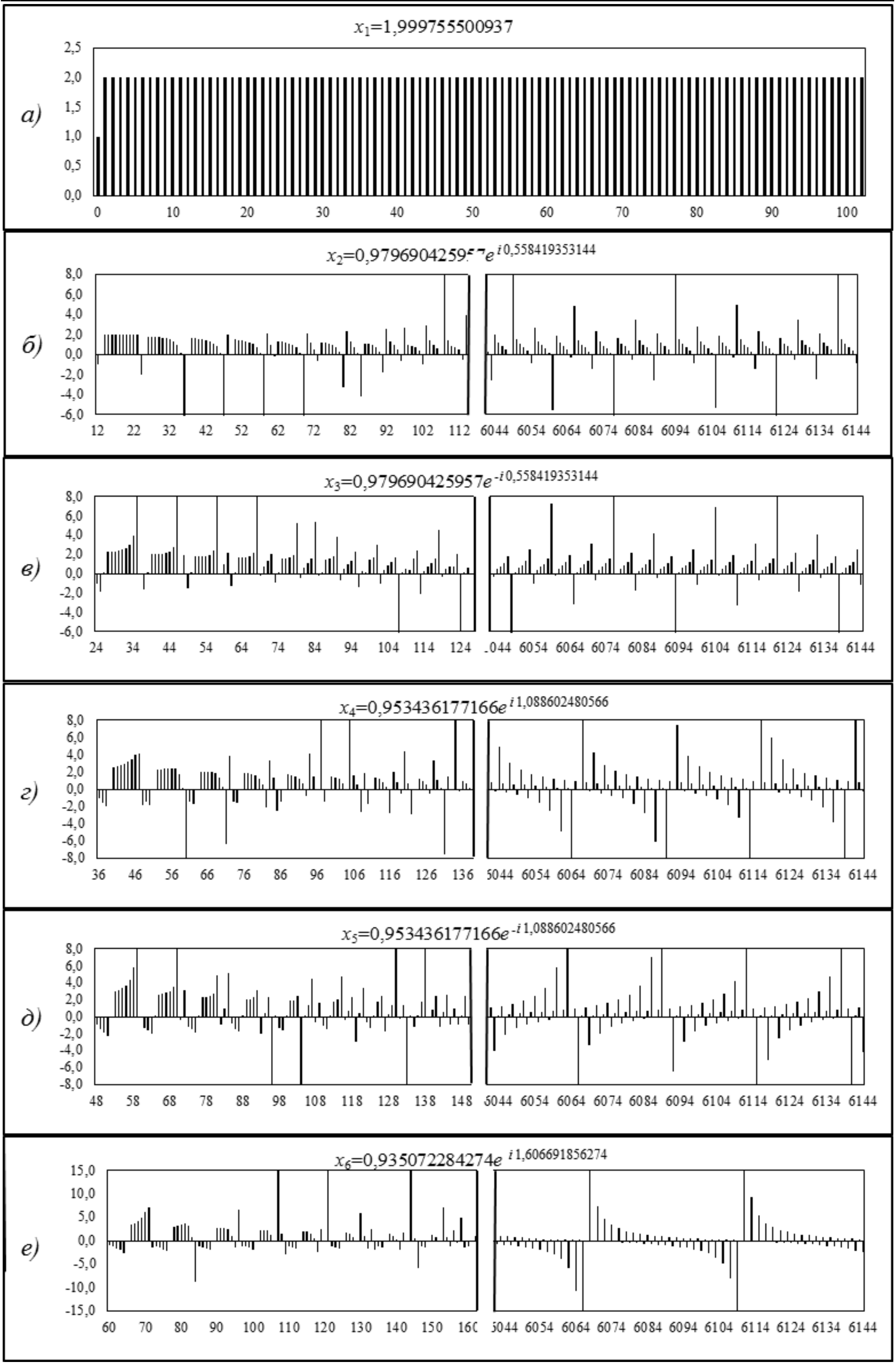


Рис. 27. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (103).

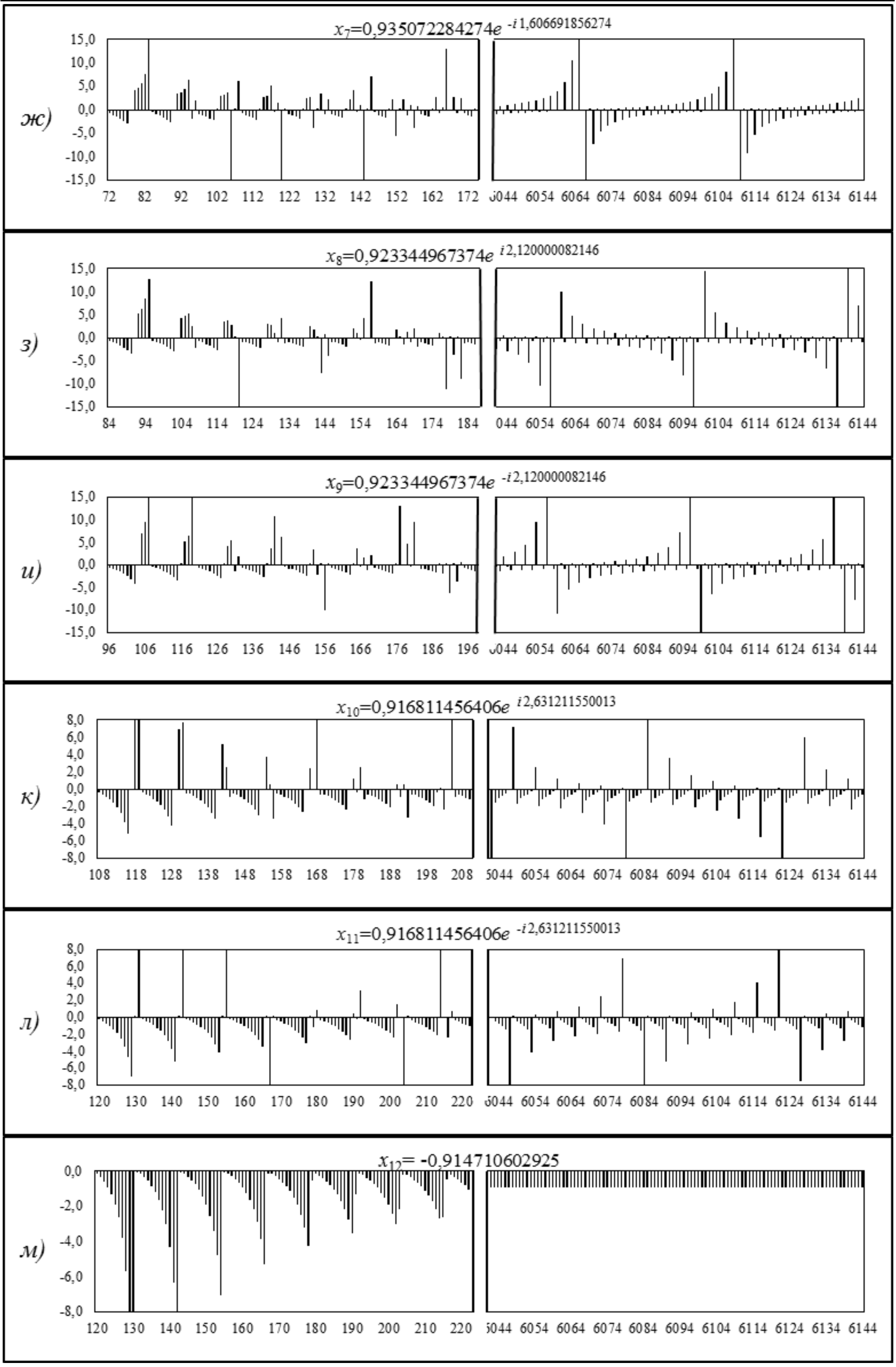


Рис. 27 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (103).

В табл. 58 и 59 приведены результаты вычисления первой пары комплексно-сопряженных корней уравнения (103), причём, результаты выводились при использовании 2^i (i=4,5,..12) подходящих дробей.

$x_2=0{,}979690425957e^{i0{,}558419353144}$ Таблица 58

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0-φ_i
128	0,790280743715	1,017939368471	-0,038248942511	0,577027222088	-0,018607868948
256	1,182647495564	0,991368489586	-0,011678063626	0,567971553191	-0,009552200051
512	0,040108503235	0,975860536371	0,003829889589	0,558666591978	-0,000247238838
1024	-0,006146637028	0,975952853508	0,003737572452	0,561829797309	-0,003410444169
2048	-0,111326789935	0,979290592382	0,000399833578	0,560029975323	-0,001610622183
4096	-0,395348926941	0,979751443896	-0,000061017936	0,559183158406	-0,000763805266

$x_3=0{,}979690425957e^{-i0{,}558419353144}$ Таблица 59

Номер дроби	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
128	1,376117926277	0,951716703997	0,027973721963	-0,589048622548	0,030629269408
256	0,814122533036	0,974089957487	0,005600468473	-0,567232006898	0,008812653758
512	23,929841685726	0,987003145093	-0,007312719133	-0,557632696012	-0,000786657128
1024	-156,149342521929	0,984958257918	-0,005267831958	-0,561490792253	0,003071439113
2048	-8,621404886212	0,980744745435	-0,001054319475	-0,559839599942	0,001420246802
4096	-2,427711991375	0,979943352813	-0,000252926853	-0,559083632378	0,000664279238

Из табл. 58-59 видно, что точность вычислений комплексных корней при использовании r/φ – алгоритма, то есть формул (44) и (45) растет не монотонно, а асимптотически.

В табл. 60 и 61 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней уравнения (103), проведённые с использованием r/φ - алгоритма, причем счет всякий раз заканчивался на подходящих дробях, которые обеспечивали все более высокую точность в определении модуля и аргумента комплексных корней.

$x_2=0{,}979690425957e^{i0{,}558419353144}$ (565/6144) (25/6144) Таблица 60

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0-φ_i
12	-0,999755799756	0,999755799756	-0,020065373799	12	-0,999755799756	3,141592653590	-2,583173300446
127	1,110146137185	0,960042967397	0,019647458560	14	2,000244259893	2,094395102393	-1,535975749249
132	1,240589962113	0,961219569002	0,018470856955	15	2,000244289728	1,570796326795	-1,012376973651
138	1,174335401713	0,961624425660	0,018066000297	16	2,000244319570	1,256637061436	-0,698217708292
143	1,443568371570	0,962505351001	0,017185074956	17	2,000244349420	1,047197551197	-0,488778198053
149	1,249892505090	0,962936078882	0,016754347075	18	2,000244379277	0,897597901026	-0,339178547882
154	1,695967138632	0,963340999630	0,016349426327	19	2,000244409141	0,785398163397	-0,226978810253
155	1,068393584041	0,964033676814	0,015656749143	20	2,000244439012	0,698131700798	-0,139712347654
161	0,974182904848	0,964082756052	0,015607669905	21	2,000244468891	0,628318530718	-0,069899177574
				22	2,000244498778	0,571198664289	-0,012779311145
5927	1,130164135307	0,979302595738	0,000387830219	34	1,004867370112	0,546363939755	0,012055413389
5944	1,084613122788	0,979302920276	0,000387505681	45	0,813652508241	0,554398703575	0,004020649569
5955	1,182381511342	0,979304413814	0,000386012143	56	0,741385696304	0,558505360638	-0,000086007494
5972	1,132847066928	0,979305544204	0,000384881753	433	0,231490439383	0,558339926586	0,000079426558
5989	1,087106955070	0,979305901469	0,000384524488	478	0,236139434903	0,558355867769	0,000063485375
6000	1,185319540329	0,979307289114	0,000383136843	523	0,240768586309	0,558369006790	0,000050346354
6017	1,135542107478	0,979308446052	0,000381979905	568	0,245355923959	0,558380022810	0,000039330334
6034	1,089610334704	0,979308835663	0,000381590294	613	0,249901346010	0,558389391917	0,000029961227
6045	1,188273139827	0,979310119100	0,000380306857	658	0,254407316775	0,558397457748	0,000021895396
6062	1,138249420414	0,979311302321	0,000379123636	703	0,258874851693	0,558404474554	0,000014878590
6079	1,092123392057	0,979311723906	0,000378702051	748	0,263304485313	0,558410634492	0,000008718652
6090	1,191242523139	0,979312904778	0,000377521179	793	0,267696782123	0,558416085485	0,000003267659
6107	1,140969171419	0,979314114020	0,000376311937	838	0,272052341591	0,558420943262	-0,000001590118
6124	1,094646259083	0,979314567215	0,000375858742	1620	0,269180764209	0,558418582304	0,000000770840
6135	1,194227906802	0,979315647124	0,000374778833	2447	0,270660529385	0,558419383828	-0,000000030684

x_3=0,979690425957$e^{-i0,558419353144}$ (8/6144) (17/6144) Таблица 61

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_1$	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
24	-0,997305902523	0,997305902523	-0,017615476566	24	-0,997305902523	-3,141592653590	2,583173300446
37	-1,643752277825	0,985509786756	-0,005819360799	26	0,000030136158	-2,094395102393	1,535975749249
57	15,137414775108	0,982318345192	-0,002627919235				
135	14,780474854166	0,979781613347	-0,000091187390	68	8,238635334263	-0,558505360638	0,000086007494
574	-11,518046378165	0,979699172260	-0,000008746303	3505	813,931598423530	-0,558485310905	0,000065957761
3010	-11,540115571461	0,979692624147	-0,000002198190	4332	266,560753821330	-0,558472957217	0,000053604073
5446	-11,562231012267	0,979691958824	-0,000001532867	5159	159,646915428305	-0,558464581917	0,000045228773
5609	13,191076575218	0,979691448804	-0,000001022847	5941	728,709489824188	-0,558458173636	0,000038820492

Над табл.60 и 61 в скобках указано число «оптимальных» подходящих дробей, обеспечивающих все увеличивающую точность при вычислении модуля и аргумента комплексных корней x_2 и x_3 и общее число подходящих (6144), используемых при вычислениях.

Аналогично находятся последующие корни уравнения (103). В табл. 62 приведены значения неизвестных x_2–x_{11}, найденные при помощи r/φ – алгоритма, а также указаны погрешности в определении модуля и аргумента комплексных корней.

Таблица 62

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_1	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
x_2	0,979315647124	0,000374778833	0,558419383828	-0,000000030684
x_3	0,979691448804	-0,000001022847	-0,558458173636	0,000038820492
x_4	0,953120840415	0,000315336752	1,088711824782	-0,000109344216
x_5	0,953435300932	0,000000876235	-1,088794276170	0,000191795604
x_6	0,935089296253	-0,000017011979	1,606888550088	-0,000196693814
x_7	0,935072335478	-0,000000051204	-1,606960806791	0,000268950517
x_8	0,923344974546	-0,000000007172	2,119936506081	0,000063576065
x_9	0,923344989077	-0,000000021703	-2,119936506081	-0,000063576065
x_{10}	0,916811648797	-0,000000192391	2,631213166508	-0,000001616495
x_{11}	0,916811447209	0,000000009197	-2,631225616003	0,000014065990

В табл.63 приведены результаты вычисления второго действительного корня уравнения (103).

x_{12}= -0,914710602925 Таблица 63

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i
120	-0,166666666667	-0,748043936258
121	-0,369230769231	-0,545479833694
122	-0,619047619048	-0,295662983877
123	-0,933333333333	0,018622730408
246	-0,900000540829	-0,014710062096
283	-0,911768355829	-0,002942247096
517	-0,917558586942	0,002847984017
677	-0,912638347559	-0,002072255366
794	-0,915108995829	0,000398392904
1151	-0,915064419461	0,000353816536
1428	-0,914696626243	-0,000013976682
2339	-0,914714604778	0,000004001853
2973	-0,914712028919	0,000001425994
3250	-0,914711862234	0,000001259309
3607	-0,914709718575	-0,000000884350
3884	-0,914710601151	-0,000000001774

Из рис.27 видно, что на начальном участке графиков, где показаны подходящие дроби, представляющие комплексно-сопряженные корни уравнения (103), наблюдается существенная нерегулярность в расположении подходящих дробей. В дальнейшем при вычислениях будем «отсекать» нерегулярные начальные участки графиков подходящих дробей с тем, чтобы повысить точность в определении корней.

В табл. 64 и 65 приведены результаты вычислений первой пары комплексно-сопряженных корней уравнения (101), причем в расчёт брались подходящие дроби, начиная с 1024-й, то есть из области с «регулярным» расположением подходящих.

$x_2=0{,}979690425957e^{i0{,}558419353144}$ (14/5120) (22/5120) Таблица 64

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
1024	-0,006146637028	0,006146637028	0,973543788929	1024	-0,006146637028	3,141592653590	-2,583173300446
1025	157,811081019651	0,984889554261	-0,005199128304	1025	157,811081019651	1,570796326795	-1,012376973651
1051	0,620498485453	0,983467065989	-0,003776640032	1026	1,655656584308	1,047197551197	-0,488778198053
1053	-6,689490925053	0,975970099066	0,003720326891				
1068	0,577946005070	0,979825719604	-0,000135293647	1535	0,558617789363	0,558369006790	0,000050346354
1070	-920,094413936918	0,979782345538	-0,000091919581	1580	0,561174298401	0,558380022810	0,000039330334
1115	-116,237855900268	0,979671044660	0,000019381297	1625	0,563720546435	0,558389391917	0,000029961227
1760	0,571299090862	0,979676553425	0,000013872532	1670	0,566256670943	0,558397457748	0,000021895396
1805	0,573805652882	0,979685249175	0,000005176782	1715	0,568782807712	0,558404474554	0,000014878590
1850	0,576302624659	0,979692934241	-0,000002508284	1760	0,571299090862	0,558410634492	0,000008718652
2632	0,574655120236	0,979689206548	0,000001219409	1805	0,573805652882	0,558416085485	0,000003267659
2724	-161,702148822137	0,979690530859	-0,000000104902	1850	0,576302624659	0,558420943262	-0,000001590118
3459	0,575503485558	0,979690474425	-0,000000048468	2632	0,574655120236	0,558418582304	0,000000770840
5160	-157,985176930583	0,979690440552	-0,000000014595	3459	0,575503485558	0,558419383828	-0,000000030684

$x_3=0{,}979690425957e^{-i0{,}558419353144}$ (14/5120) (22/5120) Таблица65

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
1024	-156,149342521929	156,149342521929	-155,169652095972	1024	-156,149342521929	-3,141592653590	2,583173300446
1025	0,006081913415	0,974518743303	0,005171682654	1025	0,006081913415	-1,570796326795	1,012376973651
1051	1,546810110283	0,975928288709	0,003762137248	1026	0,579705562016	-1,047197551197	0,488778198053
1053	-0,143477783506	0,983424934463	-0,003734508506				
1068	1,660697231732	0,979555150992	0,000135274965	1535	1,718157475448	-0,558369006790	-0,000050346354
1070	-0,001043146569	0,979598515000	0,000091910957	1580	1,710330165595	-0,558380022810	-0,000039330334
1115	-0,008257149302	0,979709807638	-0,000019381681	1625	1,702604839903	-0,558389391917	-0,000029961227
1760	1,680019005920	0,979704298685	-0,000013872728	1670	1,694979291129	-0,558397457748	-0,000021895396
1805	1,672680159026	0,979695602767	-0,000005176810	1715	1,687451374583	-0,558404474554	-0,000014878590
1850	1,665432863993	0,979687917680	0,000002508277	1760	1,680019005920	-0,558410634492	-0,000008718652
2632	1,670207567834	0,979691645368	-0,000001219411	1805	1,672680159026	-0,558416085485	-0,000003267659
2724	-0,005935563242	0,979690321055	0,000000104902	1850	1,665432863993	-0,558420943262	0,000001590118
3459	1,667745469486	0,979690377489	0,000000048468	2632	1,670207567834	-0,558418582304	-0,000000770840
5160	-0,006075211291	0,979690411362	0,000000014595	3459	1,667745469486	-0,558419383828	0,000000030684

Аналогично находились последующие корни уравнения (103) при использовании r/φ-алгоритма с учетом «регулярных» подходящих, начиная с 1024-й подходящей дроби. Результаты вычислений приведены в табл.61.

Таблица 66

Номер корня,	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_2	0,979690440552	-0,000000014595	0,558419383828	-0,000000030684
x_3	0,979690411362	0,000000014595	-0,558419383828	0,000000030684
x_4	0,953436160771	0,000000016396	1,088602396713	0,000000083853
x_5	0,953436193585	-0,000000016418	-1,088602396713	-0,000000083853
x_6	0,935072298719	-0,000000014445	1,606692038102	-0,000000181828
x_7	0,935072283703	0,000000000571	-1,606692038102	0,000000181828
x_8	0,923344958137	0,000000009237	2,120000559758	-0,000000477612
x_9	0,923344952266	0,000000015108	-2,120000559758	0,000000477612
x_{10}	0,916811445295	0,000000011111	2,631211442684	0,000000107329
x_{11}	0,916811625743	-0,000000169337	-2,631211442684	-0,000000107329

На рис. 28 показаны значения модулей двух первых пар комплексно-сопряженных корней уравнения (103), определенных с использованием произведений значений соответствующих подходящих дробей.

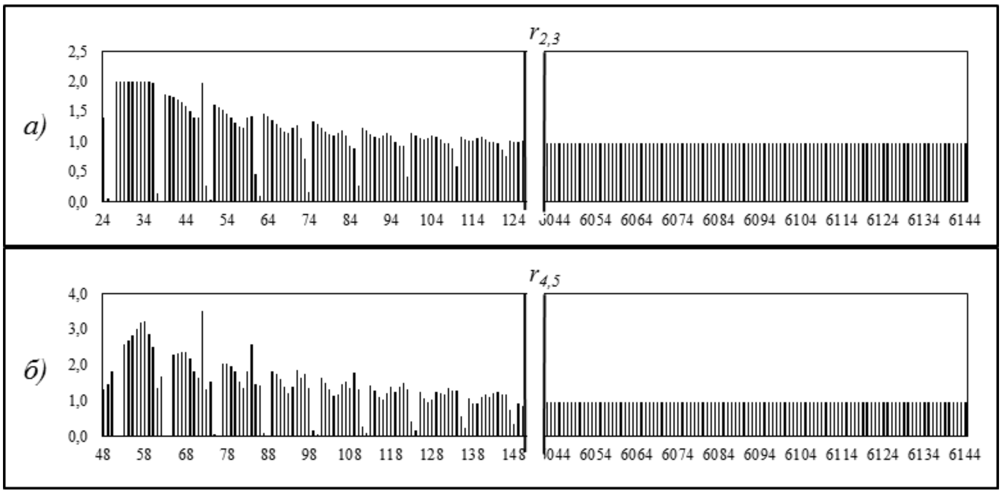


Рис. 28. Модули $r_{1,2}$ и $r_{3,4}$ комплексно-сопряженных корней уравнения (103).

Как видно из таблиц 67 и 68, точность определения модулей сопряженных комплексных корней с использованием произведения подходящих дробей значительно выше, чем при использовании формулы (44) $r/\varphi-$ алгоритма.

В табл. 67 и 68 приведены подходящие дроби, обеспечивающие минимальную погрешность при нахождении модуля корней с использованием комплексной сопряженности.

$r_{2,3}$=0,979690425957 Таблица 67

Номер дроби, i	Значения модуля, $r^{(i)}_{2,3}$	Погрешность модуля, $r_{2,3}-r^{(i)}_{2,3}$
24	1,410150479776	-0,430460053819
46	1,408037399919	-0,428346973962
47	1,398184366567	-0,418493940610
56	1,330015897684	-0,350325471727
57	1,251151740074	-0,271461314117
58	1,239820769776	-0,260130343819
67	1,235738248407	-0,256047822450
68	1,172952762073	-0,193262336116
69	1,159852379077	-0,180161953120
456	0,979690414005	0,000000011952
498	0,979690429853	-0,000000003896
628	0,979690428079	-0,000000002122
663	0,979690426497	-0,000000000540
729	0,979690426354	-0,000000000397
758	0,979690426098	-0,000000000141
788	0,979690425996	-0,000000000039
824	0,979690425939	0,000000000018
859	0,979690425965	-0,000000000008
894	0,979690425955	0,000000000002
901	0,979690425958	-0,000000000001
925	0,979690425956	0,000000000001
989	0,979690425957	0,000000000000

$r_{4,5}$=0,953436177167 Таблица 68

Номер дроби, i	Значения модуля, $r^{(i)}_{4,5}$	Погрешность модуля, $r_{4,5}-r^{(i)}_{4,5}$
48	1,338419611903	-0,384983434736
73	1,334531469540	-0,381095292373
93	1,228152622064	-0,274716444897
104	1,148203895627	-0,194767718460
115	1,103949113924	-0,150512936757
116	1,044717888692	-0,091281711525
127	0,975825579082	-0,022389401915
138	0,944464096638	0,008972080529
151	0,946598024485	0,006838152682
195	0,950697520285	0,002738656882
200	0,955253207116	-0,001817029949
279	0,952622235921	0,000813941246
357	0,953009494998	0,000426682169
364	0,953231581825	0,000204595342
369	0,953315432941	0,000120744226
370	0,953429033967	0,000007143200
546	0,953437571608	-0,000001394441
667	0,953436470072	-0,000000292905
715	0,953436211478	-0,000000034311
788	0,953436187439	-0,000000010272
885	0,953436176468	0,000000000699
1025	0,953436177169	-0,000000000002
1267	0,953436177167	0,000000000000

На рис. 28 показано расположение корней уравнения (103) на комплексной плоскости.

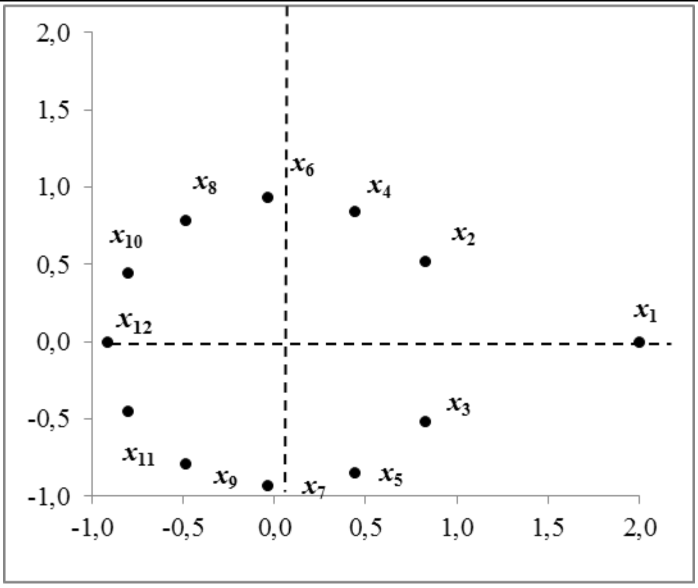


Рис 29. Расположение корней уравнения (103) на комплексной плоскости.

Определим корни уравнения

$$x^{11}+\frac{1}{11}x^{10}+\frac{1}{10}x^{9}+\frac{1}{9}x^{8}+\frac{1}{8}x^{7}+\frac{1}{7}x^{6}+\frac{1}{6}x^{5}+\frac{1}{5}x^{4}+\frac{1}{4}x^{3}+\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{2}x+1=0 \qquad (105)$$

при помощи непрерывных дробей класса $X_i^{(n)}$.

Непрерывная дробь для корня x_1 уравнения (105) имеет вид:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -1/11 & -1/10 & -1/9 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ -1 & -1/11 & -1/10 & \dots & -1/2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & -1/11 & \dots & -1/3 & -1/2 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/11 & -1/10 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1/11 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1/11 & -1/10 & \dots & -1/2 & -1 & \dots \\ -1 & -1/11 & \dots & -1/3 & -1/2 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1/11 & -1/10 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -1/11 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}} \qquad (106)$$

На рис. 30 показаны графики распределения подходящих непрерывных дробей, которые представляют корни алгебраического уравнения (105). Из графиков 30 видно, что x_{11}– вещественный корень. Из графиков можно также заключить, что уравнение (105) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней. «Периодичность» в расположении подходящих для x_i чётко видна в правой половине графиков, представленных на рис.30

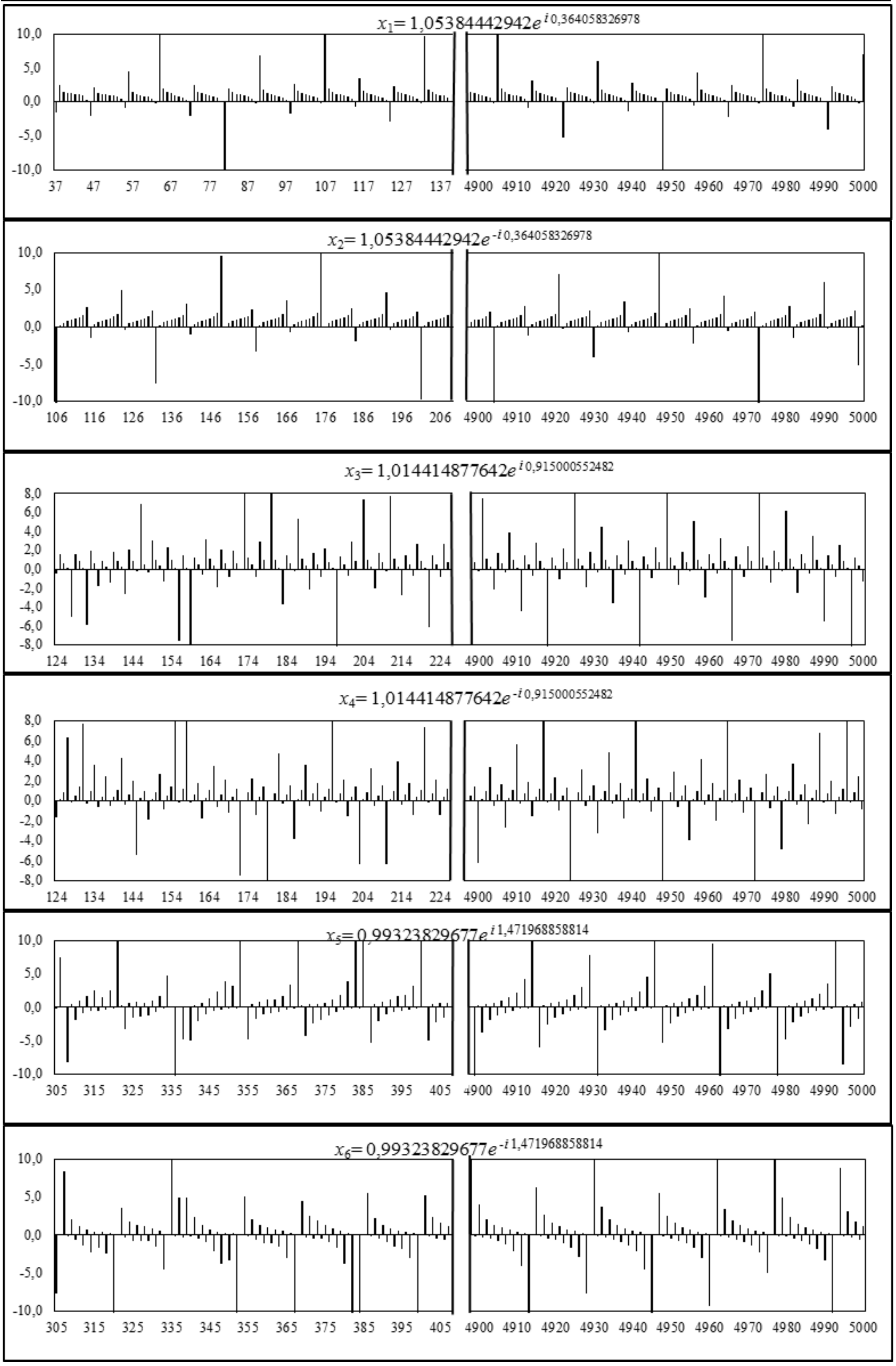


Рис. 30. Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (105).

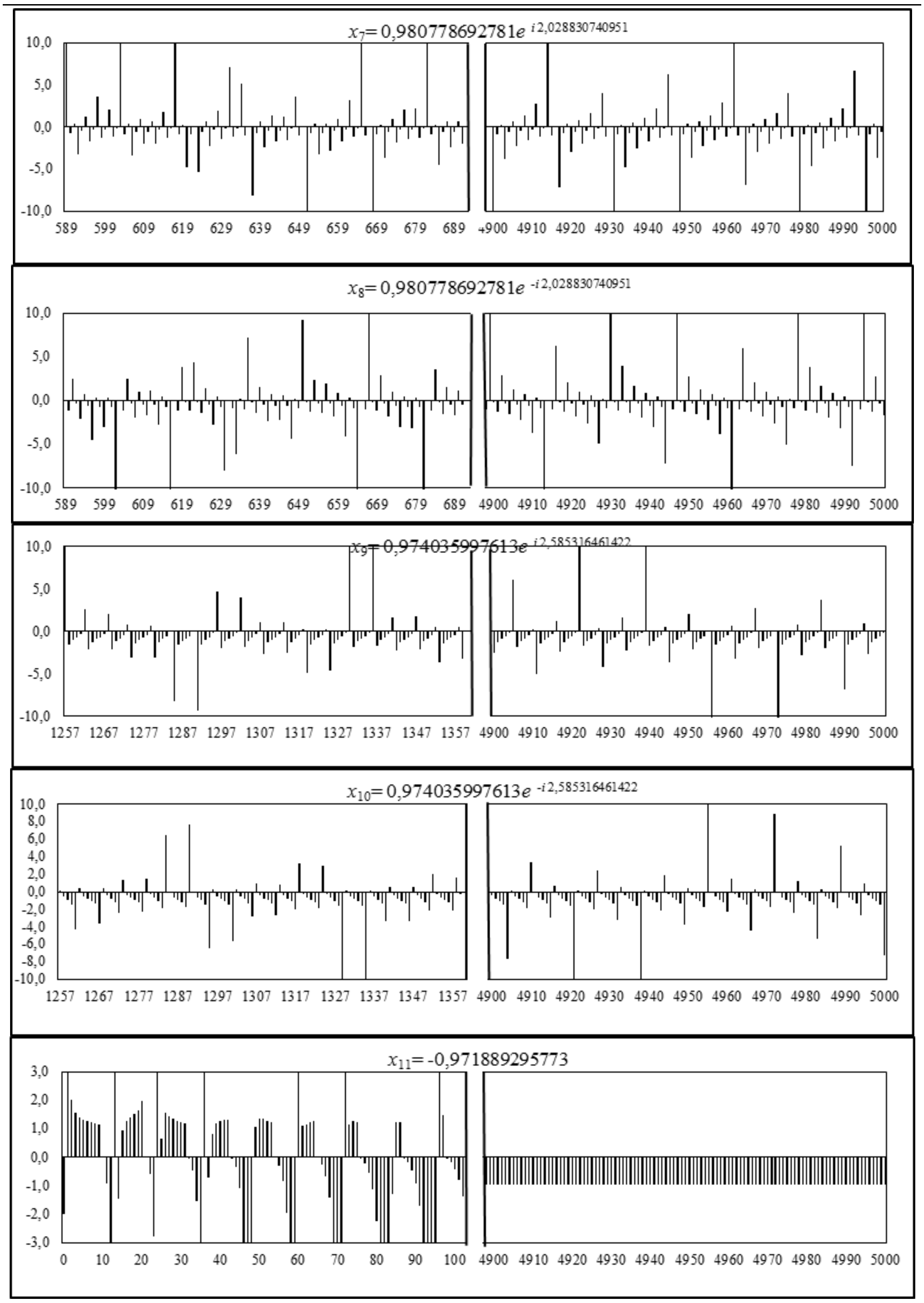


Рис. 30 (окончание). Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (105).

В табл. 69-72 приведены значения двух первых пар комплексно-сопряженных корней уравнения (105), найденные при помощи r/φ – алгоритма с учетом 2^i (i=7,.., 12) подходящих дробей Никипорца.

$x_1 = 1{,}05384442942e^{i0{,}36405832698}$ Таблица 69

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
128	1,054507178103	1,077859599257	-0,024015169837	0,375625208581	-0,011566881601
256	1,317820976181	1,063574828884	-0,009730399464	0,371279131788	-0,007220804808
512	-0,828959226612	1,054403516729	-0,000559087309	0,369599135716	-0,005540808736
1024	1,321201095664	1,056001428919	-0,002156999499	0,365671209679	-0,001612882699
2048	-0,742566917574	1,053943484768	-0,000099055348	0,365374095895	-0,001315768915
4096	1,334850046687	1,054366893784	-0,000522464364	0,364455699468	-0,000397372488

$x_2 = 1{,}05384442942e^{-i0{,}36405832698}$ Таблица 70

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
128	1,023043196091	1,005678934118	0,048165495302	-0,409772954816	0,045714627836
256	0,842660203320	1,046824895817	0,007019533603	-0,374494488507	0,010436161527
512	-1,339737888816	1,055816098955	-0,001971669535	-0,370507241701	0,006448914721
1024	0,840589736917	1,052690368887	0,001154060533	-0,365778470004	0,001720143024
2048	-1,495606732720	1,054291505561	-0,000447076141	-0,365414276743	0,001355949763
4096	0,831994638031	1,053580642608	0,000263786812	-0,364459383265	0,000401056285

$x_3 = 1{,}01441487764e^{i\,0{,}91500055248}$ Таблица71

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
128	-5,012833731894	0,777428100521	0,236986777119	1,256637061436	-0,341636508956
256	2,159256299255	1,010309232705	0,004105644935	0,921218898421	-0,006218345941
512	-0,066070648988	1,005253124273	0,009161753367	0,920672397196	-0,005671844716
1024	-0,916542125543	1,012846028725	0,001568848915	0,917024270693	-0,002023718213
2048	3,378075892857	1,014100825491	0,000314052149	0,915549859046	-0,000549306566
4096	0,417890734044	1,014046722119	0,000368155521	0,914881122629	0,000119429851

$x_4 = 1{,}01441487764e^{-i\,0{,}91500055248}$ Таблица 72

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
128	-0,167415475948	0,786731821235	0,227683056405	-1,256637061436	0,341636508956
256	0,495765134474	1,005300288251	0,009114589389	-0,921218898421	0,006218345941
512	-15,574205042753	1,019096746536	-0,004681868896	-0,920672397196	0,005671844716
1024	-1,122738953389	1,014028595921	0,000386281719	-0,917024270693	0,002023718213
2048	0,304622387602	1,013813451230	0,000601426410	-0,915549859046	0,000549306566
4096	2,462455996627	1,014339424674	0,000075452966	-0,914881122629	-0,000119429851

В табл. 73 и 74 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней уравнения (105), с использованием r/φ-алгоритма, описываемых формулами (44) и (45), причем, счет всякий раз заканчивался на подходящих дробях, которые обеспечивали все более высокую точность в определении модуля и аргумента комплексных корней.

$x_1 = 1{,}05384442942e^{\,i\,0{,}364058326978}$ (16/5000) (17/5000) Таблица 73

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
37	-1,512566557147	1,512566557147	-0,458722127727	38	2,443121823330	1,570796326795	-1,206737999817
42	1,157217762312	1,473986704599	-0,420142275179	39	1,517754087320	1,047197551197	-0,683139224219
43	1,098022622149	1,413268467784	-0,359424038364	40	1,303962654819	0,785398163397	-0,421339836419
44	0,941853085531	1,343366398808	-0,289521969388	41	1,211769799383	0,628318530718	-0,264260203740
45	0,197740480972	1,085773026566	-0,031928597147	42	1,157217762312	0,523598775598	-0,159540448620
55	-0,821735291236	1,071984213866	-0,018139784447	43	1,098022622149	0,448798950513	-0,084740623535
71	0,252873581943	1,050265598028	0,003578831391	44	0,941853085531	0,392699081699	-0,028640754721
97	0,303193512892	1,054887814449	-0,001043385030	45	0,197740480972	0,349065850399	0,014992476579
184	-0,590076546431	1,054189014877	-0,000344585458	53	0,756479854786	0,369599135716	-0,005540808738
253	-0,501653892162	1,053549828706	0,000294600714	62	0,517933974682	0,362491460030	0,001566866948
330	0,279877806916	1,053872923878	-0,000028494458	79	0,565216517757	0,365301471348	-0,001243144370
563	0,275457981572	1,053818726869	0,000025702551	105	0,537940182064	0,364242626503	-0,000184299525
952	-0,551442874967	1,053847734711	-0,000003305292	200	0,533239574410	0,363965002550	0,000093324428
2186	-0,552950613413	1,053846722192	-0,000002292772	269	0,544334760420	0,364047217369	0,000011109609
2798	0,279109571679	1,053846086947	-0,000001657527	804	0,550961809740	0,364064773658	-0,000006446680
4032	0,278724644036	1,053845098997	-0,000000669577	1037	0,548685442896	0,364060687129	-0,000002360151
				1270	0,546395338774	0,364058143811	0,000000183166

$x_2 = 1{,}05384442942e^{\,-i\,0{,}364058326978}$ (15/5000) (17/5000) Таблица 74

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
107	0,056861434372	0,988411908008	0,065432521412	107	0,056861434372	-1,570796326795	1,206737999817
113	1,518213843215	0,998947225650	0,054897203770	108	0,569282021523	-1,047197551197	0,683139224219
116	0,317903741539	1,019693744328	0,034150685091	109	0,791603479151	-0,785398163397	0,421339836419
122	1,785798735995	1,038093195733	0,015751233687	110	0,971994538317	-0,628318530718	0,264260203740
124	-0,375723531466	1,068713679158	-0,014869249738	111	1,154579064802	-0,523598775598	0,159540448620
131	2,131669925987	1,056497716582	-0,002653287163	112	1,321931068324	-0,448798950513	0,084740623535
150	-0,145706522089	1,055764140372	-0,001919710952	113	1,518213843215	-0,392699081699	0,028640754721
174	1,953079097974	1,052969004929	0,000875424491	114	2,664071978957	-0,349065850399	-0,014992476579
176	-0,014292762259	1,053348497092	0,000495932328	122	1,785798735995	-0,369599135716	0,005540808738
245	-0,056530473930	1,053887305829	-0,000042876409	131	2,131669925987	-0,362491460030	-0,001566866948
478	-0,048220878981	1,053841096371	0,000003333048	148	1,841673372725	-0,365301471348	0,001243144370
1712	-0,047493732156	1,053843247851	0,000001181569	174	1,953079097974	-0,364242626503	0,000184299525
2946	-0,046767515996	1,053843530504	0,000000898915	269	2,040448698103	-0,363965002550	-0,000093324428
3272	2,017177930265	1,053843868125	0,000000561294	338	1,999354377761	-0,364047217369	-0,000011109609
4506	2,017905217366	1,053844174470	0,000000254950	873	1,976309707226	-0,364064773658	0,000006446680
				1106	1,984116474865	-0,364060687129	0,000002360151
				1339	1,992031626186	-0,364058143811	-0,000000183166

Над табл. 73–74 в скобках указано число «оптимальных» подходящих дробей, обеспечивающих все увеличивающую точность при вычислении модуля и аргумента комплексных корней и общее число используемых при вычислениях подходящих дробей (5000).

Аналогично находятся последующие корни уравнения (105). В табл. 75 приведены значения неизвестных x_1–x_{10}, найденные при помощи r/φ–алгоритма, а также указаны погрешности в определении модуля и аргумента комплексных корней.

Таблица 75

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
x_1	1,053845098997	-0,000000669577	0,364058143811	0,000000183166
x_2	1,053844174470	0,000000254950	-0,364058143811	-0,000000183166
x_3	1,014305299590	0,000109578052	0,915000703932	-0,000000151450
x_4	1,014414675589	0,000000202054	-0,915000703932	0,000000151450
x_5	0,993174463244	0,000063833526	1,471968731810	0,000000127004
x_6	0,993238217700	0,000000079070	-1,471968731810	-0,000000127004
x_7	0,980801710331	-0,000023017550	2,028792833816	0,000037907135
x_8	0,980731529580	0,000047163202	-2,028792833816	-0,000037907135
x_9	0,974047985695	-0,000011988083	2,585287708054	0,000028753367
x_{10}	0,974030305294	0,000005692319	-2,585287708054	-0,000028753367

В табл. 76 приведены результаты вычисления действительного корня уравнения (105).

x_{11}= -0,971889295773 Таблица 76

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i
0	-2,000000000000	1,028110704227
10	0,007355211596	-0,979244507369
11	-0,933462716354	-0,038426579420
124	-0,986476398452	0,014587102679
203	-0,960721460024	-0,011167835749
316	-0,973105904889	0,001216609116
813	-0,972233284458	0,000343988684
1406	-0,971584267151	-0,000305028622
1502	-0,971941066096	0,000051770323
2191	-0,971901007219	0,000011711446
2880	-0,971891872859	0,000002577086
3569	-0,971889857843	0,000000562070
4258	-0,971889418116	0,000000122343
4947	-0,971889322391	0,000000026617

На рис. 31 показано распределение корней уравнения (105) на комплексной плоскости.

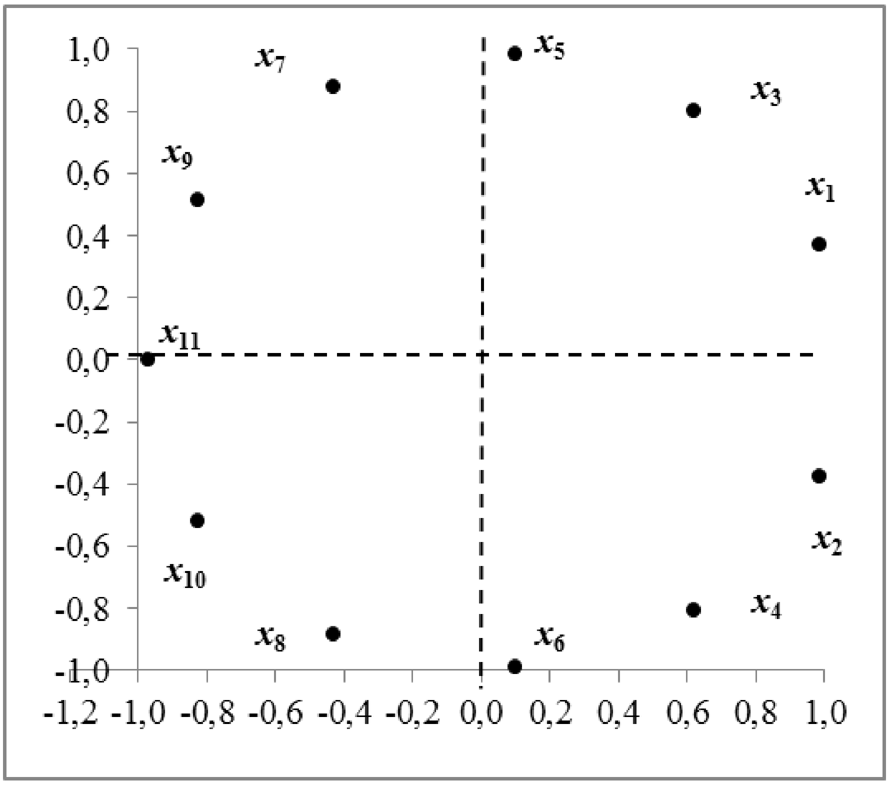


Рис 32. Расположение корней уравнения (105) на комплексной плоскости.

Как показывает практика решения алгебраических уравнений непрерывными дробями, скорость сходимости приближений корней к истинным значениям во многом зависит от характера коэффициентов уравнения. Чтобы “набрать статистику ”, позволяющих судить об эффективности r/φ - алгоритма при решении алгебраических уравнений, была решена целая серия “модельных” уравнений. Результаты такого тестирования приведены ниже.

В табл. 77 приведены результаты решения алгебраического уравнения

$$x^{16} + 1/16x^{15} + 1/15x^{14} + ... + 1/2x + 1 = 0 \tag{107}$$

Таблица77

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,045155288086	0,000542444357	0,249811049496	0,000000079055
x_2	1,045685554606	0,000012177837	-0,254121986397	0,004310857846
x_3	1,019388921767	0,001074254918	0,634610924406	-0,002827160185
x_4	1,020464343430	-0,000001166745	-0,643819305413	0,012035541192
x_5	1,005364285432	0,000330348569	1,030319641947	-0,011985988642
x_6	1,005695505871	-0,000000871870	-1,041060129651	0,022726476346
…	…	…	…	…
x_{11}	0,984205828215	-0,000001594247	2,174948760178	0,002227314457
x_{12}	0,983999636637	0,000204597331	-2,177068593277	-0,000107481358
x_{13}	0,981249542175	-0,000025391036	2,551154200267	0,011856578319
x_{14}	0,981701877371	-0,000477726232	-2,540418955661	-0,022591822925
x_{15}	0,979832640120	-0,000052553223	2,892381618096	0,056361528904
x_{16}	0,980196524203	-0,000416437306	-2,863243097023	-0,085500049977

В табл. 78 приведены результаты решения алгебраического уравнения

$$x^{16} - 1/16x^{15} - 1/15x^{14} - ... - 1/2x - 1 = 0 \tag{108}$$

Таблица78

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,115632690564	0,000000000000	-	-
x_2	1,026438720712	0,000956929676	0,422667197943	0,000000145361
x_3	1,027382680905	0,000012969483	-0,430039571256	0,007372227952
x_4	1,008108285548	0,000256128430	0,823948842480	-0,007401451919
x_5	1,008362230399	0,000002183579	-0,834689330185	0,018141939624
x_6	0,996409518709	0,000075220559	1,221431545523	-0,015110029025
…				
x_{11}	0,982891413767	-0,000283252473	-1,999195325012	0,017406754713
x_{12}	0,978817842728	-0,000002481812	2,368613815989	0,000000106143
x_{13}	0,979133643025	-0,000318282109	-2,367916850840	-0,000697071292
x_{14}	0,976606845633	0,000028414030	2,721741399861	0,033424229216
x_{15}	0,977513106520	-0,000877846857	-2,710995663933	-0,044169965144
x_{16}	-0,975840713177	-0,000082479494	-	-

В табл. 79 приведены результаты решения алгебраического уравнения

$$x^{16} + x^{15} + 1/2x^{14} + ... + 1/15x + 1/16 = 0 \tag{109}$$

Таблица79

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	0,877920945281	0,000186554663	2,969853286661	0,002644252507
x_2	0,878153015482	-0,000045515538	-2,937623006078	-0,034874533090
x_3	0,859110103479	-0,000131475995	2,492401792589	0,126985274441
x_4	0,858979255344	-0,000000627860	-2,495471252925	-0,123915814105
x_5	0,847795420665	0,000000228329	0,480722806440	-0,167301965332
x_6	0,847795589467	0,000000059527	-0,391643180966	0,078222339858
…				
x_{11}	0,828106081912	0,000001719738	1,104735878185	-0,395869369080
x_{12}	0,828693450176	-0,000585648526	-0,991193579594	0,282327070489
x_{13}	0,823143683757	0,000002826534	1,484725295190	-0,000119753146
x_{14}	0,822917910406	0,000228599885	-1,485888417238	0,001282875194
x_{15}	0,822283405768	0,000001185731	1,099557428756	-0,001352486614
x_{16}	0,822707351828	-0,000422760329	-1,095707437759	-0,002497504383

$$x^{16} + 1/16x^{15} + 1/15x^{14} + \dots + 1/2x + 1 = 0$$

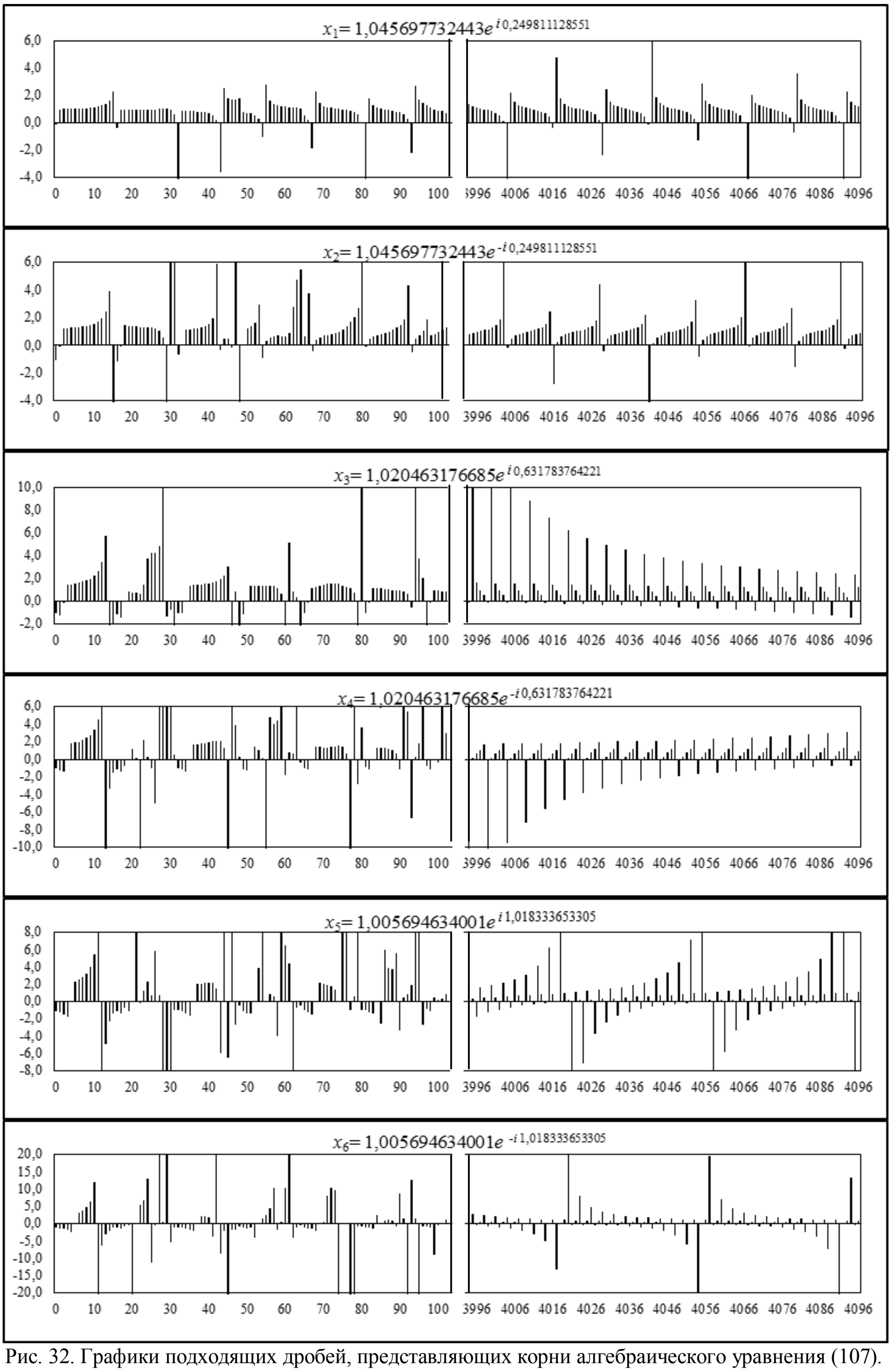


Рис. 32. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (107).

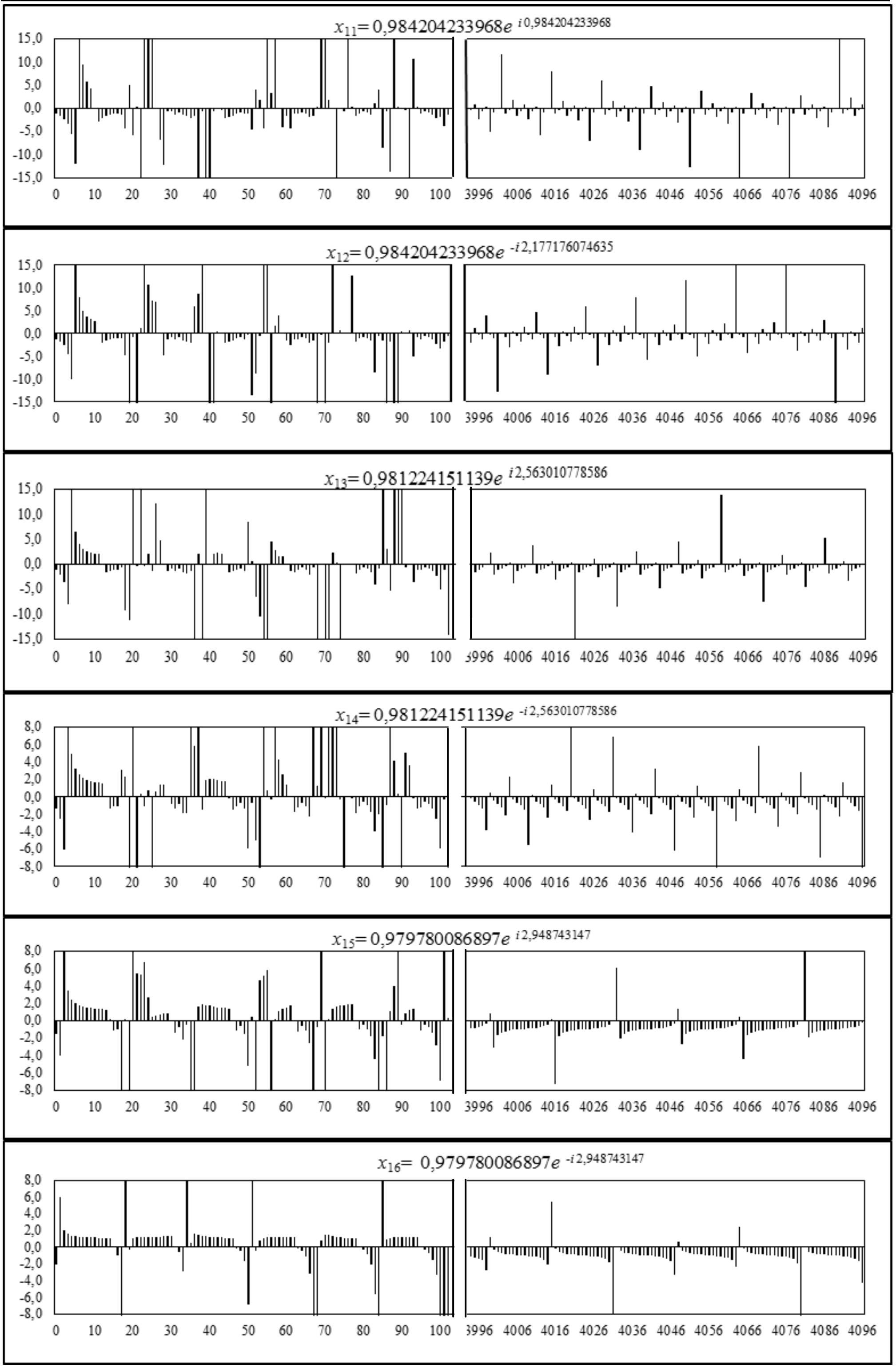


Рис. 32 (окончание) . Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (107).

$$x^{16} - 1/16x^{15} - 1/15x^{14} - \ldots - 1/2x - 1 = 0$$

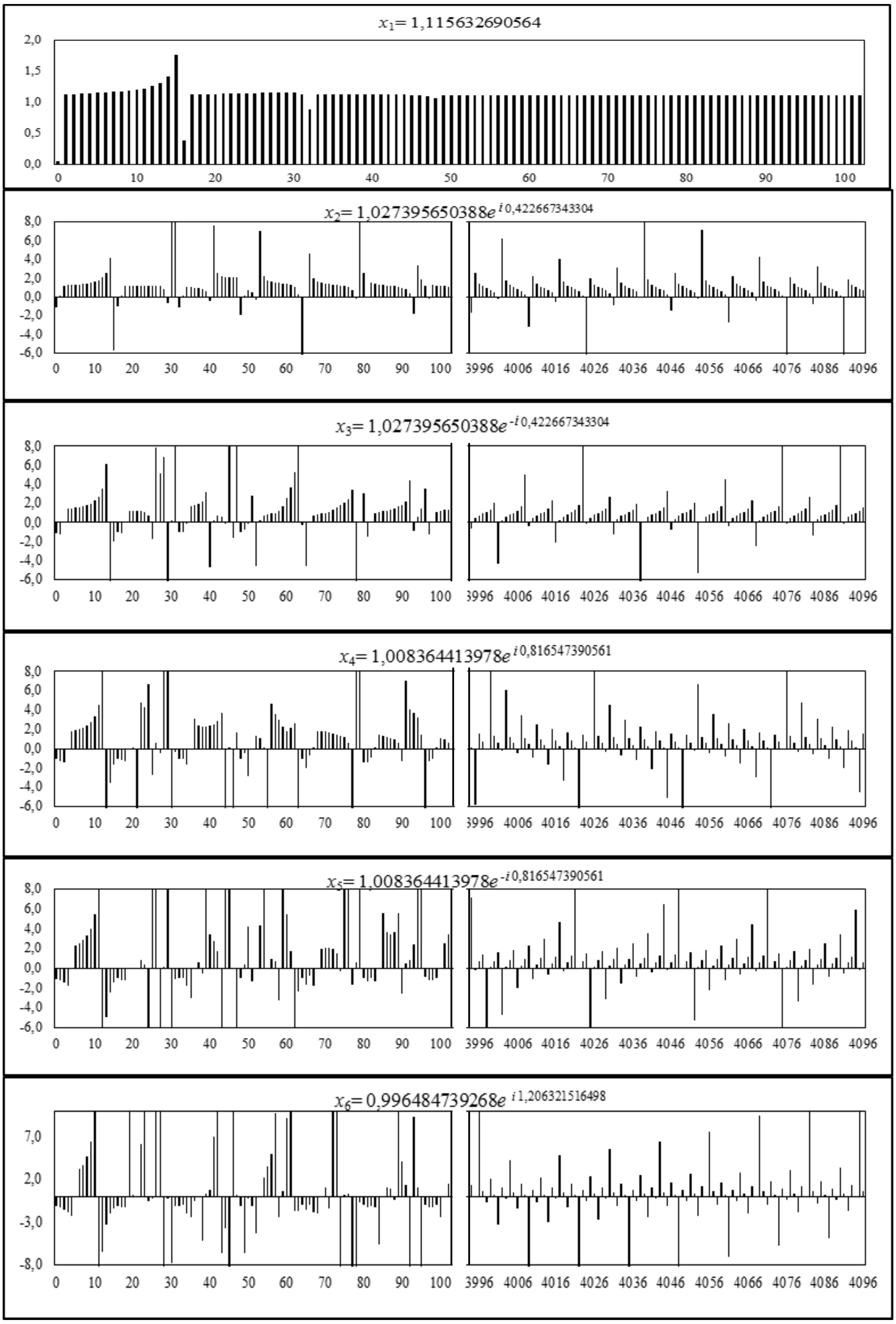


Рис. 33. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (108).

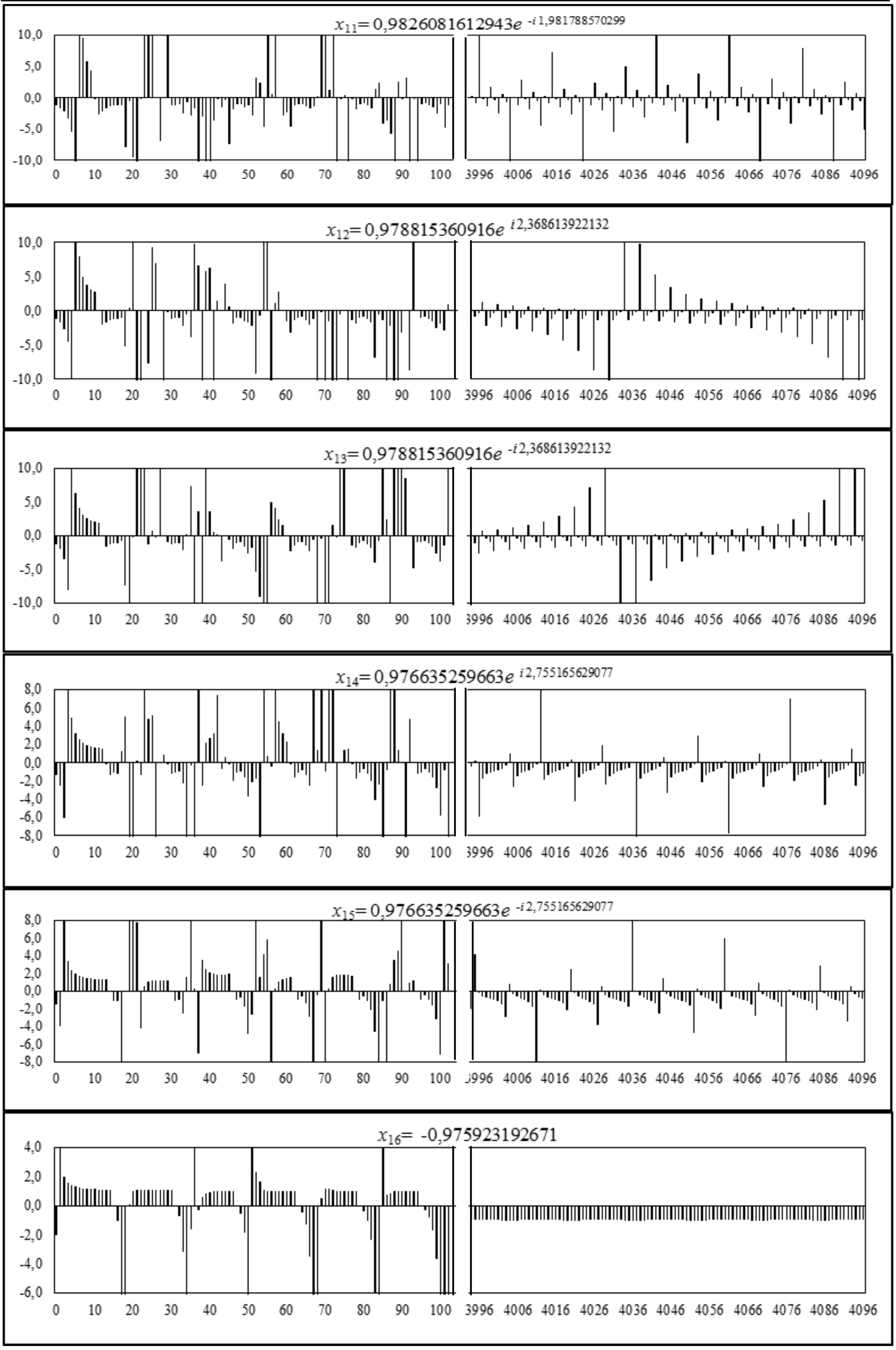


Рис. 33(окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (108).

$$x^{16} + x^{15} + 1/2x^{14} + \ldots + 1/15x + 1/16 = 0$$

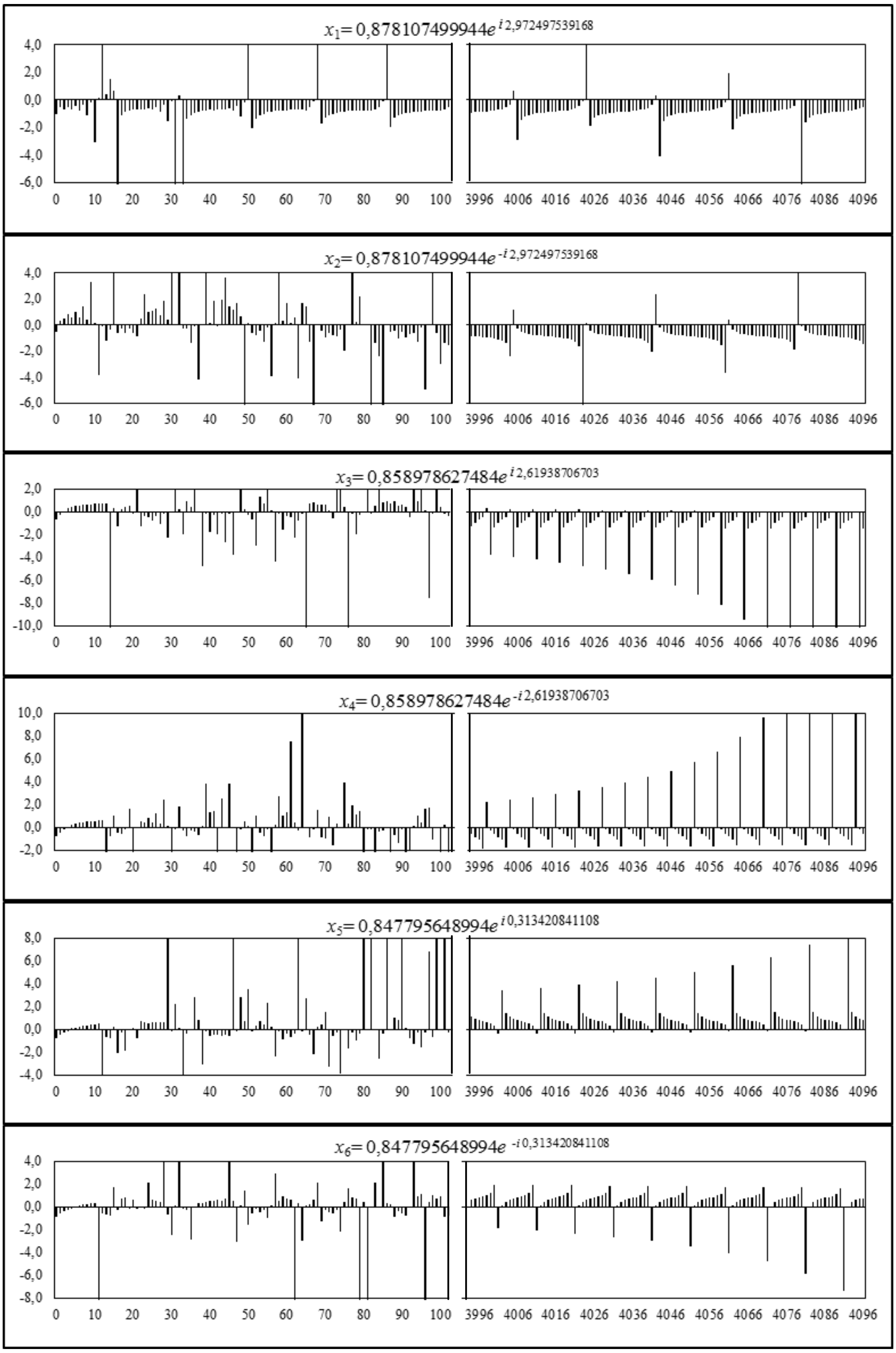


Рис 34. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (109).

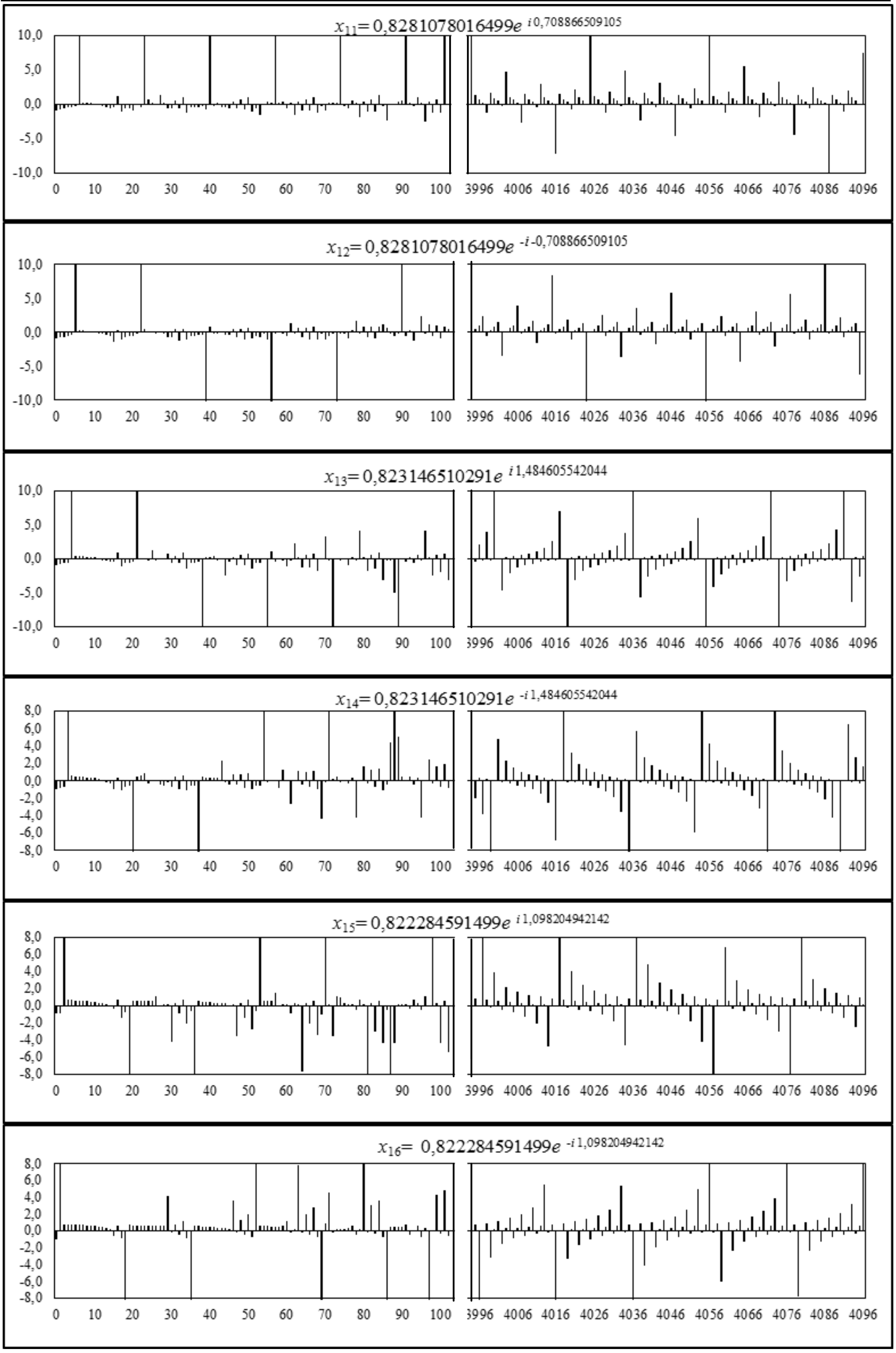


Рис 34.(окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (109)

В табл. 80 приведены результаты решения алгебраического уравнения

$$x^{16} - x^{15} - 1/2x^{14} - \ldots - 1/15x - 1/16 = 0 \qquad (110)$$

Таблица 80

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,581921136554	0,000000000000	-	-
x_2	0,862546969976	0,000679209230	0,372679128514	0,000000430976
x_3	0,863220811773	0,000005367433	-0,380168183166	0,007488623676
x_4	0,830488633279	0,000848936192	0,785398163397	0,000525444723
x_5	0,831353128033	-0,000015558562	-0,799594417450	0,013670809330
x_6	0,811288140037	0,000514576585	1,193467072169	-0,007444229346
…				
x_{11}	0,790074973856	-0,000158059653	-1,990621071203	0,018182348663
x_{12}	0,784159474720	-0,000000635778	2,362685384105	0,000117259945
x_{13}	0,784880890588	-0,000722051646	-2,363144916417	0,000342272367
x_{14}	0,780888775435	0,000006700068	2,728184831255	0,024188352718
x_{15}	0,781546214734	-0,000650739231	-2,722048908103	-0,030324275870
x_{16}	-0,779862636414	0,000025656423	-	-

В табл. 81 приведены результаты решения алгебраического уравнения

$$x^{17} + x^{16} + 2x^{15} + \ldots + 16x + 17 = 0 \qquad (111)$$

Таблица 81

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,246615324283	0,000000111823	1,063320284788	-0,000002553397
x_2	1,247193430200	-0,000577994094	-1,065883604155	0,002565872764
x_3	1,217828195620	0,000671354573	1,368957858124	0,001808388715
x_4	1,218498994891	0,000000555302	-1,371299382701	0,000533135862
x_5	1,202340864607	0,001012874893	0,785784868549	-0,023201749979
x_6	1,203347525982	0,000006213518	-0,798159433408	0,035576314838
…				
x_{12}	1,157939629512	-0,000009394254	-2,423514332769	-0,002192913301
x_{13}	1,152338319673	0,000000225680	2,779668753325	0,003829187457
x_{14}	1,152339103378	-0,000000558025	-2,759475574340	-0,024022366442
x_{15}	-1,150578796294	-0,000000303825	-	-
x_{16}	1,136392294382	0,000005785924	0,497136227077	-0,078792593669
x_{17}	1,137230648328	-0,000832568022	-0,418879020479	0,000535387071

В табл. 82 приведены результаты решения с использованием r/φ – алгоритма алгебраического уравнения

$$x^{17} - x^{16} - 2x^{15} - \ldots - 16x - 17 = 0 \qquad (112)$$

Таблица 82

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	2,618032932274	0,000000000000		
x_2	1,131769401616	0,000566353852	1,154839002861	0,010153146498
x_3	1,132341233241	-0,000005477773	-1,165093964245	0,000101814886
x_4	1,130394014756	0,001299987477	0,898587898711	-0,096377493006
x_5	1,131611200599	0,000082801634	-0,933819863567	0,131609457862
x_6	1,128902607507	0,000032183278	1,525113212145	0,000258560229
…	…	…	…	…
x_{12}	1,119046349464	0,000000010165	2,617993877991	-0,014896933481
x_{13}	1,119045808739	0,000000550890	-2,603033912974	-0,000063031536
x_{14}	1,117812588380	-0,000002396076	2,879793265791	0,082304758322
x_{15}	1,117810406959	-0,000000214655	-2,792526803191	-0,169571220922
x_{16}	1,116205474853	-0,000002052809	0,845813406736	-0,413244478608
x_{17}	1,117011713467	-0,000808291423	-0,433323124633	0,000754196505

$$x^{16} - x^{15} - 1/2x^{14} - \dots - 1/15x - 1/16 = 0$$

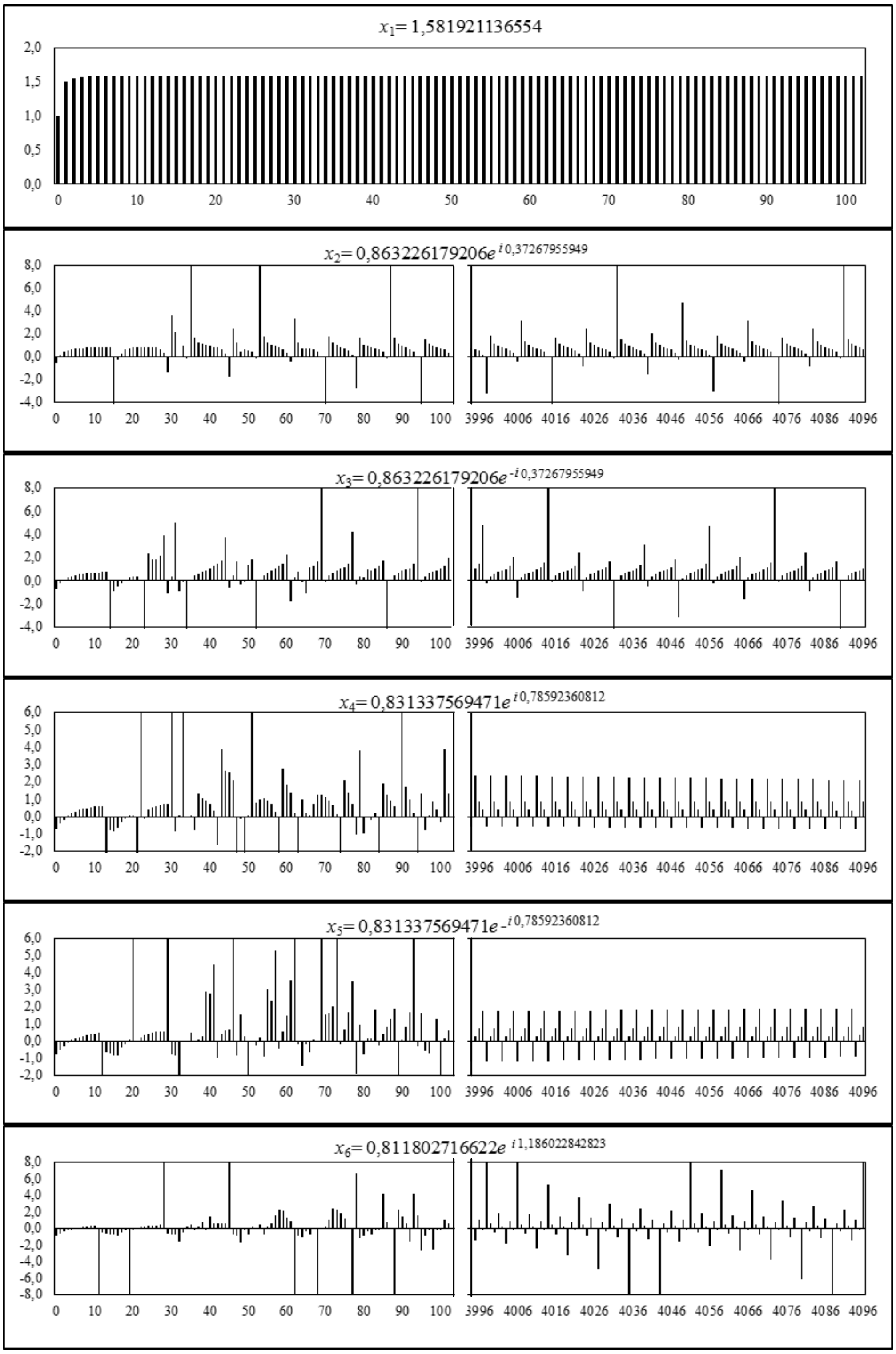


Рис. 35. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (110).

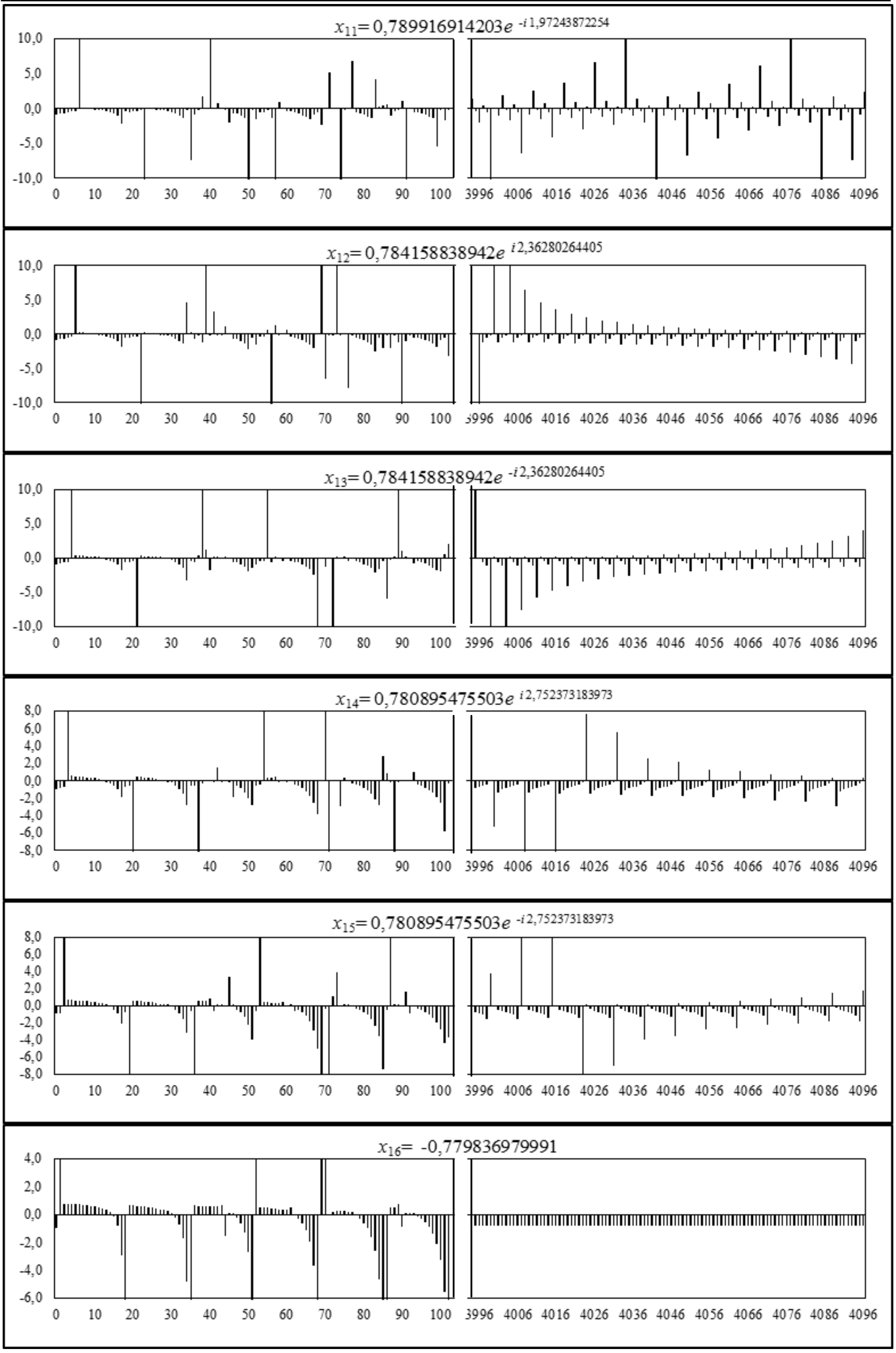


Рис 35 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (110).

$$x^{17} + x^{16} + 2x^{15} + \ldots + 16x + 17 = 0$$

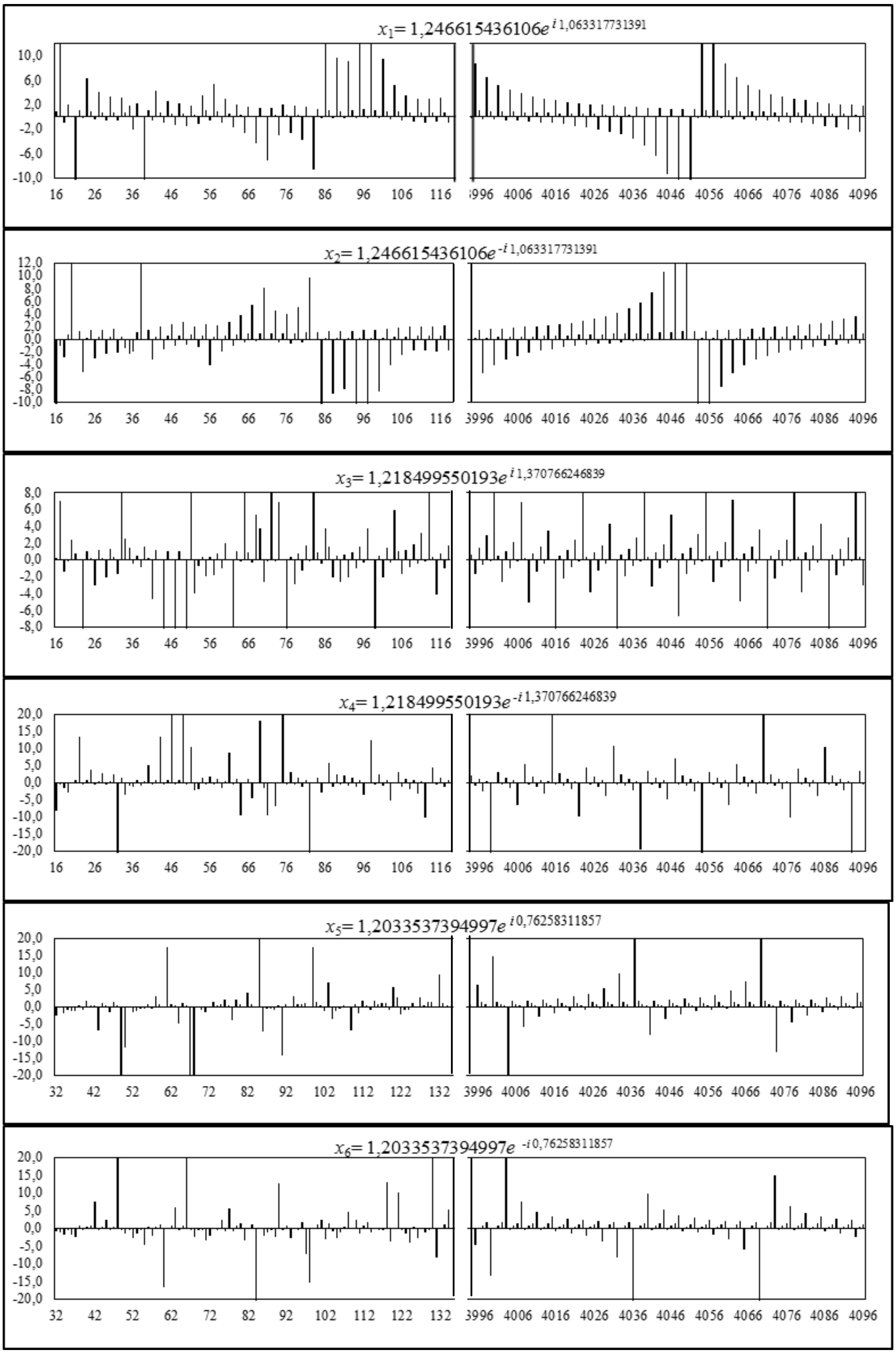


Рис. 36. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (111).

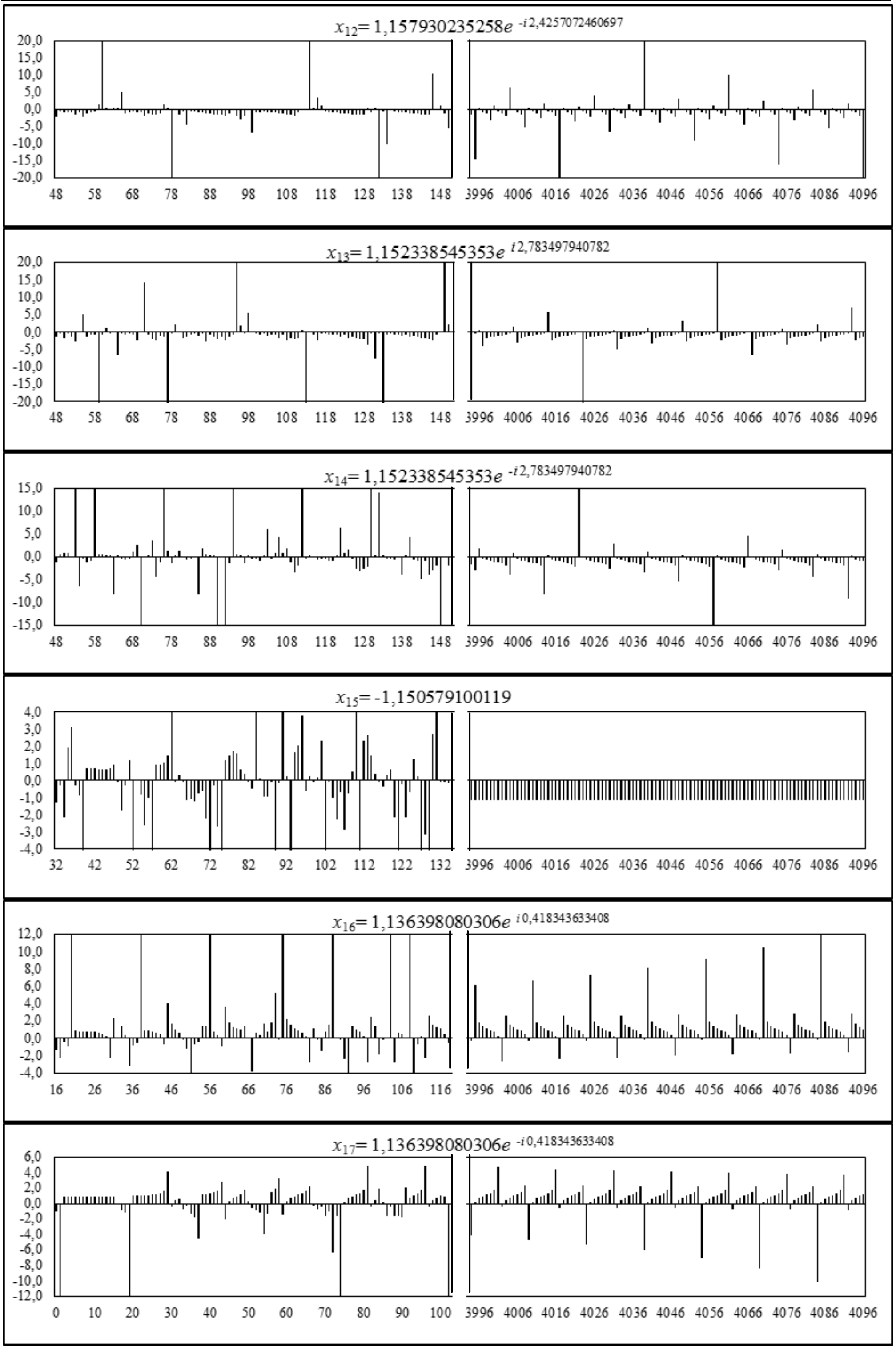


Рис 36 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (111).

$$x^{17} - x^{16} - 2x^{15} - \ldots - 16x - 17 = 0$$

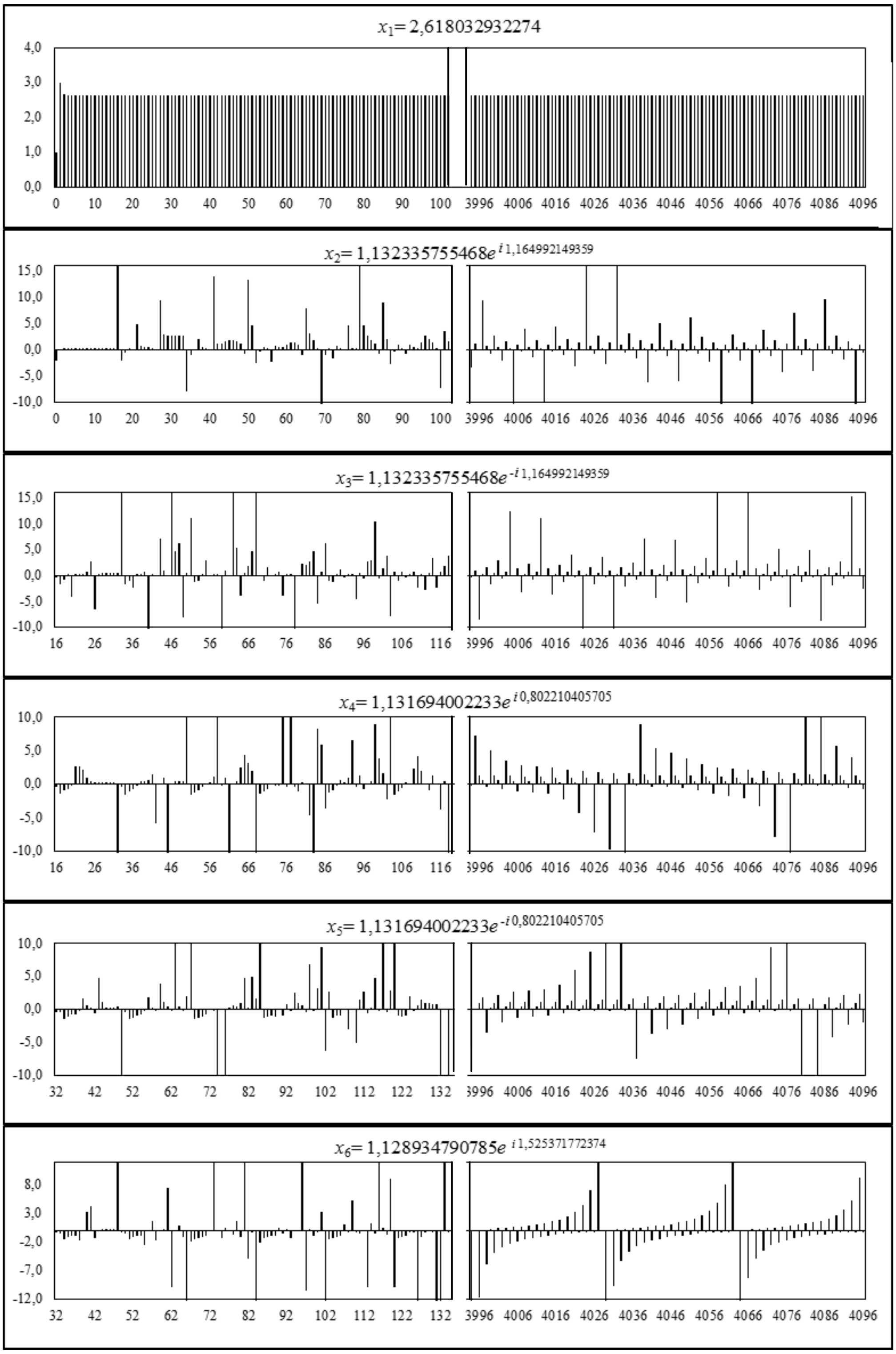


Рис. 37. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (112).

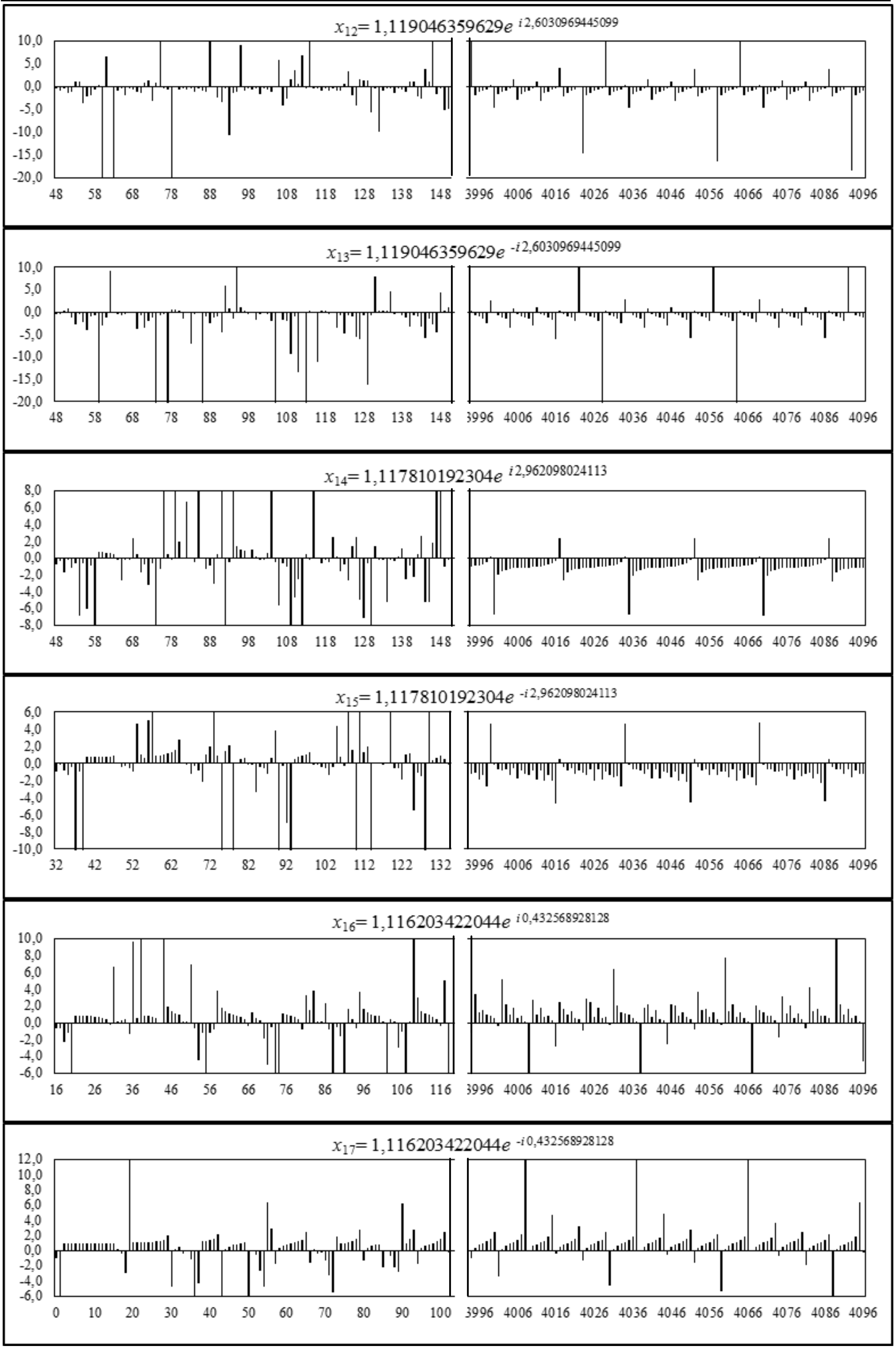


Рис. 37 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (112).

В табл. 83 приведены результаты решения с использованием r/φ – алгоритма алгебраического уравнения

$$x^{16} + 16x^{15} + 15x^{14} + ... + 2x + 1 = 0 \qquad (113)$$

Таблица 83

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 – \varphi_i$
x_1	-15,062257748299	0,000000000000	-	-
x_2	0,881511532911	0,000603284576	0,451296061517	-0,000016753368
x_3	0,882165276045	-0,000050458558	-0,453092097206	0,001812789057
x_4	0,852904572698	0,000733303257	0,847768017550	-0,007930692197
x_5	0,853635773565	0,000002102390	-0,852651746287	0,012814420934
x_6	0,837586714857	0,000086758688	1,243321291687	-0,018940756023
...				
x_{11}	0,814730994998	0,006457204899	-1,999195325012	0,008100882142
x_{12}	0,817194260441	0,000000883184	2,375350542958	-0,000916179252
x_{13}	0,817211291473	-0,000016147848	-2,379994434538	0,005560070832
x_{14}	0,815024524357	0,000000635940	2,748893571891	0,009058075473
x_{15}	0,815025149779	0,000000010518	-2,750772514866	-0,007179132498
x_{16}	-0,814330297471	-0,000007999651	-	-

В табл. 84 приведены результаты решения с использованием r/φ – алгоритма алгебраического уравнения

$$x^{16} - 16x^{15} - 15x^{14} - ... - 2x - 1 = 0 \qquad (114)$$

Таблица 84

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 – \varphi_i$
x_1	16,937253933194	0,000000000000	-	-
x_2	0,880151570504	0,000619951077	0,454118391823	-0,000004775800
x_3	0,880774883201	-0,000003361620	-0,454365794354	0,000252178331
x_4	0,850207452222	0,000723642545	0,844732418286	-0,000219910001
x_5	0,850986925499	-0,000055830732	-0,844969281579	0,000456773294
x_6	0,832907165921	0,000360568414	1,230534807934	-0,000365031537
...				
x_{11}	0,813178664477	-0,000013345366	-2,000116156192	0,003508116326
x_{12}	0,807702898385	-0,000000114697	2,378634437718	-0,000021551456
x_{13}	0,807784759660	-0,000081975972	-2,381974284581	0,003361398319
x_{14}	0,804559759161	-0,000000122314	2,760202241099	0,000000265278
x_{15}	0,804559569703	0,000000067144	-2,760203027057	0,000000520680
x_{16}	-0,803525240078	-0,000006755712	-	-

В предисловии уже отмечалось, что периодические непрерывные дроби всегда являются сходящимися и своими значениями они имеют некоторый корень алгебраического уравнения n-й степени. Классические цепные дроби – это корни квадратного уравнения. Периодические непрерывные дроби Хессенберга представляют старший по модулю корень алгебраического уравнения степени n ($n \geq 3$). Непрерывные дроби Никипорца, частным случаем которых являются непрерывные дроби Хессенберга, представляют все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени. Важно подчеркнуть, что графики распределения подходящих дробей, представляющие корни алгебраического уравнения произвольной степени n, имеют характерную периодическую структуру, точнее – квадропериодическую, то есть периодичность графиков подходящих дробей наблюдается как для цепных дробей, связанных с квадратичной иррациональностью, так и для непрерывных дробей, которые отображают иррациональность высших порядков.

$$x^{16} + 16x^{15} + 15x^{14} + \ldots + 2x + 1 = 0$$

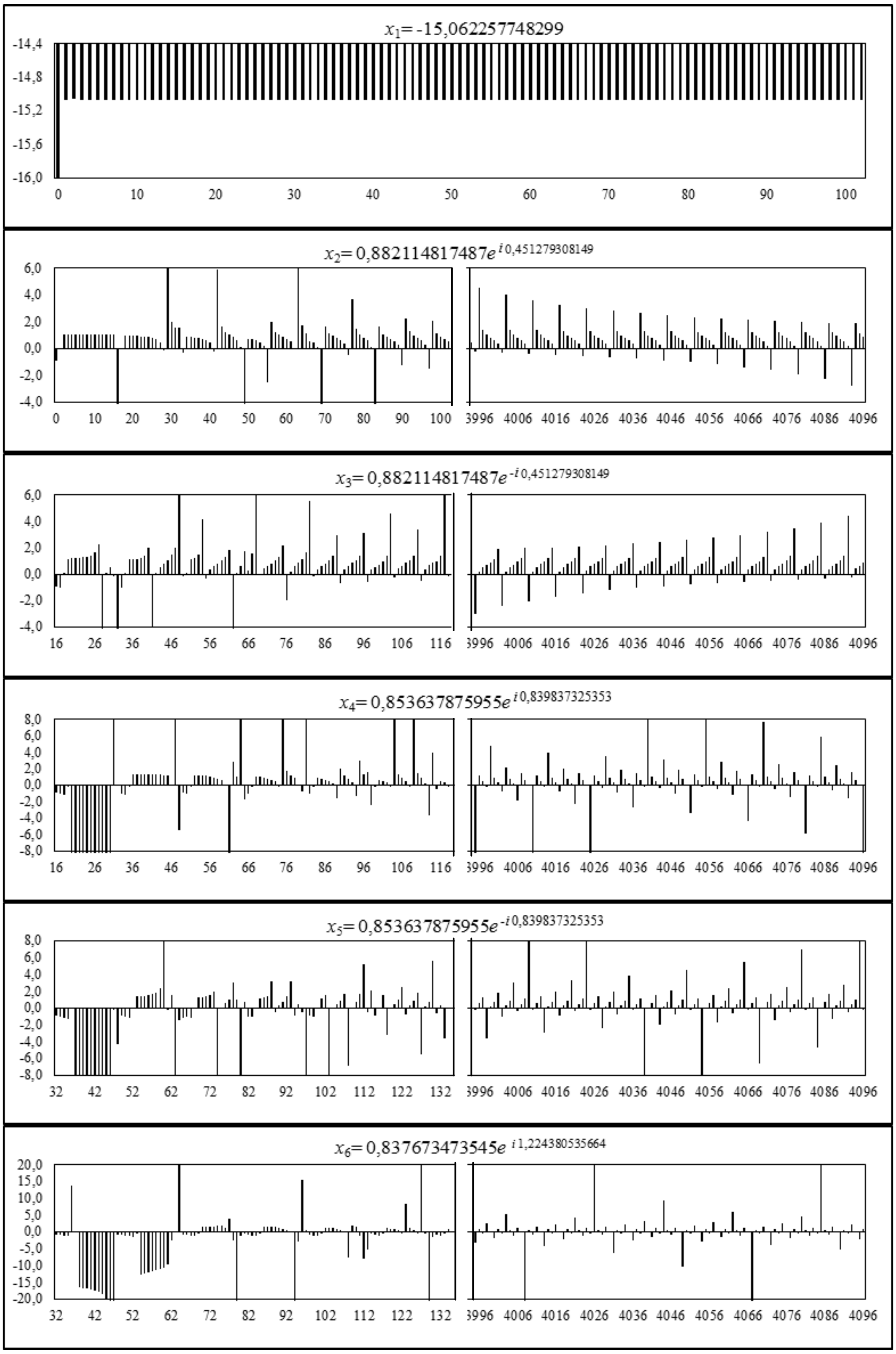


Рис. 38. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (113).

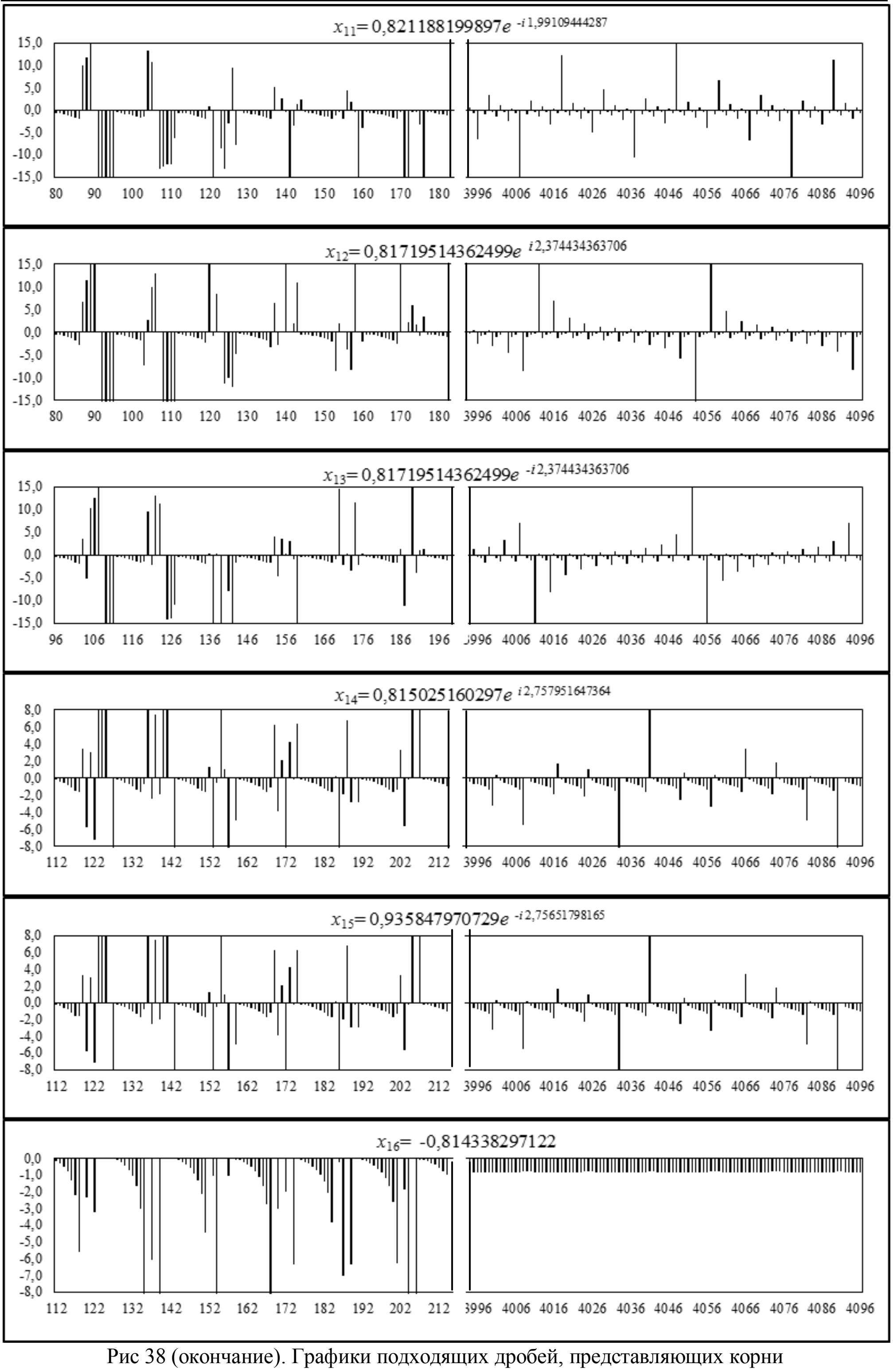


Рис 38 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (113).

$x^{16} - 16x^{15} - 15x^{14} - ... - 2x - 1 = 0$

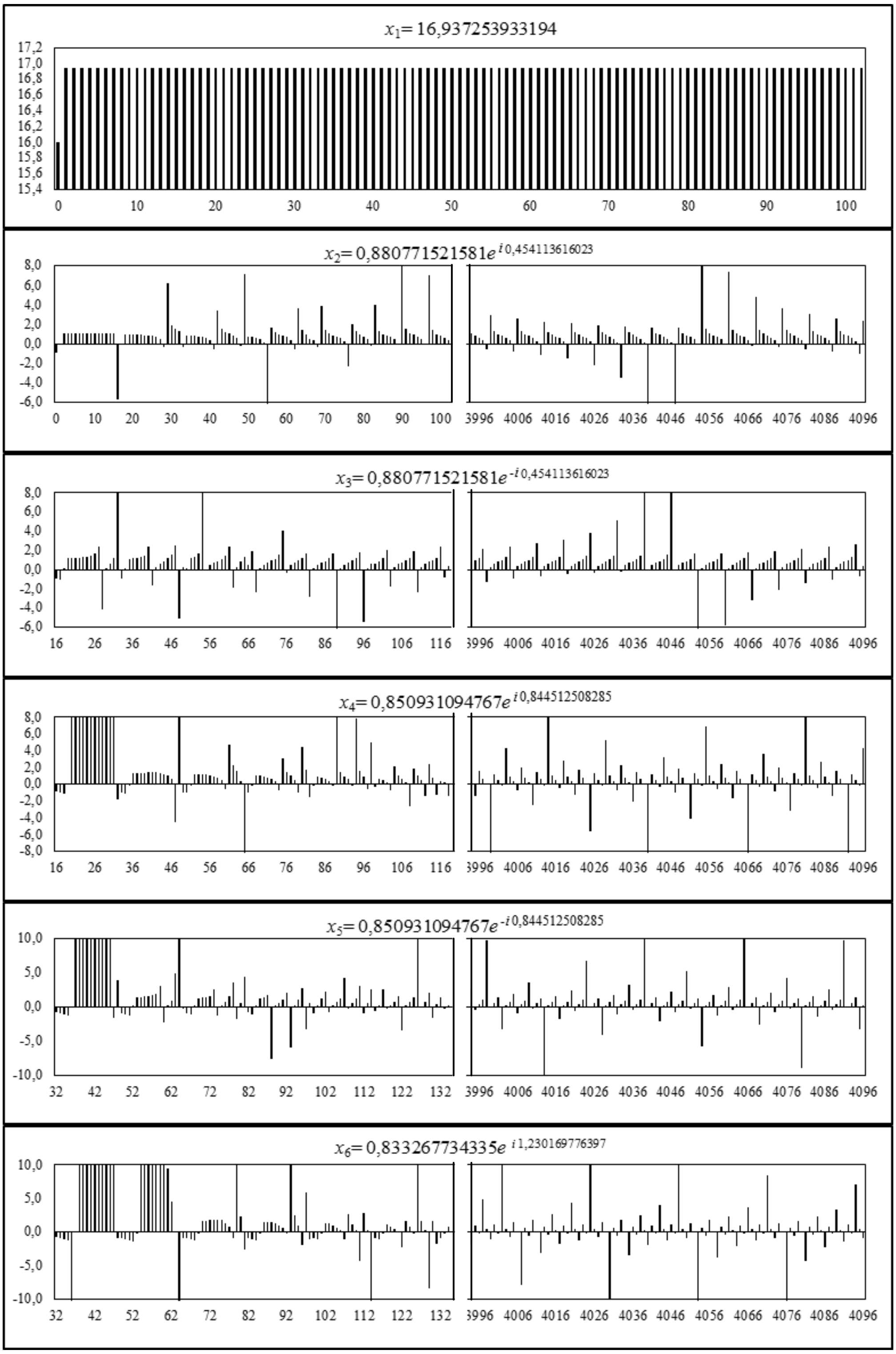


Рис. 39. Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (114).

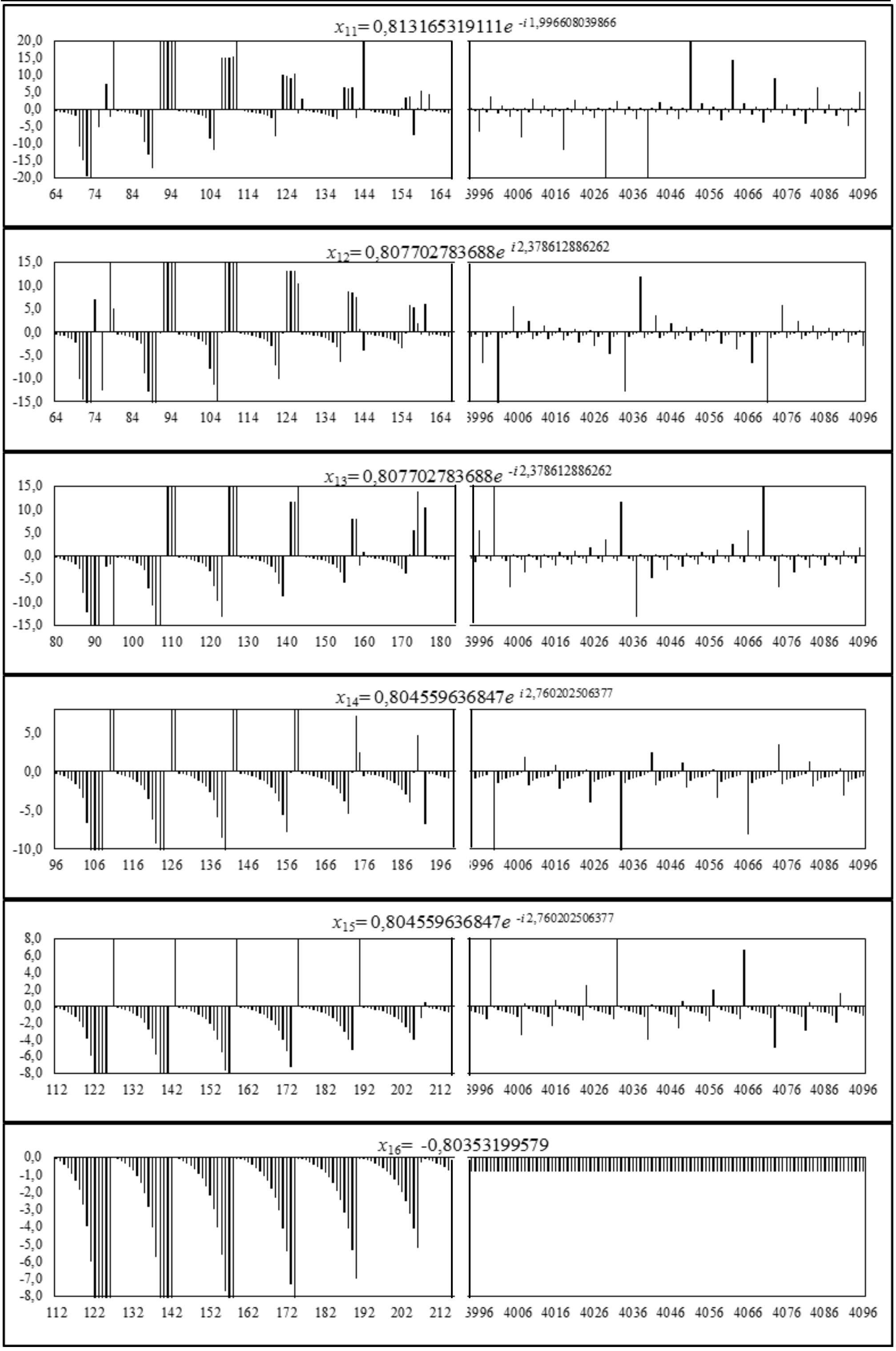


Рис. 39 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (114).

ГЛАВА III

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ АЛГОРИТМОМ РУТИСХАУЗЕРА – НИКИПОРЦА

В 1826 г. в первом номере журнала А. Крелле была опубликована статья Нильса Абеля “Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвёртой степени”. Но доказательство Абеля не утверждало, что корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени не могут быть вообще аналитически, то есть в виде формул, выражены через коэффициенты исходного уравнения. Через радикалы нельзя, но как-то иначе, можно?

Не единожды предпринимались попытки представить корни при помощи высших трансцендентных функций, в частности, гипергеометрических и автоморфных функций. Ф. Клейн, как известно, использовал при решении этой проблемы эллиптические модуль-функции. Аналитическую запись корней алгебраических уравнений дает, так называемая, интегральная формула Меллина, опубликованная в 1921 г [1144]. Недавно появилась работа “О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций [328] ”, в которой подход Меллина получал дальнейшее развитие.

В монографии [236] предложен итерационный метод “общего” решения алгебраического уравнения произвольной степени. Основу решения, как объясняет автор, составляет последовательность нелинейных отображений уравнения на плоскости все более высоких порядков, расчленение образов на элементарные уравнения первого и второго порядков; решение уравнений – образов в своем пространстве.

В 1977 г. было показано [499], что корни алгебраического уравнения n-й степени могут быть аналитически выражены через математическую конструкцию, включающую два отношения определителей Теплица бесконечного порядка. Диагональными элементами определителей Теплица были коэффициенты исходного алгебраического уравнения. Эти конструкции, позднее названные функциями Никипорца или непрерывными дробями Никипорца [520], были получены не без влияния формул Эйткена, приведённых в книге Рутисхаузера [398].

Однако ни формулы Эйткена, ни функции Никипорца не отвечали на вопрос: как представить комплексные корни алгебраических уравнений и поэтому, естественно, не решали проблему в целом. И только с появлением метода суммирования расходящихся непрерывных дробей [536] всё стало на свои места. Оказалось, что функций Никипорца вполне достаточно для аналитической записи корней через коэффициенты, если при определении комплексных корней дополнительно использовать r/φ-алгоритм.

Функции Никипорца, или непрерывные дроби Никипорца, выражаются через отношения определителей Теплица бесконечно высокого порядка. Определители Теплица можно вычислять по “общей” схеме, то есть по стандартным программам нахождения значений определителей, имеющихся в разнообразных пакетах прикладных программ. Но так как число операций при вычислении определителей общего вида чрезвычайно быстро растёт с увеличением размерности определителей, то при нахождении “подходящих дробей” использовался рекуррентный алгоритм частных и разностей Рутисхаузера (QD-алгоритм), предложенный в 50-х годах минувшего столетия.

Следует отметить, что алгоритм Рутисхаузера эквивалентен не непрерывной дроби Никипорца, а формулам Эйткена, которые, будучи записаны в развёрнутом виде через отношения определителей Теплица, весьма незначительно отличаются от конструкции, которая была названа непрерывной дробью Никипорца.

При вычислениях использовались две основные схемы QD-алгоритма, так называемые упрощённая и прогрессивная формы. Практика показала, что численно более устойчив "прогрессивный" QD-алгоритм.

3.1. О связи формул Эйткена с функциями Никипорца

1. Имеется алгебраическое равнение степени n:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0\,. \tag{1}$$

Запишем следующую производящую функцию

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots\,. \tag{2}$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -\left(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}\right), \quad c_0 = 1\,,\ c_1 = -\alpha_1\,. \tag{3}$$

Способ нахождения старшего по модулю корня полинома (1) принадлежит Д. Бернулли:

$$x_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}\,. \tag{4}$$

Формуле (4) соответствует функция Никипорца:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}\,. \tag{5}$$

Для определения последующих корней алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0$$

можно применять формулы Эйткена (6)-(8), имеющиеся в работе Рутисхаузера [67]. Относительно этих формул Рутисхаузер сообщает, что они "приведены у Айткена" и делает ссылку на публикацию Айткена 1926 г. [577]. Из слов "приведены у Айткена" нельзя утверждать, что формулы принадлежат именно Айткену. Мы, однако, будем называть эти формулы формулами Эйткена. (Alexander Craig Aitken, 1895-1967).

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2}\end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m}\right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2\,, \tag{6}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4}\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2}\end{vmatrix}}\right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3\,, \tag{7}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \cdots & c_{m+i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \cdots & c_{m+2i-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \cdots & c_{m+2i-2}\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \cdots & c_{m+i} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \cdots & c_{m+2i-3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+i-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \cdots & c_{m+2i-4}\end{vmatrix}}\right) = x_i\,. \tag{8}$$

Несложно однако установить, что формулы Эйткена для x_2, x_3, …, x_n не совпадают с формулами Никипорца, которые были рассмотрены в предыдущей. Найдём первые приближения для корня x_2 по формуле Эйткена (6).

Значения c_m записываются через коэффициенты α_i исходного уравнения (1) с использованием определителей Хессенберга:

$$c_0 = 1\,,\; c_1 = -\alpha_1\,,\; c_2 = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1\end{vmatrix},\; c_3 = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1\end{vmatrix}, \ldots . \tag{9}$$

Найдём значение $x_2^{(0)}$. Для этого в формуле (6) положим $m = 0$:

$$x_2^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}} : \frac{c_1}{c_0}\,. \tag{10}$$

Подставляем в (10) значения c_i из (9), получим:

$$x_2^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ \alpha_1^2 - \alpha_2 & -\alpha_1^3 - \alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2\end{vmatrix}} : \frac{-\alpha_1}{1} = \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}{-\alpha_2} : \frac{-\alpha_1}{1} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2\end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{-\alpha_1}{1}\,. \tag{11}$$

Формула Никипорца для $x_2^{(0)}$ даёт такое выражение:

$$x_2^{(0)} = -\frac{-\alpha_2}{1} : \frac{-\alpha_1}{1}. \tag{12}$$

Найдём $x_2^{(1)}$ по формулам Эйткена и Никипорца. Положим в формуле (6) $m = 1$:

$$x_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{c_2}{c_1}. \tag{13}$$

Подставляя в (13) значения c_i из (9), после несложных преобразований получим:

$$x_2^{(1)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \tag{14}$$

По формуле Никипорца для $x_2^{(1)}$ запишем:

$$x_2^{(1)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \tag{15}$$

Продолжая аналогично, получим по формулам Эйткена:

$$x_2^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \tag{16}$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Легко заметить, что формулы Эйткена приводят к несимметричным выражениям: “правые” определители имеют на единицу меньшую размерность, чем размерность определителей, стоящих в левой части формул для $x_2^{(i)}$.

Формулы Никипорца имеют симметричный вид. Например,

$$x_2^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \tag{18}$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \tag{19}$$

Формулы Эйткена можно незначительно модернизировать с тем, чтобы они совпадали с формулами Никипорца. Например, вместо формулы (6) следует записать выражение:

$$x_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m-1} & c_m \\ c_m & c_{m+1} \end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m} \right).$$

При $m = 0$, имеем:

$$x_2^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}} : \frac{c_1}{c_0}.$$

Полагая $c_{-1} = 0$, получим формулу, совпадающую с выражением для $x_2^{(0)}$, получаемым из формул Никипорца:

$$x_2^{(0)} = -\frac{-\alpha_2}{1} : \frac{-\alpha_1}{1}.$$

Аналогично, запишем:

$$x_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|-\alpha_1|},$$

Опуская преобразования, получим:

$$x_2^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{c_3}{c_2} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}},$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x_2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1}\\ c_{m+1} & c_{m+2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m-1} & c_m\\ c_m & c_{m+1}\end{vmatrix}}:\frac{c_{m+1}}{c_m}\right)=-\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}. \tag{20}$$

3.2. Алгоритм Рутисхаузера

Вычисление подходящих дробей $X_{in}^{(p)}$ непосредственно весьма затруднительно при больших размерностях определителей. Однако легко заметить, что в выражения, представляющие непрерывные дроби Никипорца входят определители от матриц специального вида, элементы которых по главной диагонали и диагоналям, параллельным главной диагонали, одинаковы. Такие матрицы называют матрицами Теплица.

Для вычисления формул Эйткена цюрихским профессором Гейнцем Рутисхаузером (Heinze Rutishauser, 1918-1970) в ряде работ, опубликованных в пятидесятых годах двадцатого столетия, было предложено несколько простых рекуррентных схем, получивших название “алгоритм частных и разностей” или QD-алгоритм (Der Quotienten-Differenzen Algorithmus). Небольшая книга Г. Рутисхаузера объёмом менее 100 страниц “Der Quotienten-Differenzen Algorithmus” в 1960 г. была издана в переводе на русском языке [398].

Так называемая *упрощённая* форма *QD*-алгоритма описывается формулами:

$$e_n^{(m)}=e_{n-1}^{(m+1)}+x_n^{(m+1)}-x_n^{(m)}, \tag{21}$$

$$x_{n+1}^{(m)}=x_n^{(m+1)}\cdot\frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}. \tag{22}$$

QD-алгоритм, определяемый формулами (21) и (22), удобно представлять следующей схемой (рис. 1):

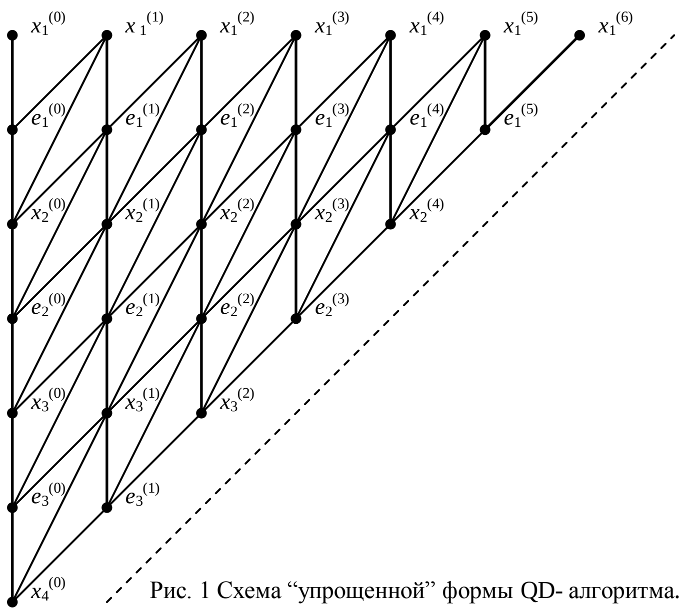


Рис. 1 Схема “упрощенной” формы QD- алгоритма.

Полагаем, что $e_0^m = 0$. Элементы первой строки $x_1^{(m)}$ представляются следующим образом:

$$x_1^{(m)} = \frac{c_{m+1}}{c_m}, \tag{23}$$

где c_m – определители матрицы Хессенберга. Соотношение (23) можно записать :

$$x_1^m = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_n & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 \\ -1 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \tag{24}$$

Здесь α_i – коэффициенты исходного алгебраического уравнения *n-й* степени

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \tag{25}$$

Запишем несколько подходящих дробей:

$$x_1^{(0)} = \frac{|-\alpha_1|}{1}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{1-\alpha_1}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}$$

$$x_1^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}$$

Выражение (24), представленное отношением определителей матриц Хессенберга, было названо непрерывной дробью Хессенберга [519]. Определители c_m могут находиться при помощи рекуррентного соотношения:

$$c_m = -\left(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \ldots + \alpha_{n-1} c_{m-n+1} + \alpha_n c_{m-n}\right), \tag{26}$$

где $c_{-1} = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = -\alpha_1$.

Значения непрерывной дроби Хессенберга удобнее вычислять не с использованием линейных рекуррентных соотношений (26), что приводит к быстрому переполнению разрядной сетки или появлению “машинного нуля”, а представляя дробь Хессенберга восходящей дробью:

$$x_1^m = \left(-\alpha_1\right) + \cfrac{\left(-\alpha_2\right) + \cfrac{\left(-\alpha_3\right) + \cfrac{\vdots + \cfrac{\left(-\alpha_n\right)}{x_1^{(m-n+1)}}}{x_1^{(m-3)}}}{x_1^{(m-2)}}}{x_1^{(m-1)}}, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Восходящую непрерывную дробь запишем в эквивалентной форме:

$$x_1^{(m)} = \left(-\alpha_1\right) + \frac{\left(-\alpha_2\right)}{x_1^{(m-1)}} + \frac{\left(-\alpha_3\right)}{x_1^{(m-2)} x_1^{(m-1)}} + \ldots + \frac{\left(-\alpha_n\right)}{x_1^{(m-n+1)} x_1^{(m-n)} \ldots x_1^{(m-1)}} . \tag{28}$$

3.3. Некоторые особенности упрощённой формы QD-алгоритма

Так называемая упрощённая форма QD-алгоритма Рутисхаузера, определяемая формулами

$$\left.\begin{aligned} e_n^{(m)} &= e_{n-1}^{(m+1)} + x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}, \\ x_{n+1}^{(m)} &= x_n^{(m+1)} \frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

при практической проверке оказалась недостаточно эффективной. Проблемы возникают уже при формировании первых двух строк QD-схемы, что, впрочем, находит простое объяснение.

Предположим, мы имеем алгебраическое уравнение, у которого старший по модулю корень – действительный. Вычисление старшего по модулю действительного корня непосредственно при помощи непрерывной дроби Хессенберга (24) или по нелинейному рекуррентному соотношению (28) обеспечивает быструю сходимость. Это обстоятельство вообще-то говоря не позволяет иметь достаточно большого числа различных значений $x_1^{(m)}$, что в свою очередь приводит к тому, что при сравнительно небольших номерах $e_1^{(m)}$ приобретает нулевое значение, что недопустимо, так как во второй формуле выражении (29) при определении $x_2^{(m)}$ будет иметь место деление на ноль. Однако имеется простой и эффективный способ получения значительного числа различных значений $x_1^{(m)}$, от которых, собственно, начинает работать QD-алгоритм упрощённой формы.

В табл. 1-4 приведены результаты вычислений корней алгебраического уравнения по “упрощённой” форме QD-алгоритма Рутисхаузера, то есть по формулам (29).

$$x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8 + 16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0 . \tag{30}$$

Берём значения $x_1^{(m)}$, которые получаются не непосредственно из непрерывной дроби, а те, что получаются из r/φ-алгоритма. Сходимость при определении модуля корня весьма медленна.

Нахождение нулей полинома
x^4-4(cosφ+cosα)x^3+(8+16cosφcosα)x^2-16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0, α=1

x_1=2

Таблица 1

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	min
0	6,161209223470	6,161209223470	-4,161209223470	m
1	3,459655633880	4,616888801080	-2,616888801080	m
2	2,506268318360	3,766246991840	-1,766246991840	m
4	1,964366812670	2,931412932840	-0,931412932837	m
8	2,289648184860	2,665299219740	-0,665299219737	m
16	1,992527931750	2,388675215880	-0,388675215879	m
32	2,128110877340	2,234168288500	-0,234168288500	m
64	2,060127087620	2,136906811970	-0,136906811966	m
128	2,013106593180	2,078502616810	-0,078502616815	m
256	2,002191893330	2,044347114620	-0,044347114617	m
512	2,000559953210	2,024826162570	-0,024826162573	m
1024	2,003499502530	2,013740828120	-0,013740828119	m
2048	2,001614120150	2,007539666020	-0,007539666021	m
4096	2,000648520950	2,004105909490	-0,004105909494	m
8192	2,000150180650	2,002221463550	-0,002221463553	m
16384	1,999983130080	2,001195138870	-0,001195138870	m
32768	2,000120427680	2,000639814830	-0,000639814832	m
65536	2,000024809490	2,000341041140	-0,000341041142	m
131072	2,000005448450	2,000181091330	-0,000181091334	m
262144	2,000000251610	2,000095832470	-0,000095832466	m
524288	2,000007683890	2,000050559930	-0,000050559935	m
1048576	2,000003980600	2,000026601920	-0,000026601916	m
2097152	2,000002039820	2,000013961960	-0,000013961960	m
3126526	2,000001351540	2,000009620590	-0,000009620585	m
3126527	2,000001156250	2,000009620580	-0,000009620582	m
3126528	2,000000486030	2,000009620580	-0,000009620580	m

Как видно из таблиц 1-4, необходимо использование свыше трёх миллионов подходящих дробей, чтобы получить пять десятичных разрядов. При 32-х подходящих вещественные корни уравнения (30) x_1 и x_4 устанавливались, соответственно, с погрешностью -0,23416 и 0,12002. Можно отметить, что использование 32-х подходящих давало значительно большую точность в определении модулей и аргументов комплексно-сопряжённых корней. Например, модули комплексных корней x_2 и x_3 имели, соответственно, погрешность 0,07092 и 0,02529, а аргумент – 0,04800.

Нахождение нулей полинома
x^4-4(cosφ+cosα)x^3+(8+16cosφcosα)x^2-16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0, α=1

$x_2=2e^i$

Таблица 2

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$	min
0	1,220924067600	1,220924067600	0,779075932405	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	1,166054792820	1,193174069730	0,806825930266		0,000000000000	1,000000000000	
2	0,457271639589	0,866683695979	1,133316304020		0,000000000000	1,000000000000	
4	2,855819728860	1,535982125620	0,464017874380	m	0,628318530718	0,371681469282	m
8	0,916218026493	1,628770046970	0,371229953025	m	0,698131700798	0,301868299202	m
16	12,196583212100	1,847890285260	0,152109714739	m	0,923997839291	0,076002160709	m
32	3,843317264310	1,929075885880	0,070924114122	m	0,951997773815	0,048002226185	m
64	2,005784174240	1,959056634960	0,040943365045	m	0,966643893412	0,033356106588	m
128	-0,129973382076	1,936094593410	0,063905406585		0,998490688350	0,001509311650	m
256	1,376378788680	1,987249193310	0,012750806689	m	0,990151770198	0,009848229802	
512	-6,402078713170	1,993746888830	0,006253111170	m	0,998205852895	0,001794147105	
1024	-4,414311948660	1,996709675280	0,003290324721	m	0,999179712264	0,000820287736	m
2048	-2,331786544940	1,998132145250	0,001867854748	m	0,999667354876	0,000332645124	m
4096	-0,629161511589	1,998651230730	0,001348769270	m	0,999911354718	0,000088645282	m
8192	0,816053931871	1,999472346970	0,000527653034	m	0,999649950923	0,000350049077	
16384	4,540491080410	1,999846182800	0,000153817198	m	0,999902696886	0,000097303114	
32768	2,052437009810	1,999916316970	0,000083683028	m	0,999933210563	0,000066789437	m
65536	-0,238679671461	1,999889577150	0,000110422851		0,999996404268	0,000003595732	m
131072	1,248565967790	1,999973613170	0,000026386826	m	0,999980065310	0,000019934690	
262144	-28,213818211700	1,999988822720	0,000011177283	m	0,999995864096	0,000004135904	
524288	63,797892489700	1,999994624810	0,000005375191	m	0,999997771433	0,000002228567	m
1048576	9,590801968450	1,999997471920	0,000002528083	m	0,999998725105	0,000001274895	m
2097152	3,939400713830	1,999998804140	0,000001195860	m	0,999999201941	0,000000798059	m
3126526	6,863786571410	1,999999171510	0,000000828487	m	0,999999544294	0,000000455706	m
3126527	1,578441442580	1,999999020090	0,000000979907		0,999999224451	0,000000775549	
3126528	-0,372934051575	1,999997945740	0,000002054261		0,999999909425	0,000000090575	m

Нахождение нулей полинома

x^4-4(cosφ+cosα)x^3+(8+16cosφcosα)x^2-16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0, α=1

$x_3=2e^{-i}$

Таблица 3

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,332701675670	1,332701675670	0,667298324333	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
1	2,045239523600	1,650967637550	0,349032362448	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	6,856156912900	2,653704879480	-0,653704879482		0,000000000000	-1,000000000000	
4	1,778375284680	1,984206918770	0,015793081226	m	-0,628318530718	-0,371681469282	m
8	3,772152077520	2,044953268630	-0,044953268633		-0,698131700798	-0,301868299202	m
16	0,348172043086	1,968786611040	0,031213388957		-0,923997839291	-0,076002160709	m
32	0,993534847417	1,974703683030	0,025296316974		-0,951997773815	-0,048002226185	m
64	1,937971654080	1,990412258620	0,009587741380	m	-0,966643893412	-0,033356106588	m
128	-30,582211191500	2,039391626800	-0,039391626805		-0,998490688350	-0,001509311650	m
256	2,926554556880	1,999874774880	0,000125225118	m	-0,990151770198	-0,009848229802	
512	-0,625436948679	1,999744289590	0,000255710409		-0,998205852895	-0,001794147105	
1024	-0,905803793245	2,000035054880	-0,000035054875	m	-0,999179712264	-0,000820287736	m
2048	-1,715356294650	2,000237372720	-0,000237372721		-0,999667354876	-0,000332645124	m
4096	-6,358483205960	2,000532998420	-0,000532998424		-0,999911354718	-0,000088645282	m
8192	4,902545843910	2,000119406810	-0,000119406812		-0,999649950923	-0,000350049077	
16384	0,881046001052	1,999949607690	0,000050392314		-0,999902696886	-0,000097303114	
32768	1,948788674460	1,999981569160	0,000018430837	m	-0,999933210563	-0,000066789437	m
65536	-16,758669720100	2,000059367150	-0,000059367147		-0,999996404268	-0,000003595732	m
131072	3,203718500850	2,000000857400	-0,000000857402	m	-0,999980065310	-0,000019934690	
262144	-0,141774945268	1,999998412280	0,000001587717		-0,999995864096	-0,000004135904	
524288	0,062697880567	1,999998992680	0,000001007319		-0,999997771433	-0,000002228567	m
1048576	0,417065781062	1,999999336820	0,000000663184	m	-0,999998725105	-0,000001274895	m
2097152	1,015382072280	1,999999600220	0,000000399776	m	-0,999999201941	-0,000000798059	m
3126526	0,582768451113	1,999999758200	0,000000241803	m	-0,999999544294	-0,000000455706	m
3126527	2,534143804000	1,999999909620	0,000000090384	m	-0,999999224451	-0,000000775549	
3126528	-10,725754654100	2,000000983970	-0,000000983971		-0,999999909425	-0,000000090575	m

Нахождение нулей полинома

x^4-4(cosφ+cosα)x^3+(8+16cosφcosα)x^2-16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=0, α=1

$x_4=2$

Таблица 4

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	1,595998309800	1,595998309800	0,404001690201	m
1	1,939206129760	1,759252598540	0,240747401464	m
2	2,036279565610	1,847132012690	0,152867987309	m
4	1,603774082460	1,790893918410	0,209106081590	
8	2,021916428320	1,802315627890	0,197684372106	
16	1,890964977660	1,841145240730	0,158854759266	
32	1,968957718260	1,879978363560	0,120021636442	m
64	1,997994780170	1,920190735860	0,079809264141	m
128	1,999539134050	1,949585126730	0,050414873268	m
256	1,983899592750	1,969292437590	0,030707562413	m
512	1,997394584050	1,981927441960	0,018072558043	m
1024	1,997255327300	1,989591318570	0,010408681434	m
2048	1,998464758060	1,994114555520	0,005885444481	m
4096	1,999095352650	1,996717293220	0,003282706784	m
8192	1,999479021230	1,998188909170	0,001811090830	m
16384	1,999826132050	1,999009679400	0,000990320597	m
32768	1,999996580310	1,999462475430	0,000537524566	m
65536	1,999998300710	1,999710068580	0,000289931417	m
131072	1,999967590640	1,999844452510	0,000155547488	m
262144	1,999993371460	1,999916936590	0,000083063414	m
524288	1,999996061480	1,999955823710	0,000044176290	m
1048576	1,999997502330	1,999976589670	0,000023410334	m
2097152	1,999991531830	1,999987633760	0,000012366239	m
3126526	1,999995743400	1,999991449750	0,000008550254	m
3126527	2,000009814900	1,999991449750	0,000008550248	m
3126528	1,999988645150	1,999991449750	0,000008550249	

В уравнении (30) все четыре корня имели одинаковые модули, равные 2. Зафиксируем значения модулей при $n = 3128528$. Первый корень равен 2,00000962. Модули комплексно-сопряжённых корней x_2 и x_3, соответственно, равны: 1,99999794 и 2,00000098. Второй вещественный корень уравнения (30) имеет значение 1,99999144. Если x_1 имеет максимальное значение, а x_4 – минимальное, то с модулями комплексно-сопряжённых корней получилась небольшая неувязка: модуль x_3 оказался при $n = 3128528$ больше модуля x_2.

На рис. 2 показано распределение подходящих дробей, определяющих корни x_1 и x_2 уравнения (30).

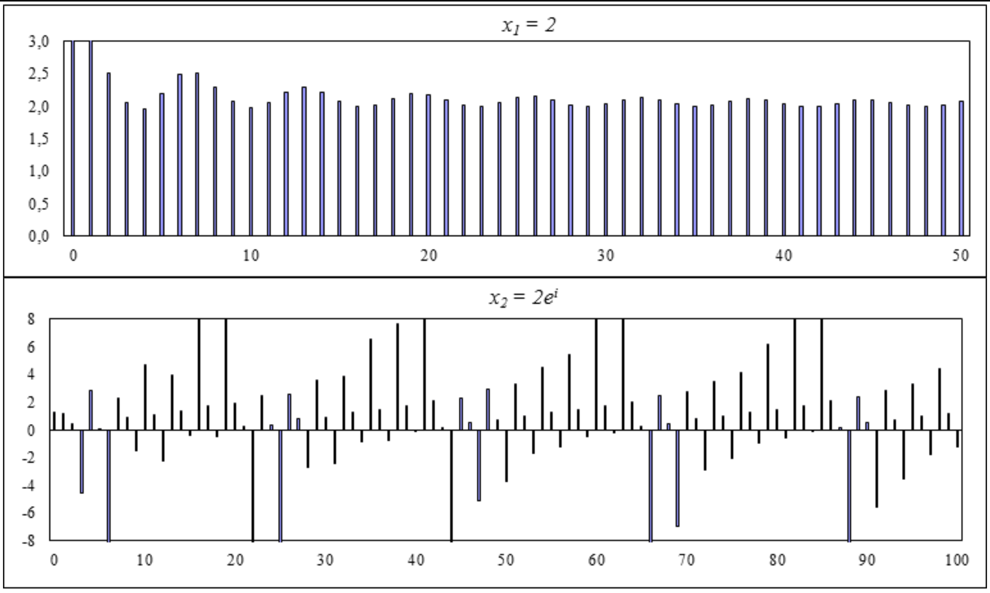


Рис. 2. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (30).

Рассмотрим ещё пример нахождения корней полинома методом Рутисхаузера (29) с использованием r/φ-алгоритма. Для краткости этот комбинированный способ определения корней полинома будем называть *алгоритмом Рутисхаузера-Никипорца*. Найдём первый корень алгебраического уравнения

$$x^4 - 8\cos 1 x^3 + 8\left(1 + 2\cos^2 1\right)x^2 - 32\cos 1 x + 16 = 0 . \qquad (31)$$

Уравнение (31) имеет две пары кратных комплексных корней:

$$x_1 = 2e^i , \quad x_2 = 2e^{-i} , \quad x_3 = 2e^i , \quad x_4 = 2e^{-i} .$$

В табл. 5 приведен результат определения корня x_1 уравнения (31) по алгоритму Рутисхаузера-Никипорца.

Нахождение нулей полинома

x^4-4(cosφ+cosα)x^3+(8+16cosφcosα)x^2-16(cosφ+cosα)x+16=0, φ=1, α=1

$x_1=2e^i$

Таблица 5

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	4,322418446950	4,322418446950	-2,322418446950	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	1,390998117530	2,452035057430	-0,452035057431	m	0,000000000000	1,000000000000	
2	-1,911109261230	2,256556901050	-0,256556901054	m	1,047197551200	-0,047197551197	m
4	1,634719243350	2,558907487640	-0,558907487641		0,628318530718	0,371681469282	
8	-0,171803098344	1,846665687310	0,153334312694	m	1,047197551200	-0,047197551197	
16	3,022202068090	2,327773189840	-0,327773189838		0,923997839291	0,076002160709	
32	2,148208469050	2,196814016740	-0,196814016741		0,951997773815	0,048002226185	
64	1,035215803380	2,100362073630	-0,100362073628	m	0,966643893412	0,033356106588	m
128	-3,268352194860	2,062931780590	-0,062931780588	m	0,998490688350	0,001509311650	m
256	0,386612884213	2,027287235850	-0,027287235848	m	0,990151770198	0,009848229802	
512	5,689946989500	2,023023684750	-0,023023684749	m	0,998205852895	0,001794147105	
1024	7,153743865260	2,012803172460	-0,012803172456	m	0,999179712264	0,000820287736	m
2048	16,173181251900	2,007009365460	-0,007009365457	m	0,999667354876	0,000332645124	m
4096	-6,916496661790	2,003728673370	-0,003728673372	m	0,999911354718	0,000088645282	m
8192	-0,414778289036	2,001660422530	-0,001660422528	m	1,000033399310	-0,000033399312	m
16384	2,106177955530	2,001129412830	-0,001129412833	m	0,999902696886	0,000097303114	
32768	1,001394271910	2,000571137590	-0,000571137588	m	0,999933210563	0,000066789437	
65536	-3,751739226390	2,000313114850	-0,000313114849	m	0,999996404268	0,000003595732	m
131072	0,222949947319	2,000139258270	-0,000139258268	m	0,999980065310	0,000019934690	
156156	4,801454122490	2,000148573820	-0,000148573820		0,999993624617	0,000006375383	
156157	1,328131435670	2,000143329410	-0,000143329409		0,999987220887	0,000012779113	
156158	-0,850565621486	2,000132377350	-0,000132377348	m	1,000000935150	-0,000000935149	m
156159	6,864036260030	2,000148171010	-0,000148171005		0,999994531455	0,000005468545	
156160	1,578468095370	2,000145138440	-0,000145138445		0,999988127842	0,000011872158	

3.4. Второй вариант QD-алгоритма

Ранее рассматривалась “упрощённая форма” QD-алгоритма Рутисхаузера, которая представлялась двумя формулами:

$$\left.\begin{aligned} e_n^{(m)} &= e_{n-1}^{(m-1)} + x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}, \\ x_{n+1}^{(m)} &= x_n^{(m+1)} \frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Исходными значениями являются приближения старшего по модулю корня, которые устанавливаются из непрерывной дроби Хессенберга

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{33}$$

где α_i – коэффициенты алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \tag{34}$$

Подходящими непрерывной дроби (33) будут:

$$x_1^{(0)} = \frac{-\alpha_1}{1},\ x_1^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{-\alpha_1},\ x_1^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \dots .$$

Для определения $x_1^{(m)}$ имеет место нелинейная рекуррентная формула

$$x_1^{(m)} = -\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{x_1^{(m-1)}} - \frac{\alpha_3}{x_1^{(m-1)} x_1^{(m-2)}} - \ldots - \frac{\alpha_n}{x_1^{(m-1)} x_1^{(m-2)} \ldots x_1^{(m-n+1)}}. \tag{35}$$

Значения $x_1^{(m)}$ составляют первую строку QD-схемы, из которой развивается QD-алгоритм

$x_1^{(0)}$ ● $x_1^{(1)}$ ● $x_1^{(2)}$ ● $x_1^{(3)}$ ● $x_1^{(4)}$ ● $x_1^{(5)}$ ● $x_1^{(6)}$ ● $x_1^{(6)}$ ● …

Вторую строку составляют элементы $e_1^{(m)}$, определяемые формулой

$$e_1^{(m)} = x_1^{(m+1)} - x_1^{(m)}, \tag{36}$$

так как по условию $e_0^{(m)} = 0$.

Графически первые две строки QD-алгоритма выглядит так (рис. 3):

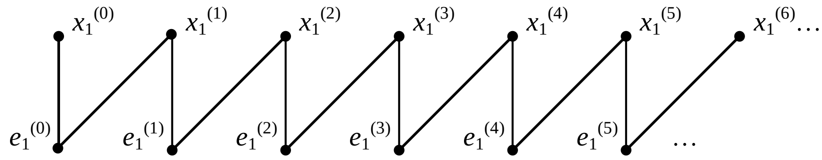


Рис. 3. Граф первых двух строк QD – алгоритма.

Элементы третьей строки – приближения второго корня находятся из формулы

$$x_2^{(m)} = x_1^{(m+1)} \frac{e_1^{(m+1)}}{e_1^{(m)}}. \tag{37}$$

После третьего шага граф QD-алгоритма примет вид:

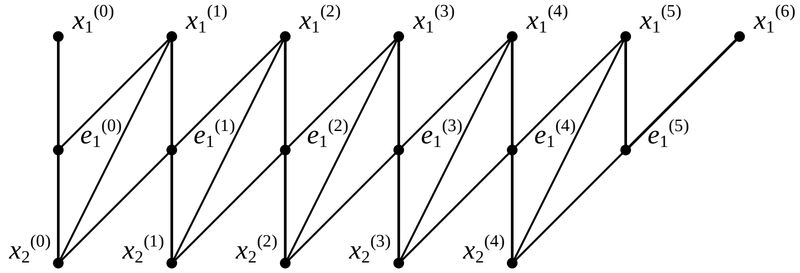


Рис. 4. Граф первых трёх строк QD – алгоритма

Ещё раз обратим внимание, что вся исходная информация, которая используется при решении алгебраического уравнения (34), сосредоточена в первой строке так называемой упрощённой схемы QD-алгоритма. Уже указывалось на сложности в получении большого количества приближений $x_1^{(m)}$, которые бы отличались друг от друга при фиксированной длине разрядной сетки, что имеет место в современных компьютерах. Если $x_1^{(m+1)}$ и $x_1^{(m)}$ не различимы, то это приводит, как то следует из (36), к нулевому значению $e_1^{(m)}$, что, в свою очередь, даёт деление на ноль в (32).

Жёсткая зависимость вычислений в "упрощённой форме" QD-алгоритма от значений приближений первого корня x_1, прежде всего в случае, когда x_1 – действительный корень, весьма затрудняет практическое использование QD-алгоритма для нахождения всех корней полинома, делая этот алгоритм во многих случаях численно неустойчивым, не обеспечивающем высокую точность при определении всех корней полинома.

Г. Рутисхаузером в той же книге [398], где рассматривалась "упрощённая форма" QD-алгоритма, описываемая формулами (32), была предложена иная форма QD-алгоритма: "Мало обнадёживающие результаты предыдущего параграфа могут быть, однако, существенно улучшены, если использовав формулы для "упрощённой формы QD-алгоритма", мы будем по наклонной строке QD-схемы заполнять следующую строку, расположенную под данной. Для этого надо эти формулы лишь немного перестроить и затем применять для $n = 1, 2, 3, \ldots$, учитывая равенство $e_0^{(m+1)} = 0$."

Г. Рутисхаузер предлагает модификацию QD-алгоритма:

$$\left.\begin{aligned} x_n^{(m+1)} &= x_n^{(m)} + e_n^{(m)} - e_{n-1}^{(m+1)}, \\ e_n^{(m+1)} &= e_n^{(m)} \frac{x_{n+1}^{(m)}}{x_n^{(m+1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Таким образом, если известны все величины $x_n^{(0)}$ и $e_n^{(0)}$, стоящие в верхней наклонной строке, с помощью вышеприведённых формул можно заполнить всю QD-схему сверху вниз, а не справа налево. Эта форма QD-алгоритма, была названа *прогрессивной*.

Прогрессивная QD-схема ограничена справа, так что требуется фиксированное число операций для заполнения каждой наклонной строки. Схематически этот процесс показан на рис. 5.

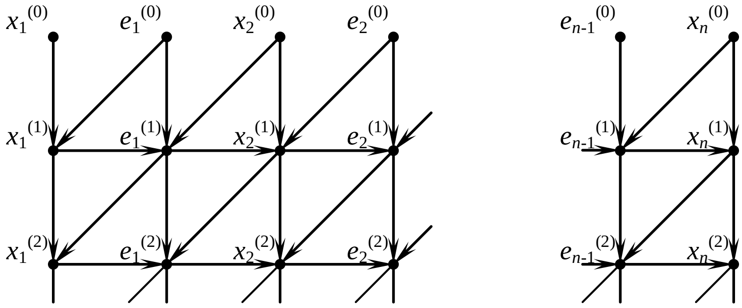


Рис. 5. Граф “прогрессивной” формы QD – алгоритма.

Начальные значения для “прогрессивного” QD-алгоритма, то есть элементы первой строки схемы, представленной на рис. 5, Рутисхаузер [67] предлагает находить из непрерывной дроби, в которую может быть разложен степенной ряд.

Представим граф-схему QD-алгоритма Рутисхаузера в несколько иных обозначениях. Пусть имеется полином, корни которого находятся:

$$x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=0\,.$$

Запишем производящую функцию:

$$\frac{1}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n}=1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots, \tag{39}$$

где

$$c_0=1,\ c_1=-\alpha_1,\ c_2=\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2\\ -1 & -\alpha_1\end{vmatrix},\ c_3=\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2\\ 0 & -1 & -\alpha_1\end{vmatrix},\ \ldots.$$

Для ряда (39) найдём соответствующую цепную дробь

$$\omega_0^{(0)}+\frac{\omega_1^{(0)}x}{1}\,\frac{}{-}\,\frac{\omega_2^{(0)}x}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{\omega_3^{(0)}x}{1}\,\frac{}{-\ldots-}\,\frac{\omega_{2n}^{(0)}x}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{\omega_{2n+1}^{(0)}x}{1}\,\frac{}{-\ldots}\,. \tag{40}$$

Коэффициенты $\omega_{2n-1}^{(0)}$ совпадают с коэффициентами $e_n^{(0)}$, а коэффициенты $\omega_{2n}^{(0)}$ равны $x_n^{(0)}$, то есть коэффициенты ω_i цепной дроби (40) составляют исходную первую строку схемы прогрессивного QD-алгоритма, показанной на рис. 6.

Определим коэффициенты $\omega_i^{(0)}$ соответствующей цепной дроби при помощи так называемой упрощённой схемы QD-алгоритма, которая рассматривалась выше в других обозначениях. Запишем соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{2n+1}^{(m)} &= \omega_{2n-1}^{(m+1)} + \omega_{2n}^{(m+1)} - \omega_{2n}^{(m)} \\ \omega_{2n+2}^{(m)} &= \omega_{2n}^{(m+1)} \frac{\omega_{2n+1}^{(m+1)}}{\omega_{2n+1}^{(m)}}, n = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Граф-схема QD-алгоритма, определяемая формулами (41), приведена на рис. 6.

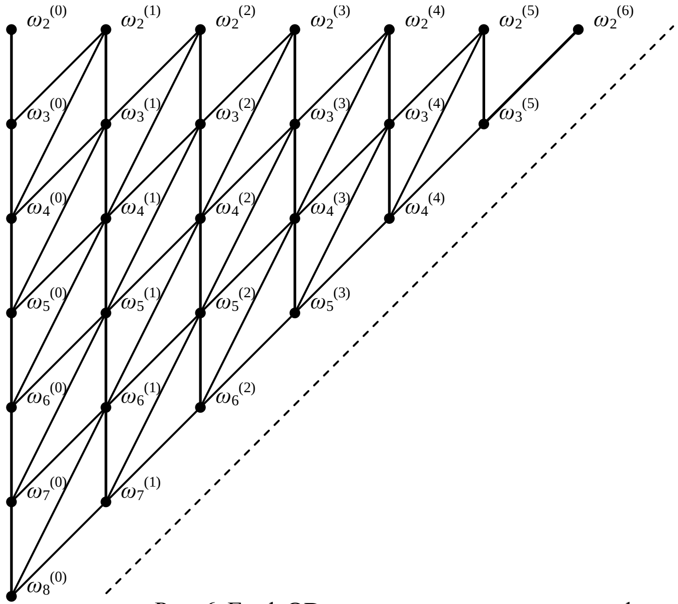


Рис. 6. Граф QD – алгоритма, определяемого формулами (41).

Начальной строкой схемы является строка из элементов $\omega_2^{(n)}$, которые представляются через коэффициенты степенного ряда (39)

$$\omega_2^{(m)} = \frac{c_{m+2}}{c_{m+1}}. \tag{42}$$

Таким образом, элементы $\omega_i^{(0)}$ первого столбца схемы, показанной на рис. 6, составляют первую строку “прогрессивного QD-алгоритма”.

Имеется, однако, более простая реализация “прогрессивного” QD-алгоритма.

3.5. QD-алгоритм с отрицательными индексами

При вычислениях значений корней полинома при помощи “QD-алгоритма с отрицательными индексами” используются те же формулы, что и в “прогрессивном QD-алгоритме”:

$$\left.\begin{aligned} x_n^{(m+1)} &= x_n^{(m)} + e_n^{(m)} - e_{n-1}^{(m-1)} \\ e_n^{(m+1)} &= e_n^{(m)} \frac{x_{n+1}^{(m)}}{x_n^{(m+1)}} \end{aligned}\right\},. \tag{43}$$

В качестве начальных условий применяются величины:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1,\ x_m^{(1-m)} = 0,\ m = 2, 3, \ldots, n. \tag{44}$$

$$e_m^{(1-m)} = \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m},\ m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{45}$$

На рис. 7 показана схема варианта “прогрессивного QD-алгоритма”. Этот вариант QD-алгоритма назовём “QD-алгоритмом с отрицательными индексами”. В самом деле, в качестве начальных значений для “запуска” схемы используются элементы “x_i” и “e_i” с отрицательными индексами.

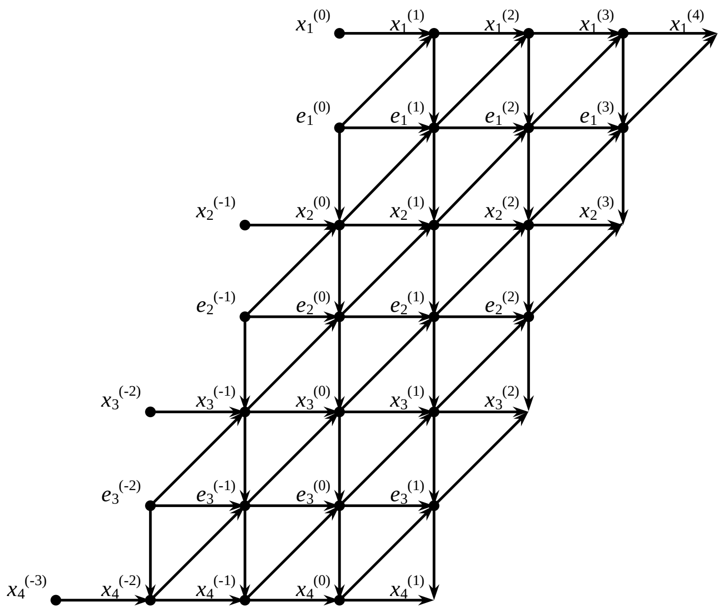


Рис. 7. Граф QD – алгоритма с “отрицательными индексами”.

Можно обратить внимание, что в схеме, показанной на рис. 7, элементы столбца, $x_1^{(0)}$, $e_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $e_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, $e_3^{(0)}$, $x_4^{(0)}$ совпадают с элементами крайне левого столбца схемы “упрощённого” QD-алгоритма Рутисхаузера, изображённой на рис. 6.

QD-алгоритм “с отрицательными индексами” использует в качестве начальных условий выражения (44) и (45), то есть отношения соседних коэффициентов α_i алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \tag{46}$$

“Упрощённая” форма QD-алгоритма разворачивается, исходя из приближений старшего по модулю корня уравнения (46), которые определяются как подходящие непрерывной дроби Хессенберга (33).

Рассмотрим несколько примеров решения алгебраического уравнения (46) QD-алгоритмом “с отрицательными индексами”. Естественно, что при определении комплексных корней используется r/φ-алгоритм, то есть формулы

$$\left.\begin{aligned} r_i &= \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\prod_{p=1}^{m} \left|\overline{x}_i^{(m)}\right|} \\ \left|\varphi_i\right| &= \pi \lim_{m\to\infty} \frac{k_i^{(m)}}{m} \end{aligned}\right\}, \tag{47}$$

где $\overline{x}_i^{(m)}$ – m-я подходящая дроби Никипорца для i-го корня уравнения n-й степени. $k_i^{(m)}$ – число отрицательных подходящих для i –го корня из m подходящих дробей Никипорца.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$x^4 - 4(\cos\varphi + \cos\alpha)x^3 + (8 + 16\cos\varphi\cos\alpha)x^2 - 16(\cos\varphi + \cos\alpha)x + 16 = 0\,, \qquad (48)$$

корни которого:

$$x_1 = 2e^{i\varphi}\,,\ x_2 = 2e^{-i\varphi}\,,\ x_3 = 2e^{i\alpha}\,,\ x_4 = 2e^{-i\alpha}\,.$$

Это уравнение при различных значениях φ и α решалось во второй главе методом непосредственного вычисления определителей, что не позволяло определять комплексные корни с высокой точностью.

Положим в (48) $\varphi = 0$, $\alpha = 1$. Получим уравнение

$$x^4 - 4(1 + \cos 1)x^3 - 8(1 + 2\cos 1)x^2 - 16(1 + \cos 1)x - 16 = 0\,. \qquad (49)$$

Решим это уравнение QD-алгоритмом “с отрицательными индексами”. Результаты вычислений приведены в табл. 6-9.

Нахождение нулей полинома

x^4-4(1+cos1)x^3+8(1+2cos1)x^2-16(1+cos1)x+16=0

x_1=2 Таблица 6

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	min
1	3,459655633880	-1,459655633880	m
2	2,506268318360	-0,506268318360	m
3	2,062699750480	-0,062699750480	m
4	1,964366812670	0,035633187330	m
5	2,194561112650	-0,194561112650	
6	2,494116873280	-0,494116873280	
7	2,502047301550	-0,502047301550	
8	2,289648184860	-0,289648184860	
9	2,073722190240	-0,073722190240	
10	1,978321133340	0,021678866660	m
11	2,051531857720	-0,051531857720	
16	1,992527931750	0,007472068250	m
32	2,128110877340	-0,128110877340	
64	2,060127087620	-0,060127087620	
128	2,013106593180	-0,013106593180	
256	2,002191893330	-0,002191893330	m
512	2,000559953210	-0,000559953210	m
1024	2,003499502530	-0,003499502530	
2048	2,001614120160	-0,001614120160	
4096	2,000648520960	-0,000648520960	
8192	2,000150180650	-0,000150180650	m
16384	1,999983130070	0,000016869930	m
32768	2,000120427680	-0,000120427680	
65536	2,000024809480	-0,000024809480	
131072	2,000005448450	-0,000005448450	m
262144	2,000000251760	-0,000000251760	m
524288	2,000007683300	-0,000007683300	
1048576	2,000003975780	-0,000003975780	
2097152	2,000002028670	-0,000002028670	
4194304	2,000000807830	-0,000000807830	
8388608	2,000000216780	-0,000000216780	m

Нахождение нулей полинома

x^4-4(1+cos1)x^3+8(1+2cos1)x^2-16(1+cos1)x+16=0

x_4=2 Таблица 7

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	min
-2	0,649223205205	1,350776794795	m
-1	1,156184436630	0,843815563370	m
0	1,595998309800	0,404001690200	m
1	1,939206129760	0,060793870240	m
2	2,036279565610	-0,036279565610	m
3	1,822687906460	0,177312093540	
4	1,603774082460	0,396225917540	
5	1,598690799140	0,401309200860	
6	1,746993283270	0,253006716730	
7	1,928898682200	0,071101317800	
8	2,021916428320	-0,021916428320	m
13	1,920608632790	0,079391367210	
29	1,906534425920	0,093465574080	
61	1,938994243870	0,061005756130	
125	1,971390782070	0,028609217930	
253	2,001029179400	-0,001029179400	m
509	1,995454491520	0,004545508480	
1021	1,998555464540	0,001444535460	
2045	1,999445910930	0,000554089070	m
4093	1,999873414000	0,000126586000	m
8189	2,000026955320	-0,000026955320	m
16381	1,999947477200	0,000052522800	
32765	1,999876437340	0,000123562660	
65533	1,999943703490	0,000056296510	
131069	2,000002121330	-0,000002121330	m
262141	1,999992487190	0,000007512810	
524285	1,999995761930	0,000004238070	
1048573	1,999997522760	0,000002477240	
2097149	1,999998429770	0,000001570230	m
4194301	1,999998837860	0,000001162140	m
8388605	1,999999408080	0,000000591920	m

Наличие пары комплексных корней вызывает характерные “биения” на графиках вещественных корней (рис. 8). Затухающие “синусоиды” несколько напоминают графики функций Бесселя.

В табл. 6 и 7 показаны результаты вычислений вещественных корней уравнения (49), в табл. 8 и 9 – комплексных корней.

Нахождение нулей полинома

$$x^4\text{-}4(1+\cos1)x^3+8(1+2\cos1)x^2\text{-}16(1+\cos1)x+16=0$$

$x_2=2e^i$ Таблица 8

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,220924067600	1,220924067600	0,779075932405	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	1,166054792820	1,193174069730	0,806825930266		0,000000000000	1,000000000000	
2	0,457271639589	0,866683695979	1,133316304020		0,000000000000	1,000000000000	
3	-4,598520631860	1,315376276510	0,684623723493	m	0,785398163397	0,214601836603	m
4	2,855819728860	1,535982125620	0,464017874380	m	0,628318530718	0,371681469282	
5	0,066029159055	0,909098823765	1,090901176230		0,523598775598	0,476401224402	
6	-67,011845837200	1,680361001470	0,319638998532	m	0,897597901026	0,102402098974	m
7	2,327667691640	1,750218990580	0,249781009421	m	0,785398163397	0,214601836603	
8	0,916218026493	1,628770046970	0,371229953025		0,698131700798	0,301868299202	
9	-1,518162669590	1,617356013000	0,382643987005		0,942477796077	0,057522203923	m
10	4,694330823590	1,781867684170	0,218132315832	m	0,856797996434	0,143202003566	
15	-0,383996709017	1,642304024920	0,357695975082		0,981747704247	0,018252295753	m
31	-2,411207414440	1,887967040850	0,112032959153	m	0,981747704247	0,018252295753	
63	21,528946742000	1,958335221390	0,041664778607	m	0,981747704247	0,018252295753	
127	1,710457176250	1,977384831540	0,022615168458	m	0,981747704247	0,018252295753	
255	5,181134801360	1,990102440660	0,009897559340	m	0,994019550550	0,005980449450	m
511	0,465911677260	1,989209249630	0,010790750369		0,994019550550	0,005980449450	
1023	0,609189307147	1,995163309300	0,004836690700	m	0,997087512126	0,002912487874	m
2047	0,891050049546	1,997981489120	0,002018510881	m	0,998621492914	0,001378507086	m
4095	1,434335962240	1,999215304640	0,000784695364	m	0,999388483307	0,000611516693	m
8191	2,974872068430	1,999691089820	0,000308910175	m	0,999771978504	0,000228021496	m
16383	-1,681129241640	1,999746099650	0,000253900353	m	0,999963726103	0,000036273897	m
32767	36,753416815000	1,999914734860	0,000085265138	m	0,999963726103	0,000036273897	
65535	1,666677238730	1,999954446600	0,000045553403	m	0,999963726103	0,000036273897	
131071	4,383007199130	1,999980802090	0,000019197911	m	0,999987694553	0,000012305447	m
262143	0,131706912720	1,999968631550	0,000031368453		0,999987694553	0,000012305447	
524287	-0,064715121683	1,999981405290	0,000018594715	m	0,999999678778	0,000000321222	m
1048575	-0,534366362486	1,999994466140	0,000005533862	m	0,999999678778	0,000000321222	
2097151	-2,194357484610	1,999998136610	0,000001863391	m	0,999999678778	0,000000321222	
4194303	-37,979359917400	1,999999121560	0,000000878442	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388607	1,720112785970	1,999999520950	0,000000479046	m	0,999999678778	0,000000321222	

Нахождение нулей полинома

$$x^4\text{-}4(1+\cos1)x^3+8(1+2\cos1)x^2\text{-}16(1+\cos1)x+16=0$$

$x_3=2e^{-i}$ Таблица 9

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-1	0,831406316791	0,831406316791	1,168593683210	m	0,000000000000	-1,000000000000	m
0	1,332701675670	1,052623670430	0,947376329571	m	0,000000000000	-1,000000000000	
1	2,045239523600	1,313500210680	0,686499789317	m	0,000000000000	-1,000000000000	
2	6,856156912900	1,985376135090	0,014623864905	m	0,000000000000	-1,000000000000	
3	-0,925451183649	1,704295670770	0,295704329231		-0,628318530718	-0,371681469282	m
4	1,778375284680	1,716424426430	0,283575573572		-0,523598775598	-0,476401224402	
5	69,067233676700	2,909779137050	-0,909779137052		-0,448798950513	-0,551201049487	
6	-0,054797452166	1,771016340390	0,228983659605		-0,785398163397	-0,214601836603	m
7	1,424275723470	1,728654857510	0,271345142488		-0,698131700798	-0,301868299202	
8	3,772152077520	1,868944398120	0,131055601879		-0,628318530718	-0,371681469282	
9	-2,606569886160	1,926328231490	0,073671768509		-0,856797996434	-0,143202003566	m
14	2,632069367950	1,877454432090	0,122545567907		-0,785398163397	-0,214601836603	
30	4,537771334660	1,974580828840	0,025419171161		-0,883572933822	-0,116427066178	m
62	-19,366858850000	2,038913550260	-0,038913550260		-0,981747704247	-0,018252295753	m
126	0,466254671969	1,980861500680	0,019138499321		-0,981747704247	-0,018252295753	
254	-3,023146650610	1,997435699800	0,002564300204	m	-0,994019550550	-0,005980449450	m
510	1,699283101480	1,995180147160	0,004819852840		-0,994019550550	-0,005980449450	
1022	1,549964949260	1,997544771210	0,002455228791	m	-0,997087512126	-0,002912487874	m
2046	1,269099142840	1,998740288740	0,001259711258	m	-0,998621492914	-0,001378507086	m
4094	0,726351326268	1,999377236730	0,000622763274	m	-0,999388483307	-0,000611516693	m
8190	-0,813839980924	1,999783111790	0,000216888208	m	-0,999771978504	-0,000228021496	m
16382	3,842407857830	1,999921325840	0,000078674158	m	-0,999771978504	-0,000228021496	
32766	-34,592204456500	2,000107259250	-0,000107259250		-0,999963726103	-0,000036273897	m
65534	0,494563471769	1,999962143460	0,000037856543	m	-0,999963726103	-0,000036273897	
131070	-2,221805545430	1,999992245770	0,000007754229	m	-0,999987694553	-0,000012305447	m
262142	2,029509571800	1,999991152050	0,000008847953		-0,999987694553	-0,000012305447	
524286	2,225920899920	1,999995775050	0,000004224952	m	-0,999993686665	-0,000006313335	m
1048574	2,695574087420	1,999998143620	0,000001856379	m	-0,999996682721	-0,000003317279	m
2097150	4,355566249640	1,999999499020	0,000000500976	m	-0,999998180750	-0,000001819250	m
4194302	40,140569495100	2,000000696330	-0,000000696332		-0,999998929764	-0,000001070236	m
8388606	0,441096812651	1,999999578440	0,000000421562	m	-0,999999678778	-0,000000321222	m

Из рассмотрения табл. 6 и 7 замечаем, что при вычислении вещественных корней непрерывными дробями Никипорца отсутствует эффект “вилки”, характерный для обыкновенных цепных дробей с положительными элементами. Более того, нет и монотонности в сходимости непрерывных дробей Никипорца для вещественных корней. Так, из третьей колонки табл. 6 видно, что 16-я подходящая точнее аппроксимирует корень x_1, чем 64-я подходящая, а подходящая с номером 262144 ближе к x_1, чем подходящая с номером 4194304. Впрочем, на отсутствие монотонности в приближении вещественных корней уравнения (49) непрерывными дробями Никипорца указывают и графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (49), которые показаны на рис. 8. Из рис. 8 видно, что подходящие вещественных корней заключают между собой подходящие дроби комплексно-сопряжённых корней $x_{2,3} = 2e^{\pm i}$. Графики комплексных корней имеют “периодическую” структуру, характер которой остаётся неизменной, сколь долго бы не наблюдали расположение подходящих.

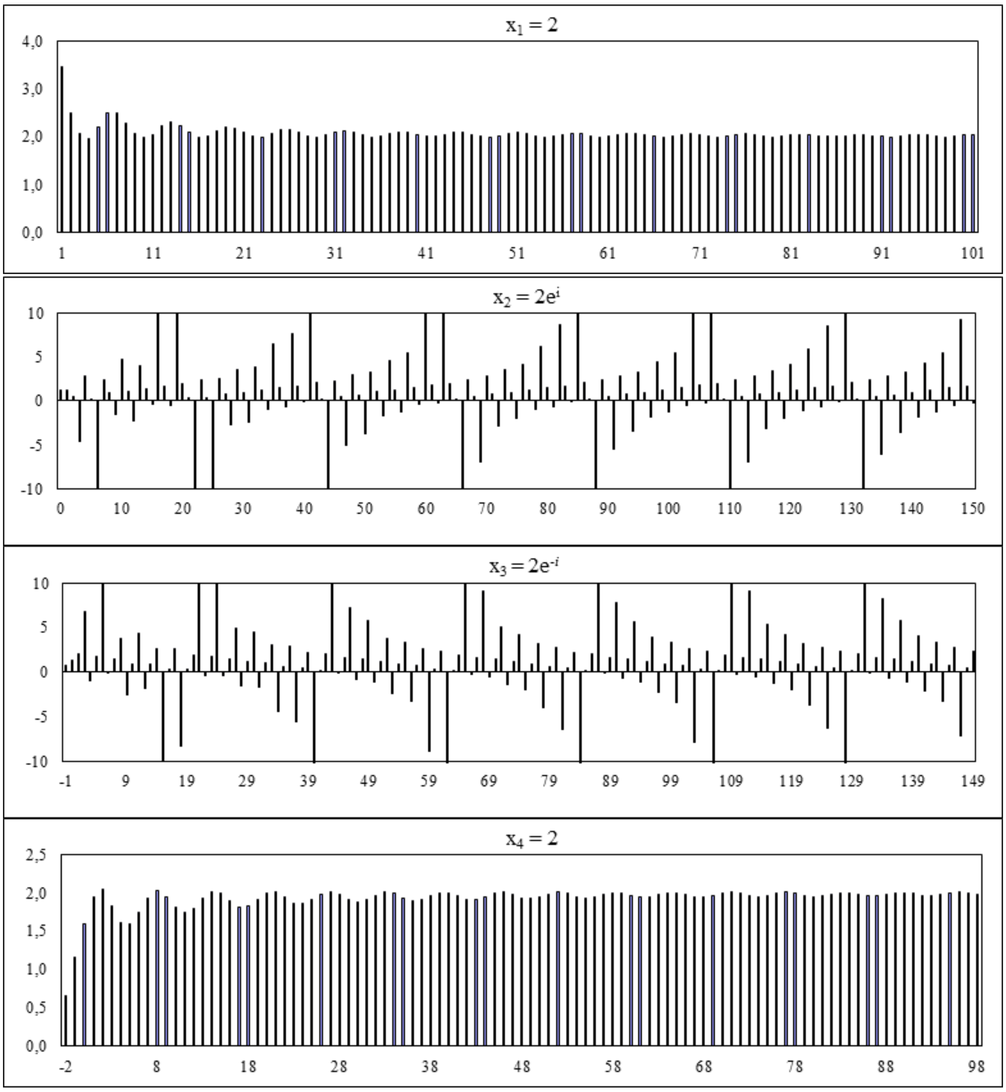


Рис. 8. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (49).

На рис. 9 и 10 показаны распределения подходящих непрерывных дробей Никипорца, представляющих корни уравнения (49) на удалённых интервалах. Рассматривая графики комплексных корней на начальном участке $(1 \div 150)$ и на таком же интервале, только отстоящего от начального на миллионы подходящих, нельзя усмотреть между ними какой-либо разницы в характере расположения подходящих на “периоде”. Постоянство в следовании подходящих дробей уже отмечалось при изучении графиков подходящих дробей, представлявших комплексные корни квадратных уравнений [542]. Очевидно, стабильность периодов подходящих присуща при представлении любого комплексного корня алгебраического уравнения произвольной степени.

На рис. 9а, 9г, 10а и 10г “крупным планом” показаны “биения” подходящих дробей, представляющих действительные корни уравнения(49).

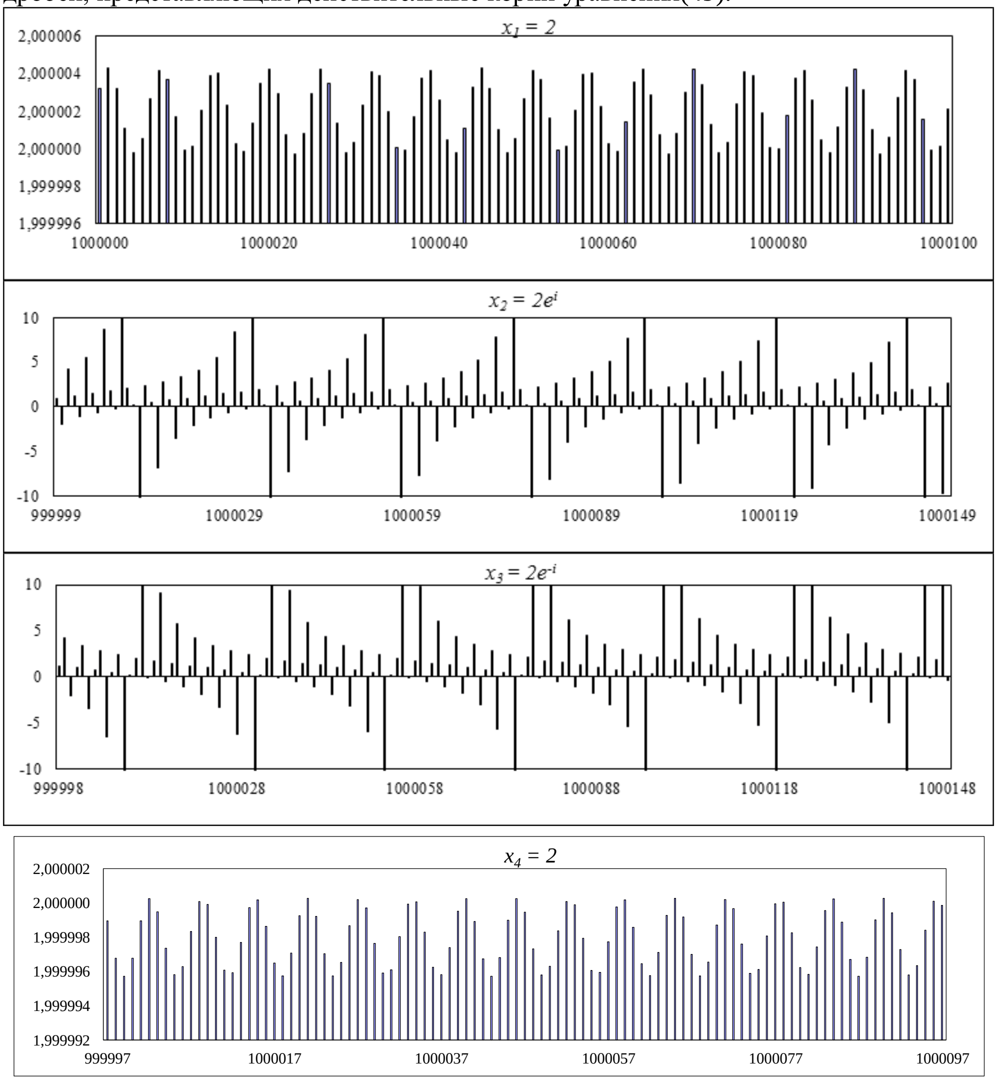


Рис. 9. Графики “удалённых” подходящих дробей, представляющих корни уравнения (49).

Сравнивая графики, показанные на рис. 9 и рис. 10, можно утверждать, что характер распределения подходящих дробей, представляющих как кратные вещественные корни, так пару комплексно-сопряжённых корней, практически не зависит от местонахождения интервала, из которого взяты подходящие.

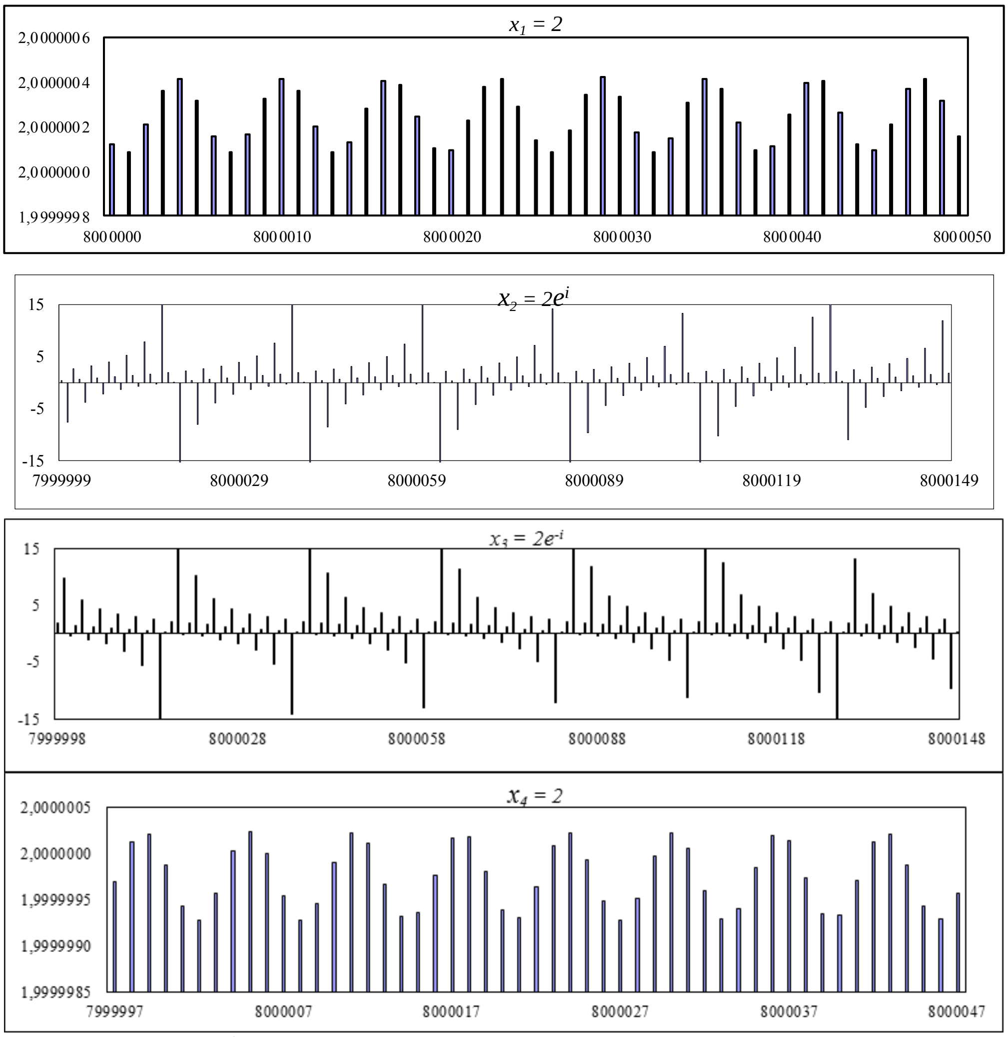


Рис. 10. Графики подходящих дробей с большими номерами, представляющие корни уравнения (49).

Комплексные корни $x_2=2e^{i\varphi}$ и $x_2=2e^{-i\varphi}$ уравнения (49) на рис 8-10 представляются периодическими структурами, состоящих из подходящих, имеющие как положительные, так и отрицательные значения. Аналогичный характер имеют графики, построенные для комплексной квадратичной иррациональности, то есть корня уравнения

$$x^2 - 2\cos 1 x + 1 = 0,$$

который представляется цепной дробью Никипорца:

$$e^i = 2\cos 1 - \frac{1}{2\cos 1 -} \, \frac{1}{2\cos 1 - \ldots -} \, \frac{1}{2\cos 1 - \ldots} .$$

В [540] методом непосредственного вычисления значений определителей, входящих в непрерывные дроби Никипорца, были найдены корни уравнения

$$x^6 - 18\cos 1 x^5 + \left(29 + 104\cos^2 1\right)x^4 - \left(324\cos 1 + 192\cos^3 1\right)x^3 + \left(244 + 864\cos^2 1\right)x^2 - 1248\cos 1 x^2 + 576 = 0$$

(50)

Комплексные корни уравнения (50) были найдены с невысокой точностью. Решим уравнение (50) с использованием QD-алгоритма Рутисхаузера в модификации, которая была названа “QD-алгоритм с отрицательными индексами”.

В табл. 10-15 приведены результаты вычисления корней уравнения (50). Корни автоматически определялись в порядке убывания их модулей. В колонке 2 табл. 10-15 помещены значения подходящих дробей, найденные при помощи QD-алгоритма.

Нахождение нулей полинома

x^6-18cos1x^5+(29+104cos^{2}1)x^4-(324cos1+192cos^{3}1)x^3+(244+864cos^{2}1)x^2-1248cos1x+576=0

$x_1=4e^i$

Таблица 10

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
1	3,621825082120	3,621825082120	0,378174917875	m	0,000000000000	1,000000000000	m
2	-0,834560729130	1,738572109900	2,261427890100		1,570796326790	-0,570796326795	m
4	4,215936043620	4,414377944320	-0,414377944317		0,785398163397	0,214601836603	m
8	1,058106283320	3,644597129380	0,355402870625	m	0,785398163397	0,214601836603	
16	9,060806518700	4,180121283100	-0,180121283098	m	0,981747704247	0,018252295753	m
32	5,812068510390	4,088701879650	-0,088701879655	m	0,981747704247	0,018252295753	
64	2,991752987280	4,024898951080	-0,024898951077	m	0,981747704247	0,018252295753	
128	-2,316654222070	3,989437846020	0,010562153981	m	1,006291396850	-0,006291396853	m
256	1,752186285170	3,998193790280	0,001806209723	m	0,994019550550	0,005980449450	m
512	43,55972108410	4,004628660330	-0,004628660333		1,000155473700	-0,000155473701	m
1024	2211,488577620	4,002131462020	-0,002131462019		1,000155473700	-0,000155473701	
2048	-19,00766576510	4,000828912400	-0,000828912403	m	1,000155473700	-0,000155473701	
4096	-4,366206830270	4,000023950080	-0,000023950083	m	1,000155473700	-0,000155473701	
8192	0,502446041100	3,999284177280	0,000715822722		0,999771978504	0,000228021496	
16384	5,737921812230	4,000170918280	-0,000170918282		0,999963726103	0,000036273897	m
32768	2,918993788560	4,000046064570	-0,000046064570		0,999963726103	0,000036273897	
65536	-2,720694446590	3,999985683270	0,000014316728	m	1,000011663000	-0,000011663003	m
131072	1,468989607890	3,999990683010	0,000009316988	m	0,999987694553	0,000012305447	
262144	15,62133901800	4,000010120740	-0,000010120736		0,999999678778	0,000000321222	m
524288	12,01129644740	4,000005248140	-0,000005248136	m	0,999999678778	0,000000321222	
1048576	8,261752985250	4,000002766510	-0,000002766514	m	0,999999678778	0,000000321222	
2097152	4,970887434150	4,000001399370	-0,000001399366	m	0,999999678778	0,000000321222	
4194304	2,003855491620	4,000000186280	-0,000000186278	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388608	24,72501368430	4,000005286670	-0,000005286669		1,000000802300	-0,000000802299	

Нахождение нулей полинома

x^6-18cos1x^5+(29+104cos^{2}1)x^4-(324cos1+192cos^{3}1)x^3+(244+864cos^{2}1)x^2-1248cos1x+576=0

$x_2=4e^{-i}$

Таблица 11

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	2,644374873340	2,644374873340	1,355625126660	m	0,000000000000	1,000000000000	m
1	5,736799322000	3,894900252960	0,105099747040	m	0,000000000000	1,000000000000	
3	0,629985559023	3,927074098590	0,072925901413	m	0,785398163397	0,214601836603	m
7	3,355577389370	3,978197101760	0,021802898238	m	0,785398163397	0,214601836603	
15	-4,726808841430	4,196628593240	-0,196628593242		0,981747704247	0,018252295753	m
31	-1,489527092040	4,042491950130	-0,042491950131		0,981747704247	0,018252295753	
63	1,330665471050	3,998681114030	0,001318885967	m	0,981747704247	0,018252295753	
127	6,639072669020	4,014361445810	-0,014361445814		0,981747704247	0,018252295753	
255	2,570232161780	3,999323043610	0,000676956393	m	0,994019550550	0,005980449450	m
511	-39,23730263710	4,019282187310	-0,019282187313		1,000155473700	-0,000155473701	m
1023	-2207,166159180	4,025220172420	-0,025220172423		1,000155473700	-0,000155473701	
2047	23,33008421200	4,003518473220	-0,003518473225		0,998621492914	0,001378507086	
4095	8,688625277220	4,000712517650	-0,000712517652		0,999388483307	0,000611516693	
8191	3,819972405840	4,000028345990	-0,000028345990	m	0,999771978504	0,000228021496	
16383	-1,415503365290	4,000079887040	-0,000079887039		0,999963726103	0,000036273897	m
32767	1,403424658390	3,999996833920	0,000003166080	m	0,999963726103	0,000036273897	
65535	7,043112893540	4,000031472060	-0,000031472056		0,999963726103	0,000036273897	
131071	2,853428839050	3,999999086020	0,000000913983	m	0,999987694553	0,000012305447	m
262143	-11,29892057100	4,000020841590	-0,000020841587		0,999999678778	0,000000321222	m
524287	-7,688878000440	4,000008228710	-0,000008228709		0,999999678778	0,000000321222	
1048575	-3,939334538310	4,000002621520	-0,000002621516		0,999999678778	0,000000321222	
2097151	-0,648468987200	4,000000528950	-0,000000528951	m	0,999999678778	0,000000321222	
4194303	2,318562955320	4,000000115330	-0,000000115334	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388607	-20,40259523730	4,000005877000	-0,000005876997		1,000000802300	-0,000000802299	

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos 1x^5+(29+104\cos^2 1)x^4\text{-}(324\cos 1+192\cos^3 1)x^3+(244+864\cos^2 1)x^2\text{-}1248\cos 1x+576=0$$

$x_3=3e^i$

Таблица 12

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
-1	1,042663573260	1,042663573260	1,957336426740	m	0,000000000000	1,000000000000	m
0	-0,044855965228	0,216262990331	2,783737009670		1,570796326790	-0,570796326795	m
2	2,884273603330	2,142838904820	0,857161095181	m	0,785398163397	0,214601836603	m
6	0,991341037192	2,182265583210	0,817734416790	m	0,785398163397	0,214601836603	
14	8,095601323370	2,725687229610	0,274312770390	m	0,981747704247	0,018252295753	m
30	4,862146897620	2,860135398470	0,139864601525	m	0,981747704247	0,018252295753	
62	2,471645581190	2,918110284070	0,081889715927	m	0,981747704247	0,018252295753	
126	-1,213013357580	2,934239422830	0,065760577168	m	1,006291396850	-0,006291396853	m
254	1,525445914670	2,974320007000	0,025679993000	m	0,994019550550	0,005980449450	m
510	-1257,971758150	2,990069329830	0,009930670166	m	1,000155473700	-0,000155473701	m
1022	-29,24429282620	2,994866795710	0,005133204285	m	1,000155473700	-0,000155473701	
2046	-8,658600082900	2,997222133930	0,002777866066	m	1,000155473700	-0,000155473701	
4094	-2,412564322500	2,998260592930	0,001739407070	m	1,000155473700	-0,000155473701	
8190	0,627947602369	2,998843146180	0,001156853820	m	0,999771978504	0,000228021496	
16382	4,794801558210	2,999720068050	0,000279931946	m	0,999963726103	0,000036273897	m
32766	2,414471291730	2,999836307950	0,000163692052	m	0,999963726103	0,000036273897	
65534	-1,458082736140	2,999876364800	0,000123635196	m	1,000011663000	-0,000011663003	m
131070	1,317275089520	2,999946122190	0,000053877809	m	0,999987694553	0,000012305447	
262142	17,07979266820	2,999981578490	0,000018421514	m	0,999999678778	0,000000321222	m
524286	11,66375632300	2,999990976500	0,000009023504	m	0,999999678778	0,000000321222	
1048574	7,368887204730	2,999995602430	0,000004397567	m	0,999999678778	0,000000321222	
2097150	4,341796553220	2,999997790350	0,000002209647	m	0,999999678778	0,000000321222	
4194302	2,060197266210	2,999998601250	0,000001398747	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388606	2,253987936890	3,000000285680	-0,000000285680	m	1,000000053280	-0,000000053285	m

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos 1x^5+(29+104\cos^2 1)x^4\text{-}(324\cos 1+192\cos^3 1)x^3+(244+864\cos^2 1)x^2\text{-}1248\cos 1x+576=0$$

$x_4=3e^{-i}$

Таблица 13

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
-2	1,057722887710	1,057722887710	1,942277112290	m	0,000000000000	1,000000000000	m
-1	2,860903197790	1,739552468830	1,260447531170	m	0,000000000000	1,000000000000	
1	0,049743700745	2,192194815920	0,807805184077	m	0,785398163397	0,214601836603	m
5	2,180238381380	2,468762965720	0,531237034282	m	0,785398163397	0,214601836603	
13	-4,863886454550	2,884226128770	0,115773871228	m	0,981747704247	0,018252295753	m
29	-1,620453503920	2,892692626620	0,107307373378	m	0,981747704247	0,018252295753	
61	0,770168242637	2,925979408820	0,074020591182	m	0,981747704247	0,018252295753	
125	4,454827192780	2,970962605030	0,029037394967	m	0,981747704247	0,018252295753	
253	1,716367920540	2,980703124030	0,019296875974	m	0,994019550550	0,005980449450	m
509	1261,213571990	3,026837123270	-0,026837123273		0,994019550550	0,005980449450	
1021	32,48610666140	3,002503742470	-0,002503742471	m	0,997087512126	0,002912487874	m
2045	11,90041391810	2,999678811510	0,000321188486	m	0,998621492914	0,001378507086	m
4093	5,654378157710	2,999253890300	0,000746109696		0,999388483307	0,000611516693	m
8189	2,613866232840	2,999421159960	0,000578840035		0,999771978504	0,000228021496	m
16381	-1,552987723000	2,999784188810	0,000215811187	m	0,999963726103	0,000036273897	m
32765	0,827342543474	2,999853008210	0,000146991787	m	0,999963726103	0,000036273897	
65533	4,699896571350	2,999945204630	0,000054795369	m	0,999963726103	0,000036273897	
131069	1,924538745690	2,999962337360	0,000037662636	m	0,999987694553	0,000012305447	m
262141	-13,83797883300	3,000001976800	-0,000001976796	m	0,999999678778	0,000000321222	m
524285	-8,421942487800	2,999998622000	0,000001378000	m	0,999999678778	0,000000321222	
1048573	-4,127073369520	2,999997875370	0,000002124631		0,999999678778	0,000000321222	
2097149	-1,099982718010	2,999998179850	0,000001820148		0,999999678778	0,000000321222	
4194301	1,181616569000	2,999998799160	0,000001200840	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388605	0,987825898324	3,000000363630	-0,000000363630	m	1,000000053280	-0,000000053285	m

В третьих колонках табл. 10-15 приведены значения модулей комплексных корней, которые устанавливались по значениям подходящих дробей с использованием формулы r/φ-алгоритма:

$$r_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left| P_i / Q_i \right|}\ .$$

Как уже отмечалось, r/φ-алгоритм не обеспечивает монотонной сходимости. Это замечание справедливо как в отношении модуля, так и аргумента комплексного числа, значение которого “восстанавливает” r/φ-алгоритм. Для аргумента известен способ определения “оптимальных” номеров подходящих дробей [546]. Если эти “оптимальные” номера расположить в порядке их возрастания, то вычисления аргумента при этом гарантируется со всё возрастающей точностью.

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos 1x^5+(29+104\cos^2 1)x^4\text{-}(324\cos 1+192\cos^3 1)x^3+(244+864\cos^2 1)x^2\text{-}1248\cos 1x+576=0$$

$x_5=2e^i$

Таблица 14

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
-3	0,504632450265	0,504632450265	1,495367549740	m	0,000000000000	1,000000000000	m
-2	-0,293062586796	0,384563247406	1,615436752590		1,570796326790	-0,570796326795	m
0	1,649509966900	1,279593540700	0,720406459299	m	0,785398163397	0,214601836603	m
4	0,454305580855	1,316212423510	0,683787576493	m	0,785398163397	0,214601836603	
12	4,236603891350	1,779429209550	0,220570790445	m	0,981747704247	0,018252295753	m
28	2,778239897700	1,885267739970	0,114732260029	m	0,981747704247	0,018252295753	
60	1,431704836120	1,931699975340	0,068300024660	m	0,981747704247	0,018252295753	
124	-1,335941468260	1,956247758310	0,043752241692	m	1,006291396850	-0,006291396853	m
252	0,813887845903	1,978401128200	0,021598871798	m	0,994019550550	0,005980449450	m
508	15,35298855250	1,992301053950	0,007698946049	m	1,000155473700	-0,000155473701	m
1020	45,61535316930	1,996063348430	0,003936651569	m	1,000155473700	-0,000155473701	
2044	-12,71015105400	1,997921196610	0,002078803387	m	1,000155473700	-0,000155473701	
4092	-2,495636039830	1,998779375210	0,001220624788	m	1,000155473700	-0,000155473701	
8188	0,173990611565	1,998916916590	0,001083083411	m	0,999771978504	0,000228021496	
16380	2,743837798560	1,999768968780	0,000231031217	m	0,999963726103	0,000036273897	m
32764	1,395892846640	1,999862976500	0,000137023504	m	0,999963726103	0,000036273897	
65532	-1,560280708830	1,999916460690	0,000083539314	m	1,000011663000	-0,000011663003	m
131068	0,670355540163	1,999954374830	0,000045625174	m	0,999987694553	0,000012305447	
262140	6,903609350690	1,999985424570	0,000014575431	m	0,999999678778	0,000000321222	m
524284	5,473616119010	1,999992795410	0,000007204593	m	0,999999678778	0,000000321222	
1048572	3,928564489010	1,999996435130	0,000003564871	m	0,999999678778	0,000000321222	
2097148	2,510607146090	1,999998169860	0,000001830142	m	0,999999678778	0,000000321222	
4194300	1,024841920880	1,999998834380	0,000001165622	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388604	2,556931765020	1,999999953830	0,000000046169	m	1,000000053280	-0,000000053285	m

Нахождение нулей полинома

$$x^6\text{-}18\cos 1x^5+(29+104\cos^2 1)x^4\text{-}(324\cos 1+192\cos^3 1)x^3+(244+864\cos^2 1)x^2\text{-}1248\cos 1x+576=0$$

$x_6=2e^{-i}$

Таблица 15

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$	min
-4	0,854222638930	0,854222638930	1,145777361070	m	0,000000000000	1,000000000000	m
-3	2,300218266990	1,401748379040	0,598251620960	m	0,000000000000	1,000000000000	
-1	0,295992632017	1,514636593510	0,485363406488	m	0,785398163397	0,214601836603	m
3	1,685872833520	1,706255378300	0,293744621705	m	0,785398163397	0,214601836603	
11	-2,076874931820	1,925561309360	0,074438690643	m	0,981747704247	0,018252295753	m
27	-0,617033204120	1,937753950470	0,062246049534	m	0,981747704247	0,018252295753	
59	0,729504387344	1,958517351410	0,041482648591	m	0,981747704247	0,018252295753	
123	3,497150691730	1,987489286240	0,012510713764	m	0,981747704247	0,018252295753	
251	1,347321377570	1,989478531600	0,010521468401	m	0,994019550550	0,005980449450	m
507	-13,19177932910	2,003056947720	-0,003056947718	m	1,000155473700	-0,000155473701	m
1019	-43,45414394580	2,003741256090	-0,003741256090		1,000155473700	-0,000155473701	
2043	14,87136027740	2,000730739140	-0,000730739142	m	0,998621492914	0,001378507086	
4091	4,656845263300	1,999751521230	0,000248478769	m	0,999388483307	0,000611516693	
8187	1,987218611910	1,999698434580	0,000301565422		0,999771978504	0,000228021496	
16379	-0,582628575084	1,999875249520	0,000124750482	m	0,999963726103	0,000036273897	m
32763	0,765316376836	1,999917881430	0,000082118568	m	0,999963726103	0,000036273897	
65531	3,721489932300	1,999977364530	0,000022635471	m	0,999963726103	0,000036273897	
131067	1,490853683310	1,999979647880	0,000020352122	m	0,999987694553	0,000012305447	m
262139	-4,742400127220	1,999999381550	0,000000618450	m	0,999999678778	0,000000321222	m
524283	-3,312406895530	1,999998725710	0,000001274291		0,999999678778	0,000000321222	
1048571	-1,767355265530	1,999998689620	0,000001310378		0,999999678778	0,000000321222	
2097147	-0,349397922622	1,999998953410	0,000001046594		0,999999678778	0,000000321222	
4194299	1,136367302590	1,999999394760	0,000000605238	m	0,999999678778	0,000000321222	
8388603	-0,395722541546	2,000000151850	-0,000000151852	m	1,000000053280	-0,000000053285	m

На рис. 11 и 12 показаны распределения подходящих дробей, представляющих комплексные корни уравнения (50) на различных интервалах: на начальном участке $(1 \div 150)$ и на промежутке $10^6 \div 10^6 + 150$. Из сравнения графиков, показанных на рис. 11 и 12, можно заключить, что характер распределения подходящих остаётся неизменным как на “начальном”, так и на “ удаленных ” интервалах. Однако, как будет показано далее, при решении *r/φ* - алгоритмом алгебраических уравнений зачастую для “начального” участка присуща неоднородность в следовании подходящих дробей.

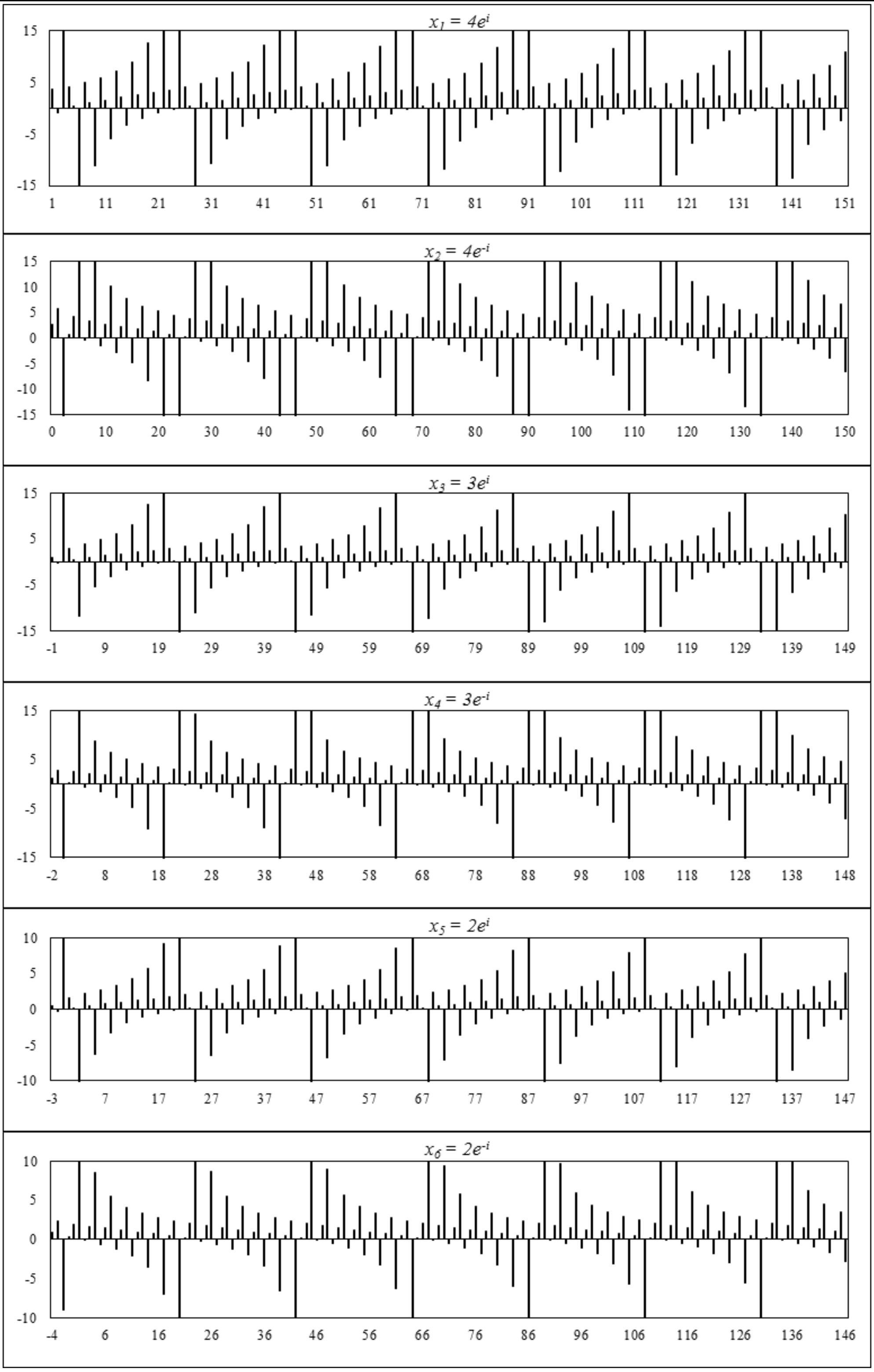


Рис. 11. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (50).

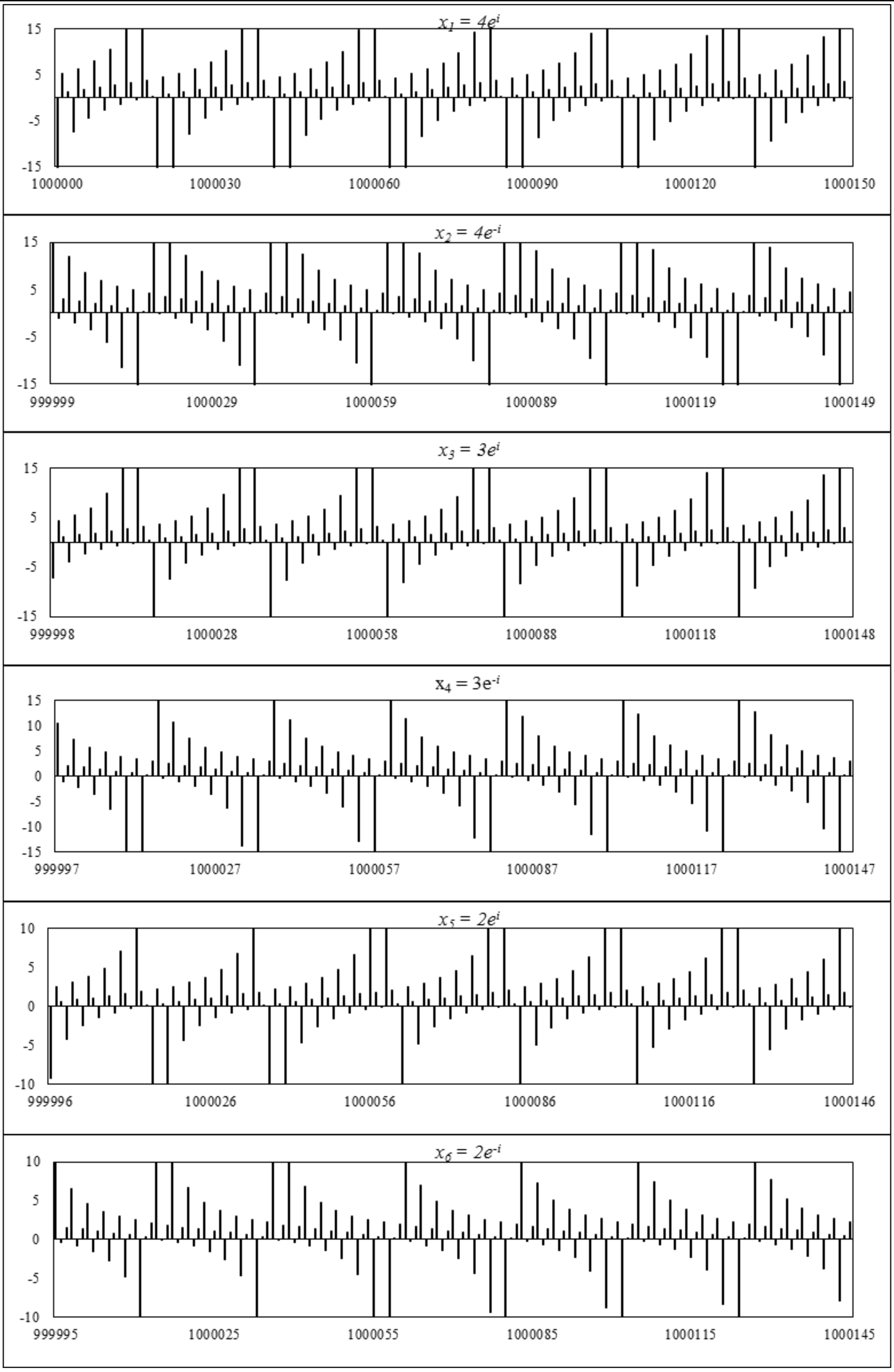


Рис. 12. Графики “удаленных” подходящих дробей, представляющих корни уравнения (50).

В табл. 16-21 приведены результаты вычислений корней алгебраического уравнения

$$x^6 + x^5 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{11} = 0 . \tag{51}$$

Надо отметить, что это уравнение в [540] решалось с использованием “упрощённой формы QD-алгоритма”, однако вследствие численной неустойчивости, присущей, видимо, “упрощённой форме”, не удалось найти корни уравнения с приемлемой точностью. Как видно из табл. 16-21, вариант QD-алгоритма, который был назван “QD-алгоритмом с отрицательными индексами” обеспечивает “стандартную” для r/φ-алгоритма точность.

Нахождение нулей полинома

$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_1=0,774242674089e^{-i2,860352840956}$

Таблица 16

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
1	-0,666666666667	0,666666666667	0,107576007422	m	-3,141592653590	0,281239812634	m
2	-0,800000000000	0,730296743340	0,043945930749	m	-3,141592653590	0,281239812634	
4	-0,793103448276	0,735138754875	0,039103919214	m	-3,141592653590	0,281239812634	
8	0,713799366420	0,593924914906	0,180317759183		-2,748893571890	-0,111459269065	m
16	-0,628709865926	0,754011542841	0,020231131248	m	-2,945243112740	0,084890271784	m
32	-1,450923026740	0,758032442803	0,016210231286	m	-2,847068342320	-0,013284498640	m
64	0,899214945630	0,750852996942	0,023389677147		-2,847068342320	-0,013284498640	
128	-0,599776470468	0,771157361885	0,003085312204	m	-2,871612034920	0,011259193966	m
256	-1,176548779620	0,772846839086	0,001395835003	m	-2,859340188620	-0,001012652337	m
512	-1,794828417180	0,772977574271	0,001265099818	m	-2,859340188620	-0,001012652337	
1024	-0,088353571434	0,771670919296	0,002571754793		-2,862408150190	0,002055309238	
2048	-0,696437751968	0,774167123620	0,000075550469	m	-2,860874169410	0,000521328451	m
4096	-0,013259896715	0,773222138410	0,001020535679		-2,860874169410	0,000521328451	
8192	-0,682382716398	0,774220389343	0,000022284746	m	-2,860490674210	0,000137833254	m
16384	0,561396978032	0,774138290576	0,000104383513		-2,860298926610	-0,000053914345	m
32768	-0,619560183160	0,774232341133	0,000010332956	m	-2,860394800410	0,000041959454	m
65536	-1,374433050330	0,774235257435	0,000007416654	m	-2,860346863510	-0,000005977445	m
131072	2,645916175790	0,774233212845	0,000009461244		-2,860346863510	-0,000005977445	
262144	-0,553831008429	0,774240624290	0,000002049799	m	-2,860358847740	0,000006006780	
524288	-0,985048674980	0,774242323882	0,000000350207	m	-2,860352855620	0,000000014667	m
1048576	-0,981428837526	0,774242502413	0,000000171676	m	-2,860352855620	0,000000014667	
2097152	-0,972981142487	0,774242592575	0,000000081514	m	-2,860352855620	0,000000014667	
4194304	-0,951758462682	0,774242639321	0,000000034768	m	-2,860352855620	0,000000014667	
8388608	-0,815754462399	0,774242678317	-0,000000004228	m	-2,860352855620	0,000000014667	

Нахождение нулей полинома

$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_2=0,774242674089e^{i2,860352840956}$

Таблица 17

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,266666666667	0,266666666667	0,507576007422	m	0,000000000000	2,860352840960	m
1	0,657142857143	0,418614494778	0,355628179311	m	0,000000000000	2,860352840960	
3	0,812157993730	0,550862215589	0,223380458500	m	0,000000000000	2,860352840960	
7	-2,214278568060	0,782080983744	-0,007838309655	m	1,570796326790	1,289556514160	m
15	-0,969217041319	0,695149668897	0,079093005192		2,159844949340	0,700507891613	m
31	-0,036176823869	0,760919256615	0,013323417474		2,454369260620	0,405983580339	m
63	-2,386860499220	0,777293263115	-0,003050589026	m	2,699806186680	0,160546654277	m
127	-0,887872094572	0,764592411369	0,009650262720		2,773437264500	0,086915576459	m
255	-0,311099785428	0,771282033233	0,002960640856	m	2,810252803410	0,050100037550	m
511	0,307179852131	0,773965788119	0,000276885970	m	2,834796496010	0,025556344943	m
1023	-1,399294993610	0,773770471984	0,000472202105		2,850136303890	0,010216537065	m
2047	-0,791210813078	0,773574855888	0,000667818201		2,854738246260	0,005614594701	m
4095	-1,474388668330	0,774143290365	0,000099383724	m	2,857806207830	0,002546633125	m
8191	-0,805265848648	0,774077134834	0,000165539255		2,858956693420	0,001396147534	m
16383	-2,049045543080	0,774243921031	-0,000001246942	m	2,859723683820	0,000629157140	m
32767	-0,868088381886	0,774203765573	0,000038908516		2,860011305210	0,000341535743	m
65535	-0,113215514716	0,774234882818	0,000007791271		2,860155115910	0,000197725044	m
131071	-4,133564740840	0,774248400376	-0,000005726287		2,860274958160	0,000077882795	m
262143	-0,933817556617	0,774238237325	0,000004436764		2,860310910840	0,000041930120	m
524287	-0,502599890066	0,774240631276	0,000002042814		2,860328887170	0,000023953783	m
1048575	-0,506219727520	0,774241646462	0,000001027627	m	2,860340871400	0,000011969558	m
2097151	-0,514667422559	0,774242153327	0,000000520762	m	2,860346863510	0,000005977445	m
4194303	-0,535890102364	0,774242405547	0,000000268542	m	2,860349859570	0,000002981389	m
8388607	-0,671894102647	0,774242524475	0,000000149614	m	2,860351357600	0,000001483361	m

На рис. 13 и 14 приведены графики подходящих дробей, представляющих три пары комплексно-сопряжённых корней уравнения (51).

На рис. 13 изображены графики на начальном участке. На следующем рисунке даны подходящие дроби с порядковыми номерами $10^6 \div 10^6 + 150$. На начальном участке, где расположены подходящие дроби с номерами от 1 до 150, достаточно регулярно ведут себя графики, представляющие первую пару комплексных корней уравнения (51). Графики же подходящих дробей двух других пар комплексных корней весьма хаотичны.

Нахождение нулей полинома

$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_3=0{,}624755870301e^{-i1{,}872916424557}$ Таблица 18

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-1	0,114285714286	0,114285714286	0,510470156015	m	0,000000000000	-1,872916424560	m
0	0,253968253968	0,170367084000	0,454388786301	m	0,000000000000	-1,872916424560	
2	-32,048332458100	0,784464654137	-0,159708783836	m	-0,785398163397	-1,087518261160	m
6	-0,346181586570	0,570122557202	0,054633313099	m	-0,785398163397	-1,087518261160	
14	-0,233983924362	0,608528388750	0,016227481550	m	-0,785398163397	-1,087518261160	
30	1,199070996600	0,630320685824	-0,005564815524	m	-0,785398163397	-1,087518261160	
62	1,582854236600	0,638736932600	-0,013981062300		-0,785398163397	-1,087518261160	
126	0,327510811727	0,624605937732	0,000149932568	m	-0,785398163397	-1,087518261160	
254	-0,638814206965	0,622706517156	0,002049353144		-0,809941856004	-1,062974568550	m
510	1,328946304040	0,624733582146	0,000022288154	m	-0,914252549580	-0,958663874977	m
1022	1,389918133420	0,624633443142	0,000122427159		-1,362174939640	-0,510741484914	m
2046	-0,472998523331	0,624665604830	0,000090265471		-1,618349731220	-0,254566693337	m
4094	-0,370739585061	0,624684629679	0,000071240622		-1,745670136610	-0,127246287943	m
8190	-0,183941903392	0,624670294159	0,000085576142		-1,809330339310	-0,063586085246	m
16382	0,231375561168	0,624714233754	0,000041636547		-1,840968693060	-0,031947731496	m
32766	-2,483578200480	0,624757765636	-0,000001895336	m	-1,856979617530	-0,015936807022	m
65534	1,021239680720	0,624753751713	0,000002118588		-1,864937142870	-0,007979281685	m
131070	-0,379559305668	0,624753735395	0,000002134906		-1,868939873990	-0,003976550566	m
262142	-0,200393090374	0,624753397067	0,000002473234		-1,870929255320	-0,001987169232	m
524286	0,183667627412	0,624754333222	0,000001537078	m	-1,871917953880	-0,000998470677	m
1048574	-4,388736503570	0,624755915023	-0,000000044723	m	-1,872418295270	-0,000498129288	m
2097150	0,483412144151	0,624755653955	0,000000216345		-1,872666967940	-0,000249456621	m
4194302	0,330457915747	0,624754946977	0,000000923324		-1,872792053280	-0,000124371273	m
8388606	4,328763043120	0,624756428902	-0,000000558601		-1,872853846940	-0,000062577614	m

Нахождение нулей полинома

$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_4=0{,}624755870301e^{i1{,}872916424557}$ Таблица19

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-2	0,063492063492	0,063492063492	0,561263806808	m	0,000000000000	1,872916424560	m
-1	0,161616161616	0,101298290186	0,523457580114	m	0,000000000000	1,872916424560	
1	30,520913979500	2,011017820060	-1,386261949760		0,785398163397	1,087518261160	m
5	2,191612753020	0,679158382932	-0,054402512631	m	0,785398163397	1,087518261160	
13	1,127937383900	0,684187958489	-0,059432088188		1,178097245100	0,694819179461	m
29	0,225106653004	0,611407132403	0,013348737898	m	0,981747704247	0,891168720310	
61	-0,746614043318	0,644691373368	-0,019935503068		1,325359400730	0,547557023824	m
125	1,606854105840	0,629632078394	-0,004876208093	m	1,251728322910	0,621188101642	
253	1,042336763770	0,623958325853	0,000797544447	m	1,325359400730	0,547557023824	
509	3,358654756520	0,626075622022	-0,001319751721		1,435806017460	0,437110407096	m
1021	-1,732030217550	0,625241597094	-0,000485726793	m	1,622951673580	0,249964750974	m
2045	0,085220330957	0,624737593462	0,000018276839	m	1,747204117400	0,125712307155	m
4093	-0,001057645762	0,624743709053	0,000012161248	m	1,810097329710	0,062819094852	m
8189	-0,187844034999	0,624746257357	0,000009612943	m	1,841543935860	0,031372488700	m
16381	-0,603161466728	0,624758659074	-0,000002788774	m	1,857267238930	0,015649185624	m
32765	2,111792294920	0,624779802436	-0,000023932135		1,865033016670	0,007883407886	m
65533	-1,393025586280	0,624762430612	-0,000006560311		1,869011779340	0,003904645217	m
131069	0,007773400107	0,624755508336	0,000000361965	m	1,870953223770	0,001963200782	m
262141	-0,171392815187	0,624755568323	0,000000301977	m	1,871935930220	0,000980494340	m
524285	-0,555453532973	0,624755909161	-0,000000038860	m	1,872427283440	0,000489141119	m
1048573	4,016950598010	0,624756957039	-0,000001086739		1,872669963990	0,000246460565	m
2097149	-0,855198049712	0,624755905647	-0,000000035347	m	1,872794300330	0,000122124231	m
4194301	-0,702243821307	0,624755091393	0,000000778907		1,872855719480	0,000060705079	m
8388605	-4,700548948680	0,624756570642	-0,000000700342		1,872885680040	0,000030744516	m

Обращает внимание, что во всех трёх парах комплексно-сопряжённых корней уравнения (51) модули находятся на порядок точнее, чем аргумент корней.

Нахождение нулей полинома
$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_5=0{,}623327384638e^{i0{,}810146223036}$

Таблица 20

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-3	0,040404040404	0,040404040404	0,582923344234	m	0,000000000000	0,810146223036	m
-2	-17,022727272700	0,829329223237	-0,206001838599	m	1,570796326790	-0,760650103759	m
0	0,215620631747	1,653778265960	-1,030450881320		0,785398163397	0,024748059639	m
4	-0,515851114259	0,616170144583	0,007157240055	m	1,178097245100	-0,367951022060	
12	-0,045704235179	0,625387764903	-0,002060380265	m	1,374446785950	-0,564300562909	
28	-1,016704957490	0,645577673804	-0,022250289166		1,668971097220	-0,858824874183	
60	-19,335634087900	0,637860636668	-0,014533252030		1,767145867640	-0,956999644608	
124	-1,173354412470	0,633020259515	-0,009692874877		1,816233252860	-1,006087029820	
252	7,184876204580	0,625746792439	-0,002419407801		1,718058482430	-0,907912259396	
508	-4,806175737900	0,628314030523	-0,004986645885		1,613747788860	-0,803601565819	
1020	-0,690100004448	0,623940301241	-0,000612916603	m	1,374446785950	-0,564300562909	
2044	-0,715689612426	0,623749192422	-0,000421807784	m	1,092194320970	-0,282048097938	
4092	15,782448847700	0,623627025051	-0,000299640413	m	0,951068088489	-0,140921865453	
8188	0,813260799914	0,623499219058	-0,000171834420	m	0,880504972246	-0,070358749210	
16380	-0,229174213464	0,623353735870	-0,000026351232	m	0,845415161723	-0,035268938687	
32764	-0,656292243012	0,623353214136	-0,000025829498	m	0,827774382663	-0,017628159627	m
65532	23,598517731500	0,623346021077	-0,000018636439	m	0,818953993132	-0,008807770096	m
131068	0,828301893816	0,623338137086	-0,000010752448	m	0,814543798367	-0,004397575331	m
262140	-0,179656810905	0,623328584218	-0,000001199580	m	0,812350685210	-0,002204462173	m
524284	-0,466127062018	0,623328790797	-0,000001406159		0,811248136518	-0,001101913482	m
1048572	-3,116556199900	0,623328466287	-0,000001081649	m	0,810696862173	-0,000550639136	m
2097148	1,167129040350	0,623328058524	-0,000000673886	m	0,810421225000	-0,000275001964	m
4194300	0,260160707415	0,623327592832	-0,000000208194	m	0,810283406413	-0,000137183377	m
8388604	0,245946671942	0,623327523168	-0,000000138530	m	0,810214871627	-0,000068648591	m

Нахождение нулей полинома
$x^6+x^5+1/3x^4+1/5x^3+1/7x^2+1/9x+1/11=0$

$x_6=0{,}623327384638e^{-i0{,}810146223036}$

Таблица 21

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-4	-0,818181818182	0,818181818182	-0,194854433544	m	-3,141592653590	2,331446430550	m
-3	15,750000000000	3,589758158480	-2,966430773840		-1,570796326790	0,760650103759	m
-1	0,292743301342	1,122306611030	-0,498979226389		-0,785398163397	-0,024748059639	m
3	-0,829100850557	0,718069016690	-0,094741632052	m	-1,178097245100	0,367951022060	
11	-0,250322317117	0,660483126861	-0,037155742223	m	-1,570796326790	0,760650103759	
27	0,079627158492	0,647832007148	-0,024504622510	m	-1,668971097220	0,858824874183	
59	18,987039448200	0,669987534473	-0,046660149835		-1,767145867640	0,956999644608	
123	-0,273361940058	0,631639212706	-0,008311828068	m	-1,840776945460	1,030630722430	
251	-7,100750196340	0,631146513645	-0,007819129007	m	-1,754874021340	0,944727798305	
507	0,606223242385	0,625767013046	-0,002439628408	m	-1,423534171160	0,613387948122	
1019	1,519860653620	0,624601293839	-0,001273909201	m	-1,116738013580	0,306591790545	
2043	1,591116369850	0,624045241462	-0,000717856824	m	-0,963339934792	0,153193711756	
4091	-14,923003051800	0,624069509860	-0,000742125222		-0,887407885792	0,077261662756	
8187	0,046173703524	0,623450537828	-0,000123153189	m	-0,848674870898	0,038528647861	
16379	1,088608684070	0,623400327627	-0,000072942989	m	-0,829308363451	0,019162140414	m
32763	1,515726713620	0,623371215877	-0,000043831239	m	-0,819720983526	0,009574760490	m
65531	-22,739083260900	0,623377652198	-0,000050267559		-0,814975230464	0,004829007428	m
131067	0,031132576791	0,623335164817	-0,000007780179	m	-0,812554417033	0,002408193997	m
262139	1,039091281510	0,623331828438	-0,000004443799	m	-0,811344010318	0,001197787281	m
524283	1,325561532620	0,623329944469	-0,000002559831	m	-0,810744799072	0,000598576036	m
1048571	3,975990670500	0,623329424437	-0,000002039799	m	-0,810445193450	0,000298970413	m
2097147	-0,307694569747	0,623327985796	-0,000000601158	m	-0,810296888666	0,000150665630	m
4194299	0,599273763192	0,623327606032	-0,000000221394	m	-0,810221238247	0,000075015210	m
8388603	0,613487798665	0,623327535529	-0,000000150891	m	-0,810183787544	0,000037564508	m

Сравним графики, показанные на рис. 13 и рис. 14, где изображены, соответственно, подходящие дроби на начальном участке и на интервале, удалённом от начального участка на миллион подходящих. Графики подходящих дробей, связанных с первой парой комплексных корней практически неразличимы на обоих изучаемых интервалах. Графики подходящих дробей, которые представляли две другие комплексные пары, на удалённом интервале обрели регулярность (рис. 14), что отсутствовало на начальном участке (рис. 13). Поэтому можно рекомендовать при применении r/φ-алгоритма не использовать значения подходящих дробей на начальном участке.

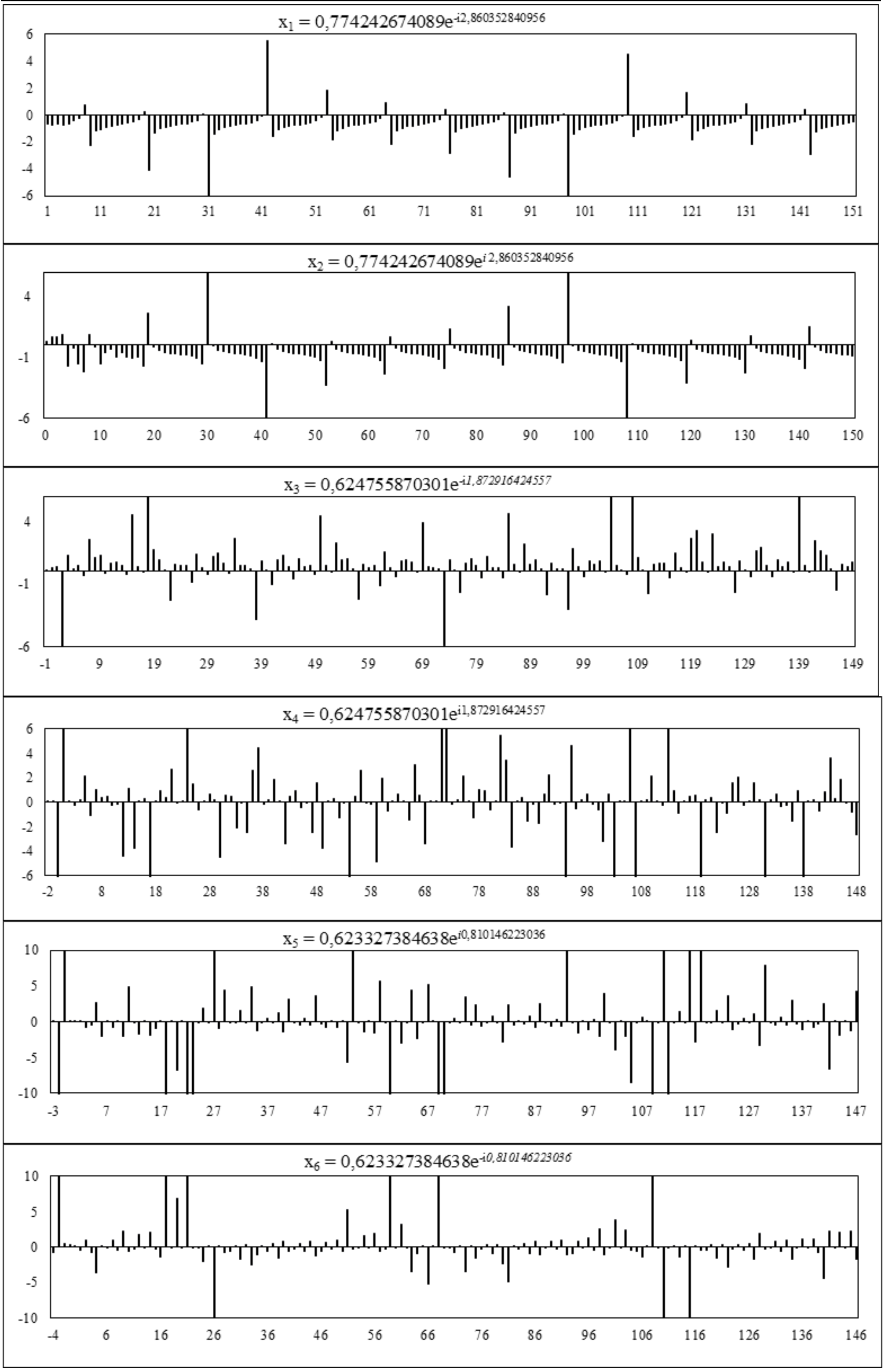


Рис. 13. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (51).

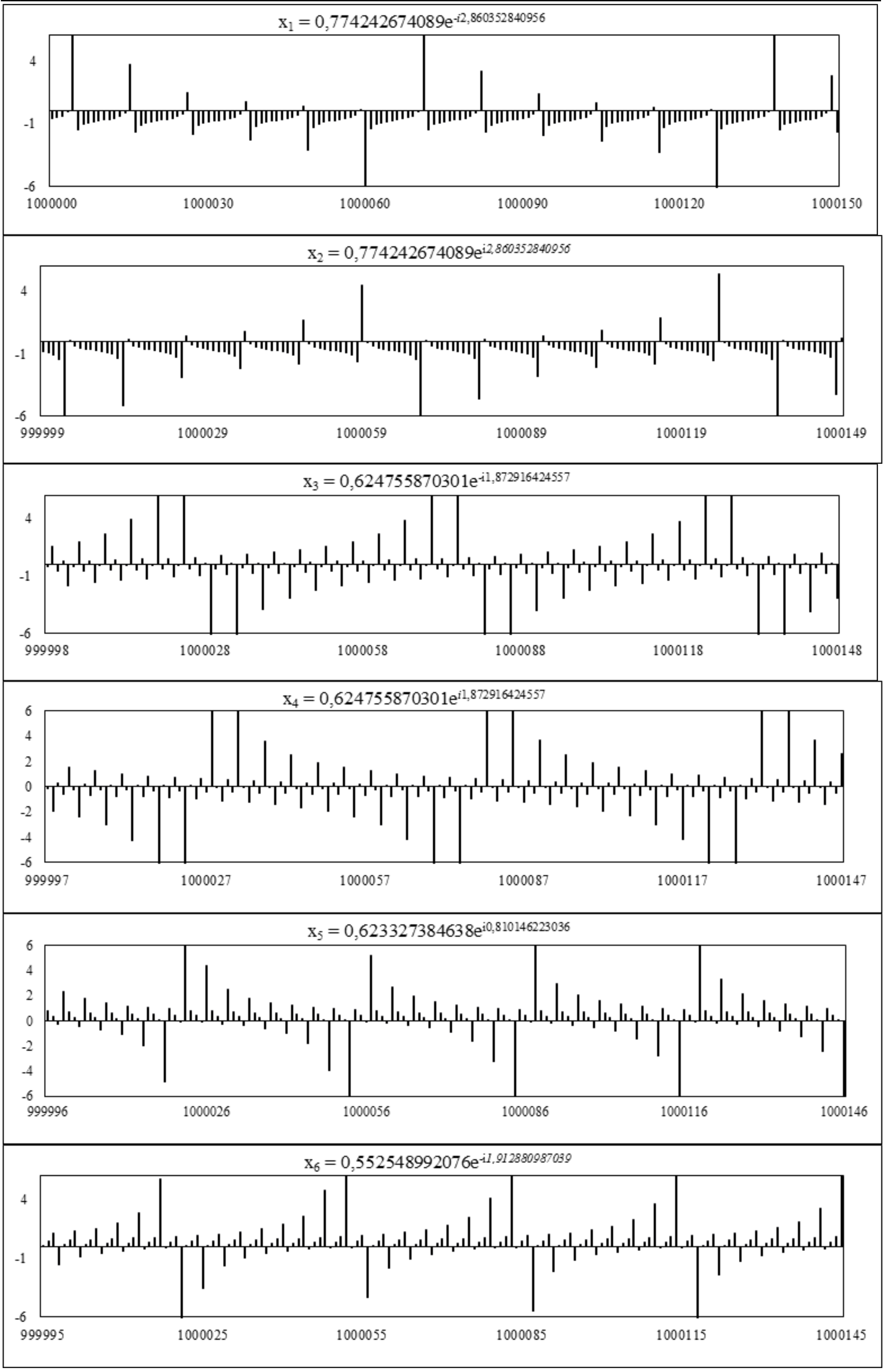


Рис. 14. Графики “удаленных”подходящих дробей, представляющих корни уравнения (51).

3.6. Модификация метода Рутисхаузера – Никипорца

При вычислении значений корней полинома при помощи модифицированного «прогрессивного» QD-алгоритма используются следующие формулы:

$$x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + e_m^{(i)} - e_{m-1}^{(i)},\ m = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + e_1^{(i)},\ x_n^{(i+1)} = x_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)},$$

$$e_m^{(i+1)} = e_m^{(i)} \frac{x_{m+1}^{(i+1)}}{x_m^{(i+1)}},\ m = 1,2,\ldots,n-1. \tag{52}$$

В качестве начальных условий выбираются величины:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1,\ x_m^{(0)} = 0,\ m = 2,3,\ldots,n, \tag{53}$$

$$e_m^{(0)} = \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m},\ m = 1,2,\ldots,n-1.$$

На рис. 15 показана схема используемого варианта «прогрессивного» QD-алгоритма.

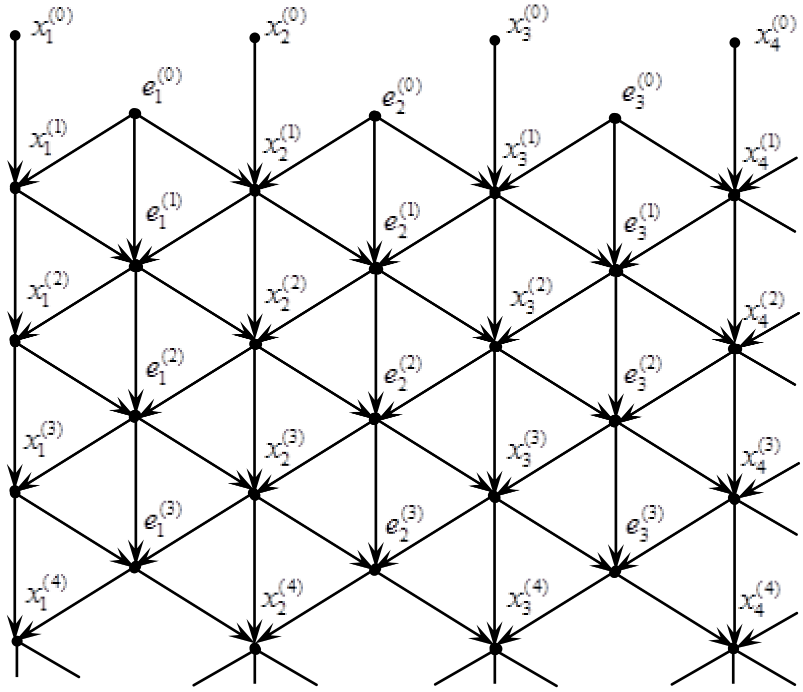


Рис. 15. Граф варианта “прогрессивного” QD – алгоритма.

Так, например, для уравнения 4-й степени

$$x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$$

начальные условия будут иметь вид:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0,\ x_4^{(0)} = 0,\quad e_1^{(0)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ e_2^{(0)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2},\ e_3^{(0)} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3}.$$

Сначала определяются все значения $x_m^{(i)}$ на i шаге, а далее из них рассчитываются $e_m^{(i)}$.

Запишем несколько этапов вычислений.

Шаг 1:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + e_1^{(0)} = -\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + e_2^{(0)} - e_1^{(0)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + e_3^{(0)} - e_2^{(0)} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad x_4^{(1)} = x_4^{(0)} - e_3^{(0)} = -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}.$$

$$e_1^{(1)} = e_1^{(0)} \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3}{\alpha_1\left(\alpha_1^2 - \alpha_2\right)},$$

$$e_2^{(1)} = e_2^{(0)} \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{\alpha_1\left(\alpha_3^2 - \alpha_4\alpha_2\right)}{\alpha_2\left(\alpha_2^2 - \alpha_3\alpha_1\right)} \quad e_3^{(1)} = e_3^{(0)} \frac{x_4^{(1)}}{x_3^{(1)}} = \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\alpha_3\left(\alpha_3^2 - \alpha_4\alpha_2\right)}.$$

Шаг 2:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + e_1^{(1)}, \qquad x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + e_2^{(1)} - e_1^{(1)}, \qquad x_3^{(2)} = x_3^{(1)} + e_3^{(1)} - e_2^{(1)}, \qquad x_4^{(2)} = x_4^{(1)} - e_3^{(1)},$$

$$e_1^{(2)} = e_1^{(1)} \frac{x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}}, \qquad e_2^{(2)} = e_2^{(1)} \frac{x_3^{(2)}}{x_2^{(2)}}, \qquad e_3^{(2)} = e_3^{(1)} \frac{x_4^{(2)}}{x_3^{(2)}}.$$

Шаг 3:

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + e_1^{(2)} \qquad x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + e_2^{(2)} - e_1^{(2)}, \qquad x_3^{(3)} = x_3^{(2)} + e_3^{(2)} - e_2^{(2)},$$

$$x_4^{(3)} = x_4^{(2)} - e_3^{(2)}, e_1^{(3)} = e_1^{(2)} \frac{x_2^{(3)}}{x_1^{(3)}}, \qquad e_2^{(3)} = e_2^{(2)} \frac{x_3^{(3)}}{x_2^{(3)}}, \qquad e_3^{(3)} = e_3^{(2)} \frac{x_4^{(3)}}{x_3^{(3)}}.$$

Далее вычисления производятся аналогично.

Для вычисления комплексных корней алгебраического уравнения необходимо использовать r/φ–алгоритм. Модуль и аргумент искомого комплексного числа определяются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\prod_{p=1}^{m} \overline{x}_i^{(p)}}, \tag{54}$$

$$\left|\varphi_i\right| = \pi \lim_{m\to\infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \tag{55}$$

где $\overline{x}_i^{(p)}$ - p-я подходящая дробь, представляющая i-й корень уравнения, $k_i^{(m)}$- число отрицательных подходящих дробей для i – го корня из m подходящих дробей.

Для примера рассмотрим решение уравнения

$$x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{5}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{11}x + \frac{1}{12} = 0 \tag{56}$$

методом Рутисхаузера-Никипорца.

Начальные условия для рассматриваемого уравнения будут иметь следующие значения:

$$x_1^{(0)} = -\frac{1}{2}, \; x_m^{(0)} = 0, \; m = 2,3,\ldots,11,$$

$$e_1^{(0)} = \frac{2}{3}, \; e_2^{(0)} = \frac{3}{4}, \; \ldots, e_{10}^{(0)} = \frac{11}{12}.$$

На рис. 16 показаны графики распределения подходящих непрерывных дробей $\overline{x}_i^{(m)}$, которые представляют корни алгебраического уравнения (56). Из графиков видно, что x_{11} – вещественный корень. Также из графиков можно заключить, что уравнение (56) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней. «Периодичность» в расположении подходящих для x_i чётко видна в правой половине графиков, представленных на рис. 16.

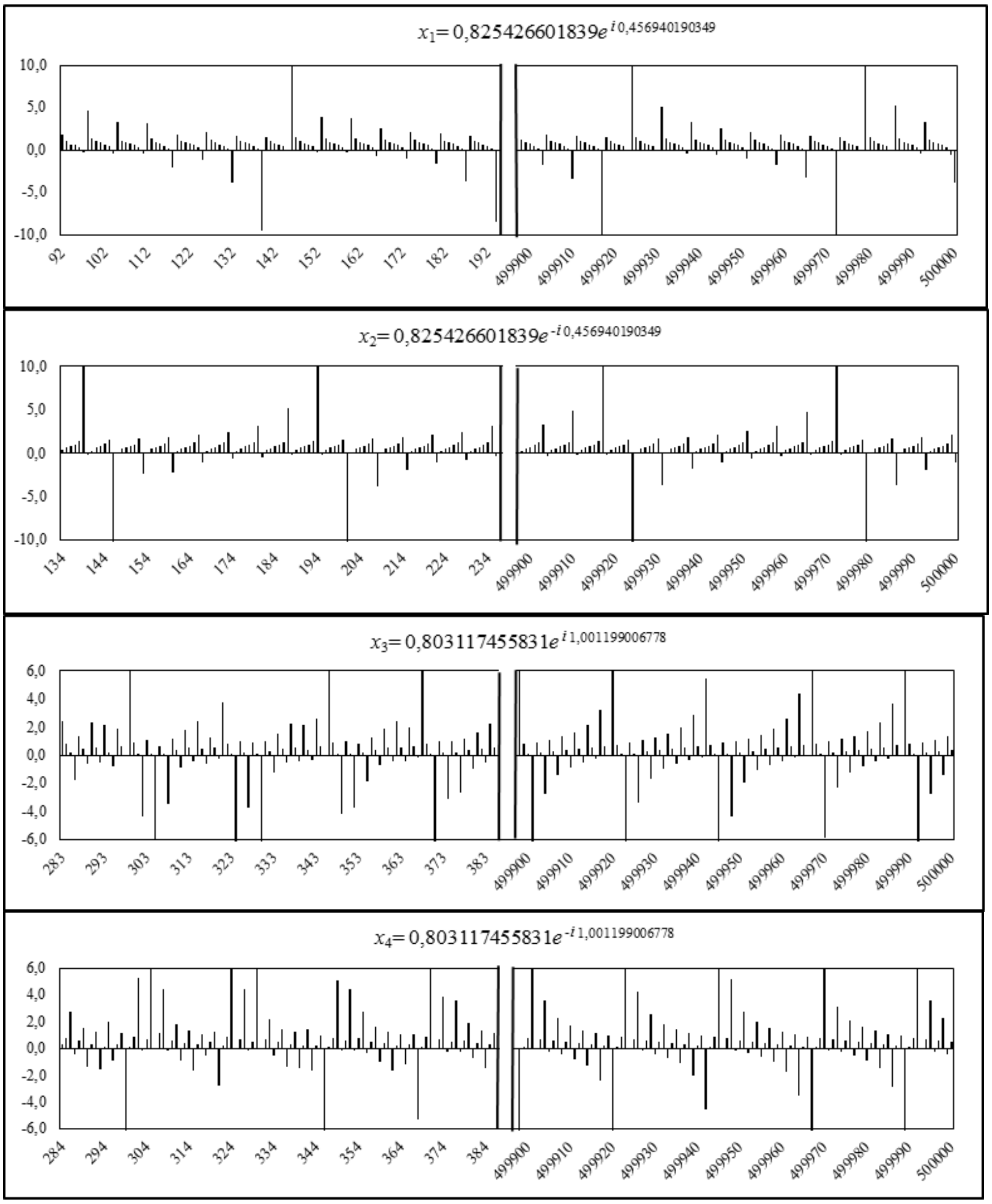


Рис. 16. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (56).

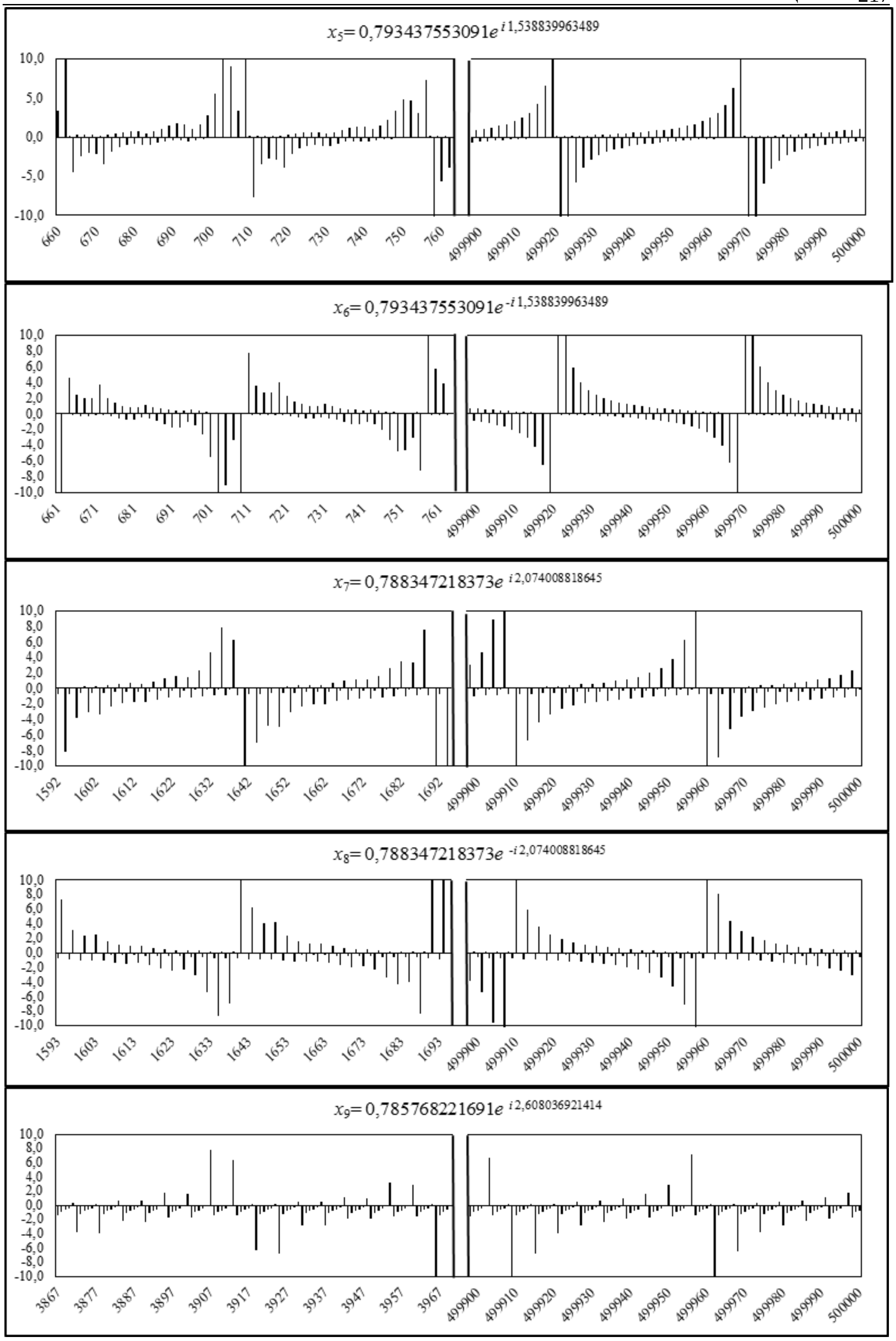


Рис. 16 (продолжение). Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (56).

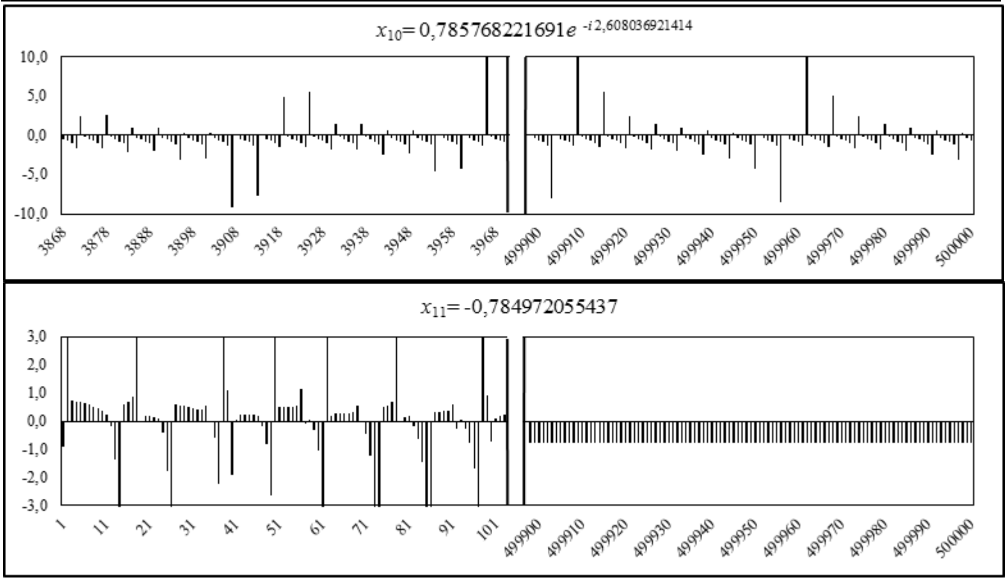


Рис. 16 (окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (56).

В табл. 22 – 27 приведены результаты вычисления первых трех пар комплексно-сопряженных корней уравнения (56), найденных при помощи алгоритма Рутисхаузера– Никипорца с учетом числа подходящих дробей, равных степени “2”.

x_1= 0,825426601839$e^{i\,0,456940190349}$

Таблица 22

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
128	0,856370612311	0,845105032261	-0,019678430422	0,424539547782	0,032400642567
256	16,143892048442	0,825785447265	-0,000358845426	0,456958931431	-0,000018741082
512	1,123631143666	0,826954794360	-0,001528192521	0,455195135081	0,001745055268
1024	0,455119840748	0,825433239778	-0,000006637939	0,454571284281	0,002368906068
2048	0,553668217148	0,825564163972	-0,000137562133	0,455908182739	0,001032007610
4096	0,706616451970	0,825567329958	-0,000140728119	0,456531067263	0,000409123086
8192	1,028537277040	0,825510151203	-0,000083549364	0,456832014064	0,000108176285
16384	0,233171968534	0,825377907111	0,000048694728	0,456787147631	0,000153042718
32768	0,118598000966	0,825381628314	0,000044973525	0,456861042625	0,000079147724
65536	-0,275773576857	0,825409693152	0,000016908687	0,456945839553	-0,000005649204
131072	14,164753886741	0,825427091119	-0,000000489280	0,456940179442	0,000000010907
262144	1,116765194917	0,825429065048	-0,000002463209	0,456937352336	0,000002838013

x_2=0,825426601839$e^{-i\,0,456940190349}$

Таблица 23

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
256	-14,664188997090	0,844450967957	-0,019024366118	-0,459745266379	0,002805076030
512	0,357854174564	0,824184302406	0,001242299433	-0,455903947091	-0,001036243258
1024	1,026366880816	0,824775244209	0,000651357630	-0,454843380823	-0,002096809526
2048	0,927818504413	0,825070650084	0,000355951755	-0,456064103237	-0,000876087112
4096	0,774870269591	0,825231107454	0,000195494385	-0,456613012482	-0,000327177867
8192	0,452949444521	0,825354859349	0,000071742490	-0,456873878894	-0,000066311455
16384	1,248314753027	0,825406109723	0,000020492116	-0,456807792778	-0,000132397571
32768	1,362888720595	0,825420019766	0,000006582073	-0,456871418230	-0,000068772119
65536	1,757260298418	0,825428416468	-0,000001814629	-0,456903036878	-0,000037153471
131072	-12,683267165180	0,825443398339	-0,000016796500	-0,456942790823	0,000002600474
262144	0,364721526644	0,825424773835	0,000001828004	-0,456938656910	-0,000001533439

$x_3 = 0{,}803117455831 e^{i\ 1{,}001199006778}$

Таблица 24

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
512	-2,280021596471	0,806765010965	-0,003647555134	0,997114190052	0,004084816726
1024	2,607558659957	0,804604602025	-0,001487146194	0,999212757746	0,001986249032
2048	0,570672482167	0,803593796442	-0,000476340611	0,999759383532	0,001439623246
4096	2,199279604916	0,803409813296	-0,000292357465	1,000795771922	0,000403234856
8192	0,482147444613	0,803208454960	-0,000090999129	1,000861376365	0,000337630413
16384	1,375929997324	0,803187670319	-0,000070214488	1,001087560897	0,000111445881
32768	0,114092330070	0,803101563195	0,000015892636	1,001101001969	0,000098004809
65536	0,380439854952	0,803125565148	-0,000008109317	1,001155779437	0,000043227341
131072	0,945472447856	0,803125717846	-0,000008262015	1,001182991011	0,000016015767
262144	-0,722133903349	0,803119357446	-0,000001901615	1,001196552841	0,000002453937

$x_4 = = 0{,}803117455831 e^{-i\ 1{,}001199006778}$

Таблица 25

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 -φ_i
512	3,145523522689	0,805658148060	-0,002540692229	-0,987749655277	-0,013449351501
1024	-1,741305706103	0,803668283995	-0,000550828164	-1,000561223006	-0,000637783772
2048	0,295558743191	0,802805509697	0,000311946134	-1,000325819443	-0,000873187335
4096	-1,333048379460	0,803185355162	-0,000067899331	-1,001058241309	-0,000140765469
8192	0,384083780843	0,803046038605	0,000071417226	-1,000987923511	-0,000211083267
16384	-0,509698771868	0,803109166408	0,000008289423	-1,001149736387	-0,000049270391
32768	0,752138895386	0,803102486140	0,000014969691	-1,001131819300	-0,000067187478
65536	0,485791370504	0,803108804314	0,000008651517	-1,001171122115	-0,000027884663
131072	-0,079241222399	0,803114513403	0,000002942428	-1,001190645959	-0,000008360819
262144	1,588365128806	0,803117384671	0,000000071160	-1,001188379054	-0,000010627724

$x_5 = 0{,}793437553091 e^{i\ 1{,}538839963489}$

Таблица 26

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 -φ_i
1024	0,608381596801	0,795725006843	-0,002287453752	1,532064362573	0,006775600916
2048	-1,885423103804	0,794258193478	-0,000820640387	1,538000723140	0,000839240349
4096	5,934520784572	0,793789467688	-0,000351914597	1,538347522837	0,000492440652
8192	0,345563212352	0,793503124428	-0,000065571337	1,538475414721	0,000364548768
16384	5,178461769283	0,793514348854	-0,000076795763	1,538731104480	0,000108859009
32768	0,310509549331	0,793450656739	-0,000013103648	1,538753236258	0,000086727231
65536	3,414538945359	0,793456014596	-0,000018461505	1,538812388763	0,000027574726
131072	0,178581191950	0,793437672195	-0,000000119104	1,538817427087	0,000022536402
262144	1,352889275418	0,793441786197	-0,000004233106	1,538831941630	0,000008021859

$x_6 = 0{,}793437553091 e^{-i\ 1{,}538839963489}$

Таблица 27

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
1024	-0,560908404893	0,790920736131	0,002516816960	-1,536273330602	-0,002566632887
2048	1,936146087101	0,793207766367	0,000229786724	-1,536845397541	-0,001994565948
4096	-5,883818657794	0,793589152295	-0,000151599204	-1,538795237483	-0,000044726006
8192	-0,294861085546	0,793302161778	0,000135391313	-1,538679673273	-0,000160290216
16384	-5,127759642477	0,793463909687	-0,000026356596	-1,538828963238	-0,000011000251
32768	-0,259807422524	0,793405426725	0,000032126366	-1,538801160552	-0,000038802937
65536	-3,363836818552	0,793438999338	-0,000001446247	-1,538836108049	-0,000003855440
131072	-0,127879065143	0,793429384926	0,000008168165	-1,538829226748	-0,000010736741
262144	-1,302187148612	0,793435450039	0,000002103052	-1,538837826625	-0,000002136864

В табл. 28 приведены результаты вычисления всех комплексных корней уравнения (56) методом Рутисхаузера – Никипорца при использовании 262144 подходящих дробей.

Таблица 28

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_1	0,825429065048	-0,000002463209	0,456937352336	0,000002838013
x_2	0,825424773835	0,000001828004	-0,456938656910	-0,000001533439
x_3	0,803119357446	-0,000001901615	1,001196552841	0,000002453937
x_4	0,803117384671	0,000000071160	-1,001188379054	-0,000010627724
x_5	0,793441786197	-0,000004233106	1,538831941630	0,000008021859
x_6	0,793435450039	0,000002103052	-1,538837826625	-0,000002136864
x_7	0,788344701400	0,000002516973	2,074006033078	0,000002785567
x_8	0,788348270999	-0,000001052626	-2,074013993125	0,000005174480
x_9	0,785766735307	0,000001486384	2,608035936604	0,000000984810
x_{10}	0,785770848718	-0,000002627027	-2,608046034429	0,000009113015

Из табл. 22-27 видно, что точность вычислений комплексно – сопряженных корней при использовании r/φ–алгоритма, то есть формул (54) и (55) растет не монотонно, а асимптотически.

В табл. 29 и 30 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней уравнения (56), проведённые по алгоритму Рутисхаузера с использованием r/φ–алгоритма, причем, счет всякий раз заканчивался на подходящей дроби, которая обеспечивала все более высокую точность в определении модуля или аргумента комплексных корней.

Подходящие дроби, обеспечивающие минимальную погрешность при нахождении корней уравнения (56)

$x_1 = 0{,}825426601839e^{i0{,}456940190349}(32/5\cdot 10^5)$ $(47/5\cdot 10^5)$ Таблица 29

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
92	1,748288608906	1,748288608906	-0,922862007067	92	1,748288608906	0,000000000000	0,456940190349
93	1,057987226873	1,360024638420	-0,534598036581	97	-0,225256697625	0,523598775598	-0,066658585250
94	0,626450490050	1,050332414569	-0,224905812731	98	4,603222029519	0,448798950513	0,008141239836
95	0,596001495733	0,911605451898	-0,086178850059	112	3,187456387990	0,448798950513	0,008141239836
96	0,387128927720	0,768098038402	0,057328563437	125	-1,232960285667	0,461998919646	-0,005058729297
98	4,603222029519	0,832536482327	-0,007109880488	132	-3,893729750860	0,459745266379	-0,002805076030
130	0,492350517322	0,827745904627	-0,002319302788	139	-9,591033570563	0,458148928649	-0,001208738300
139	-9,591033570563	0,825866392681	-0,000439790842	146	41,155454418202	0,456958931431	-0,000018741083
146	41,155454418202	0,825792504227	-0,000365902388	366	18,518344465237	0,456958931431	-0,000018741083
199	0,440064029138	0,825106199300	0,000320402539	1638	7,500697316787	0,456922008441	0,000018181908
249	-9,694806469504	0,825153702738	0,000272899101	1693	7,632941121776	0,456923276084	0,000016914265
254	0,445996503359	0,825311772638	0,000114829201	1748	7,770447013883	0,456924459575	0,000015730774
309	0,447362598714	0,825350405554	0,000076196285	1803	7,913535752808	0,456925567023	0,000014623325
364	0,447812262965	0,825370437326	0,000056164513	1858	8,062554708883	0,456926605531	0,000013584818
419	0,448381360182	0,825385271083	0,000041330756	1913	8,217880681087	0,456927581340	0,000012609009
584	0,450237996401	0,825410187216	0,000016414623	2903	12,830560909516	0,456938618534	0,000001571814
639	0,450851602002	0,825415123272	0,000011478567	2958	13,259300689930	0,456939008213	0,000001182136
694	0,451464343664	0,825419151352	0,000007450487	3013	13,719538578662	0,456939383222	0,000000807126
749	0,452076083547	0,825422498736	0,000004103103	3068	14,214879130062	0,456939744375	0,000000445974
804	0,452686817706	0,825425323009	0,000001278830	3123	14,749498703680	0,456940092425	0,000000097923
859	0,453296556501	0,825427736601	-0,000001134763	6210	15,156711120725	0,456940261758	-0,000000071409
2071	-31,166196446794	0,825426911032	-0,000000309193	9242	14,989144312193	0,456940205653	-0,000000015304
3891	0,453121026736	0,825426696132	-0,000000094293	12274	14,825425778543	0,456940177474	0,000000012875
6923	0,452945414628	0,825426579113	0,000000022726	21425	14,902179825073	0,456940189561	0,000000000788
8190	-29,989602364170	0,825426584123	0,000000017715	94578	14,951738534144	0,456940191119	-0,000000000771
16074	0,453028260100	0,825426607284	-0,000000005446	115912	14,942417736941	0,456940190832	-0,000000000484
29524	-30,033255554774	0,825426597952	0,000000003887	137246	14,933109150470	0,456940190634	-0,000000000286
37408	0,453018318141	0,825426603392	-0,000000001553	158580	14,923812750748	0,456940190490	-0,000000000141
58742	0,453008375918	0,825426602331	-0,000000000492	179914	14,914528513853	0,456940190380	-0,000000000031
80076	0,452998433431	0,825426601836	0,000000000002	381071	14,908334342973	0,456940190334	0,000000000015

$x_2 = 0{,}825426601839e^{-i\,0{,}456940190349}$ $(36/5\cdot 10^5)$ $(46/5\cdot 10^5)$ Таблица 30

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
134	0,421172232845	0,421172232845	0,404254368993	134	0,421172232845	0,000000000000	-0,456940190349
135	0,665672453807	0,529492921306	0,295933680532	140	-0,071851143765	-0,448798950513	-0,008141239836
136	0,842505033357	0,618155314009	0,207271287830	154	0,173515866582	-0,448798950513	-0,008141239836
137	1,024280054369	0,701338829563	0,124087772276	167	-1,035514354746	-0,461998919646	0,005058729297
138	1,408804725631	0,806329348409	0,019097253430	174	-0,683485055893	-0,459745266379	0,002805076030
140	-0,071851143765	0,829476768467	-0,004050166628	181	-0,422874832878	-0,458148928649	0,001208738300
188	-0,178384745064	0,825805189954	-0,000378588115	188	-0,178384745064	-0,456958931431	0,000018741083
195	-0,081725242039	0,825149727317	0,000276874522	408	-0,219514601064	-0,456958931431	0,000018741083
305	-0,070682998083	0,825180644049	0,000245957790	1680	-0,130929168810	-0,456922008441	-0,000018181908
317	1,657185840613	0,825661322018	-0,000234720179	1735	-0,133461332678	-0,456923276084	-0,000016914265
360	-0,073603644302	0,825254921535	0,000171680304	1790	-0,136006058298	-0,456924459575	-0,000015730774
415	-0,075975399965	0,825295722448	0,000130879391	1845	-0,138563444825	-0,456925567023	-0,000014623325
470	-0,078216882713	0,825322575893	0,000104025945	1900	-0,141133592458	-0,456926605531	-0,000013584818
525	-0,080488877829	0,825342030260	0,000084571578	1955	-0,143716602454	-0,456927581340	-0,000012609009
580	-0,082779518189	0,825356739110	0,000069862729	2010	-0,146312577140	-0,456928499963	-0,000011690386
965	-0,099110859139	0,825405413378	0,000021188461	2945	-0,192532390267	-0,456938618534	-0,000001571814
1020	-0,101488292563	0,825408942333	0,000017659506	3000	-0,195380538121	-0,456939008213	-0,000001182136
1075	-0,103877087756	0,825412065125	0,000014536714	3055	-0,198243818709	-0,456939383222	-0,000000807126
1130	-0,106277331465	0,825414848997	0,000011752842	3110	-0,201122359090	-0,456939744375	-0,000000445974
1185	-0,108689111329	0,825417347131	0,000009254708	3165	-0,204016287746	-0,456940092425	-0,000000097923
1240	-0,111112515880	0,825419602140	0,000006999699	6252	-0,206086087603	-0,456940261758	0,000000071409
1295	-0,113547634552	0,825421648569	0,000004953270	9284	-0,205247735875	-0,456940205653	0,000000015304
1350	-0,115994557700	0,825423514720	0,000003087119	12316	-0,204410676278	-0,456940177474	-0,000000012875
1405	-0,118453376602	0,825425223998	0,000001377841	21467	-0,204805351605	-0,456940189561	-0,000000000788
1460	-0,120924183483	0,825426795931	-0,000000194092	94620	-0,205058073443	-0,456940191119	0,000000000771
1472	1,602050488512	0,825426575391	0,000000026448	115954	-0,205010668184	-0,456940190832	0,000000000484
13643	-0,120547410870	0,825426598233	0,000000003606	137288	-0,204963267062	-0,456940190634	0,000000000286
22806	1,602090850265	0,825426601724	0,000000000115	158622	-0,204915870079	-0,456940190490	0,000000000141
172132	-0,120601175773	0,825426601810	0,000000000029	179956	-0,204868477232	-0,456940190380	0,000000000031
351955	-0,120614580579	0,825426601856	-0,000000000017	381113	-0,204836825896	-0,456940190334	-0,000000000015

Над табл. 29 и 30 в скобках указано число «оптимальных» подходящих дробей, обеспечивающих все увеличивающую точность при вычислении модуля и аргумента комплексных корней и число подходящих дробей ($5\cdot 10^5$), используемых при вычислениях.

Аналогично находятся последующие корни уравнения. В табл. 31 приведены значения неизвестных x_1-x_{10}, найденные при помощи r/φ– алгоритма, а также указаны погрешности в определении модуля и аргумента комплексных корней уравнения (56) при использовании "оптимальных" подходящих дробей.

Таблица 31

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
x_1	0,825426601836	0,000000000002	0,456940190334	0,000000000015
x_2	0,825426601856	-0,000000000017	-0,456940190334	-0,000000000015
x_3	0,803117455858	-0,000000000028	1,001198659616	0,000000347162
x_4	0,803117455818	0,000000000013	-1,001198659616	-0,000000347162
x_5	0,793437553088	0,000000000003	1,538839922273	0,000000041217
x_6	0,793437553108	-0,000000000017	-1,538839922273	-0,000000041217
x_7	0,788347218371	0,000000000002	2,074008818669	-0,000000000024
x_8	0,788347218370	0,000000000003	-2,074008818669	0,000000000024
x_9	0,785768221695	-0,000000000003	2,608036921831	-0,000000000417
x_{10}	0,785768221686	0,000000000006	-2,608036921831	0,000000000417

В табл. 32 приведены результаты вычисления действительного корня уравнения (56).

x_{11}= -0,784972055437 Таблица 32

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i
1	-0,916666666667	0,131694611230	123944	-0,784972055437	8,5498338481e-59
48	-0,813233087675	0,028261032239	125469	-0,784972055437	-1,7957810208e-59
201	-0,775745652098	-0,009226403338	126994	-0,784972055437	3,7700977163e-60
307	-0,782481821950	-0,002490233487	128519	-0,784972055437	-7,9222226692e-61
413	-0,785075716521	0,000103661084	130044	-0,784972055437	1,6553835584e-61
2680	-0,785060327905	0,000088272468	131569	-0,784972055437	-3,5476739699e-62
3416	-0,784895106504	-0,000076948933	133094	-0,784972055437	6,7024024827e-63
3469	-0,784951267112	-0,000020788325	134619	-0,784972055437	-2,1459203405e-63
4205	-0,784958725019	-0,000013330417	136144	-0,784972055437	-2,9018970939e-64
4994	-0,784976263487	0,000004208050	136880	-0,784972055437	1,3525126582e-64
5730	-0,784975005020	0,000002949583	138352	-0,784972055437	-3,9252884410e-65
6519	-0,784971152090	-0,000000903347	139035	-0,784972055437	-2,1946526478e-65
7255	-0,784971428208	-0,000000627228	140189	-0,784972055437	1,0475476088e-65
8044	-0,784972246047	0,000000190610	141025	-0,784972055437	3,5805359479e-66
8780	-0,784972189920	0,000000134483	142115	-0,784972055437	-5,6138873021e-67

На рис. 17 показано распределение корней уравнения (56) на комплексной плоскости, а также порядок их получения. В данном примере корни располагаются в порядке уменьшения модуля.

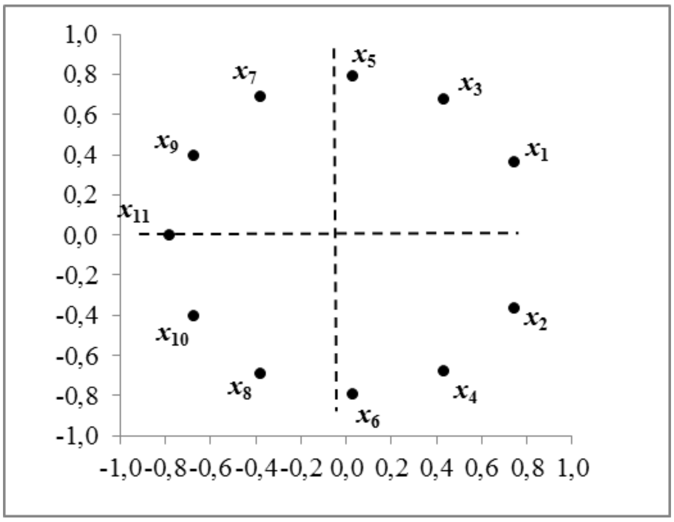


Рис 17. Расположение корней уравнения (56) на комплексной плоскости.

Рассмотрим ещё пример решение уравнения

$$x^{11}+\frac{1}{11}x^{10}+\frac{1}{10}x^{9}+\frac{1}{9}x^{8}+\frac{1}{8}x^{7}+\frac{1}{7}x^{6}+\frac{1}{6}x^{5}+\frac{1}{5}x^{4}+\frac{1}{4}x^{3}+\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{2}x+1=0 \qquad (57)$$

модифицированным методом Рутисхаузера-Никипорца.

Начальные условия для рассматриваемого уравнения будут иметь следующие значения:

$$x_1^{(0)}=-\frac{1}{11},\quad x_m^{(0)}=0,\quad m=2,3,...,11,$$

$$e_1^{(0)}=\frac{11}{10},\ e_2^{(0)}=\frac{10}{9},\ \ldots,e_{10}^{(0)}=2\,.$$

На рис. 18 показаны графики распределения подходящих непрерывных дробей, которые представляют корни алгебраического уравнения (57). Из графиков видно, что x_{11} – вещественный корень. Также из графиков можно заключить, что уравнение (57) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней.

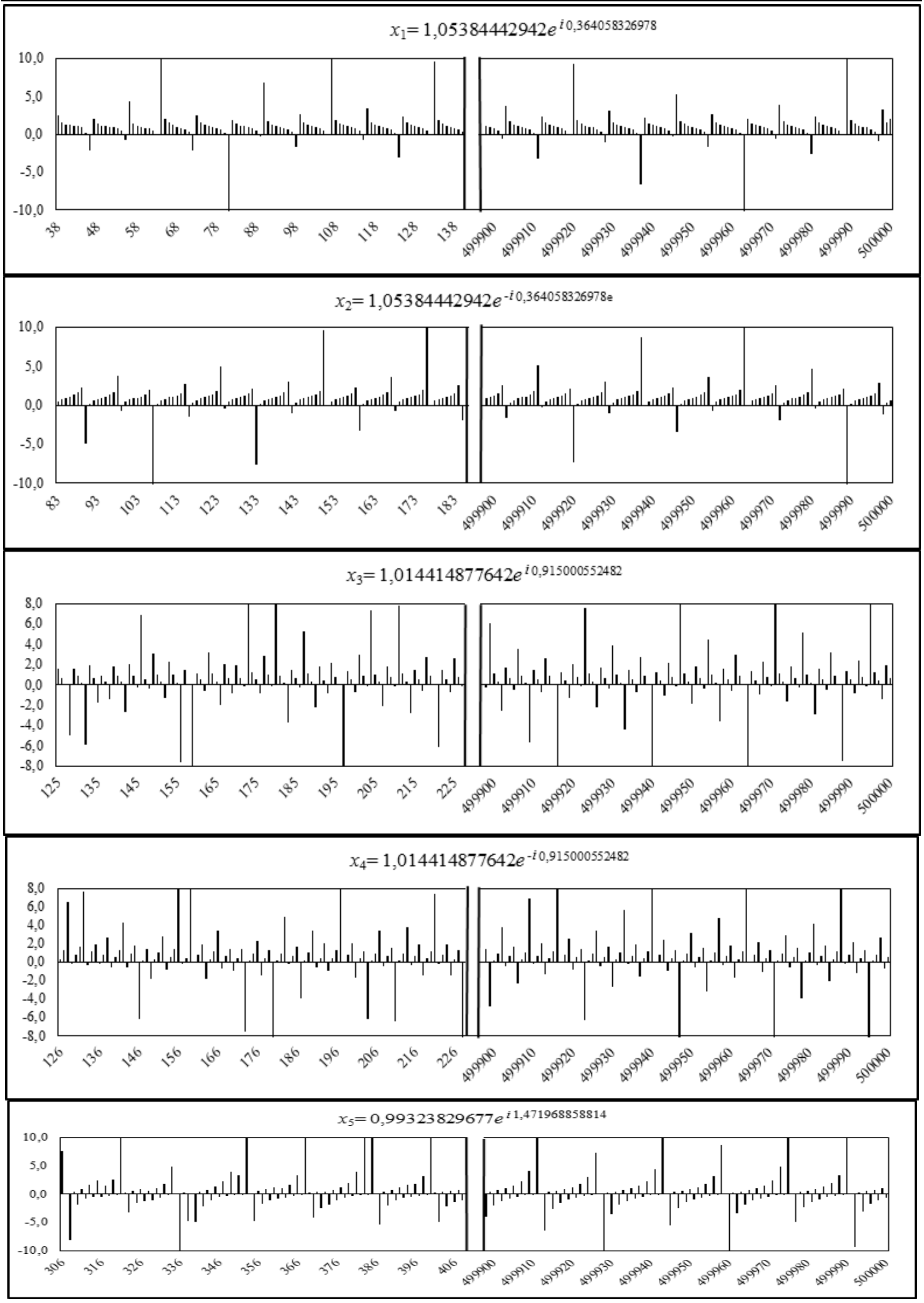


Рис.18.Графики подходящих дробей $\overline{x}_i^{(m)}$, представляющих корни уравнения(57).

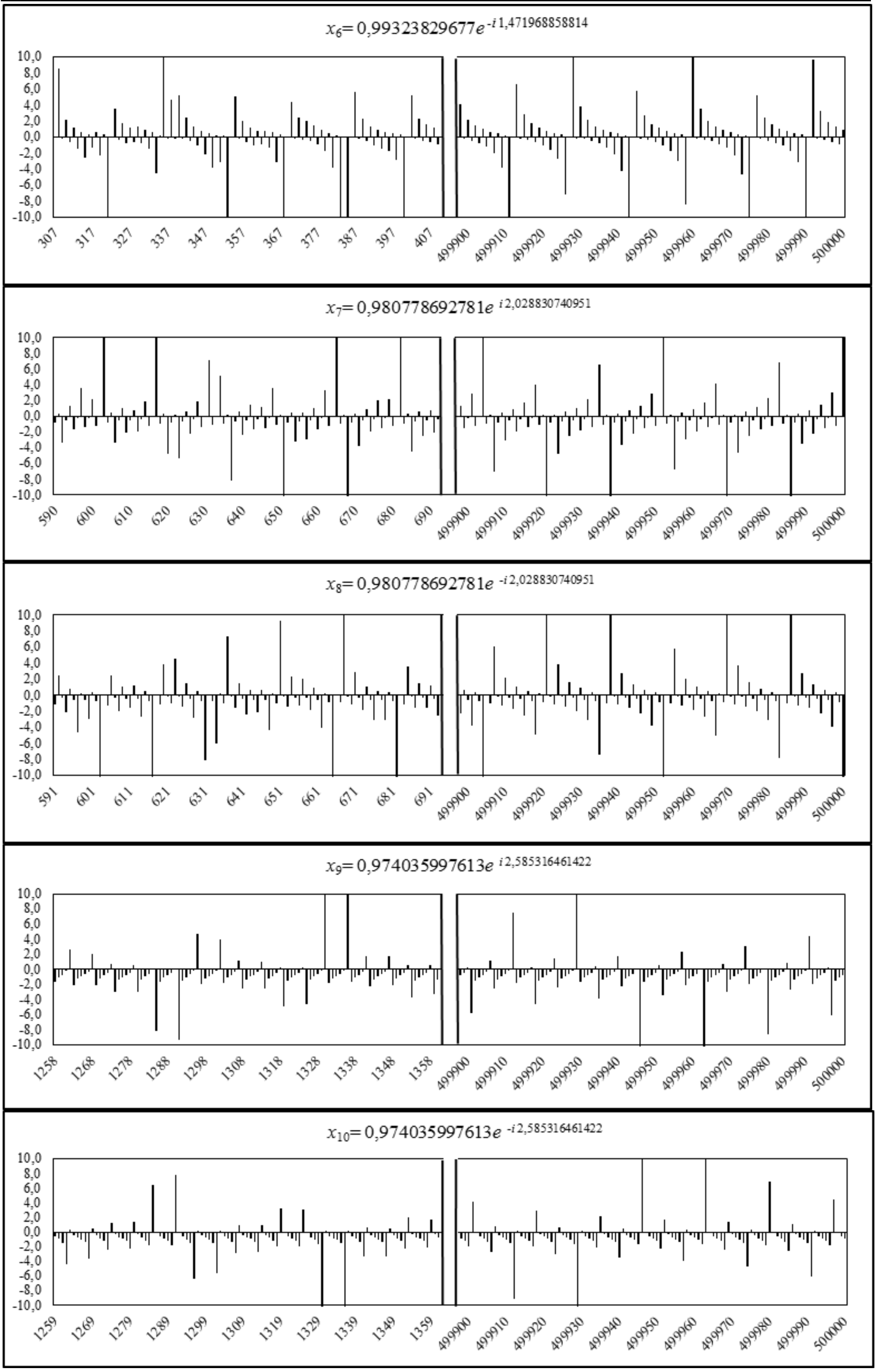


Рис. 18(продолжение). Графики подходящих дробей $\overline{x}_i^{(m)}$, представляющих корни уравнения (57).

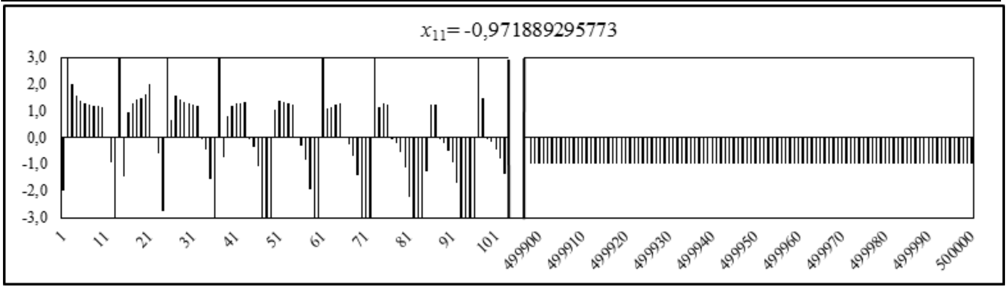


Рис. 18 (окончание). Графики подходящих дробей $\overline{x}_i^{(m)}$, представляющих корни уравнения (57).

В табл. 33 – 38 приведены значения трех пар комплексных корней уравнения (57), найденных при помощи алгоритма Рутисхаузера- Никипорца с учетом числа подходящих дробей, равных степени “2”.

x_1= 1,05384442942$e^{i0,36405832698}$

Таблица 33

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
128	1,054507178103	1,073853743873	-0,020009314453	0,345229961933	0,018828365045
256	1,317820976181	1,061865876899	-0,008021447479	0,358629298355	0,005429028623
512	-0,828959226613	1,053602845593	0,000241583827	0,363763359889	0,000294967089
1024	1,321201095664	1,055617060470	-0,001772631050	0,362858725947	0,001199601031
2048	-0,742566917574	1,053754164529	0,000090264891	0,363993579456	0,000064747522
4096	1,334850046687	1,054273158934	-0,000428729514	0,363771507068	0,000286819910
8192	-0,463497097206	1,053782817629	0,000061611791	0,364047217369	0,000011109609
16384	1,395020142494	1,053948546961	-0,000104117541	0,363991954848	0,000066372130
32768	0,126014286523	1,053802205771	0,000042223649	0,363964417293	0,000093909685
65536	1,816103360890	1,053866693194	-0,000022263774	0,364046599807	0,000011727171
131072	0,767373717517	1,053854608949	-0,000010179529	0,364039705820	0,000018621158
262144	0,650767632038	1,053848264573	-0,000003835153	0,364048246203	0,000010080775

x_2=1,05384442942$e^{-i0,36405832698}$

Таблица 34

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
128	0,887210361582	1,031313327822	0,022531101598	-0,341477462347	-0,022580864633
256	0,651684700934	1,049586751352	0,004257678068	-0,361102603861	-0,002955723119
512	2,798509051504	1,055320705206	-0,001476275786	-0,357995441921	-0,006062885059
1024	0,648348731928	1,053062019016	0,000782410404	-0,363517621275	-0,000540705705
2048	2,712116745167	1,054142098801	-0,000297669381	-0,362737300287	-0,001321026693
4096	0,634699780905	1,053665517006	0,000178912414	-0,363936368689	-0,000121958291
8192	2,433046924798	1,053894908224	-0,000050478804	-0,363742971852	-0,000315355128
16384	0,574529685099	1,053805550388	0,000038879032	-0,364033156829	-0,000025170151
32768	1,843535541069	1,053841872742	0,000002556678	-0,363984928689	-0,000073398291
65536	0,153446466702	1,053842716094	0,000001713326	-0,364056899158	-0,000001427822
131072	1,202176110075	1,053837592027	0,000006837393	-0,364044849903	-0,000013477077
262144	1,318782195554	1,053841603071	0,000002826349	-0,364050818906	-0,000007508074

x_3= 1,01441487764$e^{i\ 0,91500055248}$

Таблица 35

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
128	-5,001105560939	0,897946422759	0,116468454881	0,785398163397	0,129602389083
256	2,159407549860	1,016970284055	-0,002555406415	0,904397885124	0,010602667356
512	-0,066070648870	1,007490263991	0,006924613649	0,914948375917	0,000052176563
1024	-0,916542125543	1,013825631349	0,000589246291	0,914552528045	0,000448024435
2048	3,378075892858	1,014560162118	-0,000145284478	0,914392872147	0,000607680333
4096	0,417890734044	1,014269169056	0,000145708584	0,914320520531	0,000680031949
8192	0,483179359847	1,014363433367	0,000051444273	0,914675401993	0,000325150487
16384	0,609494401972	1,014404708400	0,000010169240	0,914848783195	0,000151769285
32768	0,867098284881	1,014419351110	-0,000004473470	0,914934485899	0,000066066581
65536	1,678760693123	1,014420250805	-0,000005373165	0,914977093554	0,000023458926
131072	-0,567924422813	1,014408589722	0,000006287918	0,914998336861	0,000002215619
262144	14,628661399611	1,014415479960	-0,000000602320	0,914996953538	0,000003598942

$x_4 = 1{,}01441487764e^{-i\,0{,}91500055248}$ Таблица 36

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
128	6,478631380489	1,403065549847	-0,388650672207	0,000000000000	-0,915000552480
256	-0,896972863806	1,016199195524	-0,001784317884	-0,911301685774	-0,003698866706
512	1,303363016583	1,013720963695	0,000693913945	-0,909194773132	-0,005805779348
1024	2,153702501294	1,014675192587	-0,000260314947	-0,912075286526	-0,002925265954
2048	-2,140915517306	1,014803546527	-0,000388668887	-0,914868375460	-0,000132177020
4096	0,819269641507	1,014285347794	0,000129529846	-0,914550769970	-0,000449782510
8192	0,753981015705	1,014349072352	0,000065805288	-0,914788786821	-0,000211765659
16384	0,627665973580	1,014381358967	0,000033518673	-0,914905050418	-0,000095502062
32768	0,370062090670	1,014399598240	0,000015279400	-0,914962514404	-0,000038038076
65536	-0,441600317571	1,014414357485	0,000000520155	-0,914991081676	-0,000009470804
131072	1,805084798365	1,014415193736	-0,000000316096	-0,914981333078	-0,000019219402
262144	-13,391501024060	1,014423868478	-0,000008990838	-0,915000445640	-0,000000106840

$x_5 = 0{,}99323829677\ e^{i\ 1{,}47196885881}$ Таблица 37

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
512	0,126774137456	0,993003817855	0,000234478915	1,456970506013	0,014998352797
1024	0,479754573170	0,994931202783	-0,001692906013	1,468115621149	0,003853237661
2048	1,770013472826	0,994335216083	-0,001096919313	1,470762825777	0,001206033033
4096	-0,856489070786	0,993642934072	-0,000404637302	1,471766961956	0,000201896854
8192	-2,743937660609	0,993480696801	-0,000242400031	1,471812457844	0,000156400966
16384	1,537828535097	0,993355026810	-0,000116730040	1,471833911281	0,000134947529
32768	-1,156165832116	0,993290123620	-0,000051826850	1,471941110221	0,000027748589
65536	-15,353643503736	0,993268877612	-0,000030580842	1,471945796809	0,000023062001
131072	0,548388252069	0,993248424193	-0,000010127423	1,471948123707	0,000020735103
262144	2,336137086133	0,993245771698	-0,000007474928	1,471961281275	0,000007577535

$x_6 = 0{,}99323829677\ e^{-i\ 1{,}47196885881}$ Таблица 38

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0 - φ_i
512	0,081307746087	0,983387670295	0,009850626475	-1,464043178372	-0,007925680438
1024	-0,283751785215	0,990521884093	0,002716412677	-1,470160350426	-0,001808508384
2048	-1,574014434222	0,992462965836	0,000775330934	-1,471607121314	-0,000361737496
4096	1,052488109338	0,992791184053	0,000447112717	-1,471326374702	-0,000642484108
8192	2,939936699161	0,993122096128	0,000116200642	-1,471600718027	-0,000368140783
16384	-1,341829496546	0,993147696627	0,000090600143	-1,471925454627	-0,000043404183
32768	1,352164870667	0,993190682609	0,000047614161	-1,471889676189	-0,000079182621
65536	15,549642542287	0,993249191988	-0,000010895218	-1,471920200506	-0,000048658304
131072	-0,352389213517	0,993223549619	0,000014747151	-1,471959380059	-0,000009478751
262144	-2,140138047581	0,993234012207	0,000004284563	-1,471966902924	-0,000001955886

Из табл. 33-38 видно, что точность вычислений комплексных корней при использовании r/φ– алгоритма, то есть формул (54) и (55) растет не монотонно, а асимптотически.

В табл. 39 приведены результаты вычисления корней уравнения (57) методом Рутисхаузера – Никипорца при использовании 262144 подходящих дробей.

Таблица 39

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,053848264573	-0,000003835153	0,364048246203	0,000010080775
x_2	1,053841603071	0,000002826349	-0,364050818906	-0,000007508074
x_3	1,014415479960	-0,000000602320	0,914996953538	0,000003598942
x_4	1,014423868478	-0,000008990838	-0,915000445640	-0,000000106840
x_5	0,993245771698	-0,000007474928	1,471961281275	0,000007577535
x_6	0,993234012207	0,000004284563	-1,471966902924	2,465205199694
x_7	0,980757152965	0,000021539815	2,028825894020	0,000004846930
x_8	0,980779037527	-0,000000344747	-2,028833650835	0,000002909885
x_9	0,974021170824	0,000014826786	2,585313986456	0,000002474964
x_{10}	0,974036275440	-0,000000277830	-2,585323896202	0,000007434782

В табл.40 и 41 приведены результаты вычислений первой пары комплексно – сопряженных корней уравнения (57), проведённые по алгоритму Рутисхаузера с использованием r/φ– алгоритма, причем, счет всякий раз заканчивался на подходящих дробях, которые обеспечивали все более высокую точность в определении модуля и аргумента комплексных корней.

Над табл. 40 и 41 в скобках указано число “оптимальных” подходящих дробей, обеспечивающих все увеличивающую точность при вычислении модуля и аргумента корней и общее число ($5\cdot10^5$) подходящих используемых при вычислениях .

x_1= 1,05384442942$e^{\,i\,0,364058326978}$ ($25/5\cdot10^5$) ($20/5\cdot10^5$) Таблица 40

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
38	2,443121823327	2,443121823327	-1,389277393907	38	2,443121823327	0,000000000000	0,364058326978
39	1,517754087318	1,925631878935	-0,871787449515	46	-2,106716097540	0,349065850399	0,014992476579
40	1,303962654821	1,690975164890	-0,637130735471	63	-0,114107191177	0,362491460030	0,001566866948
41	1,211769799384	1,555814995436	-0,501970566016	106	-0,063380903483	0,364242626503	-0,000184299525
42	1,157217762313	1,466389629739	-0,412545200319	201	-0,113505728002	0,363965002550	0,000093324428
43	1,098022622149	1,397364476473	-0,343520047053	270	-0,070761731556	0,364047217369	0,000011109609
44	0,941853085530	1,320792151043	-0,266947721623	805	-0,046176238688	0,364064773658	-0,000006446680
45	0,197740480972	1,041698689407	0,012145740013	1038	-0,054539012008	0,364060687129	-0,000002360151
55	-0,821735291237	1,051674598027	0,002169831393	1271	-0,063022565703	0,364058143811	0,000000183166
115	-0,740254909378	1,051796731776	0,002047697644	7208	-0,058227854955	0,364058498833	-0,000000171855
140	0,360157091765	1,053735645003	0,000108784417	8442	-0,058968406028	0,364058446710	-0,000000119732
373	0,362503206214	1,053843195246	0,000001234174	9676	-0,059709888856	0,364058407932	-0,000000080954
1607	0,362183925583	1,053843321675	0,000001107745	10910	-0,060452305275	0,364058377957	-0,000000050979
2841	0,361865508033	1,053843337631	0,000001091789	12144	-0,061195657125	0,364058354092	-0,000000027114
3377	-1,013017339698	1,053843981851	0,000000447569	13378	-0,061939946251	0,364058334641	-0,000000007663
4611	-1,015509242559	1,053844391228	0,000000038192	27953	-0,062347975822	0,364058326206	0,000000000772
13714	0,362645944961	1,053844442440	-0,000000013020	97126	-0,062153041589	0,364058327365	-0,000000000387
32527	-1,015747180070	1,053844427915	0,000000001505	125042	-0,062224090456	0,364058327106	-0,000000000128
41630	0,362615624510	1,053844430677	-0,000000001258	152958	-0,062295147868	0,364058326942	0,000000000036
69546	0,362585301891	1,053844428363	0,000000001057	430884	-0,062260559383	0,364058326989	-0,000000000012
157532	-1,015570297686	1,053844428516	0,000000000904				
166635	0,362638164229	1,053844430295	-0,000000000875				
185448	-1,015808249229	1,053844429330	0,000000000090				
338369	-1,015869321990	1,053844429466	-0,000000000046				
347472	0,362600061791	1,053844429384	0,000000000035				

x_2= 1,05384442942$e^{\,-i\,0,364058326978}$ ($26/5\cdot10^5$) ($23/5\cdot10^5$) Таблица 41

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
83	0,520993320705	0,520993320705	0,532851108715	83	0,520993320705	0,000000000000	-0,364058326978
84	0,742383061188	0,621913672694	0,431930756726	90	-4,867606484079	-0,392699081699	0,028640754721
85	0,926407678213	0,710265606556	0,343578822864	91	0,160533784569	-0,349065850399	-0,014992476579
86	1,126588999060	0,797089274576	0,256755154844	99	-0,668008891800	-0,369599135716	0,005540808738
87	1,343548944719	0,884822730354	0,169021699066	108	0,056866305134	-0,362491460030	-0,001566866948
88	1,604746698476	0,977120160784	0,076724268636	125	-0,373677441054	-0,365301471348	0,001243144370
89	2,299417533035	1,104189642421	-0,050345213001	151	-0,145314703127	-0,364242626503	0,000184299525
91	0,160533784569	1,050936313585	0,002908115834	246	-0,056534373453	-0,363965002550	-0,000093324428
106	2,024335853728	1,056550970877	-0,002706541457	315	-0,099661003002	-0,364047217369	-0,000011109609
134	0,117453757542	1,052672864027	0,001171565392	850	-0,126706777804	-0,364064773658	0,000006446680
149	1,844063555229	1,052789094688	0,001055334732	1083	-0,117285536620	-0,364060687129	0,000002360151
175	1,955733481018	1,054101978028	-0,000257548609	1316	-0,108006462418	-0,364058143811	-0,000000183166
244	1,918266744788	1,053788243609	0,000056185811	7253	-0,113217072864	-0,364058498833	0,000000171855
341	0,028299666094	1,053896051587	-0,000051622167	8487	-0,112406607257	-0,364058446710	0,000000119732
477	1,925127762728	1,053839038974	0,000005390446	9721	-0,111597212198	-0,364058407932	0,000000080954
807	0,042681072411	1,053843812473	0,000000616947	10955	-0,110788885485	-0,364058377957	0,000000050979
2041	0,043300147521	1,053843895925	0,000000533495	12189	-0,109981624921	-0,364058354092	0,000000027114
2945	1,926364089193	1,053844102975	0,000000326445	13423	-0,109175428316	-0,364058334641	0,000000007663
4179	1,926983294190	1,053844347235	0,000000082184	27998	-0,108734341340	-0,364058326206	-0,000000000772
5413	1,927603202433	1,053844478489	-0,000000049069	97171	-0,108944990877	-0,364058327365	0,000000000387
12914	0,041780724502	1,053844462279	-0,000000032860	125087	-0,108868197699	-0,364058327106	0,000000000128
14148	0,042400821028	1,053844416854	0,000000012566	153003	-0,108791414167	-0,364058326942	-0,000000000036
18754	1,927322717854	1,053844428933	0,000000000486	430929	-0,108828787586	-0,364058326989	0,000000000012
83321	0,042238669302	1,053844429177	0,000000000243				
171675	1,927337888783	1,053844429452	-0,000000000032				
361247	0,042209893937	1,053844429441	-0,000000000021				

Аналогично находятся последующие корни уравнения. В табл. 42 приведены значения неизвестных x_1- x_{10}, найденные при помощи r/φ – алгоритма, а также указаны погрешности в определении модуля и аргумента комплексных корней.

Таблица 42

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_1	1,053844429384	0,000000000035	0,364058326989	-0,000000000012
x_2	1,053844429441	-0,000000000021	-0,364058326989	0,000000000012
x_3	1,014414877649	-0,000000000006	0,915000552472	0,000000000010
x_4	1,014414877651	-0,000000000009	-0,915000552472	-0,000000000010
x_5	0,993238296938	-0,000000000168	1,471968664254	0,000000194560
x_6	0,993238296787	-0,000000000016	-1,471968664254	-0,000000194560
x_7	0,980778692787	-0,000000000006	2,028830740967	-0,000000000016
x_8	0,980778692784	-0,000000000002	-2,028830740967	0,000000000016
x_9	0,974035997608	0,000000000004	2,585316461419	0,000000000003
x_{10}	0,974035997610	0,000000000003	-2,585316461419	-0,000000000003

В табл. 43 приведены результаты вычисления действительного корня уравнения (57) x_{11}= -0,971889295773

Таблица 43

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i	Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0-r_i
1	-2,000000000000	1,028110704227	58690	-0,971889295773	5,0384418145E-60
11	0,007355211596	-0,979244507369	59379	-0,971889295773	1,0920796143E-60
12	-0,933462716354	-0,038426579420	60068	-0,971889295773	2,3668873941E-61
125	-0,986476398453	0,014587102680	60757	-0,971889295773	5,1293633044E-62
204	-0,960721460025	-0,011167835748	61446	-0,971889295773	1,1114802420E-62
317	-0,973105904892	0,001216609118	62135	-0,971889295773	2,4079523682E-63
814	-0,972233284460	0,000343988687	62824	-0,971889295773	5,2131279538E-64
1407	-0,971584267149	-0,000305028624	63513	-0,971889295773	1,1254162875E-64
1503	-0,971941066097	0,000051770324	64202	-0,971889295773	2,3982297263E-65
2192	-0,971901007220	0,000011711447	64891	-0,971889295773	4,7977981306E-66
2881	-0,971891872859	0,000002577086	65580	-0,971889295773	6,4225358364E-67
3570	-0,971889857843	0,000000562070	66269	-0,971889295773	-2,5779514104E-67
4259	-0,971889418116	0,000000122343	67246	-0,971889295773	-1,1730122437E-68
4948	-0,971889322391	0,000000026617	67630	-0,971889295773	4,5376159240E-69
5637	-0,971889301564	0,000000005790	68093	-0,971889295773	-1,2778694207E-70

На рис.19 показано расположение корней уравнения (57).

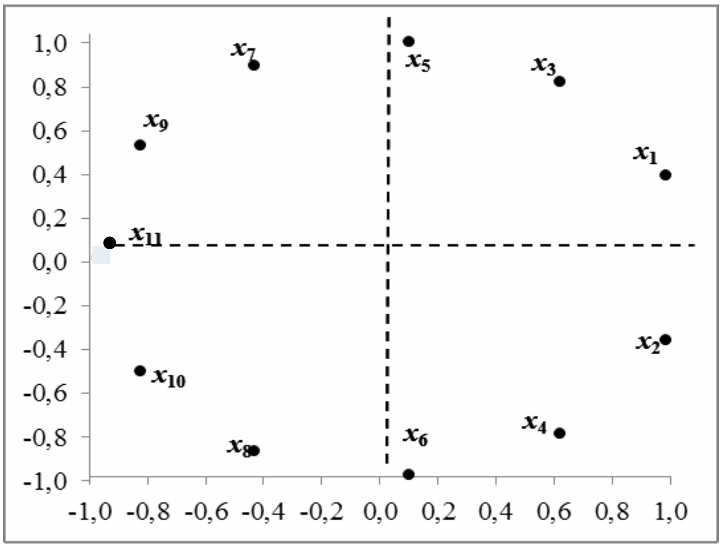


Рис 19. Расположение корней уравнения (57) на комплексной плоскости

На рис. 20 показано распределение подходящих дробей $\overline{x}_i^{(m)}$, представляющих корни алгебраического уравнения

$$x^{16} + x^{15} + 1/2x^{14} + \ldots + 1/15x + 1/16 = 0 \tag{58}$$

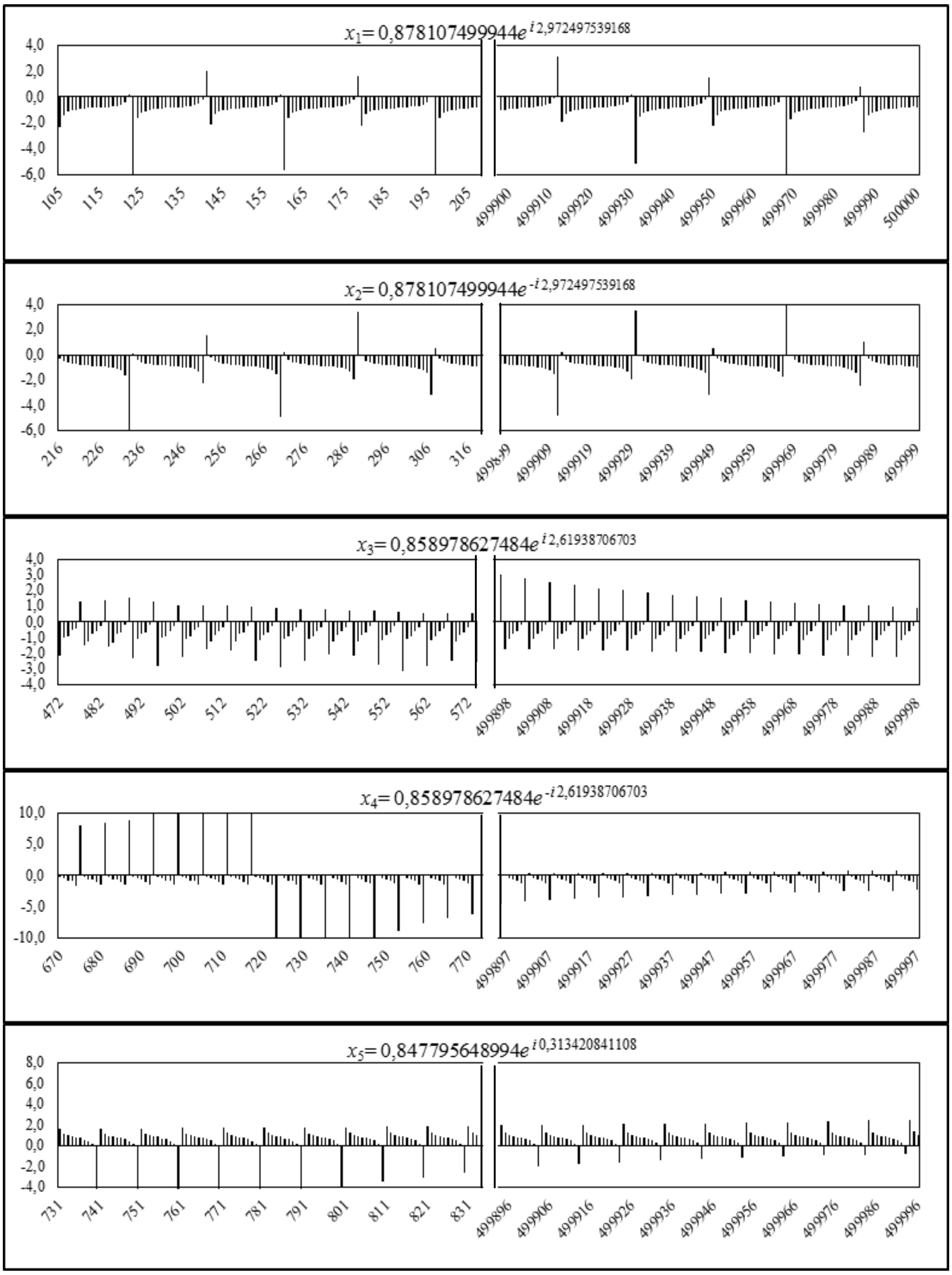


Рис.20. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (58).

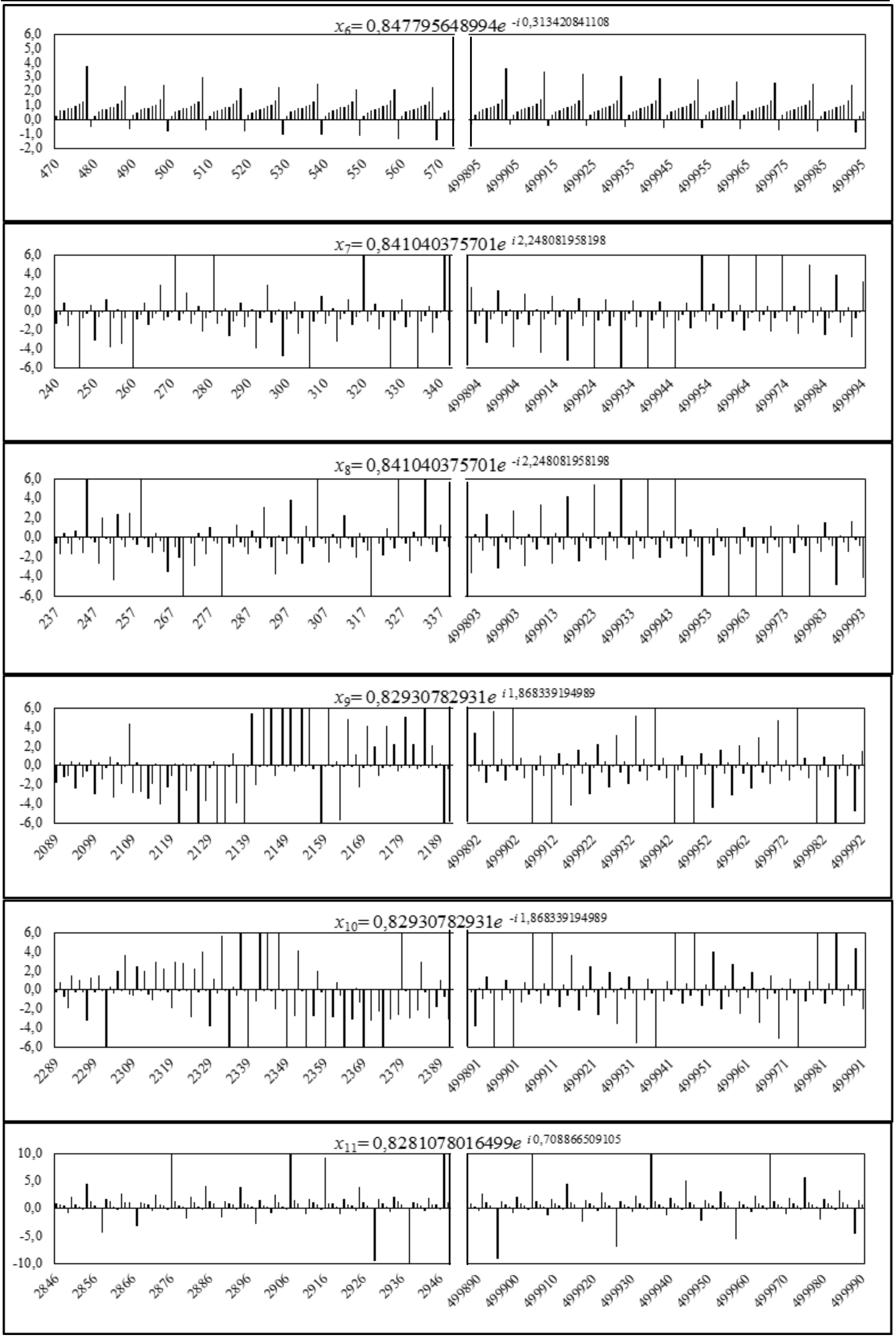


Рис.20(продолжение). Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (58).

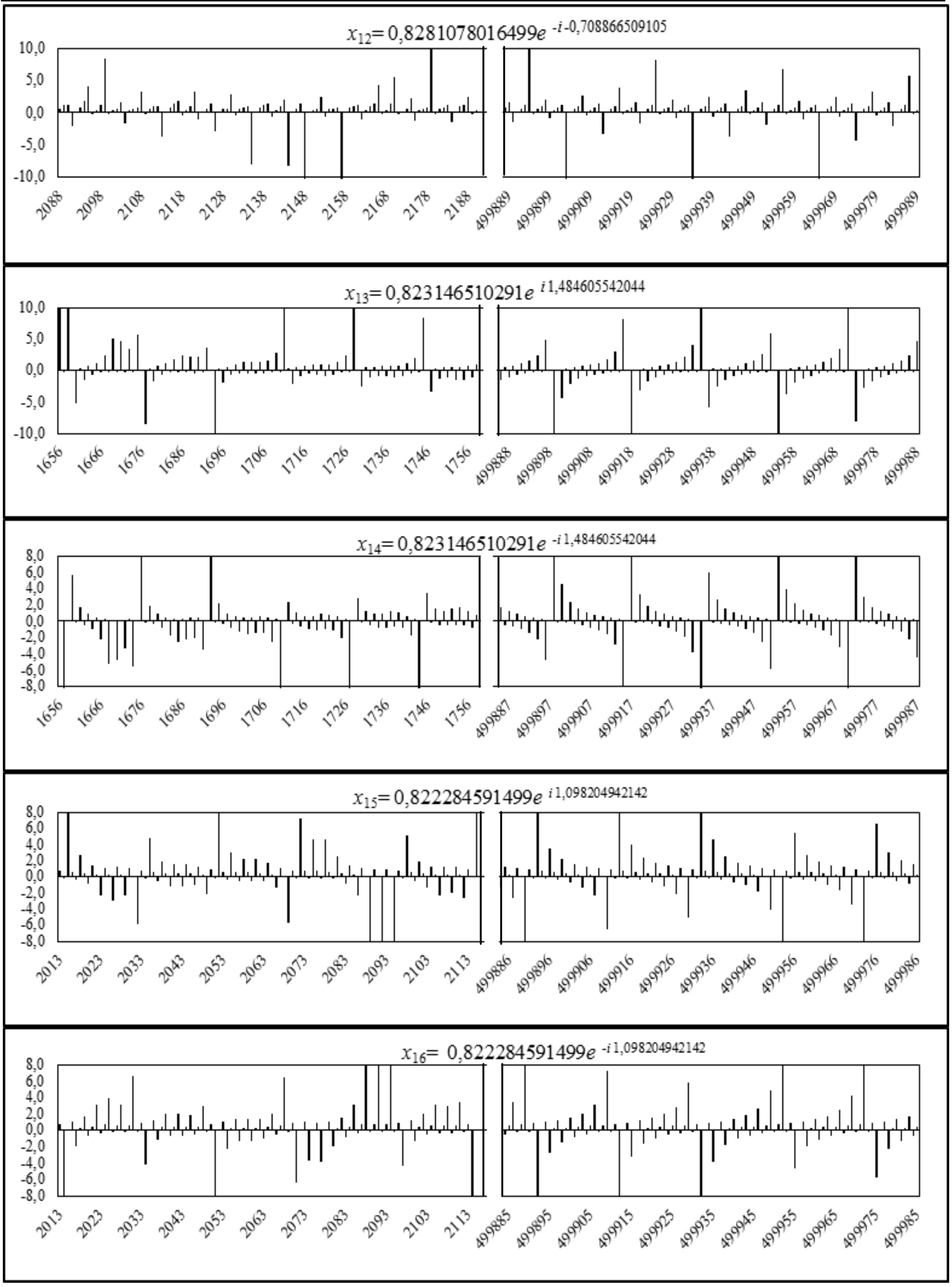


Рис.20(окончание). Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (58).

В табл. 44 приведены значения корней уравнения (58), найденные при помощи r/φ - алгоритма, а также указаны погрешности в определении модуля и аргумента комплексных корней.

Таблица 44

Номер корня, i	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$
x_1	0,878107500016	-0,000000000072	2,972497539142	0,000000000026
x_2	0,878107499951	-0,000000000007	-2,972497539142	-0,000000000026
x_3	0,858978627462	0,000000000023	2,619387067032	-0,000000000002
x_4	0,858978627469	0,000000000016	-2,619387067032	0,000000000002
x_5	0,847795648984	0,000000000010	0,313420841110	-0,000000000002
x_6	0,847795649030	-0,000000000036	-0,313420841110	0,000000000002
x_7	0,841040375700	0,000000000000	2,248081958189	0,000000000009
x_8	0,841040375691	0,000000000009	-2,248081958189	-0,000000000009
x_9	0,829307829304	0,000000000007	1,868339194998	-0,000000000009
x_{10}	0,829307829311	-0,000000000001	-1,868339194998	0,000000000009
x_{11}	0,828107801657	-0,000000000007	0,708866509148	-0,000000000043
x_{12}	0,828107801648	0,000000000002	-0,708866509148	0,000000000043
x_{13}	0,823146510385	-0,000000000094	1,484605438911	0,000000103134
x_{14}	0,823146510234	0,000000000057	-1,484605438911	-0,000000103134
x_{15}	0,822284475749	0,000000115750	1,098204942175	-0,000000000033
x_{16}	0,822284591530	-0,000000000031	-1,098204942175	0,000000000033

3.7. Тестирование метода решения алгебраических уравнений при помощи *r/φ* – алгоритма

Рассматривались уравнения со случайными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$:

$$x^{10} + a_1 x^9 + a_2 x^8 + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{59}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in [-1000000; 1000000]$.

Исследовался r/φ – алгоритм при нахождения комплексных нулей полиномов. При вычисления подходящих дробей использовался “QD-алгоритм Рутисхаузера с отрицательными индексами”, который описан в предыдущем параграфе.

Требовалось установить на десяти тысячах уравнений 10-й степени (59), достигается ли заданная точность в определении действительных и комплексных корней при помощи r/φ – алгоритма, то есть формул (54) и (55).

“Подходящие дроби” или значения конструкций (11) главы 2, называемых непрерывными дробями Никипорца, при различной размерностей определителей, входящих в конструкции (2.11) определялись с использованием реккурентного алгоритма Рутисхаузера, то есть формул (54) и (55). Результаты вычислений приведены в табл. 45. В первой колонке табл. 45 показано количество подходящих дробей, которое использовалось при определении корней 10^4 уравнений (59) со случайными коэффициентами из диапазона $[-10^6 \div 10^6]$.]. Во второй и третьих колонках табл. 45 приведены число уравнений (59), для которых была превышена заданная относительная погрешность (Δ=0,01) при определении, соответственно, действительных и комплексных корней. Аналогично, в четвертых и пятых колонках табл. 45 указано число уравнений, действительные и комплексные корни которых найдены с относительной погрешностью, превышающих величину 0,001. Относительные погрешности при вычислении корней уравнения (59) определялись по формулам:

для действительных корней , $\Delta_{i\text{д}} = \left|\frac{x_{0i} - x_i}{x_{0i}}\right|$

для комплексных корней, $\Delta r_{ik} = \left|\frac{r_{0i}-r_i}{r_{0i}}\right|$, $\Delta\varphi_i = \left|\frac{\varphi_{0i}-\varphi_i}{\varphi_{0i}}\right|$.

Комплексные корни, не удовлетворяющие заданной погрешности, могут появляться по двум причинам. Во-первых, это недостаточное для расчетов количество подходящих дробей. Второй причиной может послужить неоптимальный выбор «конечной» подходящей дроби. Выше уже отмечалось, что r/φ – алгоритм не обеспечивают монотонный рост точности с ростом числа используемых подходящих дробей.

Число уравнений, для которых не достигнута заданная относительная погрешность в определении корней

Таблица 45

Количество подходящих дробей	Число уравнений, $\Delta_д > 0{,}01$	Число уравнений, $\Delta_к > 0{,}01$	Число уравнений, $\Delta_д > 0{,}001$	Число уравнений, $\Delta_к > 0{,}001$
20000	53	40	71	49
30000	38	30	47	34
40000	30	24	37	27
50000	26	22	31	23
60000	24	19	28	19
70000	22	16	25	18
80000	17	14	22	15
90000	16	14	19	14
100000	14	10	16	11
150000	12	10	13	10
200000	7	5	8	5
250000	5	4	8	5
300000	5	4	8	5
400000	1	0	2	0
500000	1	0	1	0
600000	0	0	1	0
700000	0	0	1	0
900000	0	0	0	0

Чтобы установить, какая часть уравнений не удовлетворяла условиям по второй причине, были проведены дополнительные тесты. В решениях использовались «конечные» подходящие дроби, обеспечивающие минимальную погрешность в определении значений корней уравнений (59). Результаты приведены в табл. 46.

Число уравнений, для которых не достигнута заданная относительная погрешность в определении корней при использовании “оптимальных” подходящих дробей

Таблица 46

Количество подходящих дробей	Число уравнений, $\Delta_д > 0{,}01$	Число уравнений, $\Delta_к > 0{,}01$	Число уравнений, $\Delta_д > 0{,}001$	Число уравнений, $\Delta_к > 0{,}001$
20000	33	33	37	35
30000	25	24	29	27
40000	24	23	25	24
50000	23	22	23	22
60000	18	17	20	19
70000	15	14	17	16
80000	12	11	15	13
90000	11	10	15	13
100000	9	8	12	11
150000	6	6	11	10
200000	3	3	4	4
250000	3	3	4	4
300000	2	2	3	3
400000	0	0	0	0

Тесты, результаты которых приведены в табл. 46, подтверждают, что часть корней не удовлетворяли заданной точности по причине не оптимального выбора «конечной» подходящей дроби.

Итак, на основе проведенных расчетов можно считать экспериментально подтвержденной работоспособность r/φ – алгоритма. Для 10000 алгебраических уравнений со случайными коэффициентами все корни, найденные при помощи r/φ – алгоритма, сходятся к эталонным решениям с погрешностью не более 0,001. Не было найдено ни одной задачи, для которой корень бы не сходился к эталонному решению при увеличении количества подходящих дробей. Необходимое число подходящих дробей для достижения заданной точности зависит от конкретного уравнения. Поэтому время вычисления корней для различных уравнений с установленной точностью может отличаться в несколько раз.

ГЛАВА IV

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УЛЬТРАПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

В начале двадцатого века во всём мире широчайшей популярностью пользовался "Курс анализа" американского математика В. Гренвиля. Многократно эта книга издавалась и в России. В предисловии к первому изданию перевода Н. Н. Лузин, рассматривая различные подходы к написанию руководств, писал о "сжатых" изложениях: "В книжках этого рода, обычно весьма тонких по объёму, авторы стараются тем не менее удержать всю совокупность фактов ценою удаления соединительной ткани между ними, не замечая, что именно эта операция и делает их книги непреодолимо трудными для учащихся. Книги этого рода обычно кажутся весьма привлекательными для учащихся, ещё не знакомых с той истиной, что, чем толще учебник математического анализа, тем он скорее будет прочтён и усвоен".

Восьмое издание книги Гренвиля, вышедшее в 1933 г., было столь существенно переработано Н. Н. Лузиным, что это и последующие издания выходили в авторстве Гренвиля и Лузина. После войны не одно поколение математиков и инженеров училось по замечательному курсу математического анализа академика Н. Н. Лузина. Первая глава "Дифференциального исчисления" Лузина заканчивалась параграфом 9, имевшим название: "Деление на нуль запрещается". Этот параграф с несколько иным заголовком "Деление на нуль невозможно" можно найти в книге Гренвиля и Лузина.

В начале параграфа Н. Н. Лузин пишет: "Во всех математических расчётах, теоретических и практических выкладках учащийся неизменно обязан руководствоваться одним из самых важных правил математического анализа: **деление на нуль, безусловно, недопустимо ни в одном случае**. И далее: Обе формы $\frac{0}{0}$ и $\frac{a}{0}$ являются только **кажущимися математическими формулами**: первая абсолютно бесполезна, вторая абсолютно бессмысленна. Для того, чтобы научить учащегося осторожности в обращении с нулем, Лузин приводит пример, где доказывается равенство $1 = 2$.

При рассмотрении подходящих ультрапериодических непрерывных дробей мы постоянно сталкивались с делением на нуль, и памятуя строгие указания Лузина, старательно обходим эту "операцию". Есть оборот из современного правосознания: "Нельзя, но если уж очень надо, то можно". Компьютер неусыпно стоял на страже закона и не позволял ни в едином случае деления на нуль, и нам приходилось прибегать ко всякого рода ухищрениям и постоянно напрягать фантазию, чтобы по возможности правдоподобно трактовать поведение "экстремальных" подходящих непрерывных дробей, которые неизбежно возникают при определении комплексных корней, когда аргумент кратен числу Лудольфа, то есть π.

Причины появления подходящих дробей с "экстремальными" значениями проще всего показать, если обращаться к формуле, представляющей подходящие цепные дроби Никипорца:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi},$$

когда φ кратно числу π.

4.1. Ультрапериодические непрерывные дроби

В [520] показано, что периодические цепные дроби могут быть периодическими и в ином, нежели традиционном смысле, когда отмечается повторение *элементов* цепной дроби a_i и b_i:

$$a_{tn+k} = a_k \ ,$$

$$b_{tn+k} = b_k \ , \ n = 1,2,\ldots; \ \ k = 1,2,\ldots,t \ . \tag{1}$$

Возможно периодическое повторение *значений* подходящих дробей:

$$\frac{P_{tn+k}}{Q_{tn+k}} = \frac{P_k}{Q_k} \ , \ n = 1,2,\ldots; \ \ k = 1,2,\ldots,t \ .$$

Например, цепная дробь

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \, \frac{1}{-\sqrt{2}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{2}} - \ldots \tag{2}$$

имеет подходящие дроби

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/4}{\sin n\pi/4} \ ,$$

значения которых периодически повторяются:

$$\sqrt{2}, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ 0, \ \ -\infty, \ \ \sqrt{2}, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ 0, \ \ \infty, \ \ \sqrt{2}, \ \ \ldots \ .$$

Так как периодические в смысле значений цепные дроби являются периодическими и в традиционном смысле, то есть когда выполняется условие (1), то периодические в смысле значений цепные дроби были названы *ультрапериодическими* цепными дробями [545].

Ультрапериодическими могут быть не только классические цепные дроби, но и дроби иных классов, в частности, непрерывные дроби Хессенберга. В [519] был рассмотрен пример ультрапериодической непрерывной дроби Хессенберга, в которую раскладывается корень кубического уравнения

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 \ . \tag{3}$$

Рассмотрим более подробно ультрапериодические непрерывные дроби, причём как Хессенберга, так и Никипорца.

Ранее уже отмечалось, что ультрапериодические, то есть непрерывные дроби, значения подходящих дробей которых периодически повторяются, появляются при представлении непрерывными дробями комплексных корней уравнений, аргумент которых кратен π.

Запишем кубическое уравнение, корни которого

$$x_1 = e^{i\varphi} \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = e^{-i\varphi} \ .$$

Это уравнение имеет вид:

$$x^3 - (1 + 2\cos\varphi)x^2 + (1 + 2\cos\varphi)x - 1 = 0 \ . \tag{4}$$

Корень x_1 уравнения (4) может быть представлен непрерывной дробью Хессенберга, то есть отношением определителей матриц Хессенберга:

$$e^{i\varphi}=\frac{\begin{vmatrix} 1+2\cos\varphi & -(1+2\cos\varphi) & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1+2\cos\varphi & -(1+2\cos\varphi) & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1+2\cos\varphi & -(1+2\cos\varphi) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1+2\cos\varphi & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2\cos\varphi & -(1+2\cos\varphi) & 1 & \dots \\ -1 & 1+2\cos\varphi & -(1+2\cos\varphi) & \dots \\ 0 & -1 & 1+2\cos\varphi & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Обобщённая формула Бине – формула, определяющая значения числителя подходящей дроби разложения корня x_1 кубического уравнения в непрерывную дробь Хессенберга, имеет вид [519]:

$$P_n=\frac{(x_2-x_1)x_1^{n+2}-(x_1-x_3)x_2^{n+2}+(x_1-x_2)x_3^{n+2}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}. \tag{6}$$

Для непрерывной дроби (5) запишем:

$$P_n=\frac{\sin(n+1)\varphi-\sin(n+2)\varphi+\sin\varphi}{2\sin\varphi(1-\cos\varphi)}, \tag{7}$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\sin(n+1)\varphi-\sin(n+2)\varphi+\sin\varphi}{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}. \tag{8}$$

Таким образом, подходящие непрерывной дроби Хессенберга (5) описываются выражением (8). Если аргумент φ кратен π, значения подходящих дробей непрерывной дроби Хессенберга (8) будут периодически повторяться, то есть непрерывная дробь (8) будет ультрапериодическая.

Запишем непрерывную дробь (5) при некоторых значениях φ.

2. $$\varphi=\pi/3,\quad x^3-2x^2+2x-1=0,\quad x_1=e^{i\pi/3},\ x_2=1,\ x_3=e^{-i\pi/3}. \tag{9}$$

$$e^{i\pi/3}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{10}$$

Запишем рекуррентную последовательность для вычисления определителей (10):

$$P_n=2P_{n-1}-2P_{n-2}+P_{n-3},\quad P_0=1,\ P_1=2,\ P_2=2. \tag{11}$$

$$1=-\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \qquad (12)$$

$$e^{-i\pi/3}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \qquad (13)$$

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

x_1=1,000000001

Таблица 1

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,000000001000	2,000000001000	-1,000000000000	m
1	1,000000001500	1,414213563787	-0,414213562787	m
2	0,500000003000	1,000000002667	-0,000000001667	m
3	0,000000010000	0,010000000005	0,990000000996	
4	0,800000002060	0,024022488701	0,975977512299	
5	124999999,9531	1,000000000667	0,000000000333	m
6	1,999999995000	1,104089513910	-0,104089512910	
7	1,000000002500	1,090507733211	-0,090507732211	
8	0,500000006000	1,000000001778	-0,000000000778	
9	0,000000020000	0,169864646514	0,830135354486	
10	0,800000002900	0,195561623971	0,804438377029	
11	62500000,08594	1,000000000667	0,000000000333	
12	1,999999989000	1,054766076684	-0,054766075684	
13	1,000000003500	1,050756639104	-0,050756638104	
14	0,500000009000	1,000000001600	-0,000000000600	
15	0,000000030000	0,338703807336	0,661296193664	
16	0,800000003740	0,356268259497	0,643731741503	
17	41666666,79688	1,000000000667	0,000000000333	
18	1,999999983000	1,037155044637	-0,037155043637	
19	1,000000004500	1,035264924255	-0,035264923255	
20	0,500000012000	1,000000001524	-0,000000000524	
21	0,000000040000	0,461030863186	0,538969137814	
22	0,800000004580	0,472211930932	0,527788070068	
23	31250000,15234	1,000000000667	0,000000000333	
24	1,999999977000	1,028113826841	-0,028113825841	
25	1,000000005500	1,027018051104	-0,027018050104	
26	0,500000015000	1,000000001481	-0,000000000481	
27	0,000000050000	0,548591316289	0,451408684711	
28	0,800000005420	0,555774505063	0,444225495937	
29	25000000,16563	1,000000000667	0,000000000333	
30	1,999999971000	1,022611435783	-0,022611434783	

Определим последовательно значения отношений определителей (12), представляющих вещественный корень, равный единице.

$$\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{|-2|}{1}:\frac{2}{1}=1,$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=-\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{|-2|}:\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{2}=1,$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=1.$$

Вычисляя $\frac{P_4}{Q_4}$, получаем выражение $\frac{0}{0}$, которому поставим в соответствие единичное значение, ибо далее имеем:

$$\frac{P_5}{Q_5}=1,\ \frac{P_6}{Q_6}=1,\ \frac{P_7}{Q_7}=1,\ \frac{P_8}{Q_8}=\frac{0}{0},$$

$$\frac{P_9}{Q_9}=1,\ \frac{P_{10}}{Q_{10}}=1,\ \dots.$$

Так как компьютер не может оперировать с выражениями типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{a}{0}$, то решалось “возмущённое” уравнение. В табл. 1-3 приведены результаты вычисления корней “возмущённого” полинома (9).

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_2=0{,}9999999994999999e^{i1{,}047197550907922}$

Таблица 2

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,999999999500	0,999999999500	0,000000000000	m	0,000000000000	1,047197550908	m
1	0,999999998000	0,999999998750	0,000000000750		0,000000000000	1,047197550908	
2	0,999999990500	0,999999996000	0,000000003500		0,000000000000	1,047197550908	
3	-0,800000008060	0,945741608548	0,054258390952		0,785398163397	0,261799387510	m
4	1,562499995234	1,045639551551	-0,045639552051		0,628318530718	0,418879020190	
5	-0,799999994380	0,999999998000	0,000000001500		1,047197551197	-0,000000000289	m
6	1,000000008500	0,999999999500	0,000000000000		0,897597901026	0,149599649882	
7	0,999999998000	0,999999999312	0,000000000187		0,785398163397	0,261799387510	
8	0,999999981500	0,999999997333	0,000000002167		0,698131700798	0,349065850110	
9	-0,800000014900	0,977932768017	0,022067231483		0,942477796077	0,104719754831	
10	1,562499995234	1,020492931387	-0,020492931887		0,856797996434	0,190399554474	
11	-0,799999987540	0,999999998000	0,000000001500		1,047197551197	-0,000000000289	
12	1,000000017500	0,999999999500	0,000000000000		0,966643893412	0,080553657496	
13	0,999999998000	0,999999999393	0,000000000107		0,897597901026	0,149599649882	
14	0,999999972500	0,999999997600	0,000000001900		0,837758040957	0,209439509951	
15	-0,800000021740	0,986150329003	0,013849670497		0,981747704247	0,065449846661	
16	1,562499995234	1,013212615847	-0,013212616347		0,923997839291	0,123199711617	
17	-0,799999980700	0,999999998000	0,000000001500		1,047197551197	-0,000000000289	
18	1,000000026500	0,999999999500	0,000000000000		0,992081890607	0,055115660301	
19	0,999999998000	0,999999999425	0,000000000075		0,942477796077	0,104719754831	
20	0,999999963500	0,999999997714	0,000000001786		0,897597901026	0,149599649882	
21	-0,800000028580	0,989908376374	0,010091623126		0,999597662506	0,047599888402	
22	1,562499995234	1,009749108803	-0,009749109303		0,956136894571	0,091060656337	
23	-0,799999973860	0,999999998000	0,000000001500		1,047197551197	-0,000000000289	
24	1,000000035500	0,999999999500	0,000000000000		1,005309649149	0,041887901759	
25	0,999999998000	0,999999999442	0,000000000058		0,966643893412	0,080553657496	
26	0,999999954500	0,999999997778	0,000000001722		0,930842267730	0,116355283178	
27	-0,800000035420	0,992062258474	0,007937741026		1,009797638654	0,037399912254	
28	1,562499995234	1,007724284115	-0,007724284615		0,974977030424	0,072220520484	
29	-0,799999967020	0,999999998000	0,000000001500		1,047197551197	-0,000000000289	
30	1,000000044500	0,999999999500	0,000000000000		1,013416985029	0,033780565879	

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_3=0{,}9999999994999999e^{-i1{,}047197550907922}$

Таблица 3

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,500000000000	0,500000000000	0,499999999500	m	0,000000000000	-1,047197550908	m
1	1,000000000500	0,707106781363	0,292893218137	m	0,000000000000	-1,047197550908	
2	2,000000007000	1,000000001333	-0,000000001833	m	0,000000000000	-1,047197550908	
3	-124999999,5156	105,7371263474	-104,7371263479		-0,785398163397	-0,261799387510	m
4	0,800000000380	39,810717060127	-38,810717060627		-0,628318530718	-0,418879020190	
5	-0,000000010000	1,000000001333	-0,000000001833	m	-1,047197551197	0,000000000289	m
6	0,499999997000	0,905723664523	0,094276334977		-0,897597901026	-0,149599649882	
7	0,999999999500	0,917004043377	0,082995956123		-0,785398163397	-0,261799387510	
8	2,000000013000	1,000000000889	-0,000000001389	m	-0,698131700798	-0,349065850110	
9	-62499999,64844	6,019882324522	-5,019882325022		-0,942477796077	-0,104719754831	
10	0,799999999540	5,010791869904	-4,010791870404		-0,856797996434	-0,190399554474	
11	-0,000000020000	1,000000001333	-0,000000001833		-1,047197551197	0,000000000289	
12	0,499999994000	0,948077514631	0,051922484869		-0,966643893412	-0,080553657496	
13	0,999999998500	0,951695153181	0,048304846319		-0,897597901026	-0,149599649882	
14	2,000000019000	1,000000000800	-0,000000001300	m	-0,837758040957	-0,209439509951	
15	-41666666,35938	2,993896603109	-1,993896603609		-0,981747704247	-0,065449846661	
16	0,799999998700	2,770271149815	-1,770271150315		-0,923997839291	-0,123199711617	
17	-0,000000030000	1,000000001333	-0,000000001833		-1,047197551197	0,000000000289	
18	0,499999991000	0,964175998247	0,035824001253		-0,992081890607	-0,055115660301	
19	0,999999997500	0,965936329094	0,034063670406		-0,942477796077	-0,104719754831	
20	2,000000025000	1,000000000762	-0,000000001262	m	-0,897597901026	-0,149599649882	
21	-31249999,71484	2,191164590868	-1,191164591368		-0,999597662506	-0,047599888402	
22	0,799999997860	2,097246921961	-1,097246922461		-0,956136894571	-0,091060656337	
23	-0,000000040000	1,000000001333	-0,000000001833		-1,047197551197	0,000000000289	
24	0,499999988000	0,972654947724	0,027345051776		-1,005309649149	-0,041887901759	
25	0,999999996500	0,973692720866	0,026307278634		-0,966643893412	-0,080553657496	
26	2,000000031000	1,000000000741	-0,000000001241	m	-0,930842267730	-0,116355283178	
27	-24999999,72813	1,837435671106	-0,837435671606		-1,009797638654	-0,037399912254	
28	0,799999997020	1,785499180111	-0,785499180611		-0,974977030424	-0,072220520484	
29	-0,000000050000	1,000000001333	-0,000000001833		-1,047197551197	0,000000000289	
30	0,499999985000	0,977888536651	0,022111462849		-1,013416985029	-0,033780565879	

На рис. 1 показано распределение подходящих дробей при решении “возмущённого” алгебраического уравнения

$$x^3-\left(2+10^{-9}\right)x^2+2x-1=0\,. \tag{14}$$

Из графиков отчётливо наблюдается периодичность в расположении значений подходящих дробей для всех трёх корней.

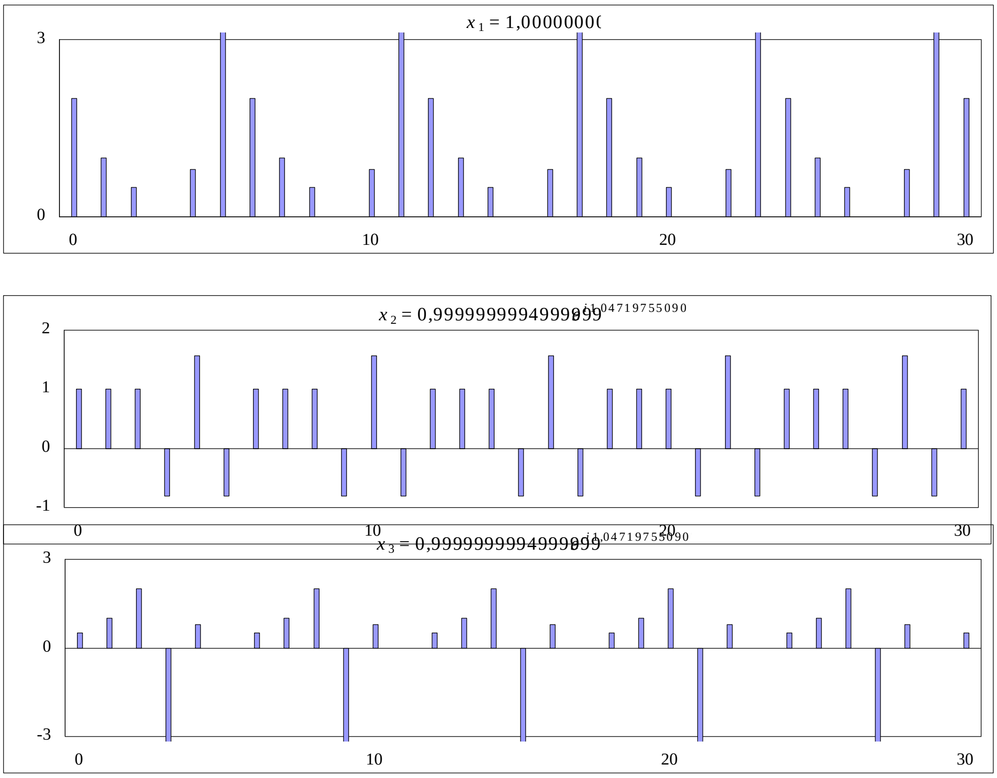


Рис. 1. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (14).

Изменение коэффициента α_1 на 10^{-9} привело к тому, что старшим по модулю корнём стал действительный корень, который, как старший, определяется первым при помощи функции Никипорца (10). Если бы не было “возмущения”, и решалось исходное уравнение

$$x^3-2x^2+2x-1=0\,,$$

то первым бы определялся по формуле (10) комплексный корень $x_1=e^{i\pi/3}$, вторым по формуле (12) устанавливался бы действительный корень $x_2=1$ и последним по формуле (13) находился бы сопряжённый комплексный корень $x_3=e^{-i\pi/3}$. Более подробно графики невозмущённых уравнений с корнями, кратными числу π, будут рассмотрены ниже.

Вообще, проблема изучения ультрапериодических непрерывных дробей “в чистом виде” весьма сложна, так как среди периодически повторяющихся значений подходящих дробей неизменно в конце “периода” появляются подходящие дроби с экстремальными значениями, которые не могут быть отражены в конечных разрядных сетках компьютеров.

Следует обратить внимание, что таблицы 1-3 соответствуют уравнению (14), когда “возмущение” коэффициента α_1 было взято со знаком “плюс”. Это обеспечило “старшинство” по модулю действительного корня среди корней уравнения (9).

Если в исходное уравнение

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0\,,$$

имеющего равные по модулю корни

$$x_1 = e^{i\pi/3}\,,\ x_2 = 1\,,\ x_3 = e^{-i\pi/3}\,,$$

“возмущение” внести таким образом, что модули сопряжённых комплексных корней будут больше действительного корня, то есть рассматривать, скажем, уравнение

$$x^3 - \left(2 - 10^{-9}\right)x^2 + 2x - 1 = 0\,, \tag{15}$$

имеющего корни:

$$x_3 = 0{,}999999999,\ x_{1,2} = 1{,}0000000005e^{\pm i1{,}0471975514},$$

то определяться корни кубического уравнения с использованием функций Никипорца будут по старшинству модулей, начиная с комплексно-сопряжённых корней, как то следует из табл. 4-6.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2\cos\varphi-10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_1=1{,}0000000005e^{i1{,}047197551485272}$

Таблица 4

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,999999999000	1,999999999000	-0,999999998500	m	0,000000000000	1,047197551485	m
1	0,999999998500	1,414213560959	-0,414213560459	m	0,000000000000	1,047197551485	
2	0,499999997000	0,999999997333	0,000000003167	m	0,000000000000	1,047197551485	
3	-0,000000010000	0,010000000206	0,990000000294		0,785398163397	0,261799388088	m
4	0,799999999000	0,024022489069	0,975977511431		0,628318530718	0,418879020767	
5	-124999989,3762	0,999999999333	0,000000001167	m	1,047197551197	0,000000000289	m
6	2,000000005000	1,104089513437	-0,104089512937		0,897597901026	0,149599650460	
7	0,999999997500	1,090507732120	-0,090507731620		0,785398163397	0,261799388088	
8	0,499999994000	0,999999998222	0,000000002278		0,698131700798	0,349065850688	
9	-0,000000020000	0,169864647860	0,830135352640		0,942477796077	0,104719755408	
10	0,799999999000	0,195561625293	0,804438375207		0,856797996434	0,190399555052	
11	-62499994,43810	0,999999999333	0,000000001167	m	1,047197551197	0,000000000289	
12	2,000000011000	1,054766076279	-0,054766075779		0,966643893412	0,080553658073	
13	0,999999996500	1,050756638203	-0,050756637703		0,897597901026	0,149599650460	
14	0,499999991000	0,999999998400	0,000000002100		0,837758040957	0,209439510528	
15	-0,000000030000	0,338703808832	0,661296191668		0,981747704247	0,065449847238	
16	0,800000004921	0,356268261009	0,643731739491		0,923997839291	0,123199712194	
17	-41666662,79207	0,999999999333	0,000000001167	m	1,047197551197	0,000000000289	
18	2,000000017000	1,037155044255	-0,037155043755		0,992081890607	0,055115660878	
19	0,999999995500	1,035264923427	-0,035264922927		0,942477796077	0,104719755408	
20	0,499999988000	0,999999998476	0,000000002024		0,897597901026	0,149599650460	
21	-0,000000040000	0,461030864564	0,538969135936		0,999597662506	0,047599888979	
22	0,800000007882	0,472211932367	0,527788068133		0,956136894571	0,091060656914	
23	-31249996,96905	0,999999999333	0,000000001167	m	1,047197551197	0,000000000289	
24	2,000000023000	1,028113826471	-0,028113825971		1,005309649149	0,041887902337	
25	0,999999994500	1,027018050314	-0,027018049814		0,966643893412	0,080553658073	
26	0,499999985000	0,999999998519	0,000000001981		0,930842267730	0,116355283755	
27	-0,000000050000	0,548591317510	0,451408682990		1,009797638654	0,037399912831	
28	0,800000009658	0,555774506359	0,444225494141		0,974977030424	0,072220521061	
29	-24999997,47524	0,999999999333	0,000000001167	m	1,047197551197	0,000000000289	
30	2,000000029000	1,022611435420	-0,022611434920		1,013416985029	0,033780566456	

Сравнивая значения подходящих дробей, помещённых в колонках 2 таблиц 4 и 6, можно заметить, что в обеих таблицах подходящие совпадают, за исключением “экстремальных” подходящих. В случае, когда старший модуль принадлежит комплексному корню, “экстремальные” подходящие отрицательны, что собственно в результате и определяет комплексность корня и устанавливает значение аргумента, которое близко к числу $\pi/3$.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2\cos\varphi\text{-}10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_2=1{,}0000000005e^{-i1{,}047197551485272}$

Таблица 5

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,000000000500	1,000000000500	0,000000000000	m	0,000000000000	-1,047197551485	m
1	1,000000002000	1,000000001250	-0,000000000750		0,000000000000	-1,047197551485	
2	1,000000009500	1,000000004000	-0,000000003500		0,000000000000	-1,047197551485	
3	-0,799999943591	0,945741595169	0,054258405331		-0,785398163397	-0,261799388088	m
4	1,562500078061	1,045639550803	-0,045639550303		-0,628318530718	-0,418879020767	
5	-0,800000016442	1,000000002000	-0,000000001500		-1,047197551197	-0,000000000289	m
6	0,999999991500	1,000000000500	0,000000000000		-0,897597901026	-0,149599650460	
7	1,000000002000	1,000000000688	-0,000000000187		-0,785398163397	-0,261799388088	
8	1,000000018500	1,000000002667	-0,000000002167		-0,698131700798	-0,349065850688	
9	-0,799999997404	0,977932770573	0,022067229927		-0,942477796077	-0,104719755408	
10	1,562499980227	1,020492932920	-0,020492932420		-0,856797996434	-0,190399555052	
11	-0,800000012719	1,000000002000	-0,000000001500		-1,047197551197	-0,000000000289	
12	0,999999982500	1,000000000500	0,000000000000		-0,966643893412	-0,080553658073	
13	1,000000002000	1,000000000607	-0,000000000107		-0,897597901026	-0,149599650460	
14	1,000000027500	1,000000002400	-0,000000001900		-0,837758040957	-0,209439510528	
15	-0,799999976523	0,986150329957	0,013849670543		-0,981747704247	-0,065449847238	
16	1,562499994839	1,013212616754	-0,013212616254		-0,923997839291	-0,123199712194	
17	-0,800000026120	1,000000002000	-0,000000001500		-1,047197551197	-0,000000000289	
18	0,999999973500	1,000000000500	0,000000000000		-0,992081890607	-0,055115660878	
19	1,000000002000	1,000000000575	-0,000000000075		-0,942477796077	-0,104719755408	
20	1,000000036500	1,000000002286	-0,000000001786		-0,897597901026	-0,149599650460	
21	-0,799999986237	0,989908378312	0,010091622188		-0,999597662506	-0,047599888979	
22	1,562499967038	1,009749109902	-0,009749109402		-0,956136894571	-0,091060656914	
23	-0,800000030639	1,000000002000	-0,000000001500		-1,047197551197	-0,000000000289	
24	0,999999964500	1,000000000500	0,000000000000		-1,005309649149	-0,041887902337	
25	1,000000002000	1,000000000558	-0,000000000058		-0,966643893412	-0,080553658073	
26	1,000000045500	1,000000002222	-0,000000001722		-0,930842267730	-0,116355283755	
27	-0,799999982985	0,992062260403	0,007937740097		-1,009797638654	-0,037399912831	
28	1,562499957344	1,007724285165	-0,007724284665		-0,974977030424	-0,072220521061	
29	-0,800000038855	1,000000002000	-0,000000001500		-1,047197551197	-0,000000000289	
30	0,999999955500	1,000000000500	0,000000000000		-1,013416985029	-0,033780566456	

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2\cos\varphi\text{-}10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_3=0{,}999999999$

Таблица 6

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	0,500000000000	0,500000000000	0,499999999000	m
1	0,999999999500	0,707106781010	0,292893217990	m
2	1,999999993000	0,999999998667	0,000000000333	m
3	124999997,5338	105,7371257168	-104,7371257178	
4	0,799999961033	39,81071647859	-38,81071647959	
5	0,000000010000	0,999999998667	0,000000000333	
6	0,500000003000	0,905723664005	0,094276334995	
7	1,000000000500	0,917004043033	0,082995955967	
8	1,999999987000	0,999999999111	-0,000000000111	m
9	62499994,06275	6,019882261090	-5,019882262090	
10	0,800000011124	5,010791828501	-4,010791829501	
11	0,000000020000	0,999999998667	0,000000000333	
12	0,500000006000	0,948077514047	0,051922484953	
13	1,000000001500	0,951695152841	0,048304846159	
14	1,999999981000	0,999999999200	-0,000000000200	
15	41666663,77116	2,993896586995	-1,993896587995	
16	0,799999997721	2,770271135583	-1,770271136583	
17	0,000000030000	0,999999998667	0,000000000333	
18	0,500000009000	0,964175997638	0,035824001362	
19	1,000000002500	0,965936328756	0,034063670244	
20	1,999999975000	0,999999999238	-0,000000000238	
21	31249997,31454	2,191164580031	-1,191164581031	
22	0,800000008995	2,097246913308	-1,097246914308	
23	0,000000040000	0,999999998667	0,000000000333	
24	0,500000012000	0,972654947101	0,027345051899	
25	1,000000003500	0,973692720529	0,026307278471	
26	1,999999969000	0,999999999259	-0,000000000259	
27	24999997,80877	1,837435663443	-0,837435664443	
28	0,800000012182	1,785499174088	-0,785499175088	
29	0,000000050000	0,999999998667	0,000000000333	
30	0,500000015000	0,977888536020	0,022111462980	

Главу “Корни многочленов” в университетском учебнике “Введение в алгебру” Алексей Иванович Кострикин, академик Российской Академии наук, начинает словами: “Займёмся тем, ради чего в прошлом изучали алгебру, – корнями многочленов. Эта область перестала быть доминирующей в алгебре, но её важность никем не оспаривается. Дело в том, что многие задачи математики в конечном счёте сводятся к вычислению отдельных корней конкретных многочленов или к качественному описанию их совокупности”. Это авторитетное высказывание приведено, чтобы сомневающиеся окрепли в вере и более стойко переносили обозрение многочисленных таблиц, связанных с вычислениями корней алгебраических уравнений. Здесь надо лишний раз напомнить, что нами используется принципиально новый метод решения алгебраических уравнений, совершенно не изученный, чем в значительной мере и объясняется такое обилие таблиц.

$$\varphi = \pi/6, \qquad x^3 - \left(1+\sqrt{3}\right)x^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)x - 1 = 0,\ x_1 = e^{i\pi/6},\ x_2 = 1,\ x_3 = e^{-i\pi/6}. \tag{16}$$

Запишем представление комплексного корня $e^{i\pi/6}$

$$e^{i\pi/6} = \frac{\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Рекуррентная формула:

$$P_n = \left(1+\sqrt{3}\right)P_{n-1} - \left(1+\sqrt{3}\right)P_{n-2} + P_{n-3}, \quad P_0 = 1,\ P_1 = 1+\sqrt{3},\ P_2 = 3+\sqrt{3}.$$

Непрерывная дробь (17) – ультрапериодическая. Период $n = 12$. Для сравнения можно записать ультрапериодическую цепную дробь, представлявшую корень квадратного уравнения $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$:

$$e^{i\pi/6} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3} -}\,\frac{1}{\sqrt{3} - \dots -}\,\frac{1}{\sqrt{3} - \dots}.$$

Подходящие дроби этой ультрапериодической непрерывной дроби определяются выражением:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)\pi/6}{\sin n\pi/6},\ n = 1, 2, \dots .$$

Следовательно, подходящие дроби имеют значения, которые периодически будут повторяться:

$$\left(\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\infty, \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \infty\right).$$

Запишем выражения, представляющие корни x_2 и x_3 уравнения (16).

$$1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & \dots \\ 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & 1 & \dots \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -\left(1+\sqrt{3}\right) & \dots \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{3} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}},$$

$$e^{-i\pi/6}=-\frac{\begin{vmatrix}1&0&0&0&\dots\\-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&0&\dots\\1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&\dots\\-1&1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&\dots\\.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0&\dots\\-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&\dots\\1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&\dots\\.&.&.&\dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&0&\dots\\1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&\dots\\-1&1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&\dots\\0&-1&1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&\dots\\.&.&.&.&\dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&0&\dots\\1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&1&\dots\\-1&1+\sqrt{3}&-\left(1+\sqrt{3}\right)&\dots\\.&.&.&\dots\end{vmatrix}}.$$

Вместо уравнения

$$x^3-\left(1+\sqrt{3}\right)x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x-1=0,$$

имеющего сопряжённые комплексные корни $x_{1,3}=e^{\pm i\pi/6}$, аргумент которых кратен числу π, что приводит в процессе вычисления подходящих к делениям на ноль, будем рассматривать “близкое” уравнение:

$$x^3-\left(1+\sqrt{3}+10^{-9}\right)x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x-1=0. \qquad (18)$$

В табл. 7-9 приведены результаты вычислений корней уравнения (18) с использованием функций Никипорца, а также r/φ-алгоритма. Старшим по модулю корнем уравнения (18) является действительный корень.

Если рассматривать исходное уравнение (16), то непрерывная дробь (17) будет представлять комплексный корень $x_1=e^{i\pi/6}$, причём, на графиках подходящие действительного корня $x_2=1$ будут обрамлены подходящими комплексно-сопряжённых корней.

Нахождение нулей полинома

x^3–$(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0$, $\varphi=\pi/6$

x_1=1,000000003732051

Таблица 71

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,732050808569	2,732050808569	-1,732050804837	m
1	1,732050808935	2,175327748417	-1,175327744685	m
2	1,366025405784	1,862813565890	-0,862813562158	m
3	1,154700541355	1,652891652428	-0,652891648696	m
4	1,000000004536	1,494842750119	-0,494842746387	m
5	0,866025411016	1,364849286732	-0,364849283000	m
6	0,732050820033	1,248635363112	-0,248635359380	m
7	0,577350293704	1,133864349660	-0,133864345928	m
8	0,366025464961	1,000000027190	-0,000000023458	m
9	0,000000256708	0,219252160899	0,780747842834	
10	0,953254255638	0,250592438070	0,749407565662	
11	4086509,525732	1,000000017660	-0,000000013928	m
12	2,732050396723	1,080378819557	-0,080378815825	
13	1,732050747758	1,117423537280	-0,117423533548	
14	1,366025389392	1,132488703906	-0,132488700173	
15	1,154700537355	1,133864339770	-0,133864336038	
16	1,000000006144	1,125515864102	-0,125515860370	
17	0,866025417016	1,109246923394	-0,109246919662	
18	0,732050832033	1,085247808069	-0,085247804337	
19	0,577350318096	1,051536717479	-0,051536713747	
20	0,366025526138	1,000000023305	-0,000000019573	
21	0,000000513415	0,517740595948	0,482259407784	
22	0,953254257183	0,531665103193	0,468334900539	
23	2043255,170758	1,000000017660	-0,000000013928	m
24	2,732049984877	1,041021150030	-0,041021146298	
25	1,732050686581	1,061606183063	-0,061606179331	
26	1,366025373000	1,071565744552	-0,071565740820	
27	1,154700533355	1,074429118519	-0,074429114787	
28	1,000000007751	1,071772660096	-0,071772656364	
29	0,866025423016	1,064184526708	-0,064184522976	
30	0,732050844033	1,051418921888	-0,051418918156	

Просматривая числа колонки 2 таблицы 7, можно заметить не только то, что значения подходящих повторяются, то есть имеется период, равный 12, но связь значений подходящих дробей с коэффициентами исходного уравнения

$$x^3-\left(1+\sqrt{3}\right)x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x-1=0,$$

что, впрочем, вытекает из формулы Бине, определяющей значения подходящих дробей через корни исходного кубического уравнения.

Значительно интересней анализ подходящих дробей для корней x_2 и x_3, приведённых в колонке 2 таблиц 8 и 9. Внимательный анализ значений подходящих непрерывных дробей Никипорца, возможно, даст ключ к построению аналитических выражений для подходящих дробей через корни исходных уравнений.

Нахождение нулей полинома

$$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$$

x_2=0,9999999981339744$e^{i0,5235987750982994}$

Таблица 8

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,999999999634	0,999999999634	-0,000000001500	m	0,000000000000	0,523598775098	m
1	0,999999999000	0,999999999317	-0,000000001183	m	0,000000000000	0,523598775098	
2	0,999999997902	0,999999998845	-0,000000000711	m	0,000000000000	0,523598775098	
3	0,999999996000	0,999999998134	0,000000000000	m	0,000000000000	0,523598775098	
4	0,999999992536	0,999999997014	0,000000001120		0,000000000000	0,523598775098	
5	0,999999985608	0,999999995113	0,000000003021		0,000000000000	0,523598775098	
6	0,999999969510	0,999999991456	0,000000006678		0,000000000000	0,523598775098	
7	0,999999921431	0,999999982702	0,000000015431		0,000000000000	0,523598775098	
8	0,999999681749	0,999999949263	0,000000048871		0,000000000000	0,523598775098	
9	-0,953254667484	0,995224077113	0,004775921021		0,314159265359	0,209439509739	m
10	1,100480865856	1,004361629297	-0,004361631163		0,285599332145	0,237999442954	
11	-0,953253840700	0,999999961947	0,000000036187		0,523598775598	-0,000000000500	m
12	1,000000317519	0,999999989299	0,000000008835		0,483321946706	0,040276828392	
13	1,000000076569	0,999999995533	0,000000002601		0,448798950513	0,074799824585	
14	1,000000026294	0,999999997583	0,000000000551		0,418879020479	0,104719754620	
15	1,000000006392	0,999999998134	0,000000000000		0,392699081699	0,130899693400	
16	0,999999992536	0,999999997805	0,000000000329		0,369599135716	0,153999639382	
17	0,999999975215	0,999999996550	0,000000001584		0,349065850399	0,174532924699	
18	0,999999941117	0,999999993632	0,000000004502		0,330693963536	0,192904811563	
19	0,999999843862	0,999999986144	0,000000011990		0,314159265359	0,209439509739	
20	0,999999363865	0,999999956511	0,000000041623		0,299199300342	0,224399474756	
21	-0,953255080876	0,997826290324	0,002173707810		0,428398998217	0,095199776882	
22	1,100480865856	1,002083627375	-0,002083629241		0,409772954816	0,113825820282	
23	-0,953253427309	0,999999961947	0,000000036187		0,523598775598	-0,000000000500	
24	1,000000635403	0,999999988886	0,000000009248		0,502654824574	0,020943950524	
25	1,000000154138	0,999999995242	0,000000002892		0,483321946706	0,040276828392	
26	1,000000054687	0,999999997443	0,000000000691		0,465421133865	0,058177641233	
27	1,000000016785	0,999999998134	0,000000000000		0,448798950513	0,074799824585	
28	0,999999992536	0,999999997941	0,000000000193		0,433323124633	0,090275650465	
29	0,999999964823	0,999999996837	0,000000001297		0,418879020479	0,104719754620	
30	0,999999912725	0,999999994124	0,000000004010		0,405366794012	0,118231981087	

Нахождение нулей полинома

$$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$$

x_3=0,9999999981339744$e^{-i0,5235987750982994}$

Таблица 9

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,366025403784	0,366025403784	0,633974594350	m	0,000000000000	-0,523598775098	m
1	0,577350269312	0,459700843430	0,540299154704	m	0,000000000000	-0,523598775098	
2	0,732050808033	0,536822374212	0,463177623922	m	0,000000000000	-0,523598775098	
3	0,866025405016	0,605000334049	0,394999664085	m	0,000000000000	-0,523598775098	
4	1,000000002928	0,668966687570	0,331033310564	m	0,000000000000	-0,523598775098	
5	1,154700545355	0,732681633502	0,267318364632	m	0,000000000000	-0,523598775098	
6	1,366025422177	0,800874328957	0,199125669177	m	0,000000000000	-0,523598775098	
7	1,732050870112	0,881939729032	0,118060269102	m	0,000000000000	-0,523598775098	
8	2,732051220415	1,000000023547	-0,000000025413	m	0,000000000000	-0,523598775098	
9	-4086507,894162	4,582845786641	-3,582845788507		-0,314159265359	-0,209439509739	m
10	0,953254252546	3,973213715338	-2,973213717204		-0,285599332145	-0,237999442954	
11	-0,000000256708	1,000000020392	-0,000000022258	m	-0,523598775598	0,000000000500	m
12	0,366025342608	0,925601272997	0,074398725137		-0,483321946706	-0,040276828392	
13	0,577350244919	0,894915822967	0,105084175167		-0,448798950513	-0,074799824585	
14	0,732050796033	0,883011017212	0,116988980922		-0,418879020479	-0,104719754620	
15	0,866025399016	0,881939723114	0,118060275020		-0,392699081699	-0,130899693400	
16	1,000000001321	0,888481481328	0,111518516806		-0,369599135716	-0,153999639382	
17	1,154700549355	0,901512532837	0,098487465297		-0,349065850399	-0,174532924699	
18	1,366025438569	0,921448538235	0,078551459899		-0,330693963536	-0,192904811563	
19	1,732050931289	0,950989154477	0,049010843657		-0,314159265359	-0,209439509739	
20	2,732051632261	1,000000020183	-0,000000022049	m	-0,299199300342	-0,224399474756	
21	-2043253,539188	1,935676771003	-0,935676772869		-0,428398998217	-0,095199776882	
22	0,953254251001	1,876972363067	-0,876972364933		-0,409772954816	-0,113825820282	
23	-0,000000513416	1,000000020392	-0,000000022258		-0,523598775598	0,000000000500	
24	0,366025281431	0,960595287699	0,039404710435		-0,502654824574	-0,020943950524	
25	0,577350220527	0,941968896482	0,058031101652		-0,483321946706	-0,040276828392	
26	0,732050784033	0,933213857984	0,066786140150		-0,465421133865	-0,058177641233	
27	0,866025393016	0,930726824720	0,069273173414		-0,448798950513	-0,074799824585	
28	0,999999999713	0,933033692023	0,066966306110		-0,433323124633	-0,090275650465	
29	1,154700553355	0,939686659659	0,060313338475		-0,418879020479	-0,104719754620	
30	1,366025454961	0,951095690841	0,048904307293		-0,405366794012	-0,118231981087	

На рис. 2 приведены значения подходящих непрерывных дробей Никипорца, которые представляют корни кубического уравнения $x^3-\left(1+\sqrt{3}+10^{-9}\right)x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x-1=0$.

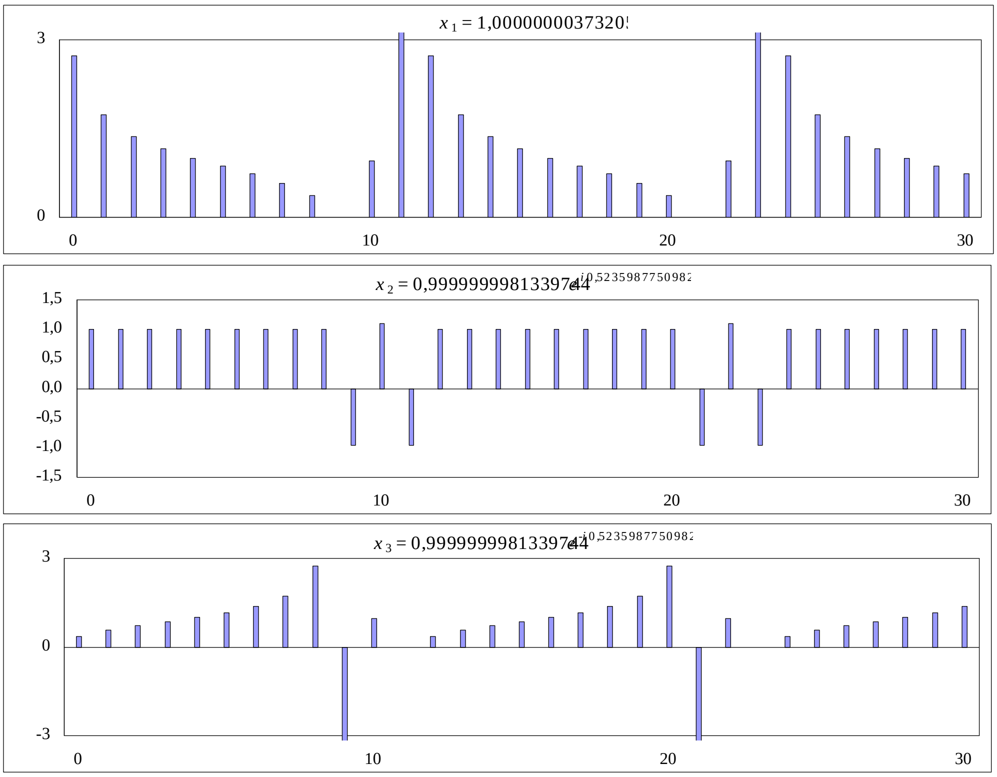


Рис. 2. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (18).

Структура графиков расположения подходящих дробей корней исходного алгебраического уравнения и “возмущённого” обсуждались в предыдущем примере. Предположения о характере расположения подходящих дробей для алгебраических уравнений, имеющих сопряжённые комплексные корни с аргументами, кратными числу π, находят экспериментальное подтверждение, что будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим решение алгебраического уравнения

$$x^3-\left(1+2\cos\varphi\right)x^2+\left(1+2\cos\varphi\right)x-1=0 \qquad (19)$$

при малых значениях аргумента φ. Положим $\varphi=\pi/30$.

$$\cos\frac{\pi}{30}=\frac{1}{8}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right]. \qquad (20)$$

Чтобы избежать делений на ноль, вместо уравнения (19) при $\varphi=\pi/30$ будем решать “близкое” уравнение

$$x^3-\left(1+2\cos\frac{\pi}{30}+10^{-9}\right)x^2+\left(1+2\cos\frac{\pi}{30}\right)x-1=0\ . \qquad (21)$$

Используя функции Никипорца, определим корни кубического уравнения (21). Результаты вычислений приведены в табл. 10-12.

Как уже отмечалось, в теоретическом плане функции Никипорца имеют некоторые преимущества перед формулами Эйткена, так как в отличие от формул Эйткена, функции Никипорца представляются двумя “симметричными” отношениями определителей, то есть определителями, имеющими одинаковую размерность.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/30$

x_1=1,00000009127247

Таблица 10

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,989043791737	2,989043791737	-1,989043700464	m
1	1,989043792071	2,438306584124	-1,438306492851	m
2	1,654488640490	2,142628138886	-1,142628047614	m
3	1,486289653421	1,955401602422	-0,955401511150	m
4	1,384627434331	1,824968446058	-0,824968354785	m
5	1,316227430006	1,728229004002	-0,728228912730	m
6	1,266827857032	1,653225866246	-0,653225774974	m
7	1,229296673955	1,593117308167	-0,593117216894	m
8	1,199670562917	1,543691276800	-0,543691185528	m
9	1,175570513392	1,502205243068	-0,502205151795	m
10	1,155481624029	1,466792589135	-0,466792497862	m
11	1,138392994452	1,436136321067	-0,436136229795	m
12	1,123603811397	1,409279112300	-0,409279021027	m
13	1,110612530884	1,385507370220	-0,385507278948	m
14	1,099050376999	1,364277628605	-0,364277537333	m
15	1,088639767349	1,345168217005	-0,345168125733	m
46	0,865441510197	1,090440736949	-0,090440645677	m
47	0,850652748295	1,084813790996	-0,084813699723	m
48	0,833564712881	1,078996857330	-0,078996766058	m
49	0,813476689319	1,072918363281	-0,072918272009	m
50	0,789377952143	1,066481465063	-0,066481373790	m
51	0,759753930124	1,059548881761	-0,059548790488	m
52	0,722226286261	1,051914580099	-0,051914488827	m
53	0,672833222223	1,043245522361	-0,043245431088	m
54	0,604446621893	1,032944336807	-0,032944245534	m
55	0,502817012701	1,019749686433	-0,019749595161	m
56	0,334722334541	1,000013136814	-0,000013045541	m
57	0,000749885091	0,883336559647	0,116663531625	
58	0,998170746899	0,885168281407	0,114831809865	
59	1335,976018600	1,000012411632	-0,000012320359	m
60	2,987556331514	1,018116249892	-0,018116158620	

Остановимся особо на графике, показанном на рис. 3. Как видно из этого графика и из второй колонки табл. 11, пятьдесят шесть подходящих имеют практически единичное значение.

Любопытно, что последовательность подходящих непрерывных дробей Никипорца для второго корня кубического уравнения

$$x^3-(1+2\cos\varphi)x^2+$$
$$+(1+2\cos\varphi)x-1=0\ ,$$

принимающих подряд единичные значения, может быть сколь угодно длинной при соответствующем выборе φ. Получается своеобразный генератор единиц.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/30$

$x_2=0{,}9999999543637677e^{i0{,}1047197527279973}$

Таблица 11

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,999999999665	0,999999999665	-0,000000045302	m	0,000000000000	0,104719752728	m
1	0,999999999161	0,999999999413	-0,000000045049	m	0,000000000000	0,104719752728	
2	0,999999998449	0,999999999092	-0,000000044728	m	0,000000000000	0,104719752728	
3	0,999999997524	0,999999998700	-0,000000044336	m	0,000000000000	0,104719752728	
4	0,999999996378	0,999999998235	-0,000000043872	m	0,000000000000	0,104719752728	
5	0,999999995003	0,999999997697	-0,000000043333	m	0,000000000000	0,104719752728	
6	0,999999993386	0,999999997081	-0,000000042717	m	0,000000000000	0,104719752728	
7	0,999999991514	0,999999996385	-0,000000042021	m	0,000000000000	0,104719752728	
8	0,999999989372	0,999999995606	-0,000000041242	m	0,000000000000	0,104719752728	
9	0,999999986939	0,999999994739	-0,000000040375	m	0,000000000000	0,104719752728	
10	0,999999984195	0,999999993781	-0,000000039417	m	0,000000000000	0,104719752728	
11	0,999999981114	0,999999992725	-0,000000038361	m	0,000000000000	0,104719752728	
12	0,999999977667	0,999999991567	-0,000000037203	m	0,000000000000	0,104719752728	
13	0,999999973820	0,999999990299	-0,000000035935	m	0,000000000000	0,104719752728	
14	0,999999969534	0,999999988915	-0,000000034551	m	0,000000000000	0,104719752728	
15	0,999999964763	0,999999987405	-0,000000033041	m	0,000000000000	0,104719752728	
46	0,999996536139	0,999999572431	0,000000381933		0,000000000000	0,104719752728	
47	0,999995488005	0,999999487338	0,000000467025		0,000000000000	0,104719752728	
48	0,999993974582	0,999999374833	0,000000579531		0,000000000000	0,104719752728	
49	0,999991705119	0,999999221438	0,000000732926		0,000000000000	0,104719752728	
50	0,999988139658	0,999999004147	0,000000950217		0,000000000000	0,104719752728	
51	0,999982198298	0,999998680955	0,000001273409		0,000000000000	0,104719752728	
52	0,999971505300	0,999998168200	0,000001786164		0,000000000000	0,104719752728	
53	0,999950121493	0,999997278425	0,000002675939		0,000000000000	0,104719752728	
54	0,999900230397	0,999995513831	0,000004440532		0,000000000000	0,104719752728	
55	0,999750576436	0,999991139423	0,000008814941		0,000000000000	0,104719752728	
56	0,999002652523	0,999973789121	0,000026165242		0,000000000000	0,104719752728	
57	-0,999660420893	0,999968385389	0,000031568975		0,054165390579	0,050554362149	m
58	1,003668584345	1,000030986837	-0,000031032473		0,053247333112	0,051472419616	
59	-0,996683271658	0,999975099546	0,000024854817		0,104719755120	-0,000000002392	m
60	1,000998347521	0,999991865667	0,000008088696		0,103003037823	0,001716714905	

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/30$

$x_3=0{,}9999999543637677e^{-i0{,}1047197527279973}$

Таблица 12

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,334555152085	0,334555152085	0,665444802278	m	0,000000000000	-0,104719752728	m
1	0,502754139866	0,410120698971	0,589879255393	m	0,000000000000	-0,104719752728	
2	0,604416359882	0,466716544397	0,533283409967	m	0,000000000000	-0,104719752728	
3	0,672816365353	0,511403897829	0,488596056534	m	0,000000000000	-0,104719752728	
4	0,722215939702	0,547954680490	0,452045273873	m	0,000000000000	-0,104719752728	
5	0,759747124396	0,578627022222	0,421372932142	m	0,000000000000	-0,104719752728	
6	0,789373237305	0,604878028669	0,395121925695	m	0,000000000000	-0,104719752728	
7	0,813473288973	0,627700169026	0,372299785337	m	0,000000000000	-0,104719752728	
8	0,833562180768	0,647797923991	0,352202030373	m	0,000000000000	-0,104719752728	
9	0,850650813089	0,665688000941	0,334311953423	m	0,000000000000	-0,104719752728	
10	0,865439999225	0,681759652746	0,318240301617	m	0,000000000000	-0,104719752728	
11	0,878431283185	0,696312733412	0,303687220952	m	0,000000000000	-0,104719752728	
12	0,889993440917	0,709582650950	0,290417303414	m	0,000000000000	-0,104719752728	
13	0,900404054854	0,721757264663	0,278242689700	m	0,000000000000	-0,104719752728	
14	0,909876427318	0,732988645506	0,267011308858	m	0,000000000000	-0,104719752728	
15	0,918577536142	0,743401457121	0,256598497243	m	0,000000000000	-0,104719752728	
46	1,155483590850	0,917060775230	0,082939179134	m	0,000000000000	-0,104719752728	
47	1,175573127835	0,921817662130	0,078182292234	m	0,000000000000	-0,104719752728	
48	1,199674134474	0,926787338048	0,073212616316	m	0,000000000000	-0,104719752728	
49	1,229301721955	0,932038086760	0,067961867603	m	0,000000000000	-0,104719752728	
50	1,266835307178	0,937663736889	0,062336217474	m	0,000000000000	-0,104719752728	
51	1,316239064214	0,943799135898	0,056200818466	m	0,000000000000	-0,104719752728	
52	1,384647048350	0,950649273926	0,049350680438	m	0,000000000000	-0,104719752728	
53	1,486326548638	0,958549737476	0,041450216888	m	0,000000000000	-0,104719752728	
54	1,654570880759	0,968110720545	0,031889233819	m	0,000000000000	-0,104719752728	
55	1,989291254123	0,980641498555	0,019358455808	m	0,000000000000	-0,104719752728	
56	2,990533465731	1,000013074580	-0,000013120216	m	0,000000000000	-0,104719752728	
57	-1333,990643393	1,132107128013	-0,132107173649		-0,054165390579	-0,050554362149	m
58	0,998170731880	1,129693680995	-0,129693726632		-0,053247333112	-0,051472419616	
59	-0,000751007317	1,000012489287	-0,000012534923	m	-0,104719755120	0,000000002392	m
60	0,334387886730	0,982214098346	0,017785856018		-0,103003037823	-0,001716714905	

На рис. 3 показано расположение значений подходящих дробей, представляющих корни уравнения (21).

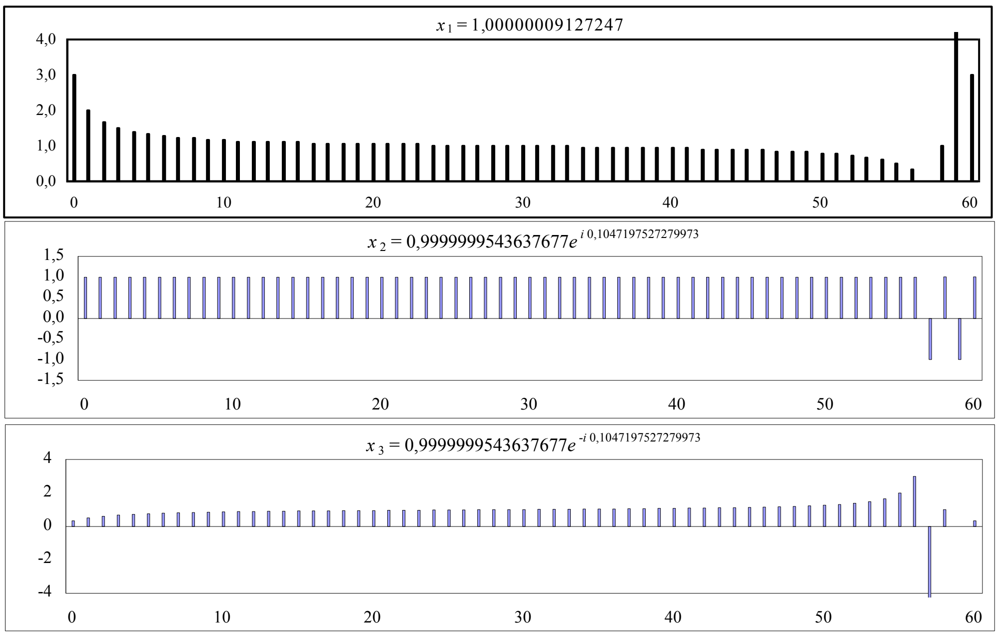


Рис. 3. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (21).

4.2. Решение уравнений с использованием QD-алгоритма

Вычислим корни “возмущённого” кубического уравнения

$$x^3-\left(2+10^{-9}\right)x^2+2x-1=0\,. \qquad (22)$$

Это уравнение уже рассматривалось в параграфе “Ультрапериодические непрерывные дроби”, где решалось при помощи непрерывных дробей Никипорца непосредственным вычислением определителей, что ограничивало достижения высокой точности при нахождении корней. В этом разделе будем использовать “упрощённую” схему QD-алгоритма Рутисхаузера.

Как уже отмечалось выше, алгебраическое уравнение

$$x^3-2x^2+2x-1=0 \qquad (23)$$

имеет комплексно-сопряжённые корни, аргумент которых равен $\pi/3$, то есть кратен числу π, что приводит к появлению подходящих дробей с “экстремальными” значениями “0” и “∞”, затрудняющими проведение вычислений на компьютере.

В табл. 13 приведены значения первых двадцати подходящих дробей непрерывной дроби Хессенберга, которой представляется x_1 уравнения (22):

$$x_1=1{,}000000001=\frac{\begin{vmatrix} 2+10^{-9} & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2+10^{-9} & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2+10^{-9} & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2+10^{-9} & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+10^{-9} & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+10^{-9} & -2 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 2+10^{-9} & -2 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 2+10^{-9} & -2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2+10^{-9} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}\,. \qquad (24)$$

Вычисления значений непрерывной дроби (24) производилось по нелинейной рекуррентной формуле.

Нахождение нулей полинома

x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/3

x_1=1,000000001 Таблица 13

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,000000001000	2,000000001000	-1,000000000000	m
1	1,000000001500	1,414213563790	-0,414213562787	m
2	0,500000003000	1,000000002670	-0,000000001667	m
3	0,000000010000	0,010000000004	0,990000000996	
4	0,800000002058	0,024022488700	0,975977512300	
5	124999999,9650	1,000000000670	0,000000000333	m
6	1,999999995000	1,104089513910	-0,104089512910	
7	1,000000002500	1,090507733210	-0,090507732211	
8	0,500000006000	1,000000001780	-0,000000000778	
9	0,000000020000	0,169864646512	0,830135354488	
10	0,800000002889	0,195561623969	0,804438377031	
11	62500000,09430	1,000000000670	0,000000000333	
12	1,999999989000	1,054766076680	-0,054766075684	
13	1,000000003500	1,050756639100	-0,050756638104	
14	0,500000009000	1,000000001600	-0,000000000600	
15	0,000000030000	0,338703807334	0,661296193666	
16	0,800000003731	0,356268259495	0,643731741505	
17	41666666,80150	1,000000000670	0,000000000333	
18	1,999999983000	1,037155044640	-0,037155043637	
19	1,000000004500	1,035264924260	-0,035264923255	
20	0,500000012000	1,000000001520	-0,000000000524	

Как видно из колонки 2 табл. 13, подходящие непрерывной дроби Хессенберга (24), представляющие старший по модулю вещественный корень кубического уравнения (22), имеют чётко различимых шесть значений. Это связано, как уже отмечалось, с тем обстоятельством, что решалось “возмущённое” уравнение (22). Если бы находились корни исходного уравнения (23), то первым бы при помощи непрерывной дроби Хессенберга определялся бы комплексный корень $x_1=e^{i\pi/3}$. Свойство “комплексной” дроби Хессенберга как бы по наследству досталась непрерывной дроби Хессенберга (24), которая вынуждена представлять вещественный корень, модуль которого наибольший.

Если сравнить данные колонок 2 табл. 1 и табл. 13, то, как и следовало ожидать, имеет место совпадение значений подходящих непрерывной дроби (24), вычисленные непосредственно через определители и по нелинейной рекуррентной формуле. Естественно, что совпадают в обеих таблицах значения модуля корня, помещённые в третьей колонке. Модуль определяется по формуле

$$r_0 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left| X_{1,3}^{(i)} \right|}\,, \tag{25}$$

где $X_{1,3}^{(i)}$ – i-я подходящая непрерывной дроби.

Из рассмотренных в этом параграфе примеров можно заключить, что старший по модулю действительный корень кубического уравнения в случае, если сопряжённые комплексные корни имеют аргумент, "почти" кратный числу π, не может быть установлен "без проблем", как предел, к которому стремятся значения подходящих дробей, представляющих действительный корень. Например, подходящие непрерывной дроби Хессенберга (24) имеют шесть чётко различимых значения. В принципе, вполне достаточно этих шести значений, чтобы вычислить модуль корня с достаточно высокой точностью. Для этого следует перемножить значения подходящих "на периоде" и извлечь из произведения корень шестой степени, что подтверждает каждая шестая строка колонки 2 табл. 14. Аналогично обстоит дело с определением значения аргумента комплексного модуля, если этот аргумент почти кратен числу π, – достаточно подсчитать число отрицательных подходящих на одном периоде. Естественно, для этого надо знать длину периода, то есть аргумент искомого корня.

x_1=1,00000000 Таблица 14

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей
0	2,000000001000
1	1,000000001500
2	0,500000003000
3	0,000000010000
4	0,800000002058
5	124999999,9650
6	1,999999995000
7	1,000000002500
8	0,500000006000
9	0,000000020000
10	0,800000002889
11	62500000,09430
12	1,999999989000
13	1,000000003500
14	0,500000009000
15	0,000000030000
16	0,800000003731
17	41666666,80150
18	1,999999983000
19	1,000000004500
20	0,500000012000

Можно действовать по общей схеме и при решении уравнений с аргументами, имеющими кратные числу π аргументы. Для этого необходимо встретившись с операцией "деление на ноль" внести незначительное возмущение в коэффициенты исходного уравнения и найти затем при помощи QD-алгоритма Рутисхаузера достаточно большое число подходящих дробей. Вычисление коэффициентов $x_1^{(m)}$, составляющих первую строку QD-схемы Рутисхаузера, никакой сложности не представляет и может быть выполнено по нелинейной рекуррентной схеме.

В табл. 15 приведены значения x_1, определённые по формуле $x_1 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |P_i/Q_i|}$, где P_i/Q_i – подходящие непрерывной дроби Хессенберга (24).

В первой колонке табл. 15 приведены номера подходящих дробей непрерывной дроби Хессенберга (24), то есть размерность определителя, стоящего в знаменателе (24). Номера подходящих n кратны степени 2. Следовательно, ни одна из подходящих не замыкает период, который состоит из шести подходящих, и тем не менее, с увеличением числа подходящих асимптотически повышается точность в определении значения x_1. Это легко объяснить тем, что подходящие дроби, представляющие x_1 "возмущённого" уравнения (22) "плывут" на периоде, сглаживая фиксированные значения подходящих, которые присущи ультрапериодическим непрерывным дробям.

Следует только обратить внимание, что вследствие того, что значения подходящих дробей "возмущённого" уравнения "плывут" по кругу, то рано или поздно опять возникнет неблагоприятная ситуация с отсчётом “экстремальных” подходящих, которая уже была на начальном этапе вычислений при малых значениях *n*.

Здесь вновь можно возвратиться к парадоксальному представлению серией единиц корня (уравнения). Как известно, в классических цепных дробях две соседние подходящие дроби не могут принимать одинаковые значения. Знаменитый академик Пётр Кузьмич Анохин (1898-1974) говорил: “Уметь не упускать из внимания многие стороны эксперимента, не пропустить ни одного даже случайного явления, подчас не имеющего прямого отношения к целям эксперимента, – это залог новых открытий и совершенствований”.

Нахождение нулей полинома

x^3-$(1+2\cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

x_1=1,000000001 Таблица 15

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,000000001000	2,000000001000	-1,000000000000	m
1	1,000000001500	1,414213563790	-0,414213562787	m
2	0,500000003000	1,000000002670	-0,000000001667	m
4	0,800000002058	0,024022488700	0,975977512300	
8	0,500000006000	1,000000001780	-0,000000000778	m
16	0,800000003731	0,356268259495	0,643731741505	
32	0,500000018000	1,000000001450	-0,000000000455	m
64	0,800000010457	0,778849561543	0,221150439457	
128	0,500000066000	1,000000001360	-0,000000000364	m
256	0,800000037338	0,943735782799	0,056264218201	
512	0,500000258000	1,000000001340	-0,000000000341	m
1024	0,800000144861	0,986913542765	0,013086458235	
2048	0,500001025999	1,000000001340	-0,000000000335	m
4096	0,800000574940	0,997046759486	0,002953241514	
8192	0,500004097992	1,000000001330	-0,000000000334	m
16384	0,800002295252	0,999345262037	0,000654738963	
32768	0,500016385866	1,000000001330	-0,000000000333	m
65536	0,800009176419	0,999857416306	0,000142584694	
131072	0,500065535852	1,000000001330	-0,000000000333	
262144	0,800036699736	0,999969640055	0,000030360945	
524288	0,500262111636	1,000000001330	-0,000000000333	
1048576	0,800146771351	0,999993732244	0,000006268756	
2097152	0,501048027986	1,000000001330	-0,000000000332	m
4194304	0,800586711317	0,999998763855	0,000001237145	
8388608	0,504185493520	1,000000001330	-0,000000000329	m

Как видно из таблицы 15, при большом числе подходящих, значение модуля корня, представляемого квазипериодической непрерывной дробью, может с высокой степенью точности определяться при произвольно выбранном номере подходящей. Например, номер подходящей 8388608 не кратен шести, т. е. эта подходящая не замыкает период подходящих, тем не менее, точность модуля корня устанавливается с большой точностью, как то следует из колонок 3 и 4 таблицы 15.

Приведём аналогичные таблицы для комплексных корней уравнения (22), причём, значения подходящих дробей в колонках 2 таблиц 17 и 19 определялись по алгоритму Рутисхаузера, подробно рассмотренному выше.

Нахождение нулей полинома

x^3-$(1+2\cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/3$

$x_2=0{,}9999999994999999e^{i1{,}047197550907922}$ Таблица 16

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,499999999500	0,499999999500	0,500000000000	m	0,000000000000	0,785398162897	m
1	0,499999997500	0,499999998500	0,500000001000		0,000000000000	0,785398162897	
2	-0,000000016000	0,001587401048	0,998412598452		0,000000000000	0,785398162897	
3	125000000,7280	0,840896414749	0,159103584751	m	0,000000000000	0,785398162897	
4	-124999998,7650	36,238983094900	-35,238983095400		0,628318530718	0,157079632179	m
5	0,000000016000	0,999999999000	0,000000000500	m	0,523598775598	0,261799387299	
6	0,500000001500	0,905723663876	0,094276335624		0,448798950513	0,336599212385	
7	0,499999995500	0,840896413992	0,159103585508		0,785398163397	-0,000000000500	m
8	-0,000000032000	0,125992104730	0,874007894770		0,698131700798	0,087266462100	
9	62500000,85680	0,933032991089	0,066967008411		0,628318530718	0,157079632179	
10	-62499998,89430	4,801202251460	-3,801202251960		0,571198664289	0,214199498608	
11	0,000000032000	0,999999999000	0,000000000500		0,523598775598	0,261799387299	
12	0,500000003500	0,948077513975	0,051922485525		0,724982920059	0,060415242838	
13	0,499999993500	0,905723663099	0,094276336401		0,673198425769	0,112199737128	
14	-0,000000048000	0,296445877724	0,703554121776		0,628318530718	0,157079632179	
15	41666667,56400	0,957603280268	0,042396719232		0,785398163397	-0,000000000500	
16	-41666665,60150	2,694729771490	-1,694729771990		0,739198271433	0,046199891465	
17	0,000000048000	0,999999999000	0,000000000500		0,698131700798	0,087266462100	
18	0,500000005500	0,964175997587	0,035824001913		0,661387927072	0,124010235826	
19	0,499999991500	0,933032990417	0,066967009083		0,628318530718	0,157079632179	
20	-0,000000064000	0,425370744563	0,574629254937		0,747998250855	0,037399912043	

Нахождение нулей полинома
x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/3

x_2=0,9999999994999999$e^{i1,047197550907922}$

Таблица 17

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
0	0,499999999500	0,499999999500	0,500000000000	m	0,000000000000	1,047197550910	m
1	0,499999997500	0,499999998500	0,500000001000		0,000000000000	1,047197550910	
2	-0,000000016000	0,001587401048	0,998412598452		1,047197551200	-0,000000000289	m
4	-124999998,7650	36,238983094900	-35,238983095400		1,256637061440	-0,209439510528	
8	-0,000000032000	0,125992104730	0,874007894770		1,047197551200	-0,000000000289	
16	-41666665,60150	2,694729771490	-1,694729771990		1,108797407150	-0,061599856241	
32	-0,000000096000	0,587621002240	0,412378997260	m	1,047197551200	-0,000000000289	
64	-11363635,35940	1,270326005830	-0,270326006329	m	1,063308282750	-0,016110731846	
128	-0,000000352000	0,881670005847	0,118329993653	m	1,047197551200	-0,000000000289	
256	-2906975,757030	1,056764594420	-0,056764594922	m	1,051272249840	-0,004074698931	
512	-0,000001375999	0,971405812917	0,028594186583	m	1,047197551200	-0,000000000289	
1024	-730993,1693100	1,012575005620	-0,012575006122	m	1,048219207340	-0,001021656436	
2048	-0,000005471992	0,993432028001	0,006567971499	m	1,047197551200	-0,000000000289	
4096	-183015,1237960	1,002792315790	-0,002792316290	m	1,047453152260	-0,000255601351	
8192	-0,000021855873	0,998522105803	0,001477893697	m	1,047197551200	-0,000000000289	
16384	-45769,79859430	1,000612835010	-0,000612835506	m	1,047261463160	-0,000063912254	
32768	-0,000087389972	0,999672565530	0,000327433970	m	1,047197551200	-0,000000000289	
65536	-11442,76130110	1,000132024820	-0,000132025316	m	1,047213529920	-0,000015979011	
131072	-0,000349503551	0,999928703172	0,000071296328	m	1,047197551200	-0,000000000289	
262144	-2860,019916720	1,000027715320	-0,000027715820	m	1,047201545920	-0,000003995015	
524288	-0,001397593010	0,999984817988	0,000015181512	m	1,047197551200	-0,000000000289	
1048576	-714,2733255880	1,000005605420	-0,000005605921	m	1,047198549880	-0,000000998973	
2097152	-0,005584123193	0,999996864221	0,000003135279	m	1,047197551200	-0,000000000289	
4194304	-177,8334131870	1,000001069550	-0,000001070051	m	1,047197800870	-0,000000249960	
8388608	-0,022237639427	0,999999380036	0,000000619464	m	1,047197551200	-0,000000000289	

Нахождение нулей полинома
x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/3

x_3=0,9999999994999999$e^{-i1,047197550907922}$

Таблица 18

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
0	1,000000000500	1,000000000500	-0,000000001000	m	0,000000000000	-1,047197550910	m
1	2,000000007000	1,414213565200	-0,414213565702		0,000000000000	-1,047197550910	
2	-124999999,5280	629,9605249940	-628,9605249940		-1,047197551200	0,000000000289	m
3	0,800000000378	118,9207115210	-117,9207115210		-0,785398163397	-0,261799387510	
4	-0,000000010000	1,148698356830	-0,148698357335		-1,256637061440	0,209439510528	
5	0,499999997000	1,000000000330	-0,000000000833	m	-1,047197551200	0,000000000289	
6	0,999999999500	1,000000000210	-0,000000000714	m	-0,897597901026	-0,149599649882	
7	2,000000013000	1,090507733760	-0,090507734256		-0,785398163397	-0,261799387510	
8	-62499999,65680	7,937005262050	-6,937005262550		-1,047197551200	0,000000000289	
9	0,799999999524	6,309573446010	-5,309573446510		-0,942477796077	-0,104719754831	
10	-0,000000020000	1,065041090990	-0,065041091489		-1,142397328580	0,095199777670	
11	0,499999994000	1,000000000330	-0,000000000833		-1,047197551200	0,000000000289	
12	0,999999998500	1,000000000190	-0,000000000692	m	-0,966643893412	-0,080553657496	
13	2,000000019000	1,050756639550	-0,050756640054		-0,897597901026	-0,149599649882	
14	-41666666,36400	3,373297028370	-2,373297028870		-1,047197551200	0,000000000289	
15	0,799999998692	3,083147458880	-2,083147459380		-0,981747704247	-0,065449846661	
16	-0,000000030000	1,041616012120	-0,041616012621		-1,108797407150	0,061599856241	
17	0,499999991000	1,000000000330	-0,000000000833		-1,047197551200	0,000000000289	
18	0,999999997500	1,000000000180	-0,000000000684	m	-0,992081890607	-0,055115660301	
19	2,000000025000	1,035264924670	-0,035264925170		-0,942477796077	-0,104719754831	
20	-31249999,71850	2,350890396810	-1,350890397310		-1,047197551200	0,000000000289	

Из вторых колонок таблиц 16 и 18, в которой приведены подряд значения подходящих дробей, вычисляемые по “упрощённой” схеме Рутисхаузера, видно, что значения подходящих периодически повторяются, причём период содержит шесть подходящих. Как уже отмечалось, это объясняется тем, что комплексные корни имеют аргумент, который кратен числу π. В данном случае $\varphi = \pi/3$. Периодическое повторение подходящих наблюдалось и в случае обыкновенных цепных дробей:

$$e^{i\pi/3} = 1 - \frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\ldots\frac{1}{1-}\ldots \quad \left(1,\, 0,\, -\infty,\, 1,\, 0,\, \infty\right),$$

которые детально рассматривались в [519].

Нахождение нулей полинома

x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/3

x_3=0,9999999994999999$e^{i1,047197550907922}$

Таблица 19

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	1,000000000500	1,000000000500	-0,000000001000	m	0,000000000000	-1,047197550910	m
1	2,000000007000	1,414213565200	-0,414213565702		0,000000000000	-1,047197550910	
2	-124999999,5280	629,9605249940	-628,9605249940		-1,047197551200	0,000000000289	m
4	-0,000000010000	1,148698356830	-0,148698357335		-1,256637061440	0,209439510528	
8	-62499999,65680	7,937005262050	-6,937005262550		-1,047197551200	0,000000000289	
16	-0,000000030000	1,041616012120	-0,041616012621		-1,108797407150	0,061599856241	
32	-20833333,07240	1,701777156930	-0,701777157432		-1,047197551200	0,000000000289	
64	-0,000000110000	1,010720865140	-0,010720865640		-1,063308282750	0,016110731846	
128	-5681817,951550	1,134211203740	-0,134211204243		-1,047197551200	0,000000000289	
256	-0,000000430000	1,002700712450	-0,002700712951		-1,051272249840	0,004074698931	
512	-1453488,150390	1,029435880830	-0,029435881325		-1,047197551200	0,000000000289	
1024	-0,000001710002	1,000676471190	-0,000676471690		-1,048219207340	0,001021656436	
2048	-365496,8565300	1,006611394110	-0,006611394615		-1,047197551200	0,000000000289	
4096	-0,000006830032	1,000169199730	-0,000169200227		-1,047453152260	0,000255601351	
8192	-91507,83377530	1,001480080260	-0,001480080765		-1,047197551200	0,000000000289	
16384	-0,000027310507	1,000042305990	-0,000042306493		-1,047261463160	0,000063912254	
32768	-22885,17118150	1,000327540380	-0,000327540884		-1,047197551200	0,000000000289	
65536	-0,000109238114	1,000010577810	-0,000010578315		-1,047213529920	0,000015979011	
131072	-5721,652563020	1,000071300580	-0,000071301078		-1,047197551200	0,000000000289	
262144	-0,000437039844	1,000002645470	-0,000002645974		-1,047201545920	0,000003995015	
524288	-1430,281983320	1,000015180910	-0,000015181410		-1,047197551200	0,000000000289	
1048576	-0,001749709344	1,000000662370	-0,000000662870		-1,047198549880	0,000000998973	
2097152	-357,4091379320	1,000003134460	-0,000003134956		-1,047197551200	0,000000000289	
4194304	-0,007023899013	1,000000166590	-0,000000167095		-1,047197800870	0,000000249960	
8388608	-89,19098701350	1,000000618640	-0,000000619135		-1,047197551200	0,000000000289	

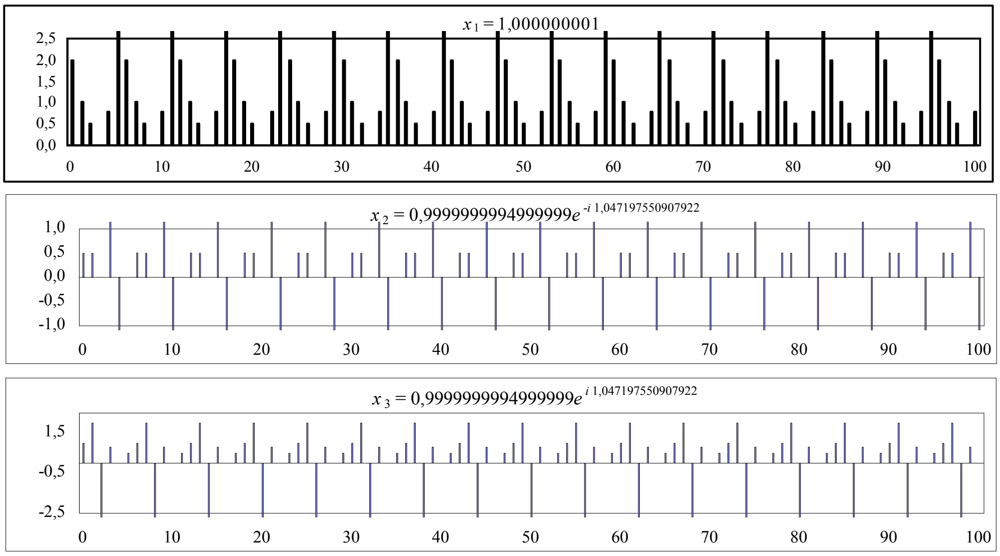


Рис. 4. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (22).

На рис. 4 показано распределение значений подходящих дробей, которые определяются по формулам Рутисхаузера при решении кубического уравнения (22). На рис. 5 и рис. 6 дано распределение значений подходящих дробей на “удалённых” интервалах.

Если на начальном участке действительный корень представлялся графиком, состоящим из периодически следующих друг за другом “башенок”, что свойственно графикам ультрапериодических непрерывных дробей, то на удалённых участках графики подходящих действительного корня имеет вид гребенки.

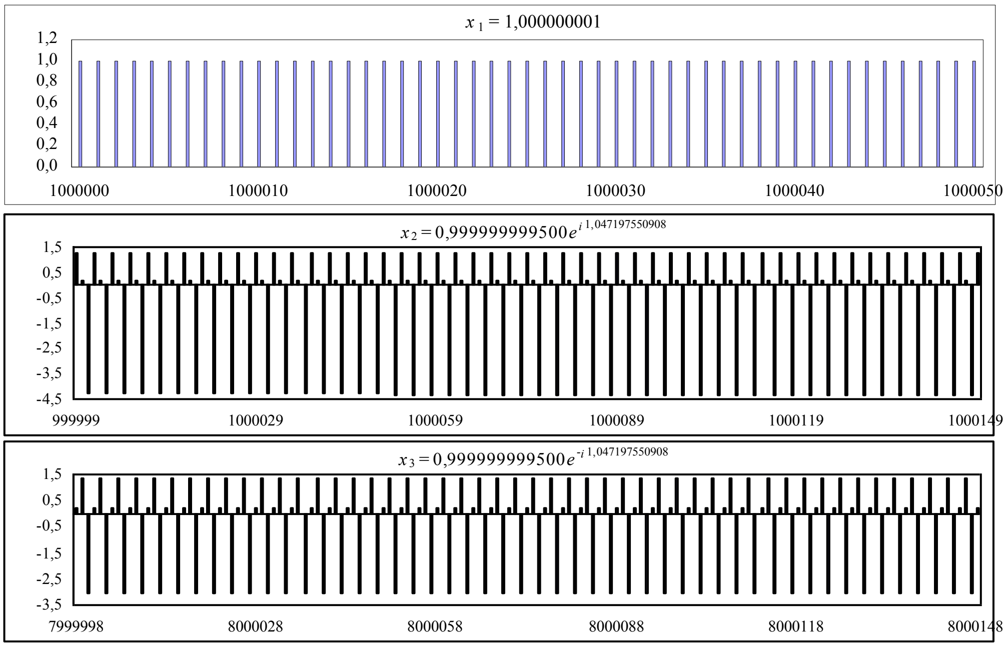


Рис. 5. Графики подходящих дробей, представляющие корни алгебраического уравнения (22) на «удаленных» интервалах.

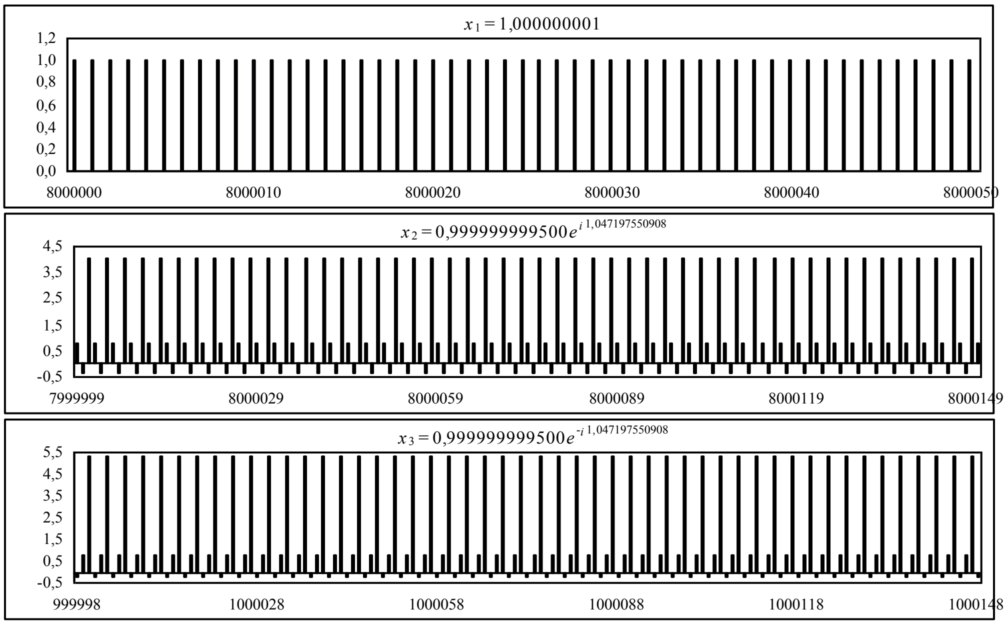


Рис. 6. Графики подходящих дробей с большими индексами, представляющими корни уравнения (22).

Рассмотрим решение при помощи алгоритма Рутисхаузера вкупе с r/φ-алгоритмом алгебраического уравнения

$$x^3 - \left(1 + 2\cos\pi/6 + 10^{-9}\right)x^2 + \left(1 + 2\cos\pi/6\right)x - 1 = 0\,. \qquad (26)$$

Значения подходящих дробей вторых колонок табл. 20, 21 и 22 определялись из непрерывной дроби Хессенберга с использованием нелинейных рекуррентных соотношений. Непрерывные дроби, которыми представляются корни уравнения (26), являются квазиультрапериодическими, поэтому значения корней уравнения (26) вполне устанавливаются по подходящим дробям, составляющим период, если вычисления вести от подходящей дроби, замыкающей период, то есть от двенадцатой подходящей.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

x_1=1,000000003732051

Таблица 20

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,732050808570	2,732050808570	-1,732050804840	m
1	1,732050808930	2,175327748420	-1,175327744680	m
2	1,366025405780	1,862813565890	-0,862813562158	m
3	1,154700541360	1,652891652430	-0,652891648696	m
4	1,000000004540	1,494842750120	-0,494842746387	m
5	0,866025411016	1,364849286730	-0,364849283000	m
6	0,732050820033	1,248635363110	-0,248635359380	m
7	0,577350293704	1,133864349660	-0,133864345928	m
8	0,366025464961	1,000000027190	-0,000000023458	m
9	0,000000256708	0,219252161244	0,780747842488	
10	0,953254225043	0,250592437698	0,749407566034	
11	4086509,592400	1,000000017660	-0,000000013928	m
12	2,732050396720	1,080378819560	-0,080378815825	
13	1,732050747760	1,117423537280	-0,117423533548	
14	1,366025389390	1,132488703910	-0,132488700173	
15	1,154700537360	1,133864339770	-0,133864336038	
16	1,000000006140	1,125515864100	-0,125515860370	
17	0,866025417016	1,109246923390	-0,109246919662	
18	0,732050832033	1,085247808070	-0,085247804337	
19	0,577350318096	1,051536717480	-0,051536713747	
20	0,366025526138	1,000000023310	-0,000000019573	

Глядя на многочисленные таблицы, вспоминается высказывание Бернарда Шоу из лекции, прочитанной в Гонконге в 1933 г.: “Учебник можно определить как книгу, непригодную для чтения. Тем, что я остался совершенно необразованным человеком, я обязан тому, что никогда не мог читать учебники. И время, которое мне полагалось тратить на чтение учебников, я тратил на чтение настоящих книг – книг, написанных людьми, которые действительно умеют писать, чего никогда не бывает с авторами учебников”.

Б.Шоу, мысливший, как известно, весьма парадоксальными категориями, говорил в данном случае не об учебниках математики.

Не лишне повторить строки из предисловия: “Математические факты могут быть зафиксированы не только в виде теорем и отдельных формул, но и в столбцах чисел. От фактов не так просто отмахнуться, факты – упрямая вещь. Сознавая, что в трактовках таблиц возможны искренние заблуждения, мы стремились избегать измышлений гипотез, оставляя большей частью колонки цифр

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

x_1=1,000000003732051

Таблица 21

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min
0	2,732050808570	2,732050808570	-1,732050804840	m
1	1,732050808930	2,175327748420	-1,175327744680	m
2	1,366025405780	1,862813565890	-0,862813562158	m
4	1,000000004540	1,494842750120	-0,494842746387	m
8	0,366025464961	1,000000027190	-0,000000023458	m
16	1,000000006140	1,125515864100	-0,125515860370	
32	0,366025587315	1,000000022250	-0,000000018514	m
64	1,000000012570	1,031407830350	-0,031407826622	
128	0,366026076730	1,000000020870	-0,000000017134	m
256	1,000000038300	1,007852088770	-0,007852085040	
512	0,366028034384	1,000000020510	-0,000000016779	m
1024	1,000000141190	1,001963003300	-0,001962999570	
2048	0,366035864916	1,000000020420	-0,000000016690	m
4096	1,000000552750	1,000490749910	-0,000490746175	
8192	0,366067185683	1,000000020400	-0,000000016666	m
16384	1,000002198940	1,000122688120	-0,000122684384	
32768	0,366192447024	1,000000020390	-0,000000016656	m
65536	1,000008782590	1,000030672770	-0,000030669040	
131072	0,366693144944	1,000000020370	-0,000000016636	m
262144	1,000035099480	1,000007668940	-0,000007665211	
524288	0,368690393049	1,000000020290	-0,000000016562	m
1048576	1,000140084040	1,000001917990	-0,000001914257	
2097152	0,376591667782	1,000000020010	-0,000000016275	m
4194304	1,000555491840	1,000000480260	-0,000000476530	
8388608	0,406853247775	1,000000018960	-0,000000015231	m

без комментариев. Колонки чисел часто красноречивей слов, и уж во всяком случае – достоверней”.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

$x_2=0{,}9999999981339744e^{i0{,}5235987750982994}$

Таблица 22

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,633974595850	0,633974595850	0,366025402284	m	0,000000000000	0,523598775098	m
1	0,788675133473	0,707106780479	0,292893217655	m	0,000000000000	0,523598775098	
2	0,845299459181	0,750458817773	0,249541180361	m	0,000000000000	0,523598775098	
3	0,866025399016	0,777817671799	0,222182326335	m	0,000000000000	0,523598775098	
4	0,866025394624	0,794709436998	0,205290561136	m	0,000000000000	0,523598775098	
5	0,845299443181	0,802925786222	0,197074211912	m	0,000000000000	0,523598775098	
6	0,788675092688	0,800874315157	0,199125682977		0,000000000000	0,523598775098	
7	0,633974473496	0,777817645673	0,222182352461		0,000000000000	0,523598775098	
8	-0,000000668554	0,164780767025	0,835219231109		0,349065850399	0,174532924699	m
9	4086509,739630	0,904380358969	0,095619639165	m	0,314159265359	0,209439509739	
10	-4086507,813610	3,642094684470	-2,642094686340		0,571198664289	-0,047599889191	m
11	0,000000668554	0,999999975876	0,000000022258	m	0,523598775598	-0,000000000500	m
12	0,633974718203	0,965549970448	0,034450027686		0,483321946706	0,040276828392	
13	0,788675174257	0,951695149830	0,048304848304		0,448798950513	0,074799824585	
14	0,845299475181	0,944202991847	0,055797006287		0,418879020479	0,104719754620	
15	0,866025403409	0,939116456512	0,060883541622		0,392699081699	0,130899693400	
16	0,866025390232	0,934651096879	0,065348901255		0,369599135716	0,153999639382	
17	0,845299427181	0,929448078975	0,070551919159		0,349065850399	0,174532924699	
18	0,788675051904	0,921448526452	0,078551471682		0,330693963536	0,192904811563	
19	0,633974351142	0,904380334718	0,095619663415		0,314159265359	0,209439509739	
20	-0,000001337108	0,477225086111	0,522774912022		0,448798950513	0,074799824585	

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

$x_2=0{,}9999999981339744e^{i0{,}5235987750982994}$

Таблица 23

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,633974595850	0,633974595850	0,366025402284	m	0,000000000000	0,523598775098	m
1	0,788675133473	0,707106780479	0,292893217655	m	0,000000000000	0,523598775098	
2	0,845299459181	0,750458817773	0,249541180361	m	0,000000000000	0,523598775098	
4	0,866025394624	0,794709436998	0,205290561136	m	0,000000000000	0,523598775098	
8	-0,000000668554	0,164780767025	0,835219231109		0,349065850399	0,174532924699	m
16	0,866025390232	0,934651096879	0,065348901255	m	0,369599135716	0,153999639382	m
32	-0,000002005661	0,632247708549	0,367752289585		0,475998886908	0,047599888191	m
64	0,866025372663	0,982480003537	0,017519994597	m	0,483321946706	0,040276828392	m
128	-0,000007354094	0,898335110636	0,101664887498		0,511422059887	0,012176715212	m
256	0,866025302386	0,995539572178	0,004460425956	m	0,513412028991	0,010186746107	m
512	-0,000028747852	0,975990651468	0,024009346666		0,520536794454	0,003061980644	m
1024	0,866025021279	0,998879753999	0,001120244135	m	0,521044635230	0,002554139869	m
2048	-0,000114323328	0,994603857984	0,005396140150		0,522832159529	0,000766615570	m
4096	0,866023896861	0,999719614026	0,000280384108	m	0,522959772943	0,000639002155	m
8192	-0,000456632360	0,998816527201	0,001183470933		0,523407051404	0,000191723695	m
16384	0,866019399327	0,999929881684	0,000070116450	m	0,523438995685	0,000159779413	m
32768	-0,001825982938	0,999746239513	0,000253758621		0,523550840162	0,000047934937	m
65536	0,866001411431	0,999982467542	0,000017530592	m	0,523558828791	0,000039946307	m
131072	-0,007305243544	0,999947111542	0,000052886592		0,523586791465	0,000011983633	m
262144	0,865929495664	0,999995615191	0,000004382943	m	0,523588788782	0,000009986316	m
524288	-0,029253753940	0,999989405645	0,000010592489		0,523595779548	0,000002995551	m
1048576	0,865642406338	0,999998902177	0,000001095957	m	0,523596278887	0,000002496211	m
2097152	-0,117662439935	0,999997996730	0,000002001404		0,523598026585	0,000000748514	m
4194304	0,864503269824	0,999999723931	0,000000274203	m	0,523598151420	0,000000623678	m
8388608	-0,488428969664	0,999999649720	0,000000348414		0,523598588345	0,000000186753	m

Из табл. 20, 22 и 24, в которых приведены результаты вычисления корней уравнения (26) при учёте первых двадцати подходящих дробей, видно, что проводить определение модулей и аргументов, начиная с произвольной подходящей в случае ультрапериодических непрерывных дробей нельзя. Необходимо вычисления вести от подходящей дроби, замыкающей период. Так как в компьютере мы не имеем дело с истинными ультрапериодическими непрерывными дробями, то незначительные возмущения в коэффициентах уравнения, введённые целенаправленно или возникшие самопроизвольно вследствие конечной разрядной сетки компьютера, дают возможность вести вычисления корней, начиная с подходящей дроби с произвольным номером. Об этом свидетельствует табл. 21, 23 и 25, как и другие аналогичные таблицы этого параграфа.

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

$x_3=0{,}9999999986909827e^{i0{,}628318530292633}$

Таблица 24

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,577350269312	0,577350269312	0,422649728822	m	0,000000000000	-0,523598775098	m
1	0,732050808033	0,650115167619	0,349884830515	m	0,000000000000	-0,523598775098	
2	0,866025405016	0,715325559349	0,284674438785	m	0,000000000000	-0,523598775098	
3	1,000000002930	0,777817674830	0,222182323304	m	0,000000000000	-0,523598775098	
4	1,154700545360	0,841775187797	0,158224810337	m	0,000000000000	-0,523598775098	
5	1,366025422180	0,912514758517	0,087485239617	m	0,000000000000	-0,523598775098	
6	1,732050870110	1,000000008690	-0,000000010553	m	0,000000000000	-0,523598775098	
7	2,732051220420	1,133864368700	-0,133864370568		0,000000000000	-0,523598775098	
8	-4086507,960830	6,068669243790	-5,068669245660		-0,349065850399	-0,174532924699	m
9	0,953254221952	5,043186106520	-4,043186108390		-0,314159265359	-0,209439509739	
10	-0,000000256708	1,095672614890	-0,095672616753		-0,571198664289	0,047599889191	m
11	0,366025342608	1,000000006460	-0,000000008330	m	-0,523598775598	0,000000000500	m
12	0,577350244919	0,958625955592	0,041374042542		-0,483321946706	-0,040276828392	
13	0,732050796033	0,940338740960	0,059661257174		-0,448798950513	-0,074799824585	
14	0,866025399016	0,935191926633	0,064808071501		-0,418879020479	-0,104719754620	
15	1,000000001320	0,939116459256	0,060883538878		-0,392699081699	-0,130899693400	
16	1,154700549360	0,950602296776	0,049397701358		-0,369599135716	-0,153999639382	
17	1,366025438570	0,969943937827	0,030056060307		-0,349065850399	-0,174532924699	
18	1,732050931290	1,000000006420	-0,000000008286	m	-0,330693963536	-0,192904811563	
19	2,732051632260	1,051536731610	-0,051536733473		-0,314159265359	-0,209439509739	
20	-2043253,572490	2,095447213060	-1,095447214930		-0,448798950513	-0,074799824585	

Нахождение нулей полинома

$x^3-(1+2cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2cos\varphi)x-1=0,\ \varphi=\pi/6$

$x_3=0{,}9999999986909827e^{i0{,}628318530292633}$

Таблица 25

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
0	0,577350269312	0,577350269312	0,422649728822	m	0,000000000000	-0,523598775098	m
1	0,732050808033	0,650115167619	0,349884830515	m	0,000000000000	-0,523598775098	
2	0,866025405016	0,715325559349	0,284674438785	m	0,000000000000	-0,523598775098	
4	1,154700545360	0,841775187797	0,158224810337	m	0,000000000000	-0,523598775098	
8	-4086507,960830	6,068669243790	-5,068669245660		-0,349065850399	-0,174532924699	m
16	1,154700549360	0,950602296776	0,049397701358	m	-0,369599135716	-0,153999639382	m
32	-1362168,776410	1,581658524390	-0,581658526258		-0,475998886908	-0,047599888191	m
64	1,154700565360	0,986837980526	0,013162017608	m	-0,483321946706	-0,040276828392	m
128	-371499,9820860	1,113170316170	-0,113170318037		-0,511422059887	-0,012176715212	m
256	1,154700629360	0,996654592045	0,003345406089	m	-0,513412028991	-0,010186746107	m
512	-95034,27204240	1,024599956960	-0,024599958827		-0,520536794454	-0,003061980644	m
1024	1,154700885350	0,999160147690	0,000839850444	m	-0,521044635230	-0,002554139869	m
2048	-23896,89635930	1,005425397810	-0,005425399677		-0,522832159529	-0,000766615570	m
4096	1,154701909350	0,999789817853	0,000210180281	m	-0,522959772943	-0,000639002155	m
8192	-5982,359585570	1,001184854640	-0,001184856510		-0,523407051404	-0,000191723695	m
16384	1,154706005250	0,999947441566	0,000052556568	m	-0,523438995685	-0,000159779413	m
32768	-1495,525775010	1,000253804500	-0,000253806371		-0,523550840162	-0,000047934937	m
65536	1,154722387620	0,999986860397	0,000013137737	m	-0,523558828791	-0,000039946307	m
131072	-373,3038849750	1,000052870890	-0,000052872752		-0,523586791465	-0,000011983633	m
262144	1,154787897580	0,999996715910	0,000003282224	m	-0,523588788782	-0,000009986316	m
524288	-92,71640300260	1,000010574170	-0,000010576039		-0,523595779548	-0,000002995551	m
1048576	1,155049623560	0,999999179836	0,000000818298	m	-0,523596278887	-0,000002496211	m
2097152	-22,56791529670	1,000001983270	-0,000001985134		-0,523598026585	-0,000000748514	m
4194304	1,156091424340	0,999999795807	0,000000202327	m	-0,523598151420	-0,000000623678	m
8388608	-5,032233655270	1,000000331320	-0,000000333183		-0,523598588345	-0,000000186753	m

На рис. 7 и 8 показано расположение подходящих дробей, вычисленное по “упрощённому” алгоритму Рутисхаузера для корней алгебраического уравнения (26) на начальном и удалённом участках $(10^6 \div 10^6+150)$.

В этом параграфе значения подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения, определялись по рекуррентному алгоритму Рутисхаузера. Этот алгоритм Рутисхаузер назвал “упрощённой формой QD-алгоритма”. Выше был рассмотрен ещё один вариант QD-алгоритма, который именуется “прогрессивным QD-алгоритмом” и является, как показала вычислительная практика, более численно устойчивым алгоритмом.

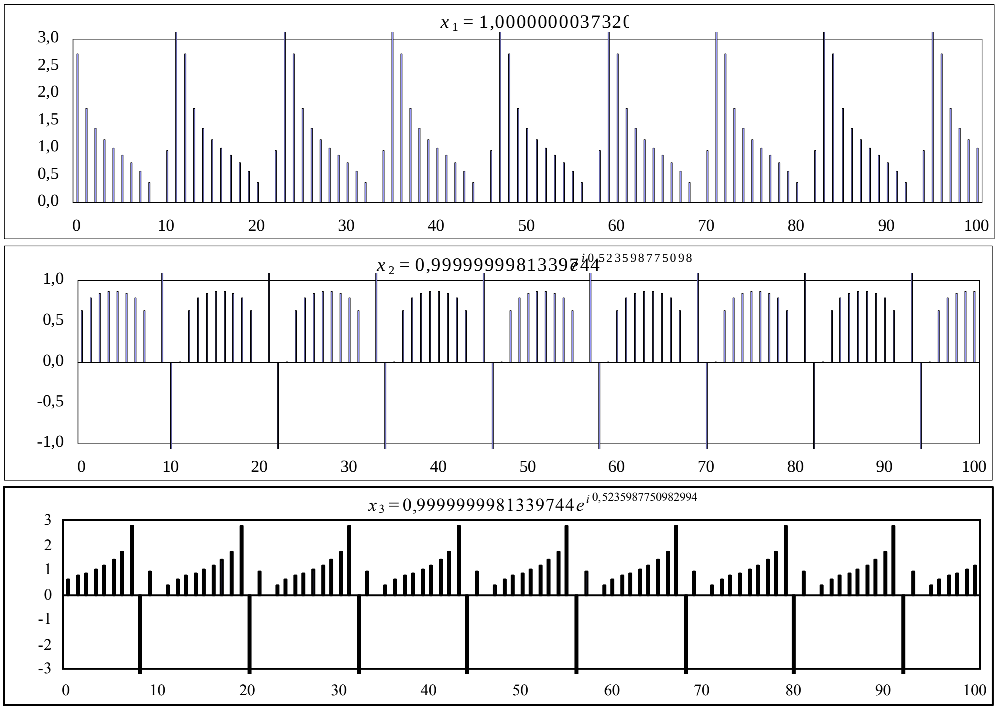


Рис. 7. Графики подходящих дробей, представляющих корни уравнения (26).

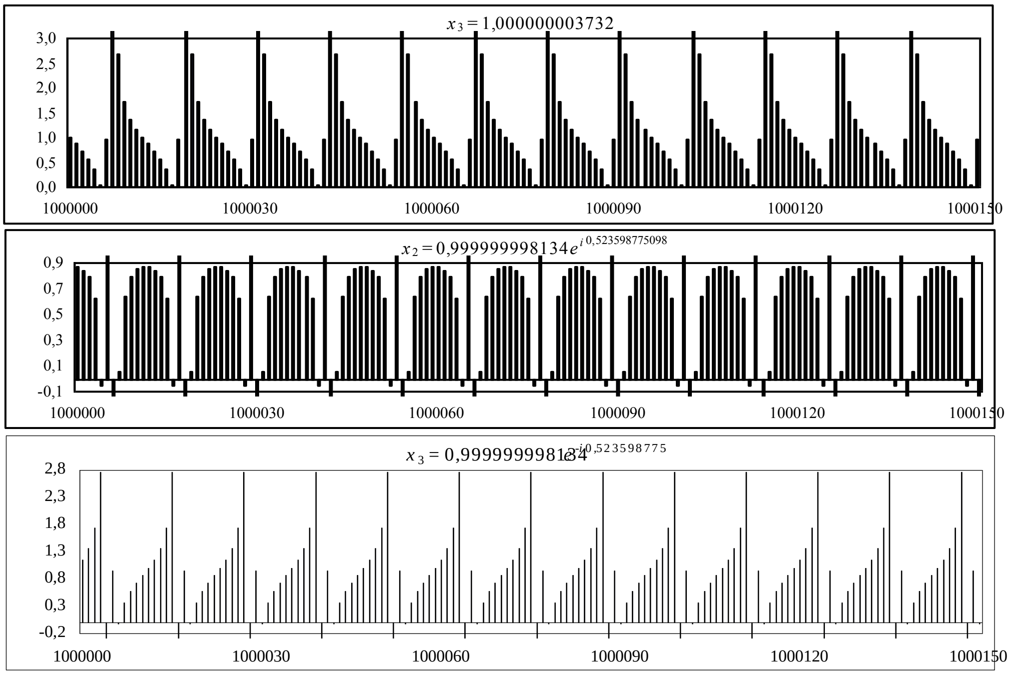


Рис. 8. Графики подходящих дробей с большими индексами, представляющие корни уравнения (26).

В вычислениях применялся вариант “прогрессивного QD-алгоритма” Рутисхаузера, который был назван QD-алгоритмом с отрицательными индексами, так как для “запуска” схемы использовались элементы x_i и e_i с отрицательными индексами.

В табл. 26-28 приведены результаты вычислений корней уравнения (26) по QD-алгоритму с отрицательными индексами. Первым вычислялся вещественный корень, имеющий больший модуль, нежели модули комплексно-сопряженных корней уравнения (26).

Нахождение нулей полинома

x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/6

x_1=1,000000003732

Таблица 26

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min
1	1,732050808930	1,732050808930	-0,732050805203	m
2	1,366025405780	1,538189003050	-0,538188999321	m
4	1,000000004540	1,285648341510	-0,285648337776	m
8	0,366025464961	0,881939749265	0,118060254467	m
16	1,000001191850	1,064830803420	-0,064830799686	m
32	0,366070324644	0,969085431842	0,030914571890	m
62	1,365989407340	1,013987937650	-0,013987933917	
128	0,366249511297	0,992185443368	0,007814560364	m
256	0,999988207754	1,003934042740	-0,003934039013	m
512	0,366965700267	0,998045967450	0,001954036282	m
1024	0,999946707417	1,000982327710	-0,000982323980	m
2048	0,369821558678	0,999516468366	0,000483535366	m
4096	0,999781448445	1,000245757880	-0,000245754150	m
8192	0,381104014468	0,999884312505	0,000115691227	m
16384	0,999132278090	1,000061707800	-0,000061704067	m
32768	0,424063443737	0,999975875381	0,000024128351	m
65536	0,996724355215	1,000015731250	-0,000015727518	m
131072	0,565980978518	0,999997670721	0,000002333011	m
262144	0,989967257325	1,000004358000	-0,000004354267	
524288	0,851498818154	1,000001573290	-0,000001569555	m
1048576	0,990501613020	1,000001889370	-0,000001885642	
2097152	0,997308523319	1,000001658780	-0,000001655050	
4194304	0,999972737028	1,000001588440	-0,000001584708	
8388608	1,000001515530	1,000001551280	-0,000001547550	m

На рис. 9-11 показаны графики распределения подходящих дробей, полученных при решении уравнения (26). На начальном участке ($n = 1 \div 150$) график распределения подходящих, соответствующих вещественному корню, подобен графику ультрапериодической непрерывной дроби, в то время как графики комплексно-сопряженных корней весьма не схожи между собой. На отдаленных интервалах (рис. 10 и рис. 11) графики подходящих дробей, соответствующих вещественному корню, имеют синусоидальную огибающую с незначительной амплитудой.

Нахождение нулей полинома

x^3-(1+2cosφ+10^{-9})x^2+(1+2cosφ)x-1=0, φ=π/6

x_2=0,999999998134$e^{i0,523598775098}$

Таблица 27

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i	min
0	0,633974595850	0,633974595850	0,366025402284	m	0,000000000000	0,523598775098	m
1	0,788675133473	0,707106780479	0,292893217655	m	0,000000000000	0,523598775098	
3	0,866025399016	0,777817671799	0,222182326335	m	0,000000000000	0,523598775098	
7	0,633974473496	0,777817645673	0,222182352461		0,000000000000	0,523598775098	
15	0,866023313884	0,939116171306	0,060883826828	m	0,392699081699	0,130899693400	m
31	0,633870077580	0,939109166769	0,060890831365		0,392699081699	0,130899693400	
61	0,788744099329	0,988881176132	0,011118822002		0,506708492514	0,016890282584	
127	0,633453272739	0,984409165607	0,015590832527		0,490873852123	0,032724922975	
255	0,866060709598	0,996080933226	0,003919064908	m	0,515417544730	0,008181230369	m
511	0,631785547898	0,996071550493	0,003928447641		0,515417544730	0,008181230369	
1023	0,866180279401	0,999018182003	0,000981816131	m	0,521553467881	0,002045307217	m
2047	0,625106456018	0,999008626724	0,000991371410		0,521553467881	0,002045307217	
4095	0,866657086679	0,999753846540	0,000246151593	m	0,523087448669	0,000511326429	m
8191	0,598252675668	0,999744060771	0,000255937363		0,523087448669	0,000511326429	
16383	0,868540575084	0,999937847299	0,000062150835	m	0,523470943866	0,000127831232	m
32767	0,488212740546	0,999927091084	0,000072907050		0,523470943866	0,000127831232	
65535	0,875683225958	0,999983852681	0,000016145453	m	0,523566817665	0,000031957433	m
131071	-0,029417186018	0,999957291075	0,000042707059		0,523590786115	0,000007988983	m
262143	0,897448577414	0,999995353180	0,000004644954	m	0,523590786115	0,000007988983	
524287	8,704506907340	0,999996237957	0,000003760177	m	0,523596778227	0,000001996871	m
1048575	0,887549294675	0,999998210583	0,000001787551	m	0,523596778227	0,000001996871	
2097151	1,492454485380	0,999998746049	0,000001252085	m	0,523598276256	0,000000498843	m
4194303	0,543471411249	0,999998823113	0,000001175021	m	0,523598276256	0,000000498843	
8388607	0,720226876969	0,999999076365	0,000000921769	m	0,523598650763	0,000000124336	m

Нахождение нулей полинома

x^3-$(1+2\cos\varphi+10^{-9})x^2+(1+2\cos\varphi)x-1=0$, $\varphi=\pi/6$

$x_3=0,999999998134e^{-i0,523598775098}$

Таблица 28

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0-r_i	min	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0-\varphi_i$	min
-1	0,366025403784	0,366025403784	0,633974594350	m	0,000000000000	0,523598775098	m
0	0,577350269312	0,459700843430	0,540299154704	m	0,000000000000	0,523598775098	
2	0,866025405016	0,605000334049	0,394999664085	m	0,000000000000	0,523598775098	
6	1,732050870110	0,881939729032	0,118060269102	m	0,000000000000	0,523598775098	
14	0,866026302835	0,881939839093	0,118060159041	m	0,392699081699	0,130899693400	m
30	1,732110406350	0,969082120544	0,030917877590	m	0,392699081699	0,130899693400	
60	0,577317301903	0,975242017699	0,024757980435		0,506708492514	0,016890282584	
126	1,732348024530	0,992181213412	0,007818784722	m	0,490873852123	0,032724922975	
254	0,866001891216	0,992179108426	0,007820889708		0,515417544730	0,008181230369	m
510	1,733299560400	0,998041509911	0,001958488223	m	0,515417544730	0,008181230369	
1022	0,865923821751	0,998039279070	0,001960719064		0,521553467881	0,002045307217	m
2046	1,737122793870	0,999511987611	0,000488010523	m	0,521553467881	0,002045307217	
4094	0,865612273445	0,999509720022	0,000490278112		0,523087448669	0,000511326429	m
8190	1,752694118430	0,999879958204	0,000120039930	m	0,523087448669	0,000511326429	
16382	0,864377955394	0,999877660978	0,000122337156		0,523470943866	0,000127831232	m
32766	1,819774624290	0,999972025976	0,000027972158	m	0,523470943866	0,000127831232	
65534	0,859643227395	0,999969636797	0,000030361337		0,523566817665	0,000031957433	m
131070	2,195487016070	0,999995319259	0,000004678875	m	0,523566817665	0,000031957433	
262142	0,844634973830	0,999992512780	0,000007485354		0,523590786115	0,000007988983	m
524286	-6,823954916920	1,000001855490	-0,000001857354	m	0,523596778227	0,000001996871	m
1048574	0,853999900873	0,999997873571	0,000002124563		0,523596778227	0,000001996871	
2097150	0,242287799867	0,999998823480	0,000001174654	m	0,523598276256	0,000000498843	m
4194302	1,188606660290	0,999998960556	0,000001037578	m	0,523598276256	0,000000498843	
8388606	1,011822416070	0,999999079769	0,000000918365	m	0,523598650763	0,000000124336	m

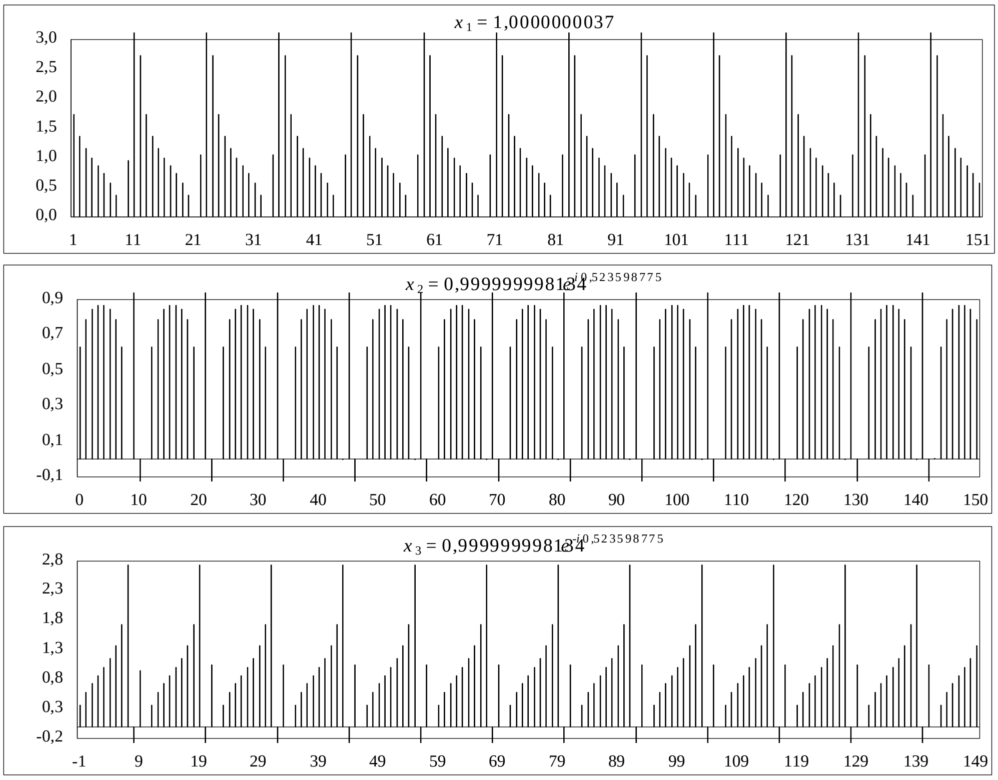


Рис. 9. Графики подходящих дробей, представляющие корни уравнения (26).

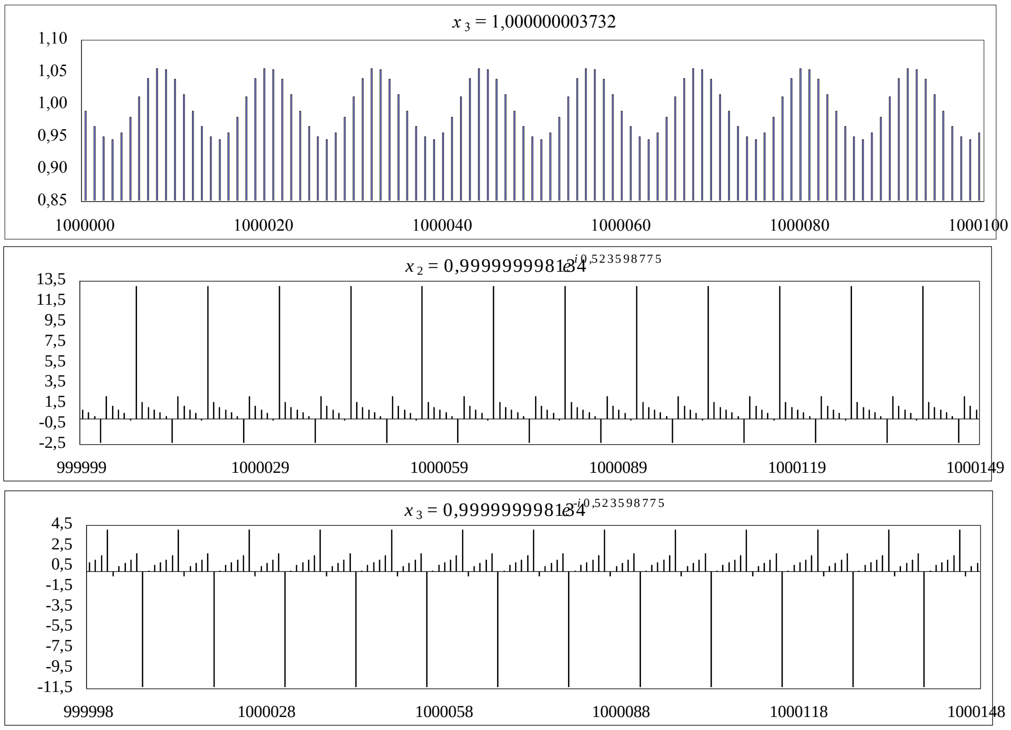


Рис. 10. Графики подходящих дробей с большими индексами, представляющие корни уравнения (26).

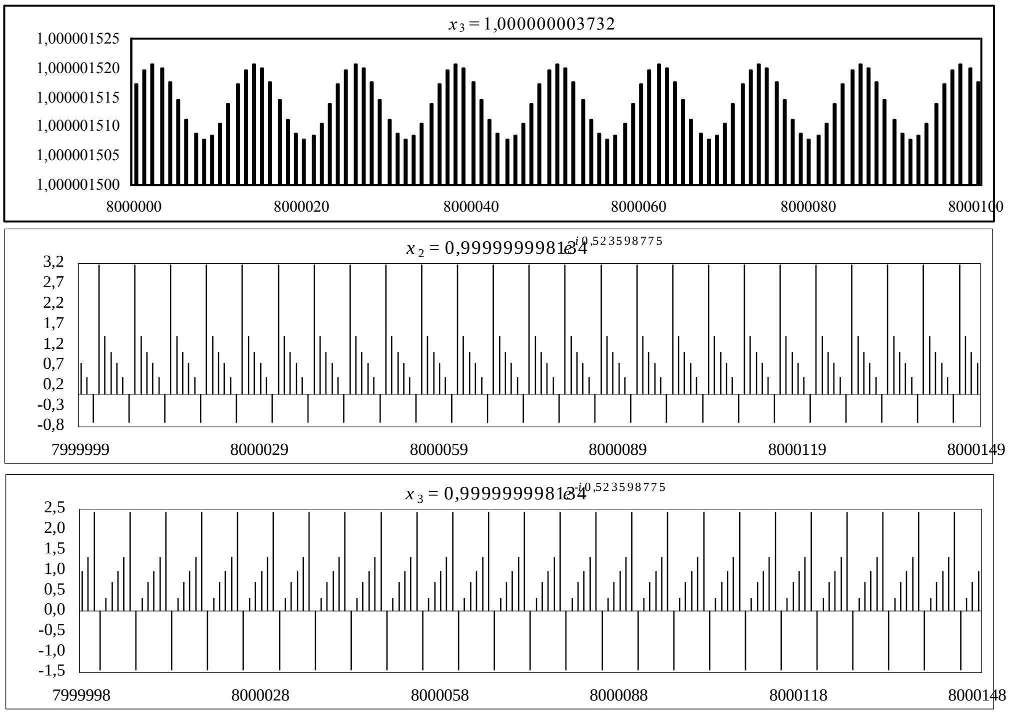


Рис. 11. Графики подходящих дробей на «отдаленном» интервале, представляющие корни уравнения (26).

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Уже отмечалось, что функции Никипорца для корней алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4, то есть уравнений, решаемых в радикалах, и для корней уравнений степени $n>4$, имеют одну и ту же структуру. Естественно, что и графики подходящих дробей корней уравнений, решаемых в радикалах, и уравнений степени $n>4$, оказались аналогичными. Можно полагать, что обнаруженный подход к решению алгебраических уравнений n-й степени является более общим и естественнным, нежели подход, связанный с поиском решений уравнений в радикалах, который «в свете последних событий» можно расценивать в некотором роде искусственным. Функции Никипорца, или непрерывные дроби Никипорца, вкупе с r/φ-алгоритмом, следует рассматривать как аналитические выражения, устанавливающие связь между коэффициентами алгебраического уравнения произвольной степени n и корнями этого уравнения.

Хотелось бы остановиться на одном практически важном аспекте. Классифицируя в книге [279] различные алгоритмы численного решения алгебраических уравнений, Г.П. Кутищев пишет: «Все эти методы являются итерационными, или методами последовательного приближения, и успех их применения зависит от наличия «хорошего» начального значения корня. Обеспечение сходимости итерационного процесса и его ускорения, собственно, и определяет качество реализации каждого из этих методов и конкретную организацию вычислений. Удовлетворить все требования по обеспечению сходимости для всех случаев не представляется возможным и поэтому для создания эффективных алгоритмов численного нахождения корней необходимо дальнейшее развитие теории алгебраических уравнений.» Если коротко оценить ситуацию с существующими численными методами решения алгебраических уравнений, то можно сказать, что зачастую невозможно обеспечить сходимость того или иного выбранного итерационного алгоритма. При решении алгебраических уравнений n-й степени с использованием функций Никипорца и r/φ-алгоритма сходимость метода гарантирована, что называется, по определению, так как не существует расходящихся периодических непрерывных дробей, – «этого не может быть потому, что этого не может быть никогда.» Разумеется, скорость сходимости метода непрерывных дробей определяется конкретным набором коэффициентов алгебраического уравнения n-й степени, но сходимость метода гарантирована.

ЛИТЕРАТУРА

1. А б р а м о в А. А. и др. Пакеты прикладных программ LTPSVP и SPARSE.- Banach. Centr. Publ., vol. 13, Warszawa, 1984, 463-472.
2. А б р а м о в А. А. Некоторые замечания о нахождение собственных значений и собственных векторов матриц, возникающих при применение метода Ритца или метода сеток.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №3, 644-647.
3. А в е т и к о в а Е. Г. К вопросу реализации алгебраических уравнений на емкостных моделях.- В сб. “Методы матем моделир. и теория электр. цепей. ” Вып. 4, Киев, 1967, 16-23.
4. А г е е в Д. В. Обобщение метода Ньютона вычисления корней уравнений. Л., Научн.-техн. сборник электротехн. инс-та связи, 4-5, 1934.
5. А л е к с а н д р о в В. И. Об условиях разрешимости уравнений шестой степени в радикалах. – Сб. научно-техн. работ Азово-Черноморск. ин-та механиз. и электрофик. с. х., 1959, вып. 11, 42, 213-220.
6. А л е к с а н д р о в а Н. В. Математические термины.- М.: “Высшая школа”, 1978.- 190с.
7. А л е к с е е в В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях.- М.: Наука, 1976.- 208с.
8. А л ё ш и н А. Г., М и т и ч е н к о Г. А. К вопросу решения алгебраических уравнений.- Тр. Полтав. с.-х. ин-т, 1971, 15, 127-130.
9. А н г е л о в а Е. Д., С е м е р д ж и е в Хр. И. Методы одновременного приближенного нахождения корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений.- Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1982, 22, №1, 218-223.
10. А н д р е е в А. С., К ю р к ч и е в Н. В. Двусторонний метод порядка сходимости $R+2$ для одновременного вычисления всех корней алгебраического уравнения.- Докл. Болг. АН, 1986, 39, №11, 11-13.
11. А п е л ь ц и н В. Ф., Я к о в л е в а С. А. О численном обеспечении одного обобщения метода изображений.- Дифференц. уравнения (Минск), 1988, 24, №7, 1121-1127.
12. А р и о р х а н о в а М. А., А б у т а л и е в Э. Б., С а й ф у л и н В. Г. Об одном итерационном методе решения алгебраических и трансцендентных уравнений.- Тр. Ташкент. политехн. ин-та, 1970, вып. 67, 85-89.
13. А р у т ю н я н А. А., О г а н е с я н Г. А. Простейший метод нахождения действительных корней алгебраических уравнений высших степеней на моделирующих устройствах. – Уч. зап. Ереванск. ун-та, 1964, 90, 45-49.
14. А р ш и н о в М. Н., С а д о в с к и й Л. Е. Грани алгебры. М., Факториал Пресс, 2008.
15. А с т р а х а н ц е в а Л. Н., К р а м а р Ф. Д. Комплексные числа и геометрическая алгебра в английской алгебраической школе в первой половине XIX века.- Сб. по вопр. мат. и мех. Казахск. ун-т, 1971, вып. 3, 4-15.
16. А с т р а х а н ц е в а Л. Н., К р а м а р Ф. Д. О геометрической алгебре Уоррена.- Тр. III Казахстан. межвуз. научн. конф. по мат. и мех., 1967. Алма-Ата, 1970, 180-182.
17. А х и е з е р Н. Об одной minimum-проблеме теории функций и о числе корней, которые лежат внутри единичного круга. Изв. АН СССР, 37,1931.
18. А я п б е р г е н о в К. А. Итерационный метод определения приближенных корней многочлена.- Ин-т орган. синтеза АН КазССР, Караганда, 1988, 22с. Деп. в ВИНИТИ 01.07.88, №5543- В88.

19. Б а б е н к о К. И. Основы численного анализа. М., Наука, 1986.
20. Б а б и к о в Г. В. Вычисление корней многочлена методом поочередного уточнения переменных с поочередным выбором вещественной и мнимой частей многочлена. – Матем. зап. Уральский ун-т, 1964, 4, №4, 6-11.
21. Б а б и к о в Г. В. О приближенных методах решения алгебраических уравнений. – Успехи матем. наук, 1964, 19, №2, 217-219.
22. Б а ж е н о в Г. М. Uber die Berechnung der Wurzeln von Algebraischen Gleihungen mit Hilfe der unendliehen Reihen. (О вычислении корней алгебраических уравнений с помощью бесконечных рядов). Харьков, Записки матем. тов-ва, 7, (39-44), 1933.
23. Б а й ч е в И в а н. Разрешими с радикали алгебраични уравнения.- Изв. Матем. ин-т. Болг. АН, 1966, 9, 147-150.
24. Б а к а т у е в а С.А. К истории численного решения кубических уравнений.- Коломен. пед. ин-т, Коломна, 1991, 14с., Деп. в ВИНИТИ 19.02.91, №857-891.
25. Б а р а н о в А. В. Об одном методе вычисления комплексных корней системы нелинейных уравнений.- Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1972, 12, №1, 199-203.
26. Б а р а н о в а Е. А. Одно замечание о расположении нулей полинома.- Матем. заметки, 1969, 5, №6, 742-745.
27. Б а р т і ш М. Я. До методу Лемера визначення нулів поліномів, цілих і голоморфних функцій. – В сб. Питання механ. і матем. Вип. 9, Львів, Львівськ. ун-т, 1962, 16-20.
28. Б а ш м а к о в а И. Г. Лекции по истории математики в Древней греции.- ИМИ, 1958, т. X.
29. Б а ш м а к о в а И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры.- Ист.- матем. иссл., 1957, 10.
30. Б а ш м а к о в а И. Г. О некоторых особеностях развития алгебры XVIII в.- В сб. Истор.- матем. исследования. Вып. 17, М.: Наука, 1966, 317-323.
31. Б а ш м а к о в а И. Г. Об одном вопросе в теории алгебраических уравнений в трудах И.Ньютона и Э.Варинга. – В сб. истор.-матем. исследования. Вып. 12, М.:Физматгиз., 1959, 431-456.
32. Б е й к е р Дж., Г р е й в с - М о р р и с П. Аппроксимамации Паде. Перев. с англ.- М.: Мир, 1986.- 502с.
33. Б е к т а с о в а М. Х. Из истории численных методов решения уравнений.- Сб. по вопросам матем. и мех. Казах. ун-т., 1976, вып. 8, 1828.
34. Б е л а г а Э. Г. Некоторые вопросы вычисления многочленов. ДАН СССР, № 123, (775-777), 1958.
35. Б е л а г а Э. Г. О вычислении многочленов от одного переменного с предварительной обработкой коэффициентов. Проблемы кибернетики, вып. 5, (7-15), 1961.
36. Б е л а н о в А. А. Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского.- М.: Наука, 1988, 96с.
37. Б е л а ш о в В. Ю., Ч е р н о в а Н. М. Эффективные алгоритмы и программы вычислительной математики. Магадан, СВКНИИ РАН, 1997.
38. Б е л л Э. Г. Творцы математики.- М.: Просвещение, 1979.- 256с.
39. Б е л о з е р о в С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций.- Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1962.- 312с.
40. Б е л о с т о ц к и й А. Я. Об одном методе линейной интерполяции для решения уравнений. – В сб. Научн. тр. Всес. заочн. машиностроит. ин-т, 1961, вып. 3, 71-83.
41. Б е л о с т о ц к и й А. Я. Об одном методе решения алгебраических уравнений. – Успехи матем. наук, 1953, 8, №6(58), 87-96.
42. Б е л ь т ю к о в Б. А. Один способ приближенного решения алгебраических уравнений высших степеней. – Уч. зап. Иркутского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 115-127.
43. Б е л я е в а Г. М. Приложение теории возмущений к задаче о колебаниях балки. – Вест. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1957, №1, 11-21.

44. Б е р е з и н И. С., Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений. т. 1. М., Наука, 1966.
45. Б е р е з и н И. С. Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений. т.2.- М.:Физматгиз, 1959.- 620с.
46. Б е р ё з к и н И. А. Уравнения четвёртой степени с целыми корнями резольвент.- Уч. зап. Ставроп. гос. пед. ин-т. Математика, Ставрополь, 1970, 9-13.
47. Б л а г о в е щ е н с ь к и й Ю. В., Т е с л е р Г. С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. Киев, Техніка, 1977. – 208 с.
48. Б л а г о в е щ е н с ь к и й Ю. В., Н і к о л е н к о Л. Д. Про уточнені власних чисел і власних векторів у випадку кратних коренів характеристичниго рівняння.- Доповіді АН УССР, 1966, №6, 699-702.
49. Б л а ж к е в и ч Б. И., Д е р я б и н а А. Г. Усовершенствованный алгоритм раскрытия определителя в общем виде с помощью ЭЦВМ.- В сб. “Мат. моделир. и теория электр. цепей.” Вып. 8, Киев, “Наук. думка”, 1971, 114-118.
50. Б о б к о в В. В., Г о р о д е ц к и й Л. М. Избранные численные методы решения на ЭВМ инженерных и научных задач.- Минск.: Изд. Университетское, 1985.-175с.
51. Б о г о л ю б о в А. Н. Математики и механики. Биографический справочник.- Киев, Наукова думка, 1988.-640с.
52. Б о д н а р Д. И. Ветвящиеся цепные дроби.- Киев: Наук. думка, 1986. - 176с.
53. Б о д н а р Д. І., К у ч м і н с ь к а Х. Й. Гіллясті ланцюгові дроби.- Мат. методы и физ.-мех. поля, 1996, 39, №2, с. 9-19.
54. Б о д н а р ч у к П. І., С к о р о б о г а т ь к о В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.- К.: Наук. думка, 1974.- 272с.
55. Б о л т я н с к и й В. Г., В и л е н к и н Н. Я. Симметрия в алгебре. М., Наука, 1967.
56. Б о р и с о в В. Г. Об одном методе поиска всех корней алгебраического уравнения n-й степени с действительными коэффициентами.- Пробл. автом. проект. и упр. технол. процессами в прибостр. и машиностр., Пермь, 1980, 129-133.
57. Б о р о д и н А. И., Б у г а й А. С. Выдающиеся математики.- Биогр. слов.- справ.- 2-е изд. перераб. и доп.- Киев: Рад. шк., 1987.-656с.
58. Б о х е р М. Введение в высшую алгебру. 2-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
59. Б о ч к а р ё в Д. Об одном достаточном условии, при котором уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни. – Уч. зап. Мордовск. пед. ин-та, 1956,вып. 3, 30-31.
60. Б р ж е ч к а В. Решение численных уравнений. Наукові записки наук.-досл. мат. катедр Украины, т. III, 1928.
61. Б у г а е в П. В. Способ последовательных приближений. Его приложение к численному решению алгебраических уравнений высших степеней. Математический сборник, № 18,1896.
62. Б у г а е в П. В. Способ последовательных приближений. Вспомогательные и дополнительные способы приближенного исчисления. Математический сборник, № 19, (461—468), 1897.
63. Б у з а М. К. О решении алгебраических уравнений.- В сб. “Теория и применение мат. машин.” Минск, Белорус. ун-т, 1972, 36-44.
64. Б у л а в к о А. Г. О приближённом решении уравнений высших степеней. – Тр. Саратовск. автом.-дор. ин-та, 1956, сб. 14, 431-444.
65. Б у т Э. Д. Численные методы. Перев. с англ. – М.:Физматгид, 1959, -239с.
66. Б ы ч к о в Б. П. Определение уравнения в русских школьных учебниках алгебры XIX века. – В сб. Из истории науки и техн., Кишенёв, Картя Молдовеняске, 1963, 154-162.
67. В а л е е в К. Г., Г р е д ж у к И. Ф. Сходимость метода Лина и его модификации.- Докл. АН УССР, 1984, А, №6, 3-5.
68. В а л е е в К. Г., Д ж а л л а д о в а И. А. О сходимости метода Лина.- Киев, Инт. нар. хоз-ва, 1992.- 7с.

69. В а н –д е р –В а р д е н Б. Л. Современная алгебра. М., 1947.
70. В а р ю х и н В. А., К а с ь я н ю к С. А. Об итерационных методах уточнения корней уравнений.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №3, 648-687.
71. В а с и л ь е в А. В. Введение в анализ.- Казань, 1907.- 190с.
72. В а с и л ь е в а Н. К. К вопросу об отыскании общих корней двух алгебраических уравнений. – Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, 8, №1, 18-21.
73. В а с и л ь е в а Н. К. Об одном способе решения уравнений высших степеней.-Уч. зап. Иркутский гос. пед. ин-т, 1964, 80, 203-208.
74. В а с и л ь е в а Н. Л. История развития метода уравнений.- В сб. “Преподавание мат. в средн. школе”, Л., 1972, 215-237.
75. В а щ е н к о-З а х а р ч е н к о М. Е. Высшая алгебра. Теория подстановок и приложение ее к алгебраическим уравнениям.- Киев, 1890.
76. В е б е р Г. Энциклопедия элементарной алгебры и анализа.- СПб.-1906. -622 с.
77. В е л и к а я С. М. Конформные трансформаторы движения С. А. Гершгорина.- Тр. XIII Научн. конференции аспирантов и младш. научн. сотр. Ин-та истории естеств-озн. и техн. АН СССР.- М., 1970, 147-158.
78. В е р к л о в Б. А. Метод определения корней уравнений.- Коммунарск. горно-металлург. ин-т. Коммунарск, 9с. Деп. в ВИНИТИ 10.06.1978 № 2039-78.
79. В е р т г е й м Б. А. Применение метода симплициальных разбиений для нахождения корней многочленов.- Оптимизация (Новосибирск), 1980, №24/41, 128-132.
80. В и к т о р о в Б. А., К и р с а н о в Б. В., П о х в а л е н с к и й В. Л. Определение приближенных значений больших по модулю корней характеристического уравнения.- Тр. Моск. авиац. ин-та, 1974, вып. 282, 136-139.
81. В и л е й т н е р Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., Физматгиз, 1960.
82. В и т е н ь к о И. В., К о с т о в с к и й А. Н. К теореме Фуживара о нижней границе для модулей нулей степенных рядов.- Вычисл. и прикл. матем. Межвед. научн. сб., 1967, вып.4, 141-144.
83. В і т е н ь к о І. В., К о с т о в с ь к и й О. М. Вираження з допомогою детермінанта добутків Лобачевського-Греффе для рядів Лорана.- Доповіді АН СССР,1966,№1,6-10.
84. В о е в о д и н В. В. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена. М., Изд-во МГУ, 1960.
85. В о е в о д и н В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений.- Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 2, №1, 1962, 15-24.
86. В о е в о д и н В. В. Программа для нахождения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы методом вращения. – Сб. работ Вычис. центра МГУ, 1962, 1, 269-277.
87. В о е в о д и н В. В. Программа определения корней алгебраического многочлена. - В сб. работ Вычис. центра МГУ, 1962, 1, 253-265.
88. В о е в о д и н В. В. Решение полной проблемы собственных значений обобщенным методом вращений. – Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1965, 3, 89-105.
89. В о е в о д и н В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы.- М.: Наука, 1966.- 248с.
90. В о е в о д и н В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977.
91. В о е в о д и н В. В., Б о т а ц е в а Л. Л. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена методом парабол. М., Изд-во МГУ, 1960.
92. В о е в о д и н В. В., П а в л е н к о О. А. Модифицированный метод скорейшего спуска для определения корней полинома.- Числ. анализ на ФОРТРАНе. Методы и алгоритмы, М., 1980, 3-7.
93. В о е в о д и н В. В., К у з н е ц о в Ю. А. Матрицы и вычисления.- М.: Наука, 1984, 318с.
94. В о е в о д и н В. В., Т ы р т ы ш н и к о в Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.- М.: Наука, 1987.- 320с.

95. В о е в о д и н В. В., Т ы р т ы ш н и к о в Е. Е. Пакет программ "Быстрый Теплиц".- Фундам. науки – нар. х-ву., М., 1990, 18-19.
96. В о р о б ь е в Н. Н., Г р и г о р ь е в Д. Ю. Нахождение вещественных решений алгебраических неравенств в субэкспоненциальное время ДАН СССР, т. 283, №6, (1294-1299), 1985
97. В о р о н ц о в Б. Д. О решении уравнений методами высших порядков. – Тр. Уральского политехн. ин-та, 1960, 79, 25-32.
98. В о р о н ц о в Б. Д. Об одном способе решения уравнений. – Успехи матем. наук, 1956, 11, №1, 187-190.
99. В ы х а н д у Л. К. О разложении многочленов на множители. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, вып. 73, 146-156.
100. Г а б а д з е Н., П а ч у а ш в и л и В., Э п р е м и д з е Н. Решение некоторых уравнений в поле двойных и двойнокомплексных чисел. – Тр. Груз. ин-та субтроп. х-ва, 1963, 7-8, 401-410.
101. Г а б о в и ч Я., Т а м м е Э. О приближенных решениях алгебраических уравнений. – Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, №25, 118-125.
102. Г а в р и л о в Л. П. Об одном способе нахождения корней алгебраических уравнений.- Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1969, №11, 1282-1284.
103. Г а в р и л о в Н. И. Проблема Римана о распределении дзета-функции.- Львов. ун-т, 1970, 171с.
104. Г а в р и л о в Ю. М. О сходимости итерационных процессов и критериях знакоопределенности квадратичных форм.- Изв. АН ССР, сер. матем.,1954,18,№1,87-94.
105. Г а в р и л о в Ю. М. Про збіжність простих ітерацій та критерії знаковизначенності квадратичних форм.- Доповіді АН УССР, 1953, №6, 389-393.
106. Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1967.
107. Г а н ш и н Г. С. Вычисление действительных корней полинома.- Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, 11, №6, 1581-1584.
108. Г а с п а р я н А. Г. Приложение многомерных матриц к исследованию многочленов.- Докл. АН АрмССР, 1980, 70, №3, 133-141.
109. Г е г е л ь Г. Н., К о с ю к С. Д. К вопросу о вычислении корней классических ортогональных полиномов. – Алгоритмы и численные методы решения задач вычисл. и прикл. матем., Ташкент, 1988, 20-25.
110. Г е л ь м а н А. Е. Рекуррентный метод вычисления корней алгебраического уравнения. – Математ. просвещение, 1961, вып. 6, 171-180.
111. Г е л ь ф а н д М. С. Исследования многочленов третьей и четвёртой степени.- В. сб. Матем. анализ и алгебра, М.: Просвещение, 1967, 310-323.
112. Г е н д р и х с о н Н. Н. О некоторых работах Гаусса по теории алгебраических чисел.- В сб. "Пробл. истории мат. и мех." Вып. 1. М., Моск. ун-т, 1972, 56-60.
113. Г е н е в В. Н. Оценки за некои безкрайни изчислителни процеси.- Годишн. Висш. техн. учебни завед. Мат., 1970(1972), 6, №3, 81-91.
114. Г л у ш к о в С. С. Алгебра Альбера Жирара.- В сб. "Пробл. истории матем. и мех.", вып.2, М., Моск. ун-т, 1975, 97-105.
115. Г о д у н о в С. К., Р я б е н ь к и й В. С. Разностные схемы. – М.:Наука, 1977. – 440 с.
116. Г о л у б к о в В. В., Щ е р б о в С. Я. Экспоненциальная аппроксимация.- Препр. ВНИИ сист. исслед., М., 1980, 35с.
117. Г о р ю н о в В. И. О приближённом исследовании расположения корней характеристического полинома.- Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1969, №7, 1083-1086.
118. Г р а в е Д. А. Элементарный курс теории чисел.- Киев, 1909.- 240с.
119. Г р а в е Д. А. Элементы высшей алгебры. Киев, 1914

120. Г р а в е Д. А. Algorithme du calcul des racines des equations algebraiques (Алгоритм вычисления корней алгебраических уравнений). Труды Киевского ж. д. инс-та, Сер. матем., 2, (3-20), 1936.
121. Г р а н а т Ю. Л. Итерационная схема вычисления корней алгебраических уравнений, 1954 высоких порядков и построение переходных процессов. – Инженерный сб., 1954, 168-176.
122. Г р е б е н н и к о в А. В. О решении полного кубического уравнения с тремя вещественными корнями.- В сб. “Исслед. по прикл. матем. и мех.” Вып 1, Воронеж, 1974, 20-36.
123. Г р э х е м Р., К н у т Д., П а т а ш н и к О. Конкретная математика. Основания информатики. М.: Мир, Лаборатория знаний, 2009.
124. Г у м е н н ы й П. В. Об одном способе приближенного определения комплексных корней алгебраического уравнения.-Наук зап. Київськ. держ. пед. ін-т,1956,19,98-102.
125. Г у с е в А. Н. Из ранней истории проблемы резольвент. – В сб.: Вопр. истории физ. –матем. наук, М.: Высш. школа, 1963, 19-26.
126. Г у с е в Г. И., М о р о з о в а Ю. И. О методе Лобачевского.- В сб. “Дифференц. уравнения и вычисл. мат.” Вып. 1, Саратов, Саратов. ун-т, 1972, 65-68.
127. Г у с е й н о в А. М., Б а б а е в а С. С. Расчёт на ЦВМ корней характеристического полинома *n*-ой степени применительно к одной задаче электроэнергетики.- Техн. тэрэгги угрунда. За техн. прогресс, 1969, №11, 15-16.
128. Г у т е р Р. С., П о л у н о в Ю. Л. Джиронимо Кардано.- М.: “Знание”, 1980.-192с.
129. Д а в и д е н к о Д. Ф. К вопросу о вычислении собственных чисел и собственных векторов матриц. – Докл. АН СССР, 1961, 141, №2, 277-280.
130. Д а в и д е н к о Д. Ф. К вопросу о нахождении приближенных решений алгебраических уравнений.- Доповiдi АН УССР, 1962, №4, 434-437.
131. Д а н С у н-ш и. К некоторым вопросам распределения корней многочлена.- Синькэсюэ, 1955, №2, 42-43 (кит.)
132. Д а н С у н-ш и. О границах модулей корней многочленов. – Синькэсюэ, 1955, №4, 28-30 (кит.)
133. Д а н и л е в с к и й А. М. О численном решении векового уравнения. Математический сборник, 2(44), (169-171), 1937.
134. Д а н к о П. Е. Обобщение способа Ньютона для приближенного решения уравнений. –Тр. Ростовск.-н/Д ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 28, 19-30.
135. Д а н к о П. Е., К о ж е в н и к о в а Т. Я. Применение интерполяционных методов к приближённому решению уравнений. – Сб. научн. тр. Ростовск. – н/д ин-та инж. ж.д. трансп., 1962, 39, 10-21.
136. Д а н к о П. Е., С е л ю т и н а Ю. Б. Применение метода конечных разностей к определению действительных корней уравнения. – Сб. научн. тр. Ростовск. – н/Д ин-та инж. ж.д. трансп., 1962, 39, 3-9.
137. Д е л о н е Б. Н. Фундаментальный вклад в теорию алгебраических уравнений. – Природа, 1959, №7, 39-42.
138. Д е м и д о в С. С. К истории линейных дифференциальных уравнений.- Ист.-матем. исслед., Москва, 1985, №28, 78-98.
139. Д е м и д о в и ч Б. П., М а р о н И. А. Основы вычислительной математики. М., Наука, 1966.
140. Д е м я н о в Б о я н, Д е м я н о в а К о р н е л и я. Един метод за определяне реалните корени на алгебричен полином от *n*-та степен.- Год. Висш. инст. архит. и стр-во. София, 1987, 32, 85-107.
141. Д ж а л д а с б е к о в У. А., М о л д а б е к о в М. М. Определение положений звеньев группы Ассура IV класса 3-го порядка.- Изв. АН Каз. ССР. физ.-мат., 1988, №3, 70-73.

142. Д ж о у н с У., Т р о н В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ.- М.: Мир, 1985.- 414с.
143. Д з я д ы к В. К., С т е п а н е ц А. И. О последовательности нулей интегрального синуса.- В сб. “Матрич. вопр. теории функций и отображений”. Вып. 2, Киев, “Наук. думка”, 1971, 64-73.
144. Д и д е н к о А. В. О вычислении количества корней полинома в секториальной области.- Одес. ун-т, Одесса, 1983, 7, Деп. в УкрВИНИТИ 24 окт. 1983, №1192 Ук-83.
145. Д о м о р я д А. П. Численные и графические методы решения уравнений. М.—Л., Энциклопедия элементарной математики, т. 2,1951.
146. Д о м о р я д А. П. К вопросу о вычислении комплексных корней алгебраических уравнений. – Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 71-74.
147. Д о м о р я д А. П. О связи между способами Ньютона и Уиттекера решения алгебраических и трансцедентных уравнений. – Тр. Среднеаз. Ун-та, матем. н., 1954, 7, №36, 31-34.
148. Д о м о р я д А. П. К вопросу о построении характеристического полинома матрицы.- Тр. Ташкентск. ун-т, 1967, вып. 292, 33-35.
149. Д о м о р я д А. П., С о б о л е в а Т. В. К вопросу о решении алгебраических и трансцендентных уравнений.- Научн. тр. Ташкентск. ун-т, 1968, вып. 316, 7-14.
150. Д о р о ж о в с ь к и й Е. С., К о н и к Г. И., К о с т о в с ь к и й О. М. Визначення додатного кореня основного рівняння локалізації за модулем нулів рядів Лорана.- Вісник Львівськ. ун-ту, 1965, вип. 2, 13-15.
151. Д о р о ф е е в а А. В. К вопросу о введении Э.Шмидтом языка евклидовой геометрии в пространстве l^2 .-История методол.естеств.наук,Москва,1980,№25,75-82.
152. Д о ч е в К и р и л. Видоизменен метод на Ньютон за единовременно приблизително пресмятане на всички корени на додено алгебраично уравнение. – Физ.-матем. списание, 1962, 5, №2, 136-139.
153. Д о ч е в К., Б ы р н е в П. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, №5, 915-920.
154. Д у й ч е в И о р д а н. Разрешими с радикали алгебрични уравнения. – Годишник Софийск. Ун-т. Физ.-матем. фак., 1958-1959, 53, 31, 13-17.
155. Декарт Р. Геометрия. Перевод с лат. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010.
156. Е л к и н Ю. Г. Об одном классе примитивных уравнений шестой степени с комплексными корнями.- Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т. Сер. дощ.- матем., 1965, вып. 24, 73-78.
157. Е р е м и н М. А. Новый метод решения уравнений. Арзамас, Комплектавтоматика, 2000.
158. Е р е м и н М. А. Уравнения высших степеней. Арзамас, 2003.
159. Е р у г и н Н. В. Необходимые и достаточные условия существования корней уравнения, расположенных на единичной окружности. – Докл. АН БССР, 1961, 5, 11, 183-485.
160. Е с а я н Я. Р., С т е ц е н к о В. Я. Об оценке верхней границы модулей нулей многочленов. – Докл. АН Тадж. ССР,1964, 7, №7, 3-7.
161. Ж а к С. В. Об одном методе решения кубических уравнений. – Сб. научно-техн. работ Азово - Черноморск. ин-та механиз. с.- х, 1957, вып. 11, ч. I, 289-299.
162. Ж д а н о в О. Н., Ц и х А. К. Исследование кратных интегралов Меллина – Барнса с помощью многомерных вычетов. – Сиб. мат. журн. 1998, т. 39, № 2, с. 282-298
163. Ж и г л е в и ч Б. А. Итерполяционные методы вычисления простых и кратных вещественных корней функций.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №1, 165-167.
164. Ж у м а б е к о в Л. Лемма об определителях.- В сб. Некоторые вопр. дифференц. уравнений, Алма-Ата, Наука, 1969, 110-113.

165. Ж у р а в л ё в С. И. Об одном способе нахождения комплексных корней алгебраического уравнения. – В сб. Материалы научн. конф. Омский гос. пед. ин-т, 1963, 221-224.
166. З а в а д а А. П. Численные методы определения строгих неравенств между модулями корней многочлена.- Вычисл. и прикл. мат. Межвед. научн. сб., 1972, вып. 17, 147-151.
167. З а г у с к и н В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцедентных уравнений. – М.:Физматгиз, 1960. –216с.
168. З а г у с к и н В. Л., М о с к в и т и н а И. И. О сходимости метода Н.В. Полувера разложения многочлена на множители. – Труды научн. конференц. Ярославск. гос. пед. ин-та, 1962, 1, №3, 68-71.
169. З а р х и н Б. Я. ППП SLU и LAN для решения системы алгебраических уравнений и алгебраической проблемы собственных значений, возникающих в МКЭ.- Каз. инж.-строит. ин-т., Казань, 1988, 23с., Деп. в ВИНИТИ 17.11.88, №8164.- В88.
170. З и г е л ь К. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных.- М.:ИИЛ, 1954.- 167с.
171. З и м б а В. В. К вопросу о методе Н.И. Лобачевского решения алгебраических уравнений. – Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1959, 25, 225-233.
172. З и м б а В. В. О вычислении пары близких корней алгебраического уравнения.- В сб. “Основные и типовые прогр. для вычислит. машин и систем”. Тр. Семинара. Вып. 2, Киев, 1968(1969) 22-26
173. З и м б а В. В. Три теоремы о распределении корней алгебраических уравнений.- В сб. “Основные и типовые прогр. для вычислит. машин и систем”. Тр. Семинара. Вып. 2, Киев, 1968(1969) 22-26.
174. З м о р о в и ч В. А. О границах корней алгебраических многочленов.- Успехи матем. наук, 1956, 11, №5, 179-183
175. З м о р о в и ч В. А. До теорії розподілу коренів алгебраїчних поліномів.- Доповіді АН УССР, 1959, №9, 936-940.
176. З м о р о в и ч В. А. К теории распределения корней алгебраических многочленов. – Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, №4, 56-63.
177. З о р я А. С., К і р о С. М. Про математику і математиків.- Київ: Радянська школа, 1981.- 254с.
178. И б р а ш е в Х. И. Определение вещественных частей корней алгебраических уравнений. – Тр. механ.-матем. фак. Казахск. ун-т, 1960, 1, №2, 90-93.
179. И в а н и с о в А. В., П о л и щ у к В. К. Алгоритм нахождения корней полиномов, сходящихся при любом начальном приближении.- Докл. АН УССР, 1984,А,№8,76-80.
180. И в а н и с о в А. В., П о л и щ у к В. К. Метод нахождения корней полинома, сходящийся при любом начальном приближении.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1985, 25, №5, 642-653.
181. И в а н о в К. П. Таблицы для вычисления многочленов. М., 1949.
182. И л л а р и о н о в М. А., Л и н В. Я. Локальная и глобальная разрешимость алгебраических уравнений.- МГУ, М.,1982,17с. Деп. в ВИНИТИ 29.04.1982г.,№2076-82.
183. И о х в и д о в И. С. Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы. Алгебраическая теория.- М., Наука, 1974.- 263с.
184. История отечественной математики.- Отв. ред. И.З. Штокало. т.1-Киев, 1966, т.2-Киев, 1967, т.3-Киев, 1968, т.4(в двух книгах).-Киев, 1970.
185. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия. Под ред. Юшкевича А.П., т.т. 1-3, М.: Наука, 1970-1972.
186. К а г а н В. К. О способах решения характеристических уравнений четвертой степени. – Сб. тр. Ленингр. механ. ин-та, 1963, №33, 24-34.
187. К а г а н В. Ф. Основания теории определителей. – Гос. Изд. Украины, Одесса, 1922.- 521с.

188. К а д ж о р и Ф. Введение в современную теорию уравнений. Казань, Студенч. физ.-мат. кружок им. Н. И. Лобачевского, 1928.
189. К а з і м і р с ь к и й П. С. Про розклад матричного многочлена на множники.- Український мат. ж., 1972, 24, №3, 315-325, Укр. мат. ж., 1972, 24, №3, 316-327.
190. К а з і м і р с ь к и й П. С. Розклад матричних многочленів на множники.- Киев: Наук. думка, 1981.- 224с.
191. К а л а й д а О. Ф. Метод "двох хорд" чисельного розв'язування алгебраїчних трансцендентних рівнянь.- Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. і мех., 1970, №12, 76-81.
192. К а л а й д а О. Ф. Нові методи чисельного розв'язування нелінійних алгебраїчних та трансцендентних рівнянь.- Доповіді АН УССР, 1972, А, №2, 114-117.
193. К а л е н т ь е в А. А., Б а л а б а н о в с к и й М. Ф. Интерполяционный метод решения алгебраических уравнений, зависящих от параметра.- Деп. в ВИНИТИ 26. 08. 1980, №3862-80.
194. К а л и н и ч е н к о Г. Л., Д р о н о в а Г. Н. Определение всех корней многочлена n-й степени с комплексными коэффициентами на ЭВМ "Минск-1".- Изв. Томск. политехн. ин-та, 1972, 243, 172-174.
195. К а л у ж н и н Л. А., С у щ а н с к и й В. И. Преобразования и перестановки. Пер. с укр. М,, Наука, 1979
196. К а п и ц а П. Л. Эксперимент. Теория. Практика., М.: Наука, 1977.- 351с.
197. К а п л а н И. А. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений.- Харьков, Харьков. ун-т, 1972, 412с.
198. К а р а н и к о л о в Х р. О действительных корнях одного алгебраического уравнения. – Годишник геол. ин-т, 1955, 2, №1, 179-192 (болг.)
199. К а р а н и к о л о в Х р и с т о. Върху един комбиниран метод за локализация на нулите на един полином.- Годишник Висш. техн. учебни завед. Матем., 1965, 1, №2, 5-8.
200. К а р а н и к о л о в Х р и с т о Н. Върху един въпрос от локализации на нулите на даден полином.- Изв. мат. ин-т. Бълг. АН, 1970, 12, 115-119.
201. К а у ч и к а с А. П. Числа и символы в "Алгебре" Бомбелли. – В сб. "Пробл. истории матем. и мех." Вып. 2, М., Моск. ун-т, 1975, 94-96.
202. К а ц н е л ь с о н Ц. А. Вычисление с удвоенной значностью корней полинома с действительными коэффициентами методом скорейшего спуска.- В сб. "Матем. обеспечение ЭВМ Минск-32". Вып. 15, Минск, 1975, 60-62.
203. К а ч м а р В. С., Р у с ы н Б. П., Ш м о й л о в В. И. Алгоритмы вычисления значений цепных дробей.-Ж. выч. матем. и матем. физики, 1998, т.38, №9, с.1436-1451.
204. К д ы р б а е в а А. А. Об одной неопределенной задаче Жирара .- Каз. пед. ин-т, Алма-Ата, 1988, Деп. в КазВИНИТИ 24.06.88, №2220- Ка88.
205. К е р и м о в М. К., С к о р о х о д о в С. Л. О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, 24. №10. 1497-1513.
206. К л а й н М. Математика. Утрата определенности. М., Мир, 1984.
207. К л е й н Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. т.1.-ОНТИ, М.-Л., 1935.- 480 с.
208. К л е й н Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. Пер. с нем.: 2-е изд. М.: URSS, 2004.
209. К л е й н Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. Пер. с нем. М., Наука, 1987.
210. К л и м о в В. А., П а в л о в Л. Н. Алгоритмы определения комплексно сопряженных корней алгебраического уравнения.- Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета Л., 1976, 29с.

211. К л и м о в В. А., П а в л о в Л. Н. Методика определения вещественных корней алгебраических уравнений.- Ленингр. технол. ин-т, им. Ленсовета Л., 1976, 21с. Деп. в ЦНИИТЭнефтехим, 26 янв. 1977г., №11д-401.
212. К о г а н Т. И. Обобщение метода хорд для алгебраического или трансцендентного уравнения.- Научн. тр. Ташкенск. ун-т, 1966, вып. 276, 53-55.
213. К о г а н Т. И. Построение итерационных процессов высоких порядков.- Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, 7, №2, 423-424.
214. К о г а н Я. М. Об одной интегрально-детерминантной форме приближённого решения уравнения. – Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 265-268
215. К о к а р е в а Т. А. О приближенном вычислении корней алгебраического уравнения $z^{\mu} = a^{\mu} + \mu x z^{k}$. – Тр. 2-й научн. конференц. матем. кафедр. пед. ин-тов Поволжья. Вып. 1, Куйбышев, 1962, 42-50.
216. К о к о в и х и н В. А., К и р п и ч н и к о в В. М. Нахождения комплексных корней характеристических полиномов произвольной степени на цифровой машине.- Тр. Уральського политехн. ин-та, 1967, сб. 151, 130-136.
217. К о л л а т ц Л о т а р. Численные методы решения дифференциальных уравнений.- Пер. с нем. М.: Изд-во иност. лит-ры,1953с.- 460с.
218. К о л л а т ц Л., А л ь б р е х т Ю. Задачи по прикладной математике. М., Мир, 1978.
219. К о м а р о в В. Н. Теоретические основы арифметики и алгебры.- М.: Гос. Издательство, 1929- 448с.
220. К о н д е в Н и к о л а й. За разпределение на нулите на няком класи полиноми.- Годишник Висш. техн. учебни завед. Матем., 1965, 1, №2, 23-26.
221. К о н д р а ш о в В. Е. Выделение корней полинома в порядке возрастания их модулей.- Докл. АН СССР, 1987, 292, №3, 538-542.
222. К о п р и н с к и С т е ф а н. Няком теореми върху разпределение нулите на един полином в комлексната равнине.- Годишник Висш. техн. учебни завед. Матем., 1966 (1967), 3, №1, 69-78.
223. К о р е п о в В. Г. Итерационные методы решения полной проблемы собственных чисел. – Тр. 2-й научн. конфернц. матем. кафедр. пед. ин-тов Поволжья. Вып. 1, Куйбышев, 1962, 61-62.
224. К о р с а к о в Г. И. О корнях полиномов, по модулю не превосходящих единицу.- Научн. тр. Самаркандск. ун-т, 1967, вып. 161, 76-78.
225. К о р с а к о в Г. Ф. О действительных корнях полиномов. – Тр. Узб. ун-та, 1958, вып. 78, 205-208.
226. К о р с а к о в Г. Ф. О количестве вещественных корней полинома вне единичного круга.- Калинингр. ун-т, Калининград, 1987, 12с. Деп в ВИНИТИ 19.01.87, №225-В87.
227. К о р с а к о в Г. Ф. О количестве корней полинома вне круга.- Мат. заметки, 1973, 13, №1, 3-12.
228. К о р с а к о в Г. Ф. О корнях возвратных полиномов. – Тр. Узб. ун-та, 1958, вып. 78, 209-213.
229. К о р с а к о в Г. Ф. О необходимых и достаточных условиях, когда все корни полинома по модулю равны единице.- Калинингр. ун-т, Калининград, 1981, 10с. Деп. в ВИНИТИ 2.04.1981, №1461-81.
230. К о р с а к о в Г. Ф. Об особых корнях полиномов. – Тр. Самаркондс. ун-та, 1961, вып. 107, 137-146.
231. К о р ч а г и н И. Ф. Решение алгебраических уравнений высоких степеней. — 2002. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
232. К о р ч а г и н И. Ф. Отображение алгебраических функций. — 2003. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

233. К о р ч а г и н И. Ф. Симметричные алгебраические моменты. — 2003. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
234. К о р ч а г и н И. Ф. Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов. — 2004. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
235. К о р ч а г и н И. Ф. Общее предельное решение алгебраических уравнений. — 2005. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
236. К о р ч а г и н И. Ф. Теория отображений алгебраических функций.-2005. http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
237. К о р ч а г и н И. Ф. Алгебраические уравнения. — М., : Физматкнига,2006.- 160 с.
238. К о с а р е в А. А., М а р т ы н о в А. В., Я к у н и н а Л. И. Об одном методе вычисления комплексных корней алгебраических уравнений на моделируюших установках. – Автоматика и телемеханика, 1962, 23, №2, 163-168.
239. К о с т о в с к и й А. Н. Определение аргументов комплексных корней при приближенном решении алгебраических уравнений методом Лобачевского. - Доповіді та повідомленя. Львівськ. ун-т, 1955, вып. 6, ч. 2, 78-81.
240. К о с т о в с ь к и й О. М. Застосування добутків Лобачевського-Греффе в методах чисельного визначення нулів функцій. – Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. механ.-матем., 1956, 1, 16-24.
241. К о с т о в с к и й А. Н. К методу численного решения алгебраических уравнений в случае корней, равных по модулю. – Докл. АН СССР, 1960, 131, №2, 242-245.
242. К о с т о в с к и й А. Н. Формулы преобразования коэффициентов в методе Лемера численного решения уравнений. Докл. АН СССР, 1960, 131, №4, 738-741.
243. К о с т о в с к и й А. Н. К методу Лемера численного решения алгебраичеких уравнений с комплексными коэффициентами. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №4, 719-724.
244. К о с т о в с к и й А. Н. Обобщение формулы преобразований функции в методе Лобачевского-Греффе численного определения целых и голоморфных функций. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №2, 345-349.
245. К о с т о в с ь к и й О. М. Визначення аргументів простих комплексних коренів при числовому розв’язуванні рівнянь. – Доповіді та повідомл. Львівськ. ун-т, 1961, вип. 9, ч. 2, 16-20.
246. К о с т о в с к и й А. Н. Определение строгих неравенств между модулями корней в процессе преобразования алгебраических уравнений методом Лобачевского-Греффе. – Докл. АН СССР, 1962, 147, №2, 287-289.
247. К о с т о в с ь к и й О. М. Визначення коренів алгебраїчних рівнянь методом “Кубування коренів”. – В сб. Питання механ. і матем. Вип. 9. Львів, Львівськ. ун-т, 1962, 11-15.
248. К о с т о в с к и й О. М. Про точність коренів, які одержуються при чисельному розв’язанні алгебраічних рівнянь методом Лобачевського-Греффе. – В сб. Обчисл. Матем и техн. Київ, АН УССР, 1963, 6-17.
249. К о с т о в с к и й А. Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его приизводных, ч. I.- Львов, Львовск. ун-т, 1967, 208с.
250. К о с т р и к и н А. И. Введение в алгебру. В 3-х книгах. М., Физматлит, 2001.
251. К р а в ч е н к о Ф. Г. Об аналитических функциях корней полиномов.- Вычисл. и прикл. матем. Межвед. научн. сб., 1969, вып. 7, 77-93.
252. К р а в ч е н к о Ф. Г. Представление корней полиномов в форме степенных рядов и бесконечных определителей.- Вычисл. и прикл. матем. Межвед. научн. сб., 1967, вып.4, 70-89.
253. К р а м а р Ф. Д, А с т р а х а н ц е в а Л. Н. Геометрическая алгебра в XIX веке.- В сб. Математика и механика. Вып. 1. Алма-Ата, 1970, 225-229.

254. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. О некоторых приёмах приближенного вычисления собственных векторов положительного определенной матрицы. – Успехи матем. наук, 1956,11, №3, 151-158.
255. К р е е р Л. И. Приближенное вычисление вещественных корней алгебраических уравнений. Математический сборник, т. 41, № 2,1934.
256. К р е й н М., Н а й м а р к М. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, ОНТИ ГНТИУ, 1936.
257. К р и ц к и й А. П. О численном решении алгебраических уравнений.- Автоматика, Киев, 1984, №5, 76-80.
258. К р у к о в с к и й Б. В. (Круковский-Синевич) До теорії нескінченних неперервних дробів 2-го класу.- Журнал Ин-ту математики Всеукраїнської Академії наук, 1935 (1934), 3- 4, с. 195-206.
259. К р у л и к о в с к и й Н. Н. Из истории формирования спектральной теории дифференциальных операторов.- Тр. III Казахстан. межвуз. наук. конф. по мат. и мех., 1967, Алма-Ата, 1970, 191-192.
260. К р у п к а З. И., Ш м о й л о в В. И. Представление ветвящихся цепных дробей в матричном виде.- Львов, ИППММ АН УССР, 1990.- 39с.
261. К р ы л о в А. Н. Лекции о приближенных вычислениях.- М.:ГИТТЛ, 1954.- 400с.
262. К р ы л о в В. М., Я б л о к о в а М. А., С о к о л о в В. Н. К вопросу определения действительных корней многочлена степени *n*.- Деп. в ОНИИТЕХИМ, г.Черкассы, 5.01.1981, №14-Д81.
263. К у б л а н о в с к а я В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений. – Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, 1, №4, 555-570.
264. К у б л а н о в с к а я В. Н. О некоторых алгорифмах для решения полной проблемы собственных значений. – Докл. АН СССР, 1961, 136, №1, 26-28.
265. К у б л а н о в с к а я В. Н. Решение проблемы собственных значений для произвольной матрицы. – Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1962, 66, 113-135.
266. К у б л а н о в с к а я В. Н. Приведение произвольной матрицы к трёхдиагональному виду.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, №3, 544.
267. К у б л а н о в с к а я В. Н. Об одном способе решения полной проблемы собственных значений вырожденной матрицы.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №4, 611-612.
268. К у ж е л ь А. В. Исследование корней кубического уравнения без использования формул Кардано. – Матем. просвещение. Вып. 4, 1959, 208-209.
269. К у з н е ц о в С. И., Р а с щ е п л я е в Ю. С., Т а р а н В. Н. Алгоритмы вычисления корней характеристических полиномов линейных последовательных машин.- Автоматика и телемеханика, 1981, №7, 100-103.
270. К у л и е в А. М. Одно замечание о кубических уравнениях. – Уч. зап. Туркм. ун-т, 1964, 28, 35-37.
271. К у р а к и н а И. В. Обобщенный способ Ньютона для определения кратных корней алгебраических и трансцендентных уравнений. – Научн. тр. Ташкент. ун-т, 1964, 245, 51-57.
272. К у р б а т о в В. А. Об одной особенности корней многочленов простой степени.- Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т, 1971, сб. 125, 44-49.
273. К у р б а т о в В. А. Об уравнениях простой степени. – Матем. сб., 1957, 43, №3, 349-366.
274. К у р о к а в а Н. Бесконечные определители.- Math. Sci.- 1995.-33, №4.-с.36-31.
275. К у р о ш А. Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1965.
276. К у р ч а т о в В. А. К сходимости некоторого метода итерации.- Сб. аспирантских работ. Казанск. ун-т. Точн. науки. Матем., Казань, 1969, 58-60.
277. К у р ч а т о в В. А. Об одной модификации метода секущих.- Сб. аспирантских работ. Казанск. ун-т. Точн. науки. Матем. Казань, 1969, 65-68.

278. К у т а с и н Б. Н. Графоаналитический метод решения алгебраических уравнений.– Научн. тр. Одесск. высш. мореходн. уч-ща, 1956, вып. 2, 157-166.
279. К у т и щ е в Г. П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени. Теория, методы, алгоритмы. – М.: ЛКИ, 2010. -232 с.
280. К у щ е н к о В. С. Улучшение сходимости процессов итерации при решении алгебраических и трансцендентных уравнений. – Тр. Ленингр. технолог. ин-та им. Ленсовета, 1959, вып. 50, 3-5.
281. К ю р к ч и е в Н. В., Т а ш е в С. П. Один метод одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения.- Докл. БАН, 1981, 34, №8, 1053-1055.
282. К ю р к ч и е в Н. Вычислительные аспекты и область применимости методов для одновременного нахождения всех корней алгебраических уравнений.- Год. Софийск. унив. фак. мат. и мех., 1983(1988), 77, №1, 11-16.
283. Л а н с Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Иностранная литература, 1962.
284. Л а б а з и н В. Г. Некоторые приемы исследования распределения корней алгебраических уравнений. – Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, №3, 188-193.
285. Л а к с б е р г Э. А. Эффективный алгоритм раскрытия определителя.- Автоматиз. проект. в электронике. Респ. межвед. научн.-техн. сб., 1971, вып. 4, 56-59.
286. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
287. Л а р и о н о в Б. А. Об одном способе приближенного решения алгебраического уравнения. – Тр. ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 71-74.
288. Л а х т и н Л. К. Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях.-1892.
289. Л е б е д е в А. Н. Необходимые и достаточные условия вещественности всех корней характеристического уравнения.- В сб. “Вычислит. техника”, Вып. I, Л., “Энергия”, 1970, 237-249.
290. Л е б е д е в А. Н. Простая и быстрая качественная оценка корней кубического уравнения.- Вычисл. техника, Вып. 1, Л., Энергия, 1970, 239-246.
291. Л е б е л е в А. Н. Простые признаки наличия и отсутствия у алгебраического уравнения комплексных корней.- Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1970, вып. 18, 32-35.
292. Л е б е д е в А. Н. Качественный анализ корней характеристических уравнений.- Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1971, №2, 124-129.
293. Л е б е д е в А. Н. Рациональная схема вычислений по алгоритму Раусса.- В сб. “Теория и применение мат. машин”. Минск, Белорус. ун-т, 1972, 124-127.
294. Л е б е д е в А. Н. Алгоритм Раусса и качественный анализ корней характеристических уравнений.- В сб. “Вычислит. техника”, Вып. 2, Л.: Энергия, 1972, 3-8.
295. Л е б е д е в А. Н. Анализ корней характеристических уравнений с помощью алгоритма Шура-Кона.- Изв. ВУЗ, Электромеханика, 1977, №11, 1200-1203.
296. Л е в и н А. Ю. Элементарный признак вещественности корней целой функции с положительными коэффициентами.- В. сб. Пробл. матем. анализа сложн. систем, Вып. 2. Воронеж, Воронежск. ун-т, 1968, 72-77.
297. Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций.-М.:Гостехиздат, 1956.-632с.
298. Л е в и н В. И. Рамануджан – математический гений Индии.-М.:Знание,1968.-46с.
299. Л е в и т Д. Е. Номографичкское решение уравнений четвертой и пятой степени.- Инженерный сб., 1960, 27, 203-206.
300. Л е ф т е р о в Л. П. Один метод решения кубического уравнения.- Годишн. Высш. учебн. завед. прилож. мат., 1977, 11, №4, 35-38.
301. Л и н н и к Ю. В. К восьмой проблеме Гильберта.- В сб. “Проблемы Гильберта”. М.: “Наука”, 1969, 128-130.
302. Л о б а ч е в с к и й Н. И. Алгебра или вычисления конечных.- Казань, 1834. То же: Полн. собр. соч., т.4, М.-Л., 1950, стр. 23-437.

303. Л о г и н о в Б. В. Применение теории возмущений к нахождению корней полиномов. – Сб. научно-исслед. работ Ташкентск. текстильн. ин-т. Сер. матем., 1964, 19, 206-214.
304. Л о з о в с к и й В. С. Процедура решения полиномиальных уравнений методом Мюллера.- В сб. "Вычислит. системы". Вып. 44, Новосибирск, "Наука", 1971, 155-163.
305. Л у ч к а А. Ю. Наближене розв'язування безконечних систем алгебраїчних рівнянь методом Ю.Д.Соколова.- Доповіді АН УССР, 1961, №2, 146-149.
306. Л у ч к а Ю. Д. Приближенное решение бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений методом Ю.Д.Соколова.- Доповіді АН УССР,1963, №5, 563-567.
307. Л ю с т е р н и к Л. А., Ч е р в о н е н к и с О. А., Я м п о л ь с к и й А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М., Физматгиз, 1963.
308. Л я п и н Е. С. Курс высшей алгебры. М.: Учпедгиз, 1955.
309. М а е р г о й з М. Д. Про один метод знаходження нуля аналітичної функції.- Доповіді АН УСССР, 1965, №12, 1563-1665.
310. М а й с т р о в а А. Л. Решение алгебраических уравнений в работах Л.Эйлера.- Ист.-матем. исслед., Москва, 1985, №29, 189-199.
311. М а к д о н а л ь Д И. Симметрические функции и многочлены Холла. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.- 222с.
312. М а к р е л о в И. В. Об одновременном нахождении корней полиномиальных уравнений.- Докл. Белг. АН, 1990, 43, №7, 23-25.
313. М а к р е л о в И. В., С е м е р д ж а е в Х. И. О двух аналогах метода Эрлиха для одновременного нахождения всех нулей тригонометрических и экспоненциальных полиномов.- Докл. Болг. АН, 1983, 36, №7, 879-882.
314. М а к р е л о в И. В., С е м е р д ж а е в Х. И. Методы одновременного нахождения всех корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, 24, №10, 1443-1453.
315. М а к р е л о в И. В., С е м е р д ж а е в Х. И., Т а м б у р о в С. Г. Метод для одновременного нахождения всех нулей данного обобщенного полинома по чебышевской системе.- Объединенный ин-т ядерн. исслед. Дубни. Сообщ., 1985, №Р11-85-932, 8с.
316. М а к с и м о в и ч В. П. О разложении в ряды функций от корней уравнений и о некоторых формулах приближения. Казань, 1882.
317. М а л о з е м о в В. Н., П е в н ы й А. Б. Рекуррентные вычисления. Л., Изд-во ЛГУ. 1976.
318. М а л ы х А. Е. Развитие общей теории определителей до начала XIX века.- Вопр. теории, ист. и метод. преп., ЛГУ, 1990.
319. М а р х а ш о в Л. М. Об отделении и вычислении корней алгебраического уравнения. – Прикл. матем. и механ., 1962, 26, №4, 772-774.
320. М а р ч е н к о Г. А., Ш е л у д ь к о Г. А. Об одном геометрическом методе уточнения корней алгебраических и трансцендентных уравнений.- Харьков. фил. Ин-та техн. теплофиз. АН УССР. Харьков, 1972, 12с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, №4535-72. Деп. 4 июля 1972 г.
321. М а р ч у к Г. И. Методы вычислительной математики.- М: Наука, 1980.- 534с.
322. М а с л о в Д. А. Обобщённые цепные дроби.- Дискретная математика, том 10, вып. 4, 1998, с. 39-60.
323. М е й м а н Н. Н. Некоторые вопросы расположения нулей многочленов. УМН, 4, вып. 6(34), (154-188), 1949.
324. М е л е н т ь е в П. В. Приближенные вычисления. М., Физматгиз, 1962.
325. М и к е л а д з е Ш. Е. Решение численных уравнений.- Тбилиси: Мецниереба, 1965. –270с.

326. М и н а с я н И. С. Теорема о разложении всех корней многочлена в абсолютно сходящиеся ряды.- Докл. АН СССР, 1979, 244, №5, 1068-1071.
327. М и т я г и н а В. А. Графическое решение уравнений третьей степени. – Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена, 1958, 183, 397-411.
328. М и х а л к и н Е. Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций. Сибирский математический журнал, т. 47, №2,(365-371), 2006.
329. М и х е л о в и ч Ш. Х. Теория чисел.- М.: Высшая школа, 1962.- 260с.
330. М и х и н В. В. Основные этапы развития теории чисел и функций Бернулли. – Тр. ин-та теории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, 19, 411-430.
331. М и ш и н а А. П., П р о с к у р я к о в И. В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М., Наука, 1965.
332. М л о д з е е в с к и й Б. К. Решение численных уравнений. М.—Л., 1924.
333. М о в с е я н Э. О вычислении нулей квазиполинома методом производной аргумента.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, 26, №8, 1132-1140.
334. М о р д у х а й – Б о л т о в с к о й Д. Д Два основных источника методов решения уравнений. Известия Сев.-Кавказ. Гос. Унив-та, III, (XV), (36-46), 1928.
335. М о р д у х а й – Б о л т о в с к о й Д. Д. Первые шаги буквенной алгебры. Известия Сев.- Кавказ. Гос. Унив-та, III, (XV), (66-83), 1928.
336. М о р о з о в В. В. Об уравнении пятой степени. – Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, №14, 29-39.
337. М у р з а е в Е. А. Новое доказательство сходимости алгоритма Якоби.- Уч. зап. научно- исследоват. Ин- та мат. и физики Ростовского ун- та. 1939, с. 86- 92.
338. М у р з а е в Е. А. О выделение кратных множителей многочленов над конечными коммутативными полями.- Волжск. математ. сб. , 1965, вып. 5, 255-259.
339. М у р з а е в Е. А. О приложениях разностных уравнений к численному решению алгебраических уравнений.- Тр. Ленигр. технолог. ин-т холодильн. пром-сти, 1968, 17-74.
340. М у т т е р В. М., И в а н о в а И. В. Решение уравнений пятой степени над полями Галуа.- Сев.-Зап. заочн. полит. ин-т., Л., 1989, 13с., Деп. в ВИНИТИ 11.04.89, №2327-В89.
341. М у х а р е в Л. А. Нахождение корней уравнения $f(x)=0$ методом разложения в ряд по введенному в уравнение параметру.- Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989, 29, №7. 1079-1083.
342. М ы с о в с к и х И. П. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.
343. Н е з б а й л о Т. Г. Теория нахождения корней алгебраических уравнений в аналитической форме. М., 2000.
344. Н и к и ф о р о в с к и й В. А. В мире уравнений.- М.: Наук, 1987.-176с.
345. Н и к у л и н Н. А. К вопросу о приближенном вычислении действительных корней алгебраических уравнений. – Изв. Крымск. пед. ин-та, 1958, 29, 251-253.
346. Н и к у л и н Н. А. О решении численных алгебраических уравнений.- Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 157-169.
347. Н и л о в Г. Н. Исследование корней кубического уравнений с комплексными коэффициентами. – Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1962, вып. 16, 38-39.
348. Н и л о в Г. Н. Исследование корней многочлена с комплексными коэффициентами. – Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1962, вып. 16, 32-33.
349. Н и л о в Г. Н. О границах одного корня многочлена $1-2t+t^{n+1}$.- Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1957, вып. 2, 209-210.
350. Н и л о в Г. Н. Упрощение некоторых приёмов вычисления границ дейстительных корней многочлена. – Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1962, вып. 16, 35-38.
351. Н о д е н П., К и т т е К. Алгебраическая алгоритмика. С упражнениями и решениями (Серия: Шедевры мировой физико-математической литературы). М., Мир, 1999.

352. Н ь ю т о н И. Всеобщая арифметика, или книга об арифметических синтезе и анализе. Пер. с лат. М., 1948.
353. О б р е ш к о в Н. Върху няком теореми за нулите на реалните полиноми. – Изв. Матем. ин-та Бълг. АН., 1960, 4, №2, 17-41.
354. О б р е ш к о в Н и к о л а. Върху численого решения на уравненията. – Годишник Софиск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1961-1962, 56, кн. 1, 73-83.
355. О б р е ш к о в Н и к о л а. Върху численого решение на уравнинта посредством квадратни уравнения. – Родишник Софийск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1962, 55, кн. 1, 211-228.
356. О б р е ш к о в Н. Нули на полиномите. – Болг. АН, 1963, -489с.
357. О г а й С. В. Об одном способе решения кубического уравнения. – Тр. Киргизск. гос. ун-та, 1953, №2, 125-127.
358. О г а р к о в Т. Т. Распределение корней алгебраических полиномов. – Уч. зап. Орский гос. пед. ин-т, 1963, 154-162.
359. О г а р к о в Т. Т. К распределению корней многочленов.- Уч. зап. Перм. гос. пед. ин-т., 1971, вып. 10, 83-91.
360. О з ё р с к и й А. В. Эквивалентность матричных итерационных процессов и цепных алгоритмов.- Ин-т математики АН УССР, К., 1976, с. 82-83.
361. О к у л о в Ю. И. Метод приближенного решения алгебраических уравнений в канонической форме с числовыми коэффициентами.- АН СССР, Ин-т земн. магн., 1989, №22, 1-10.
362. О к у н е в Л. Я. Высшая алгебра. М., Просвещение, 1966.
363. О к у н е в А. К. Квадратные функции, уравнения и неранвенства. М.. Просвящение, 1972.
364. О л д е н б е р г е р Р. Метод быстрого решения уравнений. – Дзидо сэйге, 1955, №3, 141-148(япон.).
365. О с т р о в с к и й А. М. Решение уравнений и систем уравнений.- М.: Изд-во иностр. лит., 1963.- 220с.
366. П а в л о в и ч С. Н. Алгоритм расчета корней характеристического уравнения САУ.- Ред. ж. Изв. вузов.- Энерг. Минск, 1989, 8с. Деп в ВИНИТИ 19.07.89, №4780- В89.
367. П а л у в е р Н. В. Об одном итерационном методе разложения многочленов на множители. – Тр. Таллинск. политех. ин-та, 1955, А, №62, 9с.
368. П а л у в е р Н. В. Об одном итерационном методе разложения многочленов на множители. Труды Таллиннского политехнического института, А, № 62, (1-9),1955
369. П а н В. Я. Некоторые схемы для вычисления значений полиномов с вещественными коэффициентами. Проблемы кибернетики, вып. 5, (17-29), 1961.
370. П а н В. Я. Вычисление многочленов по схемам с предварительной обработкой коэффициентов и программа автоматического нахождения параметров. Ж. выч. мат. и мат. физ., 2, № 1, (133-140), 1962.
371. П а н В. Я. О вычислении многочленов пятой и седьмой степеней с вещественными коэффициентами. Ж. выч. мат. и мат. физ., 5, № 1, (116-118), 1965.
372. П а н В. Я. О способах вычисления значений многочленов. УМН, т. XXI, вып. 1, (127), (103-134), 1966.
373. П а н В. Я. О некоторых способах вычисления значений многочленов. Проблемы кибернетики, вып. 7, (21-30), 1962.
374. П а н к р а т о в С. А. Об одном численном способе определения корней характеристических уравнений. – Прикл. матем. и механ., 1960, 24,№5, 967-968.
375. П а н ф и л о в С. И. Некоторые способы обнаружения комплексных корней многочленов. – Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1962, вып. 17, 36-45.
376. П е т р о в И. П. Исследование алгебраических уравнений с помощью системы дискриминантов применительно к задачам гидротехнических расчётов.- Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., 1972, вып. 47, 3-12.

377. П е т р о в а С. С. О первом доказательстве основной теоремы алгебры.- В сб. “История и методол. естеств. наук”. Вып. 11, М., Моск. ун-т, 1971, 123-127.

378. П и л ю г и н С. Ю. Оценка расхождения корней полиномов.- Вестн. Ленингр. ун-та, 1972, №7, 65-70.

379. П о л и а Г., С е г е Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2 Теория функций (специальная часть). Распределение нулей. Полиномы, Определители. Теория чисел. М„ ГИТТЛ, 1956.

380. П о л о ж и й Г. Н, П а х а р е в а Н. А., С т е п а н е н к о И. З. Математический практикум. – М.:Физматгиз, 1960. –512с.

381. П о л о н с к а я К. В., Ф а р х у т д и н о в а Р. Ф. О вычислении корней алгебраических полиномов.- В сб. Управление и информация. Вып. 3, Владивосток, 1973, 147-154.

382. П о н т р я г и н Л. С. Обобщение чисел. 2-е изд. М., 2003.

383. П о п о в Б. О. Розв’зування математичних задач у системі комп’ютерної алгебри MAPLE V.- Киев, ViP., 2001.-312с.

384. П о с т н и к о в М. М. Введение в теорию алгебраических чисел.- М.: Наука, 1982, 239с.

385. П р а с о л о в В. В. Многочлены. М., 2001.

386. П р е л о в с к и й Б. А. Развитие метода парабол, предназначенного для уточнения корней уравнения.- Ред. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. АН СССР, М., 1982, 16с. Деп. в ВИНИТИ 19 апр. 1982г., №1924-82.

387. П р е л о в с к и й Б. А. Формулы итерационного решения алгебраических и трансцендентных уравнений.- Тр. Центр. ин-т механ. и энерг., 1970, 104, 157-167.

388. П р и х о д ь к о Б. К. О вычислении корней с натуральным показателей.- Мат. в школе, 1972, №5, 11-16.

389. П р о с к у р я к о в И. В. Числа и многочлены. Второе изд. М., Просвещение, 1965.

390. П у с т ы л ь н и к Е. И. Об одном способе решения алгебраического уравнения со случайным параметром.- В сб. “Прикл. мат. и программиров.”, Вып. 6, Кишинёв, “Штиинница”, 1971, 113-116.

391. Р а й ч и н о в И в а н. Върху разпределението на нулите на една класа полиноми от винцев тип.- Годишник Высш. техн. учебн. завед. Матем., 1965 (1966), 2, №1, 27-36.

392. Р е ш е т н я к Ю. Г. Замечание к вопросу о вычислении комплексных корней полинома методом Ньютона. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №6, 1097-1098.

393. Р о г а ч е н к о В. Ф. Об открытии Н. И. Лобачевским метода приближенного решения численных алгебраических уравнений. – Историко-математ. исследования, вып. 6, М., Гостехиздат, 1953, 477-494.

394. Р о м м Я. Е. Параллельная сортировка слиянием. Приложение к вычислению нулей, экстремумов функций и распознаванию образов.- Таганрог, Изд-во ТГПИ, 1998.-189с.

395. Р о м м Я. Е., Т е с л е н к о О. В. Об отделении и вычислении комплексных корней многочленов с помощью распаралливаемой сортировки.- ТГПИ, Таганры, 1996.- Деп. в ВИНИТИ 19.04.96, №1279-В96.

396. Р о с и Н и к о л а. Некоторые заметки о вычислении рациональных нулей полиномов.- Матем. весн., 1966, 3, №3, 203-204.

397. Р о с т о в ц е в Н. А. Об итерационном решении уравнений нечетных степеней с положительными коэффициентами. УМН, 7, вып. 3,1952.

398. Р у т и с х а у з е р Г. Алгоритм частных и разностей.- М.:ИИЛ, 1960.- 93с.

399. Р у х о в е ц Л. А. Программа нахождения собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы методом Якоби с преградами. – В сб.: Решение инженерных задач на ЭВМ., Л., 1963, 14-19.

400. Р ы б а ш о в М. В. Метод одновременного отыскания всех корней алгебраического полинома. – В сб. Комбинир. вычисл. машины, М., АН СССР, 1962, 245-249.

401. С а б с о в и ч Л. Л. Вычисление одного определителя, имеющего приложение к теории уравнения Матье.- Прикл. матем. и механ., 1957, 21, №1, 145-152.
402. С а л е х о в Г. С., М е р т в е ц о в а М. А. О сходимости некоторых итерационных процессов. – Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1954, 5, 77-108.
403. С а л и х о в Н. П. О решении алгебраического уравнения методом Н.И. Лобачевского. – Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1962, №3, 24-33.
404. С а л и х о в Н. П. Об одном видоизменении метода Н.И. Лобачевского для вычисления модулей корней алгебраического уравнения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 8, №1, 54-70.
405. С а л ь в а д о р и М. Д. Численные методы в технике. Перев. с англ.- М.: Изд-во ин. лит., 1955. – 247с.
406. С а м к о Г. П. Особенное уравнение 4-ой степени. – Уч. зап. Ростовского на Дону гос. пед. ин-та, 1953, №2, 9-19.
407. С а у л ь е в В. К. О вычислении собственных векторов матриц методов двойных итераций. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, №6, 1112-1113.
408. С е м е р д ж и е в Хр. Методы одновременного приближенного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения.- Обьедин. ин-т ядерн. исслед. Дубна. Сообщ., 1979, №РБ-12485.
409. С е м е р д ж и е в Хр. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения.- Докл. Болг. АН, 1982, 35, №8, 1057-1060.
410. С е м е р д ж и е в Хр., П а т е в а С. О численном методе одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения.- Научн. тр. Плодив. ун-та Мат., 1977, 15, №1, 263-274.
411. С е м е р д ж и е в Х. И., Т а м б у р о в С. Г. Об одном методе определения кратностей нулей алгебраических полиномов.- Докл.Болг.АН,1984,37, №9, 1143-1145.
412. С е м у ш е в а А. Ю., Ц и х А. К. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // В: Комплексный анализ и дифференциальные операторы: к 150-летию С. В. Ковалевской, Красноярск, КрасГУ, 2000, с. 134-146.
413. С е н д о в Б. Л. Один метод одновременного приближенного вычисления всех положительных корней алгебраического уравнения.- Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1974, №5, 385-387.
414. С е р е б р е н н и к о в М. Г., П е р в о з в а н с к и й А. А. Выявление скрытых периодичностей.- М.: Наука, 1965.-244с.
415. С и д о н с к и й О. Б. Вычисление функций Бесселя по рекуррентному соотношению методом прогонки.- Изв. отд. АН СССР, 1967, №13, сер. техн. н., вып. 3, 3-7.
416. С к а р б о р о Дж. Численные методы математического анализа. М., ГТТИ, 1934.
417. С к о р о б о г а т ь к о В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. М.: Наука, 1983.- 312с.
418. С к у г о р е в а Е. И. О вычислении приближенных корней алгебраических уравнений высших степеней. – Тр. Укр. ин-та водн. х-ва, 1960, вып. 9, 98-104.
419. С м и р н о в В. И., К у л я б к о Е. С. Михаил Софронов русский математик середины XVIII века.- М: Изд-во АН СССР, 1954.- 52с.
420. С о к о л о в а Н. Д. Проект библиотеки численных методов на ФОРТРАНЕ (БИМ-М).- Прогр. обесп. ЭВМ, Минск, 1985, №57, 5-30.
421. С о р о к и н а Л. В. Работы Абеля об алгебраической разрешимости уравнений.- В сб. Истор. матем. исследования. Вып. 12, М.:Физматгиз., 1959, 457-480.
422. С о х о ц к и й Ю. В. Высшая алгебра. Часть первая. СПб., 1882.
423. С т а р о д е т к о Е. А. Алгоритмы и примеры решения уравнений.- Минск, Наука и техн., 1981.- 111с.
424. С т и л т ь е с Т. И. Исследования о непрерывных дробях.- Харьков-Киев: ОНТИ, 1936.- 155 с.

425. С т о я к о в и ч М и р к о, Т р и ф у н о в ы й Д р а г а н. Петровиħева модификација грефеове методе за решаванье алгебраских једначина.- Матем. весн., 1968, 5, №4, 439-446.
426. С т р о й к Д. Я. Краткий очерк истории математики.- М.: Наука, 1984-283с.
427. С у ш ке в и ч А. К. Основы высшей алгебры. М.—Л., ОГИЗ, 1941.
428. С ю й Г у й - ф а н. Метод приближенного вычисления корней алгебраических уравнений высших степеней.- Инъюн шусюэ юй цзисуань шусюэ, 1965, 2, №4, 223-237.
429. С я в а в к о М. С. Інтегральні ланцюгові дроби.- Київ: Наук. думка, 1994.- 205с.
430. Сборник задач по алгебре. Под ред. А. И. Кострикина. М., Физматлит, 2001.
431. Современная математика для инженеров. Ред. Беккенбах Э.Ф. Перев. с англ.- М.:Изд-во ин. лит., 1958. –500с.
432. Т а б а ч н и к о в а М. Г. Нахождение корня уравнения $F(x=0)$ методом итераций по Бернстейну.-В сб. Мат. обеспеч. вычисл. машин.,№1,М.,1973,53-54.
433. Т а ш е в С., К о р к ч и е в Н. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений.- Сердика. Болг. мат. списание, 1982, 9, №1, 67-72.
434. Т е л ь к с н и с Л а й м у т и с. Способ представления определителей одного класса матриц высокого порядка.- В сб. “Стат. пробл. упр.” Тр. Семинара. Вып. 1, Вильнюс, 1971, 31-41.
435. Т и х о н о в О. Н. Об одном обощении метода Ньютона вычисления корней алгебраических уравнений.- Изв. высш. учебн. заведений. Математика., 1976, №6, 122-124.
436. Т о д г е н т е р. Начальная теория уравнений. СПб., изд-во Войтинского, 1890.
437. Т о д д Д. Мотивы для работы в области численного анализа. М., Математическое просвещение, вып. 1, 77-79,1957.
438. Т о н к о в Т. Т. Об одной оценке модулей корней полинома. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, №4, 748-749.
439. Т о н к о в Т о н к о. Върху две теореми за разпределение на нулите на полиномите.- Годишник Высш. техн. учебн. завед. Матем., 1965(1967),2,№2,37-56.
440. Т о н к о в Т о н к о. Върху одна теорема за нулите на полиномите.- Годишник Висш. техн. учебни завед. Матем., 1965, 1, №2, 9-14.
441. Т о н к о в Т о н к о. Върху разпределението на нулите на полиномите.- Годишник Высш. техн. учебн. завед. Матем., 1965 (1966), 2, №1, 37-56.
442. Т о р и и Т а ц у о, И о с и о к а Т о с и х и к о. О вычислении всех корней полинома и определении числа корней в единичном круге.- Даёха сёри, 1967, 8, №1, 9-15.
443. Т р а у б Дж. Итерационные методы решения уравнений.- М.: Мир, 1985.- 283с.
444. Т р о х и м е н к о Э. К. О разложении многочленов методом обобщённых чисел.- Изв. ВМЕИ, 1970, кн. 5, 226-299.
445. Т ы р т ы ш н и к о в Е. Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения.- М.: Отд. вычисл. мат. АН СССР, 1889.- 184с.
446. Т э н В. Д., К р а с н о в Я. А. О корнях многочленов с действительными коэффициентами.- Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1980, №1, 83-84.
447. Т я п к и н А. А., Ш и б а н о в А. С. Пуанкаре. М.: Изд-во Молодая гвардия, 1982.- 415с.
448. У и л к и н с о н Д. К. Алгебраические проблемы собственных значений.- М.: Наука, 1970.- 564с.
449. У л ь м С. О сходимости способа касательных парабол для вещественного уравнения при условиях типа Коши. – Изв. АН ЭстСССР Сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, 8, №4, 296-299.
450. У ф е л ь м а н А. Ф. Определение корней характеристического полинома Чебышевских фильтров. – Электросвязь, 1960, №3, 44-51.

451. Ф а д д е в а В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- М.: Гостехиздат, 1950.
452. Ф а д д е е в Д. К., Ф а д е е в а В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- М.: Физматгиз, 1960.- 656с.
453. Ф а д д е е в Д. К., С о м и н с к и й И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука 1972.
454. Ф е д е н к о Н. П. Замечание о методе секущих.- Весцi АН БССР. Сер. фiз.-матем. н., Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. н., 1970, №1, 70-75.
455. Ф е л ь д м а н Н. И. Приближения алгебраических чисел.- М.: МГУ, 1981, 200с.
456. Ф е с е н к о В. И. О решении алгебраических уравнений.- Методы решения нелинейных задач и обраб. данных, Днепропетровск, 1983, 168-173.
457. Ф и д л е р М и р о с л а в. Заметка к методу Лина. – Casop. Pestov. mat., 1963, 88, №4, 438-443.
458. Ф и л и п п о в и ч Е. И. Использование метода Бернулли при расчетах на ЭВМ. – Сб. научн. тр. Ин-т автоматики Госплана УССР, 1961, вып. 2, 25-30.
459. Ф и л и п п о в и ч Е. И. Методы вычислений для электронных цифровых машин. - В. сб. Техн. кибернетика, Киев, Гостехиздат УССР, 1963, 144-198.
460. Ф и л л и п о в и ч Е. И. Об одном методе нахождения корней алгебраических уравнений высоких степеней на электронно-цифровых машинах. – В сб. Вопр. вычисл. матем. и вычисл. техн., М.:Машгиз, 1963, 63-66.
461. Ф и л и п п о в и ч Е. И. О нахождении корней алгебраических уравнений высоких степеней. – Тр. по вопр. применения электр. вычисл. машин в нар. х-ве. Горький, 1964, 35-40.
462. Ф л о р е н с к и й П. Мнимости в геометрии: расширение области двухмерных образов геометрии. (Опыт нового толкования мнимостей).- М.: Лазурь, 1991, 96с.
463. Ф о к а н о в а А. А. К вопросу о вычислении кратных корней уравнений $f(x)=0$.- Научн. тр. Ташкент. ун-т, 1972, вып. 455, 30-33.
464. Х а з а н о в а Ш. М. Об одном методе разложения полинома на множители.- В сб. “Дифференц. уравнения и вычисл. мат.” Вып. 1, Саратов, Саратов. ун-т, 1972, 27-33.
465. Х а р д и Г. Расходящиеся ряды.- М.: Изд- во иностр. лит- ры, 1951.- 504 с.
466. Х а у с х о л д е р А. С. Основы численного анализа. – Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. – 318с.
467. Х е м м и н г Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров.- М.: Наука, 1972.-400с.
468. Х и н ч и н А. Я. Цепные дроби.- М.- Л. ОНТИ, 1935.- 104с.
469. Х л о п о н и н С. С. Некоторые преобразования цепных дробей.- Учёные записки Марийского пединститута, т. 26, Йошкар – Ола. 1965, с. 445- 486.
470. Х л о п о н и н С. С. Приближение функций цепными дробями.- В кн.: Цепные дроби.- Ставрополь, 1977.- с. 3-102.
471. Х о в а н с к и й А. Н. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа.- М.: Гостехиздат, 1956.- 203 с.
472. Х у д а й б е р д ы е в Р. Об одном итерационном методе отыскания корней алгебраического уравнения.- Докл. АН УзССР, 1965, №10, 18-30.
473. Х у д а р б е р д ы е в Р., С а й ф у л л и н В. Т. Об отыскании корней трансцендентных уравнений.- Изв. АН УзССР. Сер. техн. н., 1970, №4, 65-66.
474. Х у м а л А. К. О разложении полинома четвёртой степени на множители.- В сб. “Пробл. преподав. мат. в вузах”. Вып. 2, М.: Высш. школа, 1972, 70-74.
475. Ц а п л и н С. А. Об определении корней степенных уравнений.- Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъёмки и картогр., 1969, вып. 56, 99-127.
476. Ц е г е л и к Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана.- Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, №12, 90-96.

477. Ц е г е л и к Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль.- Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат., 1972, вип. 7, 76-79.
478. Ц е г е л и к Г. Г. Численный метод определения "максимальных" областей, не содержащих нулей одного класса целых функций.- Вычисл. и прикл. мат. Межвед. научн. сб., вып. 16, 122-125.
479. Ц е й т е н Г. Г. История математики в XVI и XVII солетиях.- 2-е изд.- М.-Л.: ГОНТИ, 1938.- 456с.
480. Ч а н д и р о в Г. И. К теории итерационных процессов.- Докл. АН СССР, 1967, 177, №6, 1289-1291.
481. Ч е б о т а р е в Н. Г. Об одном видоизменении способа Штурма и Фурье. ДАН СССР, 34, (3-6), 1942.
482. Ч е в с к и й В. М. Об областях, содержащих по меньшей мере один нуль алгебраического полинома *n*-й степени.- Уч. зап. Петрозаводск. ун-та, 1970(1971), 18, №2, 143-145.
483. Ч е н И з и н ь - с у н. Распределение корней многочлена и один способ решения алгебраических уравнений.- Иньюнь слусюэ юй цзисуань шусюэ, 1966, 3, №4, 225-226.
484. Ч е р н у ш е н к о И. С. Об алгебраическом решении буквенных уравнений первых четырех степеней. – Научн. тр. Харьковск. горн. ин-т, 1960, 7, 245-263.
485. Ч е р н ы ш е н к о В. М. Об одном итерационом методе решения алгебраических уравнений. – Матем. просвещение, 1960, вып. 5, 206-208.
486. Ч е р н я в с к и й И. Т. К решению алгебраических уравнений на АВМ.- Автоматизация научн. исследований, М.: Наука, 1968, 58-68.
487. Ч ж а н Ф а н-с ю н. Метод Ньютона для нахождения комплексных корней. – Шусюэ сюэбао, 1955, 5, №2, 137-147(кит.).
488. Ч ж а н Ф а н-с ю н. Метод Рауса для нахождения комплексных корней. – Acta math. sinica, 1959, 9, №2, 101-113 (кит.)
489. Ч и л и к о в С. П. Об аналитическом представлении одного класса функций и его применение к оценке границ полинома.- Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т, 1970, сб. 102, 42-53.
490. Ш а п и р о Г. М. Высшая алгебра. М., Учпедгиз, 1935.
491. Ш а ф а р е в и ч И. Р. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). – М.: Гостехиздат, 1954. –24с.
492. Ш а ф а р е в и ч И. Р. Основные понятия алгебры. 2-е изд. М., Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
493. Ш в е ц М. Н. Некоторые замечания о методе Лобачевского решения алгебраических уравнений.- В сб. Научная конференция, Одесск. ун-т, Одесса,1965, 31-32.
494. Ш е л у д ь к о Г. А. Адаптивный метод отделения вещественных корней алгебраических и трансцендентных корней алгебраических и трансцендентных уравнений.- Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, 10, №4, 1016-1021.
495. Ш и ш о в В. С. Метод разбиения на блоки для определения собственных значений матриц большого порядка.- Ж. вычисл. метем. и матем. физ., 1961, 1, №1, 169-173.
496. Ш м о й л о в В. И. Соответствующие цепные дроби.- Препринт 75-19 Ин-та кибернетики, Киев, 1975.- 37с.
497. Ш м о й л о в В. И. Разработка эффективных вычислительных алгоритмов для многопроцессорных комплексов на основе теории ветвящихся цепных дробей.-Отчёт по НИР, Львов, ФМФ ИМ АН УССР, 1975, -199с.
498. Ш м о й л о в В. И. Способ разложения степенного ряда в соответствующую цепную дробь.- В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев, 1976.- с. 100- 101.
499. Ш м о й л о в В. И. Представление матрицами цепных дробей различных классов и параллельные алгоритмы вычисления значений цепных дробей.- Отчёт по НИР, Львов, ФМФ ИМ АН УССР, 1977. -196с.

500. Ш м о й л о в В. И. Распараллеливание алгоритма прогонки. В. кн.: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. ИПМ АН ССР, М, 1981.
501. Ш м о й л о в В. И., Ш м о й л о в А. И. Реализация параллельных алгоритмов вычисления значений цепных дробей на мультиконвейерных структурах.- В кн.: Параллельная обработка информации, т.3., Киев: Наук. думка, 1986.-с. 210-233.
502. Ш м о й л о в В. И. Параллельные B-R и F-R алгоритмы.- В кн. Параллельная обработка информации, т.3, Киев: Наук. думка, 1986.- с. 210-223.
503. Ш м о й л о в В. И. Операции над цепными дробями.- В препринте "Вычислительные системы с перестраиваемой архитектурой", Львов, ИППММ АН УССР, 1988., с.47-55
504. Ш м о й л о в В. И. Распараллеливание при вычислении значений ветвящихся цепных дробей.- В препринте "Систолические вычислительные структуры", Львов, ИППММ АН УССР, 1988, с. 44-48.
505. Ш м о й л о в В. И. Рекуррентные соотношения для цепных дробей произвольного вида.- В препринте "Конвейерные вычислительные системы", Львов, ИППММ АН УССР, 1988, с. 46-57.
506. Ш м о й л о в В. И. *P*- инвариантные цепные дроби.- В препринте "Высокопроизводительные вычислительные системы", Львов, Ин- т прикладных проблем механики и математики, №6-89, 1989.-с. 52- 62.
507. Ш м о й л о в В. И. О распараллеливании алгоритма прогонки.- В препринте "Многофункциональные вычислительные структуры", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с.62-65.
508. Ш м о й л о в В. И. Параллельные алгоритмы вычисления значений цепных дробей.- ИППММ АН Украины, Львов, 1989.- 69с.
509. Ш м о й л о в В. И., Р о ж и н а Э. И. Параллельный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей.- В препринте "Организация потоковых вычислений", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с. 50-62.
510. Ш м о й л о в В. И. Разложение sin x и cos x в параллельные цепные дроби. В препринте "Параллельные вычислительные системы", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с.54-57.
511. Ш м о й л о в В. И. Представление некоторых специальных функций цепными дробями.- В препринте "Обеспечение живучести и надёжности ОВС", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с. 55- 61.
512. Ш м о й л о в В. И. Сравнительные характеристики вычисления элементарных функций при помощи цепных дробей и рядов.- В препринте "Система автоматизации програмирования ОВС", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с. 50-59.
513. Ш м о й л о в В. И. Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей.- В препринте "Алгоритмы планирования параллельных вычислений", Львов, ИППММ АН УССР, 1989, с. 53- 57.
514. Ш м о й л о в В. И. Параллельные алгоритмы нахождения корней полиномов.- В препринте "Перспективные системы обработки информации", Львов, Ин-т прикладных проблем механики и математики, №6-90, 1990.- с.40-56.
515. Ш м о й л о в В. И. Рекуррентный метод представления рядов в соответствующие и присоединённые цепные дроби.- В препринте "Систолические процессры", ИППММ АН УССР, 1990, с. 48-61.
516. Ш м о й л о в В. И., А н д р и е в с к а я З. А. Разложение специальных функций в цепные дроби.- В препринте "Прикладное программное обеспечение", Львов, НТЦ "Интеграл", № 10-91, 1991, с. 32-74.
517. Ш м о й л о в В. И. Архитектура однородных вычислительных сред.- Львов: НТЦ "Интеграл", 1993.- 289с.
518. Ш м о й л о в В. И. Суммирование расходящихся цепных дробей.- Львов: ИППММ НАН Украины, 1997.- 23с.

519. Ш м о й л о в В. И. Определение значений расходящихся цепных дробей и рядов.- Львов: ИППММ НАН Украины, 1997.- 70с.
520. Ш м о й л о в В. И. Периодические цепные дроби.- Львов: Академический Экспресс, 1998.- 219с.
521. Ш м о й л о в В. И., С л о б о д а М. З. Расходящиеся непрерывные дроби.- Львов, Меркатор, 1999.- 820 с.
522. Ш м о й л о в В. И., Р у с ы н Б. П., К у з ь о М. И., З а я ц И. А. Пульсирующие информационные решетки.- Львов, Меркатор, 1999.- 66 с.
523. Ш м о й л о в В. И., З а я ц И. А., С л о б о д а М. З. Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2000.- 820с.
524. Ш м о й л о в В. И., Р у с ы н Б. П., К у з ь о М. И., К а п ш и й О. В. Проектирование пульсирующих информационных решеток.- Львов, Меркатор, 2000.- 101с.
525. Ш м о й л о в В. И. Об одном подходе к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. – Львов: ИППММ НАН Украины, 2001.- 74с.
526. Ш м о й л о в В. И., Р у с ы н Б. П., К у з ь о М. И. Ячейка пульсирующих информационных решеток.- Львов, Меркатор, 2001.- 34 с.
527. Ш м о й л о в В. И. Определение нулей полинома при помощи r/φ-алгоритма. – Львов: ИППММ НАН Украины, 2001.- 62с.
528. Ш м о й л о в В. И., Ч и р у н Л. В. Непрерывные дроби и комплексные числа. – Львов: Меркатор, 2001.- 564с.
529. Ш м о й л о в В. И., Р у с ы н Б. П., К у з ь о М. И. Однородные вычислительные среды и пульсиры.- Львов: Меркатор, 2001.- 62с.
530. Ш м о й л о в В. И., Т а я н о в В. А. Непрерывные дроби: Библиографический указатель 1572 – 2002г.г. – Львов: Меркатор, 2002.-168с.
531. Ш м о й л о в В. И., Т а я н о в В. А. Обработка изображений в однородных вычислительных средах. – Львов: Меркатор, 2002.- 70с.
532. Ш м о й л о в В. И. Функции Никипорца и нахождение нулей полиномов. – Львов: Меркатор, 2003.-141с.
533. Ш м о й л о в В. И. Алгебраические уравнения и ультрапериодические непрерывные дроби . – Львов: Меркатор, 2003.-139с.
534. Ш м о й л о в В. И. Непрерывные дроби: Библиографический указатель. – Львов: Меркатор, 2003.- 171с.
535. Ш м о й л о в В. И. Решение алгебраических уравнений при помощи алгоритма Рутисхаузера-Никипорца . – Львов: Меркатор, 2003.-129с.
536. Ш м о й л о в В. И. Непрерывные дроби и две классические задачи алгебры. – Львов: Меркатор, 2003.- 862с.
537. Ш м о й л о в В. И., Т и м ч е н к о А. В.., К у з ь о М. И., К а п ш и й О. В. Вычислительные системы на однородных средах.- .- Львов, Меркатор, 2003.- 174 с.
538. Ш м о й л о в В. И., А д а м а ц к и й А. И., Р у с и н Б. П., К у з ь о М. Н. Матричные пульсирующие информационные решётки. – Львов: Меркатор, 2003.- 338с.
539. Ш м о й л о в В. И., Т у ч а п с к и й Р. И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. – Львов: Меркатор, 2003.- 83с.
540. Ш м о й л о в В.И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями. – Львов: Меркатор, 2003. – 599 с.
541. Ш м о й л о в В. И., М а р ч у к М. В. , Т у ч а п с к и й Р. И.. Непрерывные дроби и некоторые их применения.- Львов, Меркатор, 2003.- 784 с.
542. Ш м о й л о в В. И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.1. Периодические непрерывные дроби.- Львов: Меркатор, 2004. – 645 с.
543. Ш м о й л о в В. И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.2. Расходящиеся непрерывные дроби.- Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.

544. Ш м о й л о в В. И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.3. Из истории непрерывных дробей.- Львов: Меркатор, 2004. – 520 с.
545. Ш м о й л о в В. И. Ультрапериодические непрерывные дроби.- Львов: Меркатор, 2004. – 374 с.
546. Ш м о й л о в В. И., М а р ч у к М. В. , Т у ч а п с к и й Р. И.. Суммирование непрервыных дробей по Никипорцу.- Львов, Меркатор, 2004.- 513 с.
547. Ш м о й л о в В. И. Пульсирующие информационные решетки и суперкомпьютеры класса А. - Львов: Меркатор, 2004. – 902 с.
548. Ш м о й л о в В. И., В и т и с к а Н. И., З а д о р о ж н ы й Д. В. Использование непрерывных дробей в алгоритмах имитации физических процессов. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2006.- 296 с.
549. Ш м о й л о в В. И., В и т и с к а Н. И., К о в а л е н к о В. Б., Т и т о в а Е. Б. Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин – та, 2009. – 148 с.
550. Ш м о й л о в В. И., В и т и с к а Н. И., З а д о р о ж н ы й Д. В. , Т и т о в а Е. Б. Использование непрерывных цепных дробей для построения эффективных итеррационных алгоритмов. – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин – та, 2010. – 184 с.
551. Ш м о й л о в В. И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог, Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010-205 с.
552. Ш м о й л о в В.И., К о в а л е н к о В. Б. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями.- Донецк: Искусственный интеллект, 2011, №1, с. 260-270.
553. Ш у л ь ц е А. Графічна алгебра. Пер. с нем. Киев, ОНТВУ, 1933.
554. Ш у м я г с к и й Б. М. Таблицы для решения кубических уравнений. М.—Л., 1950.
555. Э й л е р JI. Исследование о мнимых корнях уравнений. СПб., 1751.
556. Э й л е р JI. Универсальная арифметика. Т. 1, 2. Пер. с нем. СПб., 1768-1769.
557. Э й т к и н А. О разложении многочленов на множители итерационными методами. – Успехи матем. наук, 1953, 8, №6(58), 71-86.
558. Ю ш к е в и ч А. П. История математики в России.- М.: Наука, 1968.- 591 с.
559. Я к о в к и н М. В. Вычислительные действия над многочленами. М., Учпедгиз, 1961
560. Я м а м о т о Т о ц у р о. Метод решения алгебраических уравнений. – Math. Sci., 1976, 14, №7, 52-57.
561. A a s e n J a n O l e, R o m b e r g W e r n e r. Eine Losungamethode fur Eigenwertproblem.- Nord. Tidskr. Informationsbehandl, 1965, 5, №4, 221-229.
562. A b e l H. Mémoire sur les équations algébriques.- 1824.
563. A b i a n A. The precise annuli containing the zeroes of polinomials.- An. sti. Univ. Iasi, 1981, Sec. 1a, 27, №1, 31-32.
564. A b r a m o v A. A. Calculation of matrix eigenvectors and eigenvalues, arising to the approximate solution of equations of mathimatical physics. – Inform. Process., 1962, Amsterdam, N., Holland Publ. Co., 1963-204-206.
565. A b r a m o w i t z M., S t e g u n I. A. Handbook of Mathematical Functions with lomiiiltm, Graphs and Mathematical Tables (Справочник по математическим функциям I[1] формулами, графиками и математическими таблицами). New York: Dover, 1972.
566. A d a m s D u a n e A. A stopping criterion for polynomials roots finding.- Communs Acm, 1967, 10, №10, 655-658.
567. A d l e r H e l m u t. Behandlung algebraischer Gleichungen mit Hilfe von Analogrechnen. – Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden, 1962, 11, №4, 663-669.
568. A d l e r H e l m u t. Ein Gerat zur Auflosung von Polynomgleichungen. – Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1955-1956, 5, №1, 1-4.
569. A g h a y a n i J. Ch., A m i r – M o e z A. Al-Biruni, Al-Tusi and Newton.- Tex. J. Sci., 1980, 32, №4, 289-292.
570. A g u i l e r a-N a v a r r o V. C., A g u i l e r a-N a v a r r o M. C. On the zeroes of infinite series.- J. Comput. Phys., 1984, 55, №1, 193-196.

571. A h m a d M a n z o o r. On polynomials with real zeros.- Canad. Math. Bull., 1968, 11, №2, 237-240.
572. A i t k e n A l e x a n d e r C r a i g. Determinants and matrices.- Edinburg, London, Oliver and Boyd, New York, interscience Publishers, 1954.-144p.
573. A i t k e n A. C. Determinats and Matrices.- Oliver and Boyd. 1964.
574. A i t k e n A. C. Further numerical studies in algebraic equations and matrices (Дальнейшие численные исследования по алгебраическим уравнениям и матрицам). Edinburg, Proc. Roy. Soc., 51**,** (p. 80-90), 1931.
575. A i t k e n A. C. Note on the acceleration of Lin’s process of iterated penultimate remainder. – Quart. J. Mech. und Appl. Math., 1955, 8, №2, 251-255.
576. A i t k e n A. C. Note on the acceleration on Lin's process of iterated penultimate remainder (Замечание об ускорении процесса Лина итерированного предпоследнего остатка). Quart. J. Mech. And Appl. Math., 8, № 2, (p. 251-255), 1955.
577. A i t k e n A. C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations (О численном решении алгебраических уравнений методом Бернулли). Edinburg, Proc. Roy. Soc.**,** (p. 289-305), 1926.
578. A i t k e n A. C. On the factorization of polynomials by iterative methods (О разложении на множители полиномов при помощи итеративных методов). Edinburg, Proc. Roy. Soc., LXIII, part II, (p. 174-191), 1949-1950.
579. A i t k e n A. C. On the iterative methods of Lin and Friedman for factorizing polynomials. Studies in practical mathematics, VIII. (Об итеративных методах Лина и Фридмана разложения полиномов на множители. Исследования по практической математике, VIII.) Edinburg, Proc. Roy. Soc., A64, № 2, (p. 190-199), 1954-1955.
580. A k a i k e A. G. On a computation method for eigenvalues problems and its application to stabistical analysis. – Ann. Inst. Statist. Math., 1958, 10, №1, 1-20.
581. A k r i t a s A. G. An implementation of Vincent’s theorem.- Numer. Math., 1980, 36, №1, 53-62.
582. A k r i t a s A. G. The fastest exact algorithms for the isolation of the real roots of a polynomial equation.- Computing, 1980, №4, 299-313.
583. A k r i t a s A. G., D a n i e p o u l o s S. D. On the forgotten theorem of mr. Vincent.- Hist. math., 1978, 5, №4, 427-435.
584. A l a n G., E s t m o n d N. A new release of SPARSPAK.- SIGNUM Newsletter, 1984, 19, №3, 9-13.
585. A l b r e c h t J. Zur simultanen Einkreisung samtlicher Nullstellen eines Polynoms. – Z. angew. Math. und Mech., 1963, 43, №7-8, 377-379.
586. A l d r i c h L e l a n d E. Solution of algebraic equation. – J. Frankin Inst., 1953, 256, №1, 59-69.
587. A l e f e l d G., H e r z b e r g e r J. Uber die Konvergenzordnung einiger Verfabren zur simultanen Berechung von Polynomwurzein.- Z. angew. Math. und Mech., 1974, 54, №4, T206.
588. A l l a n N., P e r e z H. Ecuaciones pollinomicas de tercer y cuerto grado.- Bol. mat., 1970, 4, №4-6, 51-59.
589. A l t R., V i g n e s J. Stabilizing Bairstow’s method.- Comput. Math.,1982,8,№5,379-381.
590. A l t m a n n M. Iterative methodes of higher order. –Bull. Acad. polon. sci. – Ser. sci. math., astron. et phys., 1961, 9, №2, 63-68.
591. A l w a y s G. G., M a r t i n D. W. An algorithm for reducing the bandwidth of a matrix of symmetrical configuration.- Comput. J., 1965, 8, №3, 264-272.
592. A m m a r G. S., G r a g g W. B. The implementation and use of the generalized Schur algorithm.- Comput. and Comb. Meth. Syst. Theory, Amsterdam,1986,265-279.
593. A n a s t a s s e l o u E. C., P a n a y o t o u a k o i s D. E. Analytical solution of polynomial equations with an application to the quintic equation.- Appl. Math. and Comput., 1987, 21, №2, 145-155.

594. A n d e r s o n B. D., J u r y E. I. A simplified Schur-Cohn test.- Trans Automat. Contr., 1973, 18, №2, 157-163.

595. A n d e r s o n F. B. Solution of qadratic, cubic and quartic equations. – Electron-Technol., 1963, 71, №1, 53-58.

596. A n d e r s o n N., B j o r c k A. A new high order method of regula falsi type for computing a root of an equatioons.- BIT, 1973, 13, №3, 253-264.

597. A n d r e e v A. S., K j u k c h i e v N. Y. Two-sided methods for solving the polynomial equation.- Math. Balkan, 1987, 1, №1, 72-82.

598. A n d r e j e v V. Iterationpostupak za rjesavanje jednadzbe treceg stepena. – Gradevinar, 1962, 14, №11, 394-397.

599. A p a r o E n z o. Un procedimento iterativo per la risolutione numerica delle equazioni algebriche. – Ricerca scient., 1954, 24, №5, 1003-1005.

600. A p a r o E r z o. Un criterio di Routh e sua applicazione al calcolo degli zeri di un polinomio.- Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fiz., mat. e natur., 1958, 25, №1-2, 26-30.

601. A p a r o E. L. A stability criterion and its application to the computation of the zeros of a polynomial. – Sympos. Questions Numer. Analysis. Rome, 1958, Rome, s.a., 44-47.

602. A p p e l K l a u s. Solution of eigenvalue problems with approximately known eigenvectors. – Communs Assoc. Comput. Math., 1962, 5, №7, 388.

603. A r n a u d t e s J. M. Sur la resolution explicite des equatioons de degre 5, quand elles sont resolubes par radicux.- Bull. sci. math., 1976, 100, №3, 241-254.

604. A r s c o t t F. M. Latent roots of tridiagonal matrices. – Proc. Edinburgh Mach. Soc., 1961, 12, №4, Edinburgh Math. Notes, №44, 5-7.

605. A r t h u r D. W. The use of interval arithmetic to bound the zeros of real polynomials.- J. Inst. Math. and Appl., 1972, 10, №2, 231-237.

606. A s h G. R., A s h R. H. Numerical computation of root loci using Newton-Raphson technique.- 9th Join Automat. Control Conf., Ann Arbor., Mich., 1968. Preprints techn. papers. New York, N.Y., 1968, 1102-1112.

607. A t k i n s o n K e n d a l l E. The numerical solution of the eigenvalue problem for compact integral operators.- Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 129, №3, 458-565.

608. A z i z A b d u l. On the location of the zeroes of certain composite polynomials.- Pacif. J. Math., 1985, 118, №1, 17-26.

609. A z i z A b d u l. Zero-free regons for polynomials and some generalizationsof Eneström-Kakeya theorem.- Can. Math. Bull., 1984, 27, №3, 265-272.

610. B a b u s k a I v a. The finite element method for infinite domains.- Math. Comput., 1972, 26, №117, 1-11.

611. B a c h m a n n K a r l - H e i n z. Lösung algebraischer Gleichungen nach der Methode des starksten Abstiegs. – Z. angew. Math und Mech., 1960, 40, №1-3, 132-135.

612. B a c h m a n n K a r l – H e i n z. Rechenkontrollen und Rechenschemata zum Graeffeschen Verfahren. – Wiss. Z. Techn. Hobschule Dresden, 1952/53, 2, №3, 327-332.

613. B a c h m a n n K. - H. Automatische Losung algebrischer Gleichungen.- Beitr. Numerisch. Math., Berlin, 1974, 13-18.

614. B a c h m a n n K. H., Z i e l a s W. Fehlerabschaftzung fur Warzeln algebraischer Gleichungen.- Z. angew. Math. und Mech., 1969, 49, №10, 632-634.

615. B a c h m a n n K.-H. Der Konvergenzyrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation. – Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, №8/9, 282-283.

616. B a i r s t o w L. Investigations Relating to the Stability of the Aeroplane (Исследования, относящиеся к устойчивости аэроплана). Reports and Memoranda (of Advisory Committee for Aeronautics), № 154, 1914.

617. B a k e r G e o r g e A. A new derivation of Newton’s identities and their application to the calculation of the eigenvalues of a matrix. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, №2, 143-148.

618. B a l l a n t i n e I. P. Complex roots of real polynomials. – Amer. Math. Monthly, 1959, 66, №5, 411-414.
619. B a l l i e n R o b e r t, S i m o n a r F e r n a n d. Algebre. – Libr. Univ., Louvain, Paris, Gauther- Villars, 1955, XVI, 356p.
620. B a n d e m e r H. Zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen mit dem QD-Algorithmus von Rittishauser. – Z. angew. Math. und Mach., 1962, 42, №12, 566-568.
621. B a r b a l a t I. O proprietale a ecuatiilor on coefficienti real. – Gaz. mat. si fiz., 1953, 5, №10, 460-462.
622. B a r n a B e l a. Bizonyus algebrai eggenletekre alkolmazott Newton-fele gyökközelitö eljaras divergenci-contjaairol. – Magyar nenzeti bibliogr., 1955, №4, 118.
623. B a r n a B e l a. Uber die Divergenzpukt des Newtonschen verfahrens zur Besttimmung von Wurzeln algebraischen Gleichungen. II. – Publs. math., 1956, 4, №3-4, 384-397.
624. B a r n a B e l a. Uber die Divergenzpunkte des Newtoschen Verfahrens zur Bestimung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. – Publs. mathematicae,1953, 3, №1-2,109-118.
625. B a r n e t t B. Qualitative analysis of polynomials using matrices.- IEEE Trans. Automat. Contr., 1970, 15, №3, 380-382.
626. B a r r e i s s E r w i n H. Resultant procedure and the mechanization of the Graeffe process. – J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, 7, №4, 346-386.
627. B a r t h W i l h e l m. Nullstellenbestimmung mit der Intervallrechmung.- Computing, 1971, 8, №3-4, 320-328.
628. B a r t h W. Ein Algorithmus zur Berechnung aller reellen Nullstellen in einen intervall.- Computing, 1972, 9, №4, 327-333.
629. B a r t l o m i e j c z y k R. Uogolnienie metody Baistowa.- Zesz. nauk. PSI, 1979, №624, 117-129.
630. B a r z o t t i L e o. Condicao para que as raizes de uma equacao do quarto grau constituam grupo harmonico. – Anuario Soc. paran. mat., 1958, 1, 35-37.
631. B a t e m a n E. H. The solution of algebraic and transcendental equations by iteration.- Math. Gaz., 1953, 37, №320, 96-101.
632. B a u c h u b e r F. Direkte Verfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen.- Computing, 1970, 5, №2, 97-118.
633. B a u e r F r i e d r i c h L. Beitrage zur Entwicklung numerischer Verfahren fur programmgestenerte Rechenanlagen. 1. Qudratisch konvergente Durchfuhrung der Bernoulli-Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung von Polynomen. – Sitzungsber math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss. Munchen, 1954 (1955), 275-303.
634. B a u e r F r i e d r i c h L. Das verfahren der abgekarzten Iteration fur algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nalls-tellenbestimmung eines Polynoms. – Math. und Phys., 1956, 7, №1, 17-32.
635. B a u r A r n o l d. Die naherundgsweise Lösung von Cleichungen. – Math.-phys. Semesterber., 1953, 3, №3-4, 235-237.
636. B e a n w e n s R o b e r t. Semistrict diogonal dominance.- SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, №1, 109-112.
637. B e c k e r M., H a u g e r W. Ein sehr einfaches Verfahren zur Bestimmung der Wurzein algebrischer Gleichungen tritten und vierten Grades.- Z. angew. Math. und Mech., 1981, 61, №5, 267-269.
638. B e c k e r M., H a u g e r W. On the determination of the roots of polinomials.- Mech. Res. Commun., 1980, 7, №4, 247-252.
639. B e l a r d i n e l l i G. Resoluzione analitica delle equazioni algebrieche generali.- Rend seminar. mat. e fiz. Milano, 1959, 29, 13-45.
640. B e l a r d i n e l l i G. Risolutione analitica delle equazioni algebriche generali. Milano, C.Tambarini, 1959, 35p.
641. B e l a r d i n e l l o G. Fonctions hypergeometrique de plusieurs variables et resolution analytique des equations algebraiques generates (Гипергеометрические функции не-

скольких переменных и аналитическое решение общих алгебраических уравнений). Paris, Gauthier-Villars, 1960.
642. B e l o i u E l e n a. Approximarea radacinior unei ecuatii. – Gaz. mat. si. fiz., 1963, A15, №10, 512-519.
643. B e l t r a m i G i o v a n n i. Un metodo per la determination delle radici reali di unequazione algebra.- Atti Semin. mat. e fiz. Univ. Modena, 1971(1972), 20, №2, 335-346.
644. B e n d e r C. F., S h a v i t t I. An iterative procedure for the calculation of the lowest real eigenvalue and eigenvector of a nonsymmetric matrix.- J. Comput. Phys.- 1970, 6, №1, 146-149.
645. B e n t w i c h M. Solution of Levi Civita's problem by infinite matrix inversion.- Trans. ASME, 1973, E-40, №1, 31-36.
646. B e r g L. Abschutzung von Nullstellen eines Polynoms.- Z. angew. Math. und Mech., 1987, №1, 57-58.
647. B e r g L. Numerische Faktorisierung von Polynomen.- Z. angew. Math. und Mech., 1978, 58, №5, 245-249.
648. B e r g L. On the simultaneous calculation of two zeroes.- Computing, 1980, 24,№1,87-91.
649. B e r n i A r m i n o. Equazioni di 3^0 e 4^0 grado. – Riv mecc., 1960, 11, №233, 41-68.
650. B e r n k o p f M i c h e a l. A history of infinite matrices.- Arch. History Exact Sci, 1968, 4, №4, 308-358.
651. B e s t G. C. The determination of the complex zeros of a polynomial (Определение комплексных нулей полиномов). Amer. Math. Monthly, **54,** № 5, (p. 269-272),
652. B e z o u tE. Theorie generate des equations algebraiques (Общая теория алгебраических уравнений). Paris, 1779.
653. B i d h a m M., D e w a n K. On the zeroes of a polynomial.- Num. Methods and Approx. Theory, vol. 3, 3rd Cont. Nis., Aug. 18-21, 1987.- Nis., 1988, 121-128.
654. B i e n Z., L e e J. A note on a computer-aided root-locus method.- IEEE Trans. Autom. Contr., 1986, 31, №3, 246-247.
655. B i e r m a n n W. Die Lösung algebraischer Gleichungen höheren Grades durch Vergleich.- Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. R., 1981, 30, №7, 3-4.
656. B I e r n a c k i M I e c z y s l a v. Sur les polynomes dont tous les zeros sont reels. – Am. Univ. M. Curie-Scladowska, 1956 (1958), A10, 61-75.
657. B i r c h J. G. Numerical factors: a theorem.- Mess. Math., 22(1892-1893), 52-55.
658. B i r k h o f f G. Current trends in algebra.- Amer. Math. Mon., 1973, 80, №7, 760-782.
659. B i r k h o f f G., M a c L a n e S. A Survey of Modern Algebra (Обзор современной алгебры). New York: Macmillan, 1996.
660. B i s t r i t z Y u v a l. A Cauchy index approach for zero location of polynomials with respect to the unit circle.- Proc. 24th IEEE Conf., vol.2, New York, 1985, 1250-1251.
661. B l a c k b u r n T. R. Solution of the algebraic matrix Riccati equation of the algebraic matrix Riccati equation via Newton-Raphsen iteration.- 9th Joint Automat. Control Conf. Ann Arbor, Mich., 1968, Preprints techn. papers. New York, N.Y., 1968, 940-945.
662. B l a n c h G e r t r u d e. Numerical aspects of Mathes eigenvalues.- Rend Cirodo mat. Palermo, 1966, 15, №1, 51-97.
663. B l a n c h G. Numerical evalutions of continued fractions.- STAM Rev.,1964,№7,383-421
664. B l a s k e t t D. R., S c h w e r d t f e g e r H. A Formula for the Solution of an Arbitrary Analytic Equation (Формула для решения произвольного аналитического уравнения). Quart. Appl. Math., 3, (p. 266-268),
665. B o d e w i g E. Matrix calculus.- Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1954.- 334p.p.
666. B o d e w i g E. On Graefife's Method of Solving Algebraic Equations (О решении алгебраических уравнений методом Греффе). Quart. Appl. Math., **4,** (p. 177-190),
667. B o d e w i g E. On Types of Convergence and on the Behavior of Approximations in the Neighborhood of a Multiple Root of an Equation (О типах сходимости и поведение при-

ближений в окрестности кратного корня уравнения). Quart. Appl. Math., 7, (p. 325-333), 1949.
668. B o d e w i g E. Uber das Eulerische Verfahren zur Auflosung numerischer Gleihungen (О методе Эйлера для решения численных уравнений). Comment. Math. Helv., 8, (S. 1-4), 1935.
669. B o d m e r W. F. A method of evaluating the complex zeros of polynomials using polar coordinates. – Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, 58, №1, 52-56.
670. B o h s e J. Die Berechung der Nullstellen Komplexer Polynome durch eine Potenzreiche. – Frequenz, 1964, 18, №8, 253-265.
671. B o h s e J. Ein analytisch-geometrisches Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen mit reelen Koeffizienten. – Frequenz, 1963, 17, №2, 52-60.
672. B o h s e J. Ein Verfahren zur Berechnung der Nullstellen Komplexer Polynome.- Frequenz, 1963, 17, №9, 343-350.
673. B o i r e l R e n e, S a l l e s F r a n c i s q u e. Un hiatus epistemologiques: mathematiques pures et mathematiques appliquees.- Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1969, 48, №268, 199-208.
674. B o j a n o v B. On an estimation of the roots of algebraic equations.- Zastosow. mat., 1970, 11, №2, 195-205.
675. B o l l e r m a n n W e r n e r. Zur Einschliessung von Eigenwerlen unter Verwendung des Maximun-Minimum. – Prinzips. – Z. angew. Math. und Mech., 1960, 40, №7-8, 342-349.
676. B o m b e l l i R. Algebra (Алгебра). Bolognia, 1572.
677. B o o t h K. H. An investigation into the real roots of certain polynomials. – Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, №47, 184-186.
678. B o r s c h S u p a n W o l f g a n g. Defektabschatzungen fur Polynom – Nullstellen. – Z. angew. Math. und Mech., 1962, 42, Sonderheft, 7-8.
679. B o r s c h - S u p a n W o l f g a n g. Residuenabschatzung für Polynom.- Nallstellen mittels Lagrange Interpolation.- Numer. Math., 1970, 14, №3, 287-296.
680. B o r s c h S u p a n W. Aposteriori error bounds for the zeros of polynomials. – Numer. Math., 1963, 5, 4, 380-398.
681. B o r w e i n P., E r d e y i T. Cubic Equations (Кубические уравнения) in Polynomials and Polynomial Inequalities (в: Полиномы и полиномиальные неравенства). New York, Springer-Verlag, 1995.
682. B o r w i e r D., J o n a t h a n M., B a r r a G. Nested radicals.- Amer. Math. Mon., 1991, 98, №8, 735-739.
683. B o t t e m a O. On the roots of the biquadratic aquation. – Proc. Koninkl. nedert. akad. wetensch., 1956, A59, №4, 407-410.
684. B o u c k a e r t L. P. Introduction aux travaux d’analyse de D.Bernoulli.- In “Die Werke von Daniel Bernoulli, Band 2”, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1983.
685. B r a c h o l d C l a u s. Ein simultanes Verfahren zur Losung algebraischer Gleichungen.- Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1968, 17, №5, 1133.
686. B r a d b u r y W. W., F l e t c h e r R. New iterative methodes for solution of the eigenproblem.- Numer Math., 1966, 9, №3, 259-267.
687. B r a d e a n u D o i n a. O solutie numeric a unei ecuatii algebrice si folosirea ei in aerodinamica.- Stud. Univ. Babes – Bolyai. Ser. mat.-mech., 1972, 17, №1, 83-92(рум.)
688. B r a e s s D., H a d e l e r K. P. Simultaneous inclusion of the zeroes of polynomial.- Numer. Math., 1973, 21, №2, 161-165.
689. B r a m e l l e r A., K o K. L. The application of diakoptic and the escalator method to the solution of very large eigenvalue problems.- Int. J. Numer. Meth. Eng., 1970, 2, №4, 535-549.
690. B r a n d L o u i s. The compamion matrix and its properties. – Amer. Math. Monthly, 1964, 71, 6, 629-634.

691. Brauer Alfred, Rohrbach Hans. Einige Anwendungen der Matrizentheorie auf algebraische Gleichungen.- J. reine und angew. Math., 1969, 236, 10-25.
692. Brenner Ph., Thomee V. On rational approximations of semigroups.- SIAM J. Nummer. Anal.- 1979.-16.-p. 683-694.
693. Brenner Ph., Thomee V. On rational approximations of groups of operations.- I bid.- 1980.- 17.- p.119-125.
694. Brezinski C. History of continued fraction and Pade approximants.- Springer-Verlag, Berlin, 1991.- 547 p.
695. Brezinski C. Survey on convergence acceleration methods in numerical analysis.- Math. Stud., 1978, 46, №1, 28-41.
696. Brioschi F. La soluzione piu generale delle equazioni del 5 grado (Решение общего уравнения степени 5). Annali di Matematica, Ser. II, vol. 1,1867.
697. Brioschi F. Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado (О методе Кронекера решения уравнении пятой степени). Atti Institute Lombardo, vol. 1,1858.
698. Brioschi F. Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado (О решении уравнения пятой степени). Amiali di Matematica, Ser. I., vol. 1, 1858.
699. Brioschi F. Ueber die Auflosung der Gleihungen funften Grades (О решении уравнений пятой степени). Mathematische Annalen, Bd. 13,1878.
700. Broadbent D. T. New methods for the numerical solution of the equations. – Control, 1965, 9, №80, 75-77.
701. Brodetsky S Smeal G. On Graeffe's Method for Complex Roots of Algebraic Equations (О методе Греффе для комплексных корней алгебраических уравнений). Cambridge, Proc. Phil. Soc., 22, (p. 83-87), 1924.
702. Brodlie K. W. On Bairstow’s method for the solution of polynomial equations.- Math. Cpmput., 1975, 29, №131, 816-826.
703. Brooker R .A. The solution of algebraic equations on the EDSAC (Решение алгебраических уравнений на ЭВМ ESDAC). Cambridge, Proc. Roy. Soc., **48,**
704. Brooker R. A., Samner F. H. The method of Lanczos for calculating the characteristic roots and vectors of a real symmetric matrix. – Proc. Instn. Electr. Engrs., 1956, B 103, Suppl. №1, 114-119.
705. Browne E. T. On the Separation Property of the Roots of the Secular Equation (О разделительном свойстве корней векового уравнения). Amer. Journ. Math., **52, (p.** 843-850), 1930.
706. Bryce R. A. Paolo Ruffini and the quintic equation.- Ital. Conv. Cortona, 26-29 apr. 1983, New York, 1986, 169-185.
707. Burnett S. Location of zeros of a complex polynomial.- Linear Algebra and Appl., 1971, 4, №11, 71-76.
708. Burnside William, Panton Arthur. The theory of equation with an introduction to theory of binary algebraic forms. – Vol. 1. 10th ed., Dehli, S.Chund & Co, 1954, -223p.
709. Burnside W. S., Panton A . W. The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms, 2nd ed (Теория уравнений: с введением в теорию бинарных алгебраических форм). London, Green and Co., 1886.
710. Burnside W. S., Panton A. W. The theory of equations. Vol. I and II (Теория уравнений. Т. I и II). 1899-1901.
711. Businger P. A. Reducing a matrix to Hessenberg form.- Math. Comput., 1969, 23, №108, 819-821.
712. BirkhoffG., Mac LaneS. Insolvability of Quintic Equations (Неразрешимость уравнений пятой степени). In A Survey of Modern Л1цоЬг* New lan, 1996.
713. Cahn C. R. Solution of algebraic equations on an analog computer. – Rev. Scient. Instrum., 1956, 27, №10, 856-858.

714. C a j k a J o s e f. Priblizne resent algebraikych rovnic vyssich stupnu. – Sloboproudy obzor., 1958, 19, №4, 9-12.
715. C a j k a J o s e f. Prispervek k pribliznemn reseni algebraickych rovnic tretico a ctvrteho stupne. – Aplikace mat., 1958, 3, №5, 360-370.
716. C a j o r i F. An introduction to the modern theory of equations (Введение в современную теорию уравнений). New York, 1904.
717. C a l d w e l l G e o g e C. A note on the downhill method. – J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, №2, 223-225.
718. C a l v o C a r b o n e l l C a r l o s. Estudios sobre la resolution numerica de ecuacziones de 3, 4 y 5 grado. – Gac. mat., 1955, 7, №1-2, 14-26, 1955, 7, №3-4, 60-78.
719. C a l v o C a r b o n e l l C a r l o s. Serie que du la raiz de unu ecuacion algebraica o transcendente.- Rev. Real. acad. cient. exact., fiz. y natur. Madrid, 1954,48,№4,189-201.
720. C a r d a n o G i r o l a m o. Ars magna sive de rebus algebraicis, liber unus. (Великое искусство или об алгебраических правилах, одна книга) Norimbergae, 1545.
721. C a r d a n o H. Artes magnae seu de regulis algebraitis liber.- 1545.
722. C a r g o G. T., S h i s h a O. Zeros of polynomials and tractional order differences of their coefficients. – J. Math. Analysis and Applic., 1963, 7, №2, 176-182.
723. C a r r a n o F. M. A modified Bairstow method for multiple zeroes of a polynomial.- Math. Comput., 1973, 27, №124, 781-792.
724. C a s t e l l d e A n t o n i o. Determination de vectores u valores propios de una matrix. – In genieria aeronaut y astronaut, 1959, 11, №50, 15-21. (исп.).
725. C a u s e y R. L., G r e g o r y R. T. On Lanczos algorithm for tridiagonilizing matrices. – SIAM Rev., 1961, 3, №4, 322-328.
726. C e l l a O t t o, L e t t i G u n t e r. Power series and zeroes of trinomial equations.- Aequat math., 1992, 43, №1, 94-102.
727. C e r l i e n k o L., D e l o g u G., P i r a s F. Successiori riccorenti lineari del secondo ordine ed alcume loro applicazioni.- Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1983, 27, №2, 111-120.
728. C e s c h i n o F r a n c i s. Sur une adaption de la methode de Graeffe an calcul auto maticue. – C. r. Acad. sci., 1953, 236, №20, 1945-1947.
729. C e s c h i n o F. Sur la resolution des equations par la methode de Lin. – Ann. Soc. scient., Bruxelles, 1953, cep. 1, 67, №2, 77-82.
730. C h a b a n t y C., P i s o t C. Une algorithme pour l’approximation simultanée de deux nombres reels.- Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 206(1938), 1069-1071.
731. C h a k r a b o r t y J. M. Method of Bolzano-Koshi for obtaining the real roots of polynomial and transcendental equations.- J. Instn. Engrs (India) Gen. Engng Div., 1968, 48, №9, Part 3, 238-244.
732. C h a m b e r s L. G A Quadratic Formula for Finding the Root of an Equation (Квадратичная формула для нахождения корня уравнения). Mathematics of Computation, 25, № 114, (305-307), 1971.
733. C h a m b e r s L. G. A quadratic formula for finding the root of at equation.- Math. Comput., 1971, 25, №114, 305-307.
734. C h a o F a n g - h s i u n g. Numerical solution of polynomial equations by Routh’s method.- Scientia sinica, 1966, 15, №3, 289-303.
735. C h a u v e a u L. Sur le calcul des raciones complexes d’une equation algebrique a coefficients reels. – Cables et transm., 1962, 16, №4, 302-306.
736. C h e n C. F., L i n M. H. A generalization of Lin’s method for polynomial factorization.- J. Franklin Inst., 1989, 326, №6, 849-860.
737. C h e n H a n – L i n. The zeroes of rational splines and complex splines.- Math. and Comput. Div. Nume-rical Math. Univ. Trondheim, 1981, №6, 37pp.
738. C h e n W a i - K a i. Comments on: “Flow-graph evaluation of the characteristics polynomial of a matrix by M.M. Milic.”- IEEE Trans. Circuit Theory, 1965, 12, №3, 434-435.

739. C h e n Y u n g – c h a n g. Some iterative processes for computing multiple roots of an equation.- Numer. Math., 1980, 2, №2, 81-83.

740. C h o w l a S. On Quintic Equations Soluble by Radicals (Об уравнениях пятой степени, разрешимых в радикалах). Math. Student, 13, 1945.

741. C h r i s t e l l e r S i l v i n. Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren.- Z. angew. Math. und Phys.,1959,10, №5,525-527.

742. C h r i s t e n s en B. D. Diskussion and solution of the cubic equation (Обсуждение н решение кубического уравнения). Acta Polytechnica Scandimivicn, Appl, MullWflli And Computing Machinery series, vol. 1, № 4,1957.

743. C l a e s s e n s G., L o i z o u G., W o y t a c k L. Scientific notes comments on a root finding method using Pade approximation.- BIT, 1977, 17, №3, 360-363.

744. C l a i r a u t A. C. Elements dAlgebre (Начала алгебры). Paris, 1746.

745. C l e r c D. Sur la programmation du calcul des valeurs propres.- III Congr. calcul et traitement inform. AFCALTI, Toulouse, 1963, Paris, 1965, 131-135.

746. C o b l e A. B. The Reduction of the Sextic Equation to the Valentiner Form-Problem (Сведение уравнения шестой степени к форме проблемы Валентинера). Math. Ann., 70, (p. 337-350), 1911.

747. C o b l e A. B. An Application of Moor's Cross-Ratio Group to the Solution of the Sextic Equation (Применение группы поперечных соотношений Мура к решению уравнения шестой степени). Trans. Amer. Math. Soc., 12, (p. 311-325), 1911.

748. C o c k l e J. On Transcendental and Algebraic Solution (О трансцендентном и алгебраическом решении). Phil. Mag. 13,1862.

749. C o c k l e J. Sketch of a Theory of Transcendental Roots (Эскиз теории трансцендентных корней). Phil. Mag. 20, 1860.

750. C o l e F. N. A Contribution to the Theory of the General Equation of the Sixth Degree (Вклад в теорию общего уравнения шестой степени). Amer. J. Math., 8, (p. 265-286), 1886.

751. C o l e m a n J. B. A test for the type of irrationality represeted by a periodic ternary continued fractions.- Am. J. Math., 52(1930), 835-842.

752. C o l l a t e L. Iterationsverfahren fur komplexe Nullstellen algebraischer Gleihungen (Итерационный метод нахождения комплексных нулей алгебраических уравнений). Z. angev. Math. undMech., 30, (S. 97-101), 1950.

753. C o l l a t z L o t h a r. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Durchges. Aufl. Leipzig, Acad. verlagsges, Geest and Porting K.-G., 1963, 500s.

754. C o l l a t z L. Numerische and graphische Methoden. – Handbuch der Physik. Bd. 2. Berlin – Göttingen – Heildelberg, Springer, 1955, s. 349-470.

755. C o l l i n s G. B., L o o s R. Real zeroes of polynomials.- Comput., 1982, №4, 83-94.

756. C o m o c k A. E, H u g h e s J. M. The Evaluation of the Complex Roots of Algebraic Equations (Оценка комплексных корней алгебраических уравнений). Phil. Mag., (7), 34, (p. 314-320), 1943.

757. C o o k E r b e n. Approximating the zeros of the polynomials. – Math. Mag., 1962, 35, №3, 165-172.

758. C o p p e l W i l l i a m A n d r e w. The solution of cubic equations by iteration.- Z. angew. Math. and Phys., 1958, 9a, №4, 380-383.

759. C o s t a b e l P i e r r e. Une lettre inedite du marquis de L’Hoputal sur la resolution de l’equation du troisieme degre.- Rev. histoire sci., 1965, 18, №1, 29-43.

760. C o x M. G. A bracketing technique for computing a zero of a function.- Comput. J., 1970, 13, №1, 101-102.

761. C o x M. G. A note on Chamber’s method for finfing a zero of a function.- Math. Comput., 1972, 26, №119, 749-750.

762. C r i t c h f l e l d C. L., B e c k J. Jr. A Method for Finding Roots of the Equation f(x) = 0 Where f is Analytic (Метод для нахождения корней уравнения f(x) = 0, где f— аналитическая функция). J. Research Nat. Bur. Stand., 14, (p. 595-600), 1935.
763. C r o n v i c h L. L. On the GraefFe Method of Solution of Equations (О методе Греффе решения уравнений). Amer. Math. Monthly, 46, (p. 185-190), 1939.
764. C s o n t o J u l i u s, S p a l J i n d f i c h. Numeriscie Losung algebraischer Gleichungen mittels Anwendung eines Warzelortverfahrens.- Apl. mat., 1972, №2, 113-123.
765. C u l l a m J. The simultaneous computation of a few of the algebraically largest and smallest eigenvalues of a large, sprace, symmetric matrix.- BIT, 1978, 18, №3, 265-275.
766. D ' E v a n t A l e s s a n d r o. Risoluzi ne gradica di equazioni. – Riv. mecc., 1953, 4, №76, 7-13.
767. D a h l q u i s t G e r m u n d. Convergence and stability in the numerical equations. – Math. scand., 1956, 4, №1, 33-53.
768. D a n i e l J a m e s W. Correcting approximation to multiple roots of polynomials.- Numer. Math., 1966, 9, №1, 99-102.
769. D a t t a B. N. On the Routh-Hurwitz-Fujiwara and Schur-Cohn-Fujiwara theorems for the root-separation problem.- Linear Algebra and Appl., 1978, 22, 235-245.
770. D a t t a B., G o v i l N. K. On the location of the zeroes of a polynomial.- J. Approxim. Theory, 1978, 24, №1, 78-92.
771. D a v i e s M., D a w s o n B. An automate search procedure for finding real zeros.- Numer. Math., 1978, 31, №3, 299-312.
772. D e h n E. Algebraic Equations: An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois (Алгебраические уравнения: введение в теории Лагранжа и Галуа). Dover Publ., 2004.
773. D e l v e s L. M., M u s a F. A. On a class non-singular matrices.- Util. Math., 1976, 10, 241-258.
774. D e r r J o h n I. A unified process for the evaluation of the zeros of polynomials over the complex number field. – Math. Tables and Other Aids Comput, 1991,13,№65,29-36.
775. D e r w i d u e L. Sur la localisation des zeros des polynomes a coefficients complexes. – Mathesis, 1959, 68, №1-3, 13-23.
776. D e r w i d u e L. Une methode par separation de calcul des racines complexes des equation algebriques. – Mathesis, 1957, 66, №10, 354-359.
777. D i l e n a G. Un teorema di punto unito orientato al calcolo degli zeri di una funzione.- Calcolo, 1980, 17, №1, 31-40.
778. D i l e n a G., T r i g i a n t e D. Metodo di Euler e ricerca delle radici di una equazine.- Calcolo, 1976, 13, №4, 377-396.
779. D i c k s o n L. E. Elementary Theory of Equations (Элементарной теории New York: Wiley, 1914
780. D i c s o n J. D. H. The numerical calculation of a class of determinants and continued fraction.- Proc. Lond. Math. Soc., 10 (1887), 226-228.
781. D i m i t o S. Su un antico metodo per la ricerca delle radici razionali delle equazioni a coefficienti razionali.- Archimede, 1977, 29, №2, 82-91.
782. D i m s d a l e B. On Bernulli's Method for Solving Algebraic Equations (О методе Бернулли решения алгебраических уравнений). Quart. Appl. Math., 6, (p. 77-81), 1948.
783. D i n g h a s A l e x a n d r e. Sur un theoreme de Schur concernant les racines d'une class des equations algebriques. – Kgl. norske videnskab. selscabs forhand, 1952, 25, №5, 17-20.
784. D i x o n J. D. Polynomials with real roots. – Canad. Math. Bull., 1962, 5, №3, 259-263.
785. D o b r z y c k i S. On the geometry of the zeros of polynomials.- Prace Mat., 1956, 2, 94-116.
786. D o m b C. On iterative solutions of algebraic equations (Об итеративных решениях алгебраических уравнений). Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 45, part 2, (p. 237-240), 1949.

787. D o r d e v i c L. N. An iterative solution of algebraic equatioons with a parameter to accelerate convergence.- Publ. Elektrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i Fiz., 1973, №412-460, 179-182.
788. D ö r i n g B o r o. Uber Nullstellen von speziellen Funktionen.- Wiss. Z. Tech. Hochsch. Karl-Marx-Stadt, 1969, 11, №3, 273-274.
789. D ö r r i e H e i n r i c h. Praktische Algebra.- München, R.Oldenbourg,1955,VIII, 259s.
790. D o w e l l M., J a r a t t P. The “pegasus” method for computing the root of an equation.- BIT, 1972, 12, №4, 503-508.
791. D o w e l l M., J a r r a t P. A modified Regula Falsi method for computing the root of an equation.- BIT, 1971, 11, №2, 168-174.
792. D o y l e P., M c M u l l e n C., Solving the quintic by iteration.- Acta math., 1989, 163, №3-4, 151-180.
793. D r o c i u k R. J. On the Complete Solution to the Most General Fifth Degree Polynomial (О полном решении наиболее общего полинома пятой степени), http:// aixiv.org/abs/math.GM/0005026/, May 2000.
794. D r o c i u k R. J. On the Root Ambiguity in the Complete Solution to the Most General Fifth Degree Polynomial (О неопределенности корня в полном решении для наиболее общего полинома пятой степени). http://www.arXiv.math/0207258vl, 2002.
795. D u m m i t D. S. Solving Solvable Quintics (Решение разрешимых уравнений пятой степени). Math. Comput. 57,1991.
796. D u n h a m W. Cardano and the Solution of the Cubic Equation (Кардано и решение кубического уравнения). Chap. 6 in «Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics», (133-154). (Гл. 6, в кн. «Обзор гениальных идей: Великие теоремы математики »). New York, Wiley, 1990.
797. D u p o r t J e a n – P i e r r e. Sur quelques applications des conditions d’analycite an calcul sur machine des racines d’un polynome.- Ann. Cent. enseign. super. Chambery, 1969, №7, 167-192.
798. D u r a n d E. Solutions numeriques des equations algebraiques. t. 1. Equations dy type $F(x)=0$ racines d’un polynome.- Paris, Masson et Cei, 1960, 327p.
799. D u r a n d E. Solutions numeriques des equations algebriques. T. 2. Systemes de plusieurs equations. Valeurs propres des matrices. Paris, Masson et Cie, 1961, VIII, 445p.
800. D u r a n d J., B o u r g u i g n n o n M. Methode de calcul approche des racines de l’equation du 3e degre dans le cas de trois racines reelles. – Rev. Secret. gen. Aviat civile, 1961, №111, 76-81.
801. D u s s a n d R e n e, D u p o r t J e a n-P i e r r e. Sur une methode de localisation des zeros d’un polynome dans le plan complexe.- C. r. Acad. sci., 1971, 272, №18, A1195-A1197.
802. D u s s a n d R e n e. Sur les criteres de stabilite des racines d’une equazion algebrique. – C. r. Acad. sci., 1965, 200, №15, 4140-4142.
803. D u s s a n d R e n e. Sur les singularites relatives a la methode de Bairstow classique on generalisee.- C.r. Acad. sci., 1965, 260, №21, 5449-5458.
804. D u s s a n d R e n e. Sur une generalisation de la methode de Bairstow. – C. r. Acad. sci., 1964, 258, №20, 4907-4909.
805. D u s s a n d R. Reduites d’une base d’un corps d’extension reel.- Publ. Cent. rech. math. pures, 1982, ser 1, №17, 17-18.
806. D u s s a u d R e n e. Generalisation des formules de Bairstow et etude des criteres de stabilite. These doct. sci. Fac. sci. Toulouse, 1965. Lyon. s.a. , 202p.
807. D u t k a J. On square roots and their representations.- Arch. Hist. Exact. Sci., 1986, 36, №1, 21-39.
808. D v o r c u k J o s e f. Factorization of polynomial into quadratic factors by newton method.- Aplikace mat., 1968, 12, №5, 349-368.

809. D y e r C. C. A modified Muller routine for finding the zeroes of a non-analytic complex function.- J. Comput. Phys., 1984, 53, №3, 530-534.
810. D y f f i n R. J. Algorithms for locating roots of a polynomial and the Pisot-Vijayaraghavan numbers.- Pacif J. Math., 1978, 74, №1, 47-56.
811. E h r l i c h L. W. A modified Newton method for polynomials.- Communs ACM, 1967, №2, 107-108.
812. E i s e n b e r g L a w r e n c e. A new method for finding exact and approximate roots polynomials with applications to servomechanisms. – Proc. Nat. Electron. Conf. Vol. 20., Chicago, III, 1964, 522-524.
813. E i s e n b e r g L a w r e n c e. Approximate roots of n-th order polynomials.- Proc. Nat. Electron Conf. vol. 21, Chicago, III, 1965, 720-723.
814. E i s e n b e r g L a w r e n c e. A graphical method fo finding the real roots of *n*-order polynomials.- IEEE Trans. Automat. Control, 1967, 12, №5, 629-631.
815. E l l e n b e r g K e n n e t h W. On programming the numerical solution of polynomial equations. – Communs Assoc. Comput. Math, 1960, 3, №12, 644-647.
816. E l l i s G. H., W a t s o n L. T. A paralled algorithm for simple roots of polynomials.- Comput. and Math., 1984, 10, №2, 107-121.
817. E l s n e r L u d w i g. Iterative Verfahren zur Lösung der Matrizengleichung x^2-A=0.- Bul. Inst. politehn. Iasi, 1970, 16, №3-4, 1/15-1/24.
818. E l s n e r L. Minimale Gerschgorin-Kreise.- Z. angew. Math. und Mech., 1968, 48, №1,51-55.
819. E n g e l s H. Ein modifiziertes vorzeichenrichtiges Graeffe-Verfahren.- Elektron. Datenverarb, 1969, 11, №2, 93-100.
820. E r d o s P a u l, O f f o r d A. C. On the number of real of a random algebraic equation. – Proc. London Math. Soc., 1956, 6, №21, 139-160.
821. E r i k s e n O., S t a u n s t r u p J. Concurrent algorithms for root searching.- Acta Inf., 1983, 8, №4, 361-376.
822. E s p e l i d T. O. On the behavior of the secant method near a multiple root.- BIT, 1972, 12, №1, 112-115.
823. E u l e r L. De fractionibus continuis dissertatio.- Comm. Acad. Petropol., t.9, (1737), 1744, pp. 98-137.
824. E v e l e i g h W i r g i l W. A gradient interpretation of Bairstow's method for factoring polynomial equations.- Proc. 4th Haw. Int. Cont. Syst. Sci. Honolulu, Haw. 1971, North Hollywood, Calif., 1971, 149-151.
825. F a r a g o T. Ein elementares Verfahren zur annahernden Bestimmung der reelen Warzeln algebraischer Gleichungen. – Period. polytechn. Electr. Engn., 1963,7,№3,197-208.
826. F a r a g o T. Untersuchung aus dem Kreis der Polynome mit einer und mehreren Veranderlichen. – Period. polytechn. Electr. Engng., 1964, 8, №2, 193-206.
827. F a r i n h a J o a o. Sur les limites des zeros d'um polynome. Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. G. Mat., 1954, (2)3, 181-186.
828. F a r m e r M. P., L o i z o n G. A. A class of iteratioon functioons for improving, simultaneously, approximations to the zeros of a polynomial.-BIT,1975,15,№3,250-258.
829. F a u c e t t e W. M. A Geometric Interpretation of the Solution I Polnomial (Геометрическая интерпретация решения общего полинома четвертой степени). Amer. Math. Monthly, 103, 1996.
830. F e r e n t i n o u - N i c o l a c o p o u l o u. Une methode nouvelle pour la majoration et pour la minoration dae valeurs absolues des zeros des polenomes, extension au cas des zeros des series de Taylor. – Практика тис академиас Афинон, 1962, 37, 192-199.
831. F e t c o v i c M., S t e f a n o v i c L. V. On some iteration function for the simultaneous computation of multiple complex polynomial zeroes.- BIT, 1987, 27,№1,111-122.
832. F e t t i s H e n r y E., C a s l i n J a m e s C. Eigenvalues and eigenvectors of Hilbert matrices of order 3 through 10.- Numer. Math. Comput., 1967, 21, №99, 431-441.

833. F i a l a J i f i. Zeroes of orthogonal polynomials by QD-algorithm.- Aplicace mat., 1969, 14, №3, 210-219.
834. F i e d l e r M i r o s l a. Numerichke reseni algobraickych rovnic, ktere maji koreny o skoro stejne absolutni hodnote. – Apl. mat., 1956, 1, №1, 4-22.
835. F i e d l e r M i r o s l a. Numericke resini algebraickych rovnic Bernoulli-Whittakerovou methidou. – Aplikace mat., 1957, 2, №4, 321-326.
836. F i e d l e r M i r o s l a. O zobecnene Graffeho methode a jeji modifikaci. – Casop. pestov mat, 1963, 88, №2, 194-199. (чешск.).
837. F i e d l e r M i r o s l a. Uber dus Graffesche.- Чехосл. матем. ж., 1955,5,№4,506-546.
838. F i l i p p i S i e g f i e l d. Das Verfahren von Bairstow.- Prax. Math., 1967,9,№2,33-37.
839. F i l i p p i S. Das Verfahren von Bairstow. – Z. Mat. Rechentechn. und Automat, 1964, 11, №1, 12-16.
840. F i s c h e r H. Eine Methode zur Einschliessung der Nullstellen von Polynomen mit komplexen Koeffizienten.- Computing, 1969, 4, №2, 125-138.
841. F l a n a g a n C z e r n o, M a x f i e l d J. E. Estimates of the roots of certain polynomials. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, №4, 367-373.
842. F o c h A. Methode de Lin Pour la resolution des equations numeriques. – Rev. math. spec., 1965-1966.
843. F o r s y t h e G e o r g e E. Solving linear algebraic equations can be interesting.- Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, №4, 299-329.
844. F o r s y t h e G. E. Solving algebraic equations can be interesting (Решение алгебраических уравнений может быть ингересньм). Bull. Amer. Math. Soc., 59, (299-329), 1953
845. F o s t e r L. V. Generalization of Laguere's method: Higher orther methods.- SIAM J. Numer. Anal., 1981, 18, №6, 1004-1018.
846. F o u r i e r J. B. J. Analise des equations determinees (Анализ определенных уравнений). Paris, 1831.
847. F o x A. J., J o h n s o n F. A. On finding the eigen values of real symmetric tridiagonal matrices.- Comput. J., 1966, 9, 01, 98-105.
848. F o x L., H a y e s L i n d a. Polynomial factorization and the Q-D algoritm.- Linear Algebra and Applic, 1968, 1, №3, 445-463.
849. F r a m e J. S. The solution of equations by continued fractions. – Amer. Math. Monthly, 1953, 60, №5, 293-305.
850. F r a n k E v e l y n. A note on certain determinantal equations. – Math. Nac., 1958, 19, №1-6, 182-185.
851. F r a n k E v e l y n. Computer use in comtinued fraction expansions.- Math. Comput, 1969, 23, №106, 429-436.
852. F r a n k E v e l y n. On the calculation of the roots of equations. – J. Math. and Phys., 1955, 34, №3, 187-197.
853. F r a n k E v e l y n. On the determination of the roots of equations. – Proc. Internat. Cougr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 104-105.
854. F r a n k E. On the numerical solution of certain applied problems.- Z. angew. Math. and Mech., 1978, 58, №6, T101-T102.
855. F r a n k E. Continued fraction expansions for *k*-th roots.- Z. angew Math. und Mech., 1980, 60, №7, 289-291.
856. F r a n k E. On the calculation of the roots of equations (О вычислении корней уравнений). Math. And Phys., **34,** № 3, (p. 187-197), 1955.
857. F r a n k W e r n e r L. Computing eigenvalues of complex matrices by determinant evaluation and by methods of Danilewski and Wieland.- I. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, №4, 378-392.
858. F r a n k W e r n e r L. Finding zeros of arbitrary functions. – I. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, №2, 154-160.

859. F r a n k e F r e i d r i c h. Nahrungweise Berechnung von Wurzeln durch Polynomquotienten. – Jenear Jahrb., 1959, Teil 2. Jena, 1960, 480-495.
860. F r a z e r R. A., Duncan W. J. On the Numerical Solution of Equations with Complex Roots (О численном решении уравнений с комплексными корнями). London, Proc. Roy. Soc., A125, (p. 68-82), 1929.
861. F r e e m a n T. L. A method for computing on the zeros of a polynomial with real coefficients.- BIT, 1979, 19, №3, 321-333.
862. F r e e m a n T. L., B a n e M. K. Asynchronous polynomial zero-finding algorithms.- Parallel Comput., 1991, 17, №6-7, 673-681.
863. F r e u d R. Sind Gliechungen lösbar.- Grosse Augenblicke Gesch. Math., Budapest, 1990, 51-80.
864. F r i e d m a n B. Note on approximating complex zeros of a polynomials (Замечание по аппроксимации комплексных нулей полиномов). Comm. Pure Appl. Math.,
865. F r i e d r i c h H. Zur Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedener Warzeln von algebraischen Gleichungen.- Rostoc. Math. Kolloq., 1980, №15, 71-76.
866. F r i t s c h e r O. Berehnung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen als Erganzung der Methode von Graeffe. – Osterr. Ingr.-Arch., 1960, 14, №1, 68-75.
867. F r ö b e r g C a r l – E r i c. Numerisk analys. Lund, 1959, 160s. (шведск.).
868. F r o m e r A., S t r a u b W. Error-bounds for zeroes of polynomials using complex circular arithmetic.- Computing, 1988, 40, №3, 273-280.
869. F r y Th. C. Some numerical methods for locating roots of polynomials (Некоторые численные методы локализации корней полиномов). Quart. Appl. Math., 3, (p. 89-105), 1945.
870. F u r s t e n a u E. Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginaren Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coeffizienten (Новый метод для определения и вычисления мнимых корней алгебраических уравнений при помощи детерминантов коэффициентов). Marbuig, Ges. Bef. Ges. Naturw., 9, (19—48), 1860.
871. F ü r s t e n a u E. Über Kettenbrüche höherer Ordnung, Jahrebericht über das Königliche Realgymnasium zu Wieshaden.- 1874.
872. G a b l e r W. Entry areas for Pairs of roots using Bairstow's method.- Z. angew. Math. und Mech., 1969, 49, №4, 249-250.
873. G a l a n t a i A. Megjgyzesek algebraic egyen letek Kozelito megoldasahoz.- Alkalm. mat. lapok, 1976, 2, №1-2, 115-122.
874. G a l a n t a i A. The comparison of numerical methods for solving polynomial equations.- Math. Comput., 1978, 32, №142, 391-397.
875. G a l e o r e L. Generalizzazione del metodo di Laguerre.- Calcolo, 1977, №2, 121-131.
876. G a o T a n g a n, Y i Y a n c h u n. Computational complexity of *KNA* algorothm locating all zeroes.- Acta sci. natur. Univ. sutyatseni natur. Sci., 1992, 31, №3, 120-123.
877. G a r g a n t i n i I. Futher applications of circular arithmetic: Schroedelike alforithms with error bounds for finding zeros of polynomials.- SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, №3, 497-510.
878. G a r g a n t i n i I. Parallel Laguerre iterations: the complex case.- Numer. Math., 1976, 26, №3, 317-323.
879. G a r i G. The complexty of solving polynomial equations.- J. Assoc. Comput. Math., 1983, 30, №3, 637-640.
880. G a r s i d e G. R., J a r r a t P., M a c k C. A new method for solving polynomial equations.- Comput. J., 1968, 11, №1, 87-90.
881. G a s c a G o n z a l e s. Un criterio sobre el numero exacto de raices simples de una ecuacion algebraica.- Publs. Semin. mat. Garcia Galdeano, 1969, №10, 117120(исп.)
882. G a u d f e r n a u L. Possibilities, limites et precissiones des methodes usuelles de resolution des equations algebraiques. – Premier. Congr. Assoc. franc. calcul. Grenoble, 1960, Paris, 1961, 107-116.

883. G a u s s K. F. Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus re- solvi posse (Новое доказательство теоремы, что всякая алгебраическая рациональная целая функция одного переменного может быть разложена на вещественные сомножители первой или второй степени). Helmstedt, 1799.
884. G a u t s c h i W. Computational aspects of three-term recurrence relations.- SIAM Review, 1967, v. 9, p.24-82.
885. G a u t s c h i W. Families of algebraic test equations.- Calcolo, 1979,16, №4, 383-398.
886. G e l l a i B o r b a l a. Polinomik gyokeinek meghatarozasa.- Kozp. fiz. kut. intez., 1971, №6, 131.
887. G e r i c k e H e l m u t h. Miszellen aus der Geschichte der Algebra. Rechenpfennige. Festschr. Kurt Vogel, Munchen, 1968, 7-29.
888. G e r l a c h W. Modifikation eines Verfahrens zur simultanen Berechnung von zwei Nullstellen einer Funktion einer reelen Veranderlichen.- Rostok Math. Kolloq., 1981, №18, 79-87.
889. G e r o n i m o S t e f a n o. Risoluzione numerica approssimata della equazioni di 3^o grado.- Achimede, 1971, 23, №3-4, 138-147.
890. G e r o n i m u s J. On some problems involuing the persymetric determinants.- Proc. R. Soc. Edinb., 51(1931), 14-18.
891. G e r r i s h F. Common roots of two polynomial equations. – Math. Gaz., 1959, 43, №345, 188-189.
892. G h o s h P. K. Detection and evaluation of a certain type of complex roots by Graefie's root-squaring method. – Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, №1, 43-46.
893. G i g u e r e J. C., R a m a c h a n d r a n V., P e r m a P. K. Use of Routh-Hurwitz algorithm for defer-mining the number of negative real-axis zeros in a given polynomial having real coefficients.- Electron. letters, 1969, 5, №22, 546-547.
894. G i r a r d A. Invention nouvelle en l'algebre (Новое открытие в алгебре). Paris, 1629.
895. G l a s h a n J. C. Notes on the Quintic (Замечание об уравнении пятой степени). Amer. J. Math., 8,1885.
896. G l a t z G. A posteriori – Fehlerschranken insbesondere schlecht konditionierter Polynomwurseln.- Z. angew. Math. und Mech., 1976, 56, №3, Sonderch, 288-299.
897. G l e n i s s o n Y., D e r v i d u e L. Une nouvelle methode de calcul des polynomes et de leurs zeros. – Pubsl. Assoc. ingrs Fac. Polytech. Mons, 1959, №4, 1-8.
898. G l e n i s s o n Y., D e r v i d u e L. Une nouvelle methode de calcul des zeros des polynomes. – Bull. cl. sci. Acad. rog. belg., 1959, 45, №3, 197-204.
899. G l e n i s s o n Y., D e r v i d u e L. Une nouvelle methode de resolution des equations algebraiques et de calcul des polynomes; son application a l'arithmetique. – Publs scient. et techn. Ministere air., 1961, №1, 99, 77-93.
900. G l e n i s s o n Y., D e r v i d u e L. Une nouwelle methode de calcul des polynomes et de leurs zeros. – Publs scient. et techn. Ministere air, 1961, T. 98, 35-50.
901. G l o m b J o h n D. On the approximation of roots of n-th order polynomials. – IRE Trans. Automat. Control., 1960, 5, №4, 331-333.
902. G o l d m a n A. J. Zeros of certain polynomials. – J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, B63, №1, 21-22.
903. G o l i n e l l i M., R u g g i e r o V. Generalizzazione dell'algoritmo di Grau per la valutazione numerica dei moduli degli zeri di un polinomio a coefficienti reali.- Ann. Univ. Ferrara, 1980, sez. 7, 20, 203-212.
904. G o l u b G. H., R o b e r t s o n T. N. A generalized Bairstow algorithm.- Communs ACM, 1967, 10, №6, 371-373.
905. G o n n e r m a n n H. Ein Verfahren zur Auflosung algebraischer Gieichungen 4. Grades. – Regelungstechnik, 1959, 7, №2, 53-56.

906. G o o d m a n T h e o d o r e R. The numerical solution of eigenvalue problems.- Math. Comput., 1965, 19, №91, 462-466.
907. G o r d o n G. Ueber die Auflosung der Gleihungen funften Grades (О решении уравнений пятой степени). Mathematische Annalen, Bd. 13, 1878.
908. G o r e c k i H., T u r o w i c z A. B. Sur le resolution des equations algebraiques par la methode de Euler. – Ann. polon. math., 1962, 12, №2, 185-190.
909. G o r s c h t e i n M. S. Solution of algebraic equations: Complex roots. – Electronics and Radio Engr., 1957, 34, №3, 107-108.
910. G o s h . New methods of approximating to the roots of a numerical equation (Новые методы приближения к корням численного уравнения). Calcutta, Journ. of the Department of Science, vol. VII, 1925.
911. G o u l d H. W. An iterative approximation for finding the n-th root of numbers.- Math. Mag., 1959, 33, №2, 61-69.
912. G r a g g W. B. Matrix interpretations and applications of the continued fraction algorithm.- Rocky Montain J. Math., 1974, v.4, p. 213-225.
913. G r a n t J. A., H i t c h i n s G. D. An always convergent minimization technique for the solution of polynomial equations.- J. Inst. Math. and Appl., 1971, 8, №1, 122-129.
914. G r a n t J. A., H i t c h i n s G. D. The solution of polynomial equations in interval arithmetic.- Comput. J., 1973, 16, №1, 69-72.
915. G r a n t J. A., H i t c h i n s G. D. Two algorithms for the solution of polynomial equations to limiting machine precision.- Comput. J., 1975, 18, №3, 258-264.
916. G r a s s i n i E l e n a. Accoccorgimenti pratici per la utilizzazione del metodo di Bairshow.- Atti Semin. mat. e. fis. Univ. Modema, 1968, 17, 160-171.
917. G r a u A. A On the reduction of number range in the use of the Graeffe process.- J. Assoc. Comput. Mach., 1963, 10, №4, 538-544.
918. G r a u A. A. A Generalization of Bairstow process. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, 11, №2, 508-519.
919. G r e e n M. L. On the Analytic Solution of the Equation of Fifth Degree (Об аналитическом решении уравнения пятой степени). Compos. Math., **37,** (p. 233-241), 1978.
920. G r e e n M. L. On the analytic solution of the equation of fifth degree.- Compos. math., 1978, 37, №3, 233-241.
921. G r e g o r J i r i. Tridiagonal matrices and functions analitic in two halfplanes.- Publ. Math., 1977, 24, №1-2, 11-20.
922. G r e g o r y R o b e r t T. Results using Lanczos' method for finding eigenvalues of arbitrary matrices. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, №2, 182-188.
923. G r o l u b G e n e H. Bounds for eigenvalues of tridiagonal symmetric matrices computed by the LR method. – Math. Comput, 1962, 16, №80, 438-445.
924. G r o s s i o r d D. Sur un algorithme de Laguerre utilisant la notion de saut.- Collog. Internat Centre nat. rech. scient., 1968, №165, 200-204.
925. G u g g e n h e i m e r H. Bounds for roots of algebraic equations.- Arch. Math., 1979,31, №6, 568-569.
926. G u g g e n h e i m e r H. Bounds for roots of algebraic equations. – Amer. Math. Monthly, 1962, 69, №9, 915-916.
927. G u g g e n h e i m e r H. Initial approximations in Durand-Kerner's root finding method.- BIT, 1986, 26, №4, 537-539.
928. G u s t a f s s o n I. Modified incomplete Cholesky (MIC) methods.- Precond. Math. Anal. and Appl., New York e.a., 1983, 265-293.
929. G u Y i – x i. The number of roots of an algebraic equation outside arbitrary circles.- Math. numer. Sin, 1983, 5, №3, 267-269.
930. Gargantini Irene, Henrici Peter. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros.- Numer. Math., 1972, 18, №4, 305-320.

931. H a h n e m a n H. W. Ein graphisches Verfahren zun Bestimmen der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen zweiten bis vierten Grades. – Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1959, 25, №6, 190-195.
932. H a a n g Ch. A high-speed parallel disk iteration for determining all zeros of a polynomial.- J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed., 1991, 18, №3, 259-265.
933. H a a s e K u r t H. A new method to find the roots of a fourth-order equation. – Proc. IRE, 1962, 50, №12, 2510-2511.
934. H a a s e K u r t. A note on the solution of an equation of the order four.- Proc. IEEE, 1968, 56, №2, 240-241.
935. H a d j i d i m o s A., Y e y i o s A. The principle of extrapolation in connction with the accelerated overrelaxation method.- Linear Algebra and Appl., 1980, 30, 115-128.
936. H a h n W. Uber Zusammenhange zwischen den graphischen und den algebraischen tabilitskriterien. – Z. angew. Math. and Mech., 1955, 35, №3, 119.
937. H a m i l t o n H. J. Roots of Equations by Functional Iteration (Корни уравнений при помощи функциональной итерации). Duce Math. **J., 13, (p.** 123-127), 1946
938. H a m m i n g R. W. Numerical methods for scientist and engeneers. 2nd ed.- New-York, McGraw-Hill, 1973, 721pp.
939. H a n K h w a t T i k, K u i p e r s L. On a proof of the Lucas theorem concernig the zeros of the derivative of a polynomial.- Proc. Koninkl. nederl. acad. wet.,1955,458,№4,435-437.
940. H a n c e n E., P a t r i c k M. A family of root finding methods.- Numer. Math., 1977, 27, №3, 257-269.
941. H a n c e n E., P a t r i c k M. Estimating the multiplicity of a root.- Numer. Math., 1976, 27, №1, 121-131.
942. H a n d s c o m b D. C. Computation of the latent roots of the Hessenberg matrix by Bairstow's method. – Comput. J., 1962, 5, №2, 139-141.
943. H a n s o n R i c h a r d J. Automatic error bounds for real roots of polynomials having interval coefficients.- Comput. J., 1970, 13, №3, 284-288.
944. H a p l M i l o s l a v. Reseni algebraike rovnice ctvrteho stupne.- Aplikace mat., 1959, 4, №6, 463-465.
945. H a r a r y F r a n k. A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues.- J. Math. and Phys., 1959, 38, №2, 104-111.
946. H a r d y G. Divergent series.- Oxford, 1949.
947. H a r l e y R. V. On the theory of the Transcendental Solution of Algebraic Equations (К теории трансцендентного решения алгебраических уравнений). Quart. J. Pure Appl. Math., 5, (p. 337), 1862.
948. H a r l e y R.V. A Contribution to the History of the Problem of the Reduction of the General Equation of the Fifth Degree to a Trinomial Form (Вклад в историю проблемы сведения общего уравнения пятой степени к трехчленной форме). Quart. J. Math. 6, (p. 38-47), 1864.
949. H a r r i o t T. Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas (Применение аналитического искусства к решению алгебраических уравнений). Warner Y., 1631
950. H a s s e H e l m u t. Höhere Algebra. Bd. 2. Gleichungen höheren Grades. 4. durchges. Aufl. – Berlin, de Gruyter, 1958. – 1569.
951. H a u s b r a n d t S t e f a n, S k o r c z y n s k i A l e k s a n d e r. Rozwiazame rownania trzeciego stopnia o wspolczynnikach rzeczywistyh.- Geod. i Kartogr., 1971, 20, №4, 259-281(польск.)
952. H a u s e h o l d e r A. S. Principles of numerical analysis. – N.Y., 1953, -274.
953. H e a d J o s e p h J. Une methode pour l'approximation des plus grands zeros en module d'un polynome. Thes. doct. Fac. sci. Nancy, 1965, s.a., 50p.
954. H e a d J. W. Widening the applicability of Lin's iteration process for determining quadratic factors of polynomials (Расширение применимости итерационного процесса Ли-

на для определения квадратичныхмножителей полиномов) Quart. J. Mech. And Appl. Math., 10, № I. (p. 122 -131), 1957
955. H e a r o n J. Z. Bounds on the roots of polynomial.- Math.Mag.,1976,49, №5, 240-242.
956. H e g l a n d M. On the parallel solution of tridiagonal systems by wrap-around partitioning and incomplite *LU* factorization.- Numer Math., 1991, 59, №5, 453-472.
957. H e i g e l F r a n z. Einige Schranken für die Absolutbeträge der wurseln algebraischer Gleichungen. – Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, №7-8, 267.
958. H e i g e l F r a n z. Einige Schranken fur die Absoluthetrage der Wurzeln algebraischer Gleichungen. – Monatsh. Math., 1959, 63, №3, 287-297.
959. H e i g el F r a n z. Neuere Entwicklungen in der Polynome. – Jaresber. Dtsch. Math. – Ver., 1963, 65, №3, 97-102.
960. H e i g l F. Uber die Abschatzung der Wurzeln algebraischen Gleichung (Об оценке корней алгебраических уравнений). Monatshefte fur Mathem., B. 62, (16-55), 1958.
961. H e i l e r m a n n J. B. H. Independente Berechung der Sturm'schen Reste.- J. Reine Angew. Math., 43(1852), 196-206.
962. H e i n d e l L. E. Integer arithmetic algorithms for polynomial real zero determination.- J. Assoc. Comput. Math., 1971, 18, №4, 533-548.
963. H e i n n i n g G., J u n g n i c k e l U. On the Bezoutian and root localization for polynomials.- Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx.- Stadt., 1985, 27, №1, 62-65.
964. H e i n r i c h H e l m u t. Ein inverse Eigenwertprohlen fur endliche Matrizen und seine graphishe Lösung fur $n=3$. – Z. angew. Math. und Mech., 1960, 40, №1-3, 62-64.
965. H e j h a l D. A. Zeroes of Epstein zeta functions and supercomputers.- Proc. Int. Congr. Math., Berkeley,Calif., Aug,3-11, 1986. vol 2, Providence, R.L., 1987, 1362-1384.
966. H e l l i n g e r E., T o e p l i t z O. Integralgleicnungen und Gleicnungen mit unendlichvielen Ubekannten.- 1335-1616p. Chelsea Publishing Co., New York, 1953.
967. H e l l m a n M o r t o n J. The insolvability of the quintic re-examined. – Amer. Math. Monthly, 1959, 66, №5, 410.
968. H e n r i c i P e t e r. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros.- Lect. Notes Math., 1971, 228, 86-92.
969. H e n r i c i P e t e r. Methods of search for solving polinomial equations.- J. Assoc. Comput. Mach., 1970, 17, №2, 273-283.
970. H e n r i c i P e t e r. Upper bounds for the abscissa of stability of a stable polynomial.- SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7, №4, 538-544.
971. H e n r i c i P. Applied and Computational Complex Analisis. Vol. 2. Special Functions, Integral Transforms, Assymptotics and Continued Fractions.-New York:Wiley,1977.-662 p.
972. H e n r i c i P., W a t k i n s B r u c e O. Finding zeros of polynomial by the Q-D algorithm.- Communs. Assoc. Comput. Mach., 1965, 8, №9, №570-574.
973. H e n r i c i P., W a t k i n s B. O. Finding zeros of polynomial by the QD-algorithm.- Comm. ACM. 1965, v. 8. p. 570-574.
974. H e r m i t e Ch. Sur la resolution 1'equation du cinquieme degree (О решении уравнения пятой степени). Paris, C. R. Acad. Sci., vol. 46,1858.
975. H e r m i t e Ch. Sur l'equationdu cinquieme degree (Об уравнении пятой степени). Paris, C. R. Acad. Sci., vol. 61,1865.
976. H i e n h o l d l . Zur Abschatzung der Wurzeln algebraischen Gleichungen (Оценка корней алгебраических уравнений). Monatshefte fur Mathem., B. 59,1955.
977. H i l d e b r a n d F. B. Note on S.N. Lin's method of factoring polynomials. – J. Math. and Phys., 1953, 32, №2-3, 164-170.
978. H i l d e b r a n d F. B. Note on S. N. Lin's method of factoring polynomials (Замечание о разложении полиномов на множители по методу С. Н. Лина). J. Math. Phys., **32,** № 2-3, (p. 164-170), 1953.
979. H i l de b r a n d F. B. Introduction to numerical analysis (Введение в численный анализ). McGraw Hill, 1956.

980. Hill C. K. On the singly-infinite Hilbert matrix.- J. Londjn Math. Soc., 1960, 35, №1, 17-29.
981. Hines J. On Approximating the Roots of an Equation by Iteration (Приближение корней уравнения при помощи итерации). Math. Mag., **24,** (p. 123-127), 1951.
982. Hinkelmann H. Eine Methode zur Bestimmung alter nullstellen eines Polynoms mit Hilfe eines programmierbaren Tascherechners.- AEU, 1975, 29, №9, 405-406, 408.
983. Hitchcock F.L. Finding Complex Roots of Algebraic Equations (Нахождение комплексных нулей алгебраических уравнений). J. Math. Phys., **17,** (p. 55-58), 1938.
984. Hitotomatu Sin. A method of successive approximation based on the expansion of second order. – Math. japon, 1962, 7, Mag., 31-50.
985. Hofmann J. E. R. Bombelli – Erstentdecker des Imaginären.- Prax. Math., 1972, 14, №9, 225-230.
986. Hofmann R. Kriterium fur das Vorhandensein von Mehriachwurzeln oder einer ungeraden bzw. geraden Anzahl Konjugiert Komplexer Wurzelpaare algebraischer Gliechungen. – Regelungstechnik, 1959, 7, №9, 310-312.
987. Hofmann R. Zur Berechnung der Nullstellen eines reelen Polynoms ohne komplexe Nullstellen.- Z. ungew. Math. und Mech., 1984, 64, №12, 557-558.
988. Holland Joan M. Solving cubic equations numerically by recurrence formulae.- Math. Spectrum, 1972/73, 5, №2, 48-53.
989. Holland J. M. A matrix method for solving cubic equatioons numerically.- Math. Spectrum, 1973-1974, 6, №2, 51-57.
990. Honig Volker. Lösung algebraisher Gleichungen mittels Zirkulaten.- Prax Math., 1972, 14, №12, 309-315.
991. Horner W. G. On improvements in the solution of equations, by continued fractions.- Quart. J. Sci. Arts, 21(1826), 72-79; 22(1827), 67-81.
992. Horvath Jan. Poznamka k niastnostiam realen dvojice polynomov. – Mat.-fyz. casop., 1960, 10, №2, 105-110 (слов.).
993. Hostetter G. H. Using the Routh-Hurwitz test to determine numbers and multiplities of real roots of a polynomial.- IEEE Trans.Curcuits and Syst.,1975,22,№8, 697-698.
994. Householder A. S. Bezoutiants, elimination and localization.- SIAM Rev., 1970, 12, №1, 73-78.
995. Householder A. S. Polynomial Iterations to Roots of Algebraic Equations (Полиномиальные итерации к корням алгебраических уравнений). Proc. Amer. Math. Soc., 2, (p. 718-719), 1951.
996. Householder A. S., Stewart G. W. The numerical factorization of a polynomial.- SIAM Rev., 1971, 13, №1, 38-46.
997. Howland J. L. On some methods for computing the roots of polynomials. – Inform. Process, 1962, Amstedam, N. Holland Publ. Co., 1963, 116-121.
998. Hsu L. C. A few useful modifications of Newton's approximation method of solving real equations. – Math. Student, 1958, 26, №4, 145-153.
999. Huang It – Bau. Root-locus determination of real and complex roots.- Proc. Nat. Electron. Conf. Vol. 20, Chicago, 1964, 525-530.
1000. Hughes Barnabas B. Rhetoric, anyone?- Math. Teacher, 1970, 63, №3, 267-270.
1001. Hulbe A. E. L. Analytische Entdeckungert in der Verwandlungs und Auflosungskunst der hoheren Gleihungen (Аналитические открытия в преобразовании и решении высших уравнений). Stralzund, 1794.
1002. Hummel P. M. Continued fractions and matrices.-Tohoko Math. J., 46 (1940), 340-359.
1003. Hutchinson C. A. On Graeffe's Method for the Numerical Solution of Algebraic Equations (О методе Греффе для численного решения алгебраических уравнений). Amer. Math. Monthly, **42,** (p. 149-161), 1935.
1004. Ifantis E. K., Kouris Ch. B. Lower bounds for the zeros of analytic functioons.- Numer. Math., 1977, 27, №2, 239-247.

1005. I g a r a s h i M a s a o. Zeroes of polynomial and an estimation of its accuracy.- J. Inform. Process., 1982, 5, №3, 172-175.

1006. I l i e f f L j u b o m i r, D o c a v K. Uber methode Newtonsche Iterationen. – Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1963, 12, №1, 117-118.

1007. I n a m d a r M. G. A note on the solution of the cubic equation.- Math. Stud., 1967(1969), 35, №1-4, 199-200.

1008. I s e k i K a n e s i r o o. On the fundamental theorem of algebra. – J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, №2, 129-130.

1009. I s e k i K i y o s h i. On equations $2x^3 + x^2 + A = 0$ from experimental number theory.- Math. jap., 1990, 35, №1, 167-170.

1010. I s e n k r a h e C. Ueber die Anwendung iterirter Funktionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleihungen (О применении итерирующих функций при определении корней алгебраических и трансцендентных уравнений). Mathematische Annalen, 31, (309-317), 1888.

1011. J a c k s o n M a r g a r e t. On cubic equations whose roots are all distinct. – Math. Gaz., 1964, 48, № 336, 387-390.

1012. J a i n M. K., Krishan Radin. Higher order Bairstow method for solving polynomial equation.- Z. angew. Math. und Mech., 1971, 51, №1, 51-52.

1013. J a i n V. K. On the zeroes of a polynomial.- Publ. Inst. math., 1987, 41, 75-77.

1014. J a m e s K. R. Convergence of matrix iterations subject to diagonal dominance.- SIAM J. Numer. Anal., 1973, 10, №3, 478-484.

1015. J a w o r e k K u r t. Losung quadratischer Gleichungen mittels Skalarprodukt.- Prax. Math., 1970, 12, №11, 297-298.

1016. J e h l e H e i n z. Polynom-Nullstellen mit dem Rechenstab. – Prax. Math., 1963, 5, №4, 97-99.

1017. J e n k i n s M. A. Algorithm 493. Zeros of a real polynomial.- ACM Trans. Math. Software, 1975, 1, №2, 178-189.

1018. J e n k i n s M. A., T r a u b J. F. A three-stage algorithm for real polinomials using quadratic iteration.- SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7, №4, 545-566.

1019. J e n k i n s M. A., T r a u b J. F. Principles for testing polynomial zerofinding programms.- ACM TOMS, 1975, 1, №1, p. 26-34.

1020. J o h n s o n E l b e r t, W y l i e C. R. A monographic solution of the quartic. – Amer. Math. Monthly, 1961, 68, 4, №5, 461-464.

1021. J o n e s B., W a l l e r W. G., F e l d m a n A. Root isolation using function values.- BIT, 1978, 18, №3, 311-319.

1022. J o n e s J. Omar Khayyam and a Geometric Solution of the Cubic (Омар Хайям и геометрическое решение кубического уравнения), http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Stadent.Folders/Jones.tae/omar/omarpaper.html

1023. J o n e s W. B. and T h r o n W. J. Continued factions: Analitic theory and applications.- Addison- Wesley, Reading, Mass, 1980.- 428.p.

1024. J o n e s W. B., N j a s t a d O. and T h r o n W. Y. Schur fractions, Perron-Caratheodory fractions and Szego polynomials, a survey.- Lect. Notes. Math, 1986, 1199, 127-158.

1025. J o r d a n G. Traite des substitutions et des equations algebraiques (Исследование подстановок и алгебраических уравнений). Paris, 1870.

1026. J o u b e r t Sur l’quation du sixieme degree (Об уравнении шестой степени). Paris, C. R. Acad. Sci., vol. 64, 1867.

1027. J o y a l A., L e b e l l e G., R a h m a n Q. L. On the location of zeros of polynomials.- Canad. Math. Bull., 1967, 10, №1, 53-63.

1028. J u r k s c h D i e t e r. Ein zur Programmierung geeignet Modifikation des Graeffe-Verfahrens.- Z. angew. Math. und Mech., 1966, 46, №3-4, 161-166,

1029. J u r y E. I. The number of roots of a real polynomial inside or outside the unit sircle using the determinaut method. – IEEE Trans. Automat. Control, 1965, 10, №3, 371-372.

1030. K a a s i k U. Algebraliste vorrandte ligikcurdsest lahendamisest. – Loous ja matem. Tallin, 1959, 134-141.
1031. K a h a n W. Laguerre's method and a circle which contains at least one zero of a polynomial.- SIAM J. Numer. Anal., 1967, 4, №3, 474-482.
1032. K a h o u n V a c l a v, U l r y c h B o h u s. Reseni algebraickych rovnic metodou elekricke analogie.- Slaboproudy obzor, 1967, 28, №11, 676-680.
1033. K a i s e r H e n r y F. A method for determining eigenvalues. – J. Sor. Industr. and Appl. Math., 1964, №1, 12, 238-248.
1034. K a l i n i n a E. A., U t e s h e v A. Y a. Determination of the Number of Roots of a Polynomial Lying in a Given Algebraic Domain.- Linear Algebra and its Applications.- 1933, v. 185, 61-81.
1035. K a l i n s k i S t a n i s l a w. Teoria wyznucnikow.- Krakow, Panstw. Wydun. Nauk, 1954 – 205s.
1036. K a l m a n R. E. Algebraic characterization of polynomials whose zeros lie in certain algebraic domains.- Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1969, 64, №3, 818-823.
1037. K a n e d a Y u k i n, K o n a t a M a s a k i. Paralled algorithm for transformation of symmetric band matrix to tridiagonal form on a ring-shaped processor array.- J. Int. Process., 1983, №4, 242-243. K i n c a i d D. R., O p p e T. C. ITPACK on supercomputers.- Lect. Notes Math., 1983, 1005, 151-161.
1038. K e g e l G u n t e r. On the roots of polynomials defined by reccurence formulae.- Anails Acad. Brasil. Cienc., 1956, 28, №2 , 165-178.
1039. K e l l e n b e r g e r W i l l y. Ein Konvergents Iterationsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms.- Z. angew. Math. und Phys., 1970, 21, №4, 647-651.
1040. K e m m l e r K a r l. Losung algebraischer Gleichungen durch rekurrente Folgen.- Prax. Math., 1964, 6, №11, 289-292.
1041. K e n n e d y E. C. A Note on the Roots of a Cubic (Замечание о корнях кубического уравнения). Amer. Math. Monthly, **40,** 1933.
1042. K e r n e r I m m o O. Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnyng der Nullstellen von Polynomen.- Numer. Math., 1966, 8, №3, 290-294.
1043. K e r n e r I. O. Bemerkungen zur Berechnung der Nullstellen eines Polynoms durch Iterationsformeln in Verbindung mit ihrer Darstellung mittels Lie-Reihen.- Z. angew. Math. und Mech., 1967, 47, №8, 549-550.
1044. K e r s h a w D. *QD* algorithms and algebraic eigenvalue problems.- Linear Algebra and Appl., 1983, 54, 53-75.
1045. K i e p e r t. Auflosung der Gleihungen funften Grades (Решение уравнений пятой(степени). Borchard's J., Bd. 87,1878.
1046. K i n c a i d W. M. Solution of Equations by Interpolation (Решение уравнений при помощи интерполяции). Ann. Math. Stat., **19,** (p. 207-219), 1949.
1047. K i n g R. B., C a n f i e l d E. R. An algorythm for calculating the roots of a general quintic from its coefficients.- J. Math. Phys., 1991, 32, №4, 823-825.
1048. K i n g R. B. Beyond the Quartic Equation (Уравнение степени выше четвертой), Boston, MA: Birkhauser, 1996.
1049. K i n g R. B., CranfieldE. R. An Algorithm for Calculating the Roots of a General Quintic Equation from Its Coefficients (Алгоритм для вычисления корней общего уравнения пятой степени по его коэффициентам). J. Math. Phys. 32, 1991.
1050. K j e l l b e r g G. Two observations on Durand-Kerner's root-finding method.- BII, Dan, 1984, 24, №4, 56-559.
1051. K l a m k i n M. S. A geometric determination of the nature of the roots of the cubic, biquadratic, and quintic equations. – Amer. Math. Monthly, 1954, 61, №5, 340-362.
1052. K l a m k i n M. S., N e w m a n D. J. On the number of distinct zeros of polinomials.- Amer. Math. Monthly, 1959, 66, №6, 494-496.
1053. K l a n P e t r. Estimation of polynomial roots by continued fractions.- Kybernetika, 1985, 21, №6, 457-469.

1054. K l e i n F. Sull' equazioni dell' Icosaedro nella risoluzione delle equazione del quinto grado [per funzione ellittiche] (Об уравнении икосаэдра при решении уравнения пятой степени [для эллиптических функций]). Reale Istituto Lombardo, Ser. II, 10, 1877.
1055. K l e i n F. Ueber die Auflosung der allgemeiner Gleihung 5 und 6 Grades (О решении общего уравнения пятой и шестой степени). J. reine angew. Math., Bd. 129, (S. 151), 1905.
1056. K l e i n F. Ueber die Auflosung gewisser Gleihungen voni sicltdlllWI , (О решении степенных уравнений седьмой и носимой sche Annalen, Bd. 15, 1879.
1057. K l e i n P. Einschlissung von Matrixeigenwerten und Polynomnullstellen dirch kleinste isolierte Gerschgorinkreise.- Numer. Behandl. Eigenwertaufg. Bd.2 Tag., Chusthal, 1978, Basel e.a., 1979, 65-94.
1058. K o d l O t a k a r. Reseni algebraickych rovnic potencnini radami. – Casop. pestov. mat., 1956, 81, №2, 246 (чешск.).
1059. K o f l e r J. Auflosung einer kubischen Gleichung mit Kreis- und Hyperbelfunktionen.- Aristo-Mitt. Ing.- und Hochsch., 1972, №15, 9-15.
1060. K o k o t o v i c P., S i l j a k D. D. Automatic analog solution of algebraic equations and plotting of root loci by generalized Mitrovic method. – IEEE Trans. Applic. and Ind., 1964, 83, №74, 324-328.
1061. K o m a r a I m r i c h. Bounds of the roots of the real polynomial.- Appl. mat., 1987, 32, №1, 9-15.
1062. K o n i g J. Ein allgemeiner Ausdruck fur die ihren absoluten Betrage nach Kleinste Wurzeln der Gleichung n-ten Grades (Одно обобщенное выражение для собственной абсолютной суммы наименьших корней уравнения п-й степени). Ma- thematische Annalen, 9, (530-540), 1876.
1063. K o r g a n o f f A. Methodes de calcul numerique. t. 1. Agebre non lineaire. – Paris, Dunod, 1961, 375p.
1064. K o w a l c z y k B., R a t a j c z a k T. Zastosowanie algorytmu Shaw-Trauba do numerycznego wyznaczania rzeczywistych pierwiastkow wielomianu.- Zesz. nauk. PGdan, 1976, №249, 73-81.
1065. K r a m e r H. Eine Vereinfachung des Verfahrens von Le Verrier-Horst zur Aufstellung des charakteristischen Polynoms einer Matrix.- Z. angew. Math. und Mech., 1965, 45, №5, 297-304.
1066. K r a w c z y k R. Iterationsverfahren zur Bestimung komplexer Nullstellen.- Z. angew. Math. und Mech., 1970, 50, Sonderh., 1-4, 58-61.
1067. K r i s h n a m u r t h y E. V. Solving an algebraic equation high powers of an associated matrix using the Cayley-Hamilton theorem. – Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, 13, №4, 508-512.
1068. K r i s h n a m u r t h y E. V., V e h k a t e s w a r a n H. A parallel Wilf algorithm for complex zeroes of a polynomial.- BIT, 1981, 21, №1, 104-111.
1069. K r i s t i a n s e n G. K. A rootfinder using a nonmonotone rational approximation.- SIAM J. Sci and Statist. Comput., 1985, 6, №1, 118-127.
1070. K r o l i k o w s k a K r y s t y n a. Nowe methodyrozwiazywania rownan szescien-nych.- Zesz. Nauk. Politechn. Lodzk., 1965, №70, 81-80.
1071. K r o n e c k e r L. Zur Theorie der algebraischen Gleihungen (К теории алгебраических уравнений). Monatsberichte der Berliner Akadcmie,1879)
1072. K u h n H a r a l d. Zur lage der Nullstellen von Polynomen.- J. reine und angew. Math., 1968, 233, 103-110.
1073. K u i j l a a r s A r n o B. J. The zeros of Faber polynomials generated by an m-star.- Math. Comput.- 1996, 65, №213, 151-156.
1074. K u i p e r s L. Note on the location of zeros of polynomials.- Simon Stevin, 1956, 31, №2, 61-72.
1075. K u l i k S t e p h e n. On the Laguerre method for separeting the roots of algebraic equations. – Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, №5, 841-843.

1076. K u l i k S t e p h e n. On the solution of algebric equations. – Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, №2, 185-192.
1077. K u l i k S. A method of approximating the complex roots of equations (Метод аппроксимации комплексных корней уравнений). Pacific J. Mathem., 8, № 2, (p. 277-281), 1958.
1078. K u p p u s R o b e r t. Zur Lösung von Gleichungen dritten und hoheren Grades.- Stahlban, 1954, 23, №3, 60-63.
1079. K u r o s c h A. G. Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. Aufl Ubers aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Ver. Wiss, 1960, 35s.
1080. K u s e v i c R a j k o. Prilo iterativnom rjesavanju jednadzbi treceg stepena.- Gradevinar, 1962, 14, №12, 440-441. (серб.).
1081. L a B u d d e C. D o n a l d. Two new classes of algorithms for finding the eigenvalues and eigenvectors of real symmetric materices.- J. Acoss. Comput. Math., 1964, 11, №1, 53-58.
1082. L a a s o n e n P e n t t i. A Ritz method for simultaneous determination of several eigenvalues and eigenvectors of a big matrix. – Suomalais tiedeakat. toimituls, 1959, Sar. A1, №256, 16pp.
1083. L a a s o n e n P e n t t i. Ein überquadratisch Konvergenter iterativer Algorithmus.- Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1969, Sur. AI, №450, 10s.
1084. L a g r a n g e J. L. Reflexions sur la resolution algebraique des equations (Размышления о решении алгебраических уравнений). Nouv. Mem. Ac. Berl., 1771(1773).
1085. L a g r a n g e J. L. Réflexions sur la resolution algebrique des équations.- 1770.
1086. L a g r a n g e J. L. Traite de la resolution des equations numeriques (Трактат о решении численных уравнений). Paris, Duprat, VI, 1797/98.
1087. L a n c a s t e r P. Convergence of the Newton-Raphson method for artitary polynomials. – Math. Gaz., 1964, 48, №365, 291-295.
1088. L a n c e G. N. Numerical methods for high speed computers.- London, Ileffe and Sons Ltd, 1960, 166pp.
1089. L a n c e G. N. The solution of algebraic and transcendental equations on an automatic digital computer (Решение алгебраических и трансцендентных уравнений на автоматическом цифровом компьютере). J. Assoc. Comput. Mach., 6,1959.
1090. L a r k i n F. M. Root finding by divided differences.- Numer. Math., 1981, 37,№1,93-104.
1091. L a u b A. J., M o o r e B. C. Calculation of transmission zeros using QZ technuques.- Proc. IEEE Conf. Decis., New-York, 1977, 789-794.
1092. L a u f e r H e n r y. Finding the N-th root of a number by iteration. – Math. Mag., 1963, 36, №3, 157-162.
1093. L e g r a s J. Precis d'analyse numerique. Paris, Dunod, 1963, 257p.
1094. L e h m e r D. H. A machine method for solving polynomial equations. – J. Assoc. Comput. Machinery, 1961, 8, №2, 151-162.
1095. L e h m e r D. H. The Graeffe Process as Applied to Power Series (Применение процесса Греффе к степенным рядам). MTAC, 1, (p. 273-278), 1945.
1096. L e h t i R a i m o. Eine neue Losungs methode fur die algebraische Gleichung vierten Grades. – Comment. phys.-math. Soc. scient. fennica, 1960 (1961), 25, №4, 1-8.
1097. L e p s c h y A u t o n i o. Un criterio per la determinazione del numero delle radici complesse di una equazione algebrica. – Tecn. Ital., 1963, 28, №5, 267-271.
1098. L e p s c h y A. A new criterion for evaluating the number complex roots of an algebraic equation. – Proc. IRE, 1962, 50, №9, 1981.
1099. L i T i e n – Y i e n. On locating all zeroes of an analitic function within a bounded domain by a revised Delves-Lyness method.- SIM J.Numer Anal.,1983,20,№4, 865-871.
1100. L i n S h i h – n g e. A method for finding roots of algebraic equations (Метод нахождения корней алгебраических уравнений). J. Math. Phys., **22,** (p. 60-77), 1943.
1101. L i n S h i h – n g e. A method of successive approximations of evaluating the real and complex roots of cubic and higher-order equations (Метод последовательных ап-

проксимаций оценивания действительных и комплексных корней уравнений третьей и более высоких степеней). J. Math. Phys., **20,** (p. 231-242), 1941.
1102. L i n n a i n m a n S. Combating the effects of underflow and overflow in determining real roots of polynomials.- SIGNUM Newslett, 1981, 16, №2, 11-16.
1103. L i v i o M. The equation That Couldn't Be Solved (Уравнение, которое нельзя решить). New York: Simon & Schuster, 2006.
1104. L n d y s h ev A. N. Computer solutions of algebraic equations. – Applic. And Ina., 1962, №61, 106-108.
1105. L o c h e r F., S k z i p e d M. An Algorithm for locating all zeros of a real polynomial.- Computing, 1995, 54, №4, 375-395.
1106. L o f t u s M. W. Finding the roots of quadratic equations. – Prod. Engn., 1961, 32, №23, 63-64.
1107. L o k k i O l l i. Lineaaristen yhtaloryhmien ratkaisemisen perusideoista.- Arkhimedes, 1961, №1, 18-39.
1108. L o n d o n D. On the van der Waerden conjecture and zeroes of polynomials.- Linear Algebra and Appl., 1982, №45, 35-41.
1109. L o n g C. A. A note on the geometry of zeros of polynomials.- Math. Mag., 1971, 44, №3, 157-159.
1110. L o r e n t z e n L., W a a d e l a n d H. Continued fractions with applications.- Amsterdam - London - New-York - Tokyo, 1992, 606p.
1111. L o t k i n M a r k. Determination of characteristic value. – Quart. Appl. Math., 1959, 17, №3, 237-224.
1112. L o v e l a c e C., M a s s o n D. Calculation of Regge poles by continued fractions.- Nuova Cim, 1962, 26, 472-484.
1113. L u k e Y. L. Computations of coefficients in the polinomials of Pade approximations by solving systems of linear equations.-J.Comput. and Appl.Math.,1990,6,№3,213-218.
1114. L u k e Y. L., Ufford D. On the Roots of Algebraic Equations (О корнях алгебраических уравнений). J. Math. Phys., **30,** (p. 94-101), 1951.
1115. L u t h a r R. S. Luddhar's method of solving a cubic equation with a ratioonal root.- Two-Year Coll. Math. J., 1980, 11, №2, 107-111.
1116. Libicher Jaroslav. Poznamka k odhadu horni hranice realnych kofenu algeraicke rovnice.- Sb. pr. Ped. fak. Ostrave, 1971, №21, 23-25(чеш.)
1117. M a c k C. Ruoth test function methods for the numerical solution of polynomial equations. – Quart J. Mech. and Appl. Math., 1959, 12, №3, 365-378.
1118. M a c l e n d A. J. Instability in the solution of banded Toeplitz systems.- IEEE Trans. Acoust., Speech. and Signal Process, 1989, 37, №9, 1449-1451.
1119. M a c n e e A l a n B. Polynomial factorization.- IEEE Trans. Circuit Theory, 1967, 14, №3, 338-340.
1120. M a c o n N., B a s k e r v i l l M. On the generation of error in the digital evalution of continued fractions.- J. Assoc. Comp. Mach., 1956, v.3, 199-202.
1121. M a d s e n K a j. A root-finding algorithm based on Newton's method.- BIT, 1973, 13, №1, 71-75.
1122. M a d s e n K., R e i d J. K. FORTRAN subroutines for finding polynomial zeros.- U.K. Atom. Energy Auth. Harnell, 1975, NR 7986, 65pp.
1123. M a e s s G e r h a r d. Iterative Losung linearer Gleichungsysteme.- Nova acta Leopoldina, 1979, 52, №238, 79s.
1124. M a e s s G. Simultane Polynomaufspaltung in Quadratfaktoren.- Rostok Math. Kolloq., 1981, №18, 89-96.
1125. M a g n u s W i l h e l m. Infinite determinants in the theory of Mathieu's and Hill's equations.- Mathematics Research Group, Washington Square College of art and science, New York University, Research Rep., NBR-1, 1953.-37p.

1126. M a g n u s W i l h e l m. Infinite matrices associated with difraction by on aperture.- Quart. Appl. Math., 1953, 11, №1, 77-86.
1127. M a g n u s W. An infinite system of linear equations arising in difraction theory.- N.Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div. Electromagn. Res. Rept., 1955, NEM-80, 19p.
1128. M a l f a t t i G. F. De aequationibus quadrato-cubicus disquisit analytica; Tentativo per la resoluzione delle equazioni di quinto grado (Об аналитическом исследовании квадрат-но-кубических равенств; Попытка решения уравнения пятой степени). Sienna, AttiAccad., 1771-72.
1129. M a n d e l b a u m J o s e p h, S c h i l d A l b e r t. A property of the zeros of a polynomial.- Math. Mag., 1969, 42, №5, 247-248.
1130. M a r a c c h i a S. I sette libri scomparsi di Diofanto.-Arhimede,1975,27,№3-4,240-249.
1131. M a r i k J a n. O polynomech, ktere maji jen realne koreny. – Casop. Pestov. Mat., 1964, 89, №1, 5-9 (чешск.).
1132. M a r j a n o v i c M. M. An iterative method for solving polynomial equations.- Proc. Intern. Symp. Topology and Applic., Budva, 1972, Beograd, 1973, 170-172.
1133. M a r k o v S., K j u r k c h i e v N. A method for solving algebraic equation.- Z. angew. Math. und Mech., 1989, 69, №4, 106-107.
1134. M a r k o v i t c h D. Sur la limite inferieure des modules des zeros des polynomes de deux variables. – Publs. Inst. math., 1961 (1962), 1, 101-107.
1135. M a r t i n R. S., P e t e r s G., W i l k i n s o n J. H. The QR algorithm for real Hessenberg matrices.- Numer. Math., 1970, 14, №3, 219-231.
1136. M a r t i n R. S., R e i n s c h C., W i l k i n s o n J. H. Householder’s tridiagonalization of a symmetric matrix.- Numer. Math. , 1968, 11, №3, 181-185.
1137. M a r t i n R. S., W i l k i n s o n J. H. Similarity reduction of a general matrix to Hessenberg form.- Numer. Math., 12, №5, 349-368.
1138. M a s a i t i s C. Numerical location of zeros. Ordnance Computer Research Report, Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Md. 1957, 4, №1, 26-28.
1139. M a s t a s c u s a E. J., R a v e W. C., T u r n e r B. M. Polynomial factorization using the Routh criterion.- Proc. IEEE, 1971, 59, №9, 1358-1359.
1140. M a t h e w s G. B. Algebraic equations (Алгебраические уравнения). 1915.
1141. M a x f i e l d J o h n E. An iterative scheme for finding the real zeros of certain polynomials. – SIAM Rev., 1960, 2, №2, 148-150.
1142. M c A u l e y V a n A. A method for the real and complex roots a polynomial. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1962, 10, №4, 657-667.
1143. M e j z l i k L a d i s l a v. Riesenie systemov linearnych rovnic priamymi metodami.- Inzen. stavby, 1954, 2, №3, 110-116.
1144. M e l l i n H. J. Resolution de 1'equation algebraique generale a l'aide de la function gamma (Решение общих алгебраических уравнений с помощью гамма функции). C. R. Acad. Sci., Ser. I Math., vol. 172, (658-661), 1921.
1145. M e n d e l s o h n N. S. The computation of complex proper value and vectors of a real matrix with application to polynomials. – Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, №58, 91-94.
1146. M e r z G e r h a r d. Padesche Naherungsbuche und Iterationsverfahren hoherer Ordnung.- Computing, 1968, 3, №3, 165-183.
1147. M i c h a l u p E r i ch. Ecuaciones y su sulucion por iteration e interpolacion.- Bol. Acad. ciens. fiz., mat. y natur, 1967, 27, №74, 72-87.
1148. M i g n o t t e M. Mathematiques pour le calcul formel.- Paris, Presses univ. Fr., 1989, 346c.
1149. M i g n o t t e M. Note sur la methode Bernoulli.- Numer. Math., 1976, 26,№3,325-326.
1150. M i g n o t t e M. Sur la complexite de certain algorithmes on intervient la separation des racines d’un polynome.- Rev. franc. automat. inform., rech. oper. Inform. theor., 1976, 10, №8, 51-55.

1151. M i g n o t t e M., S c h n o r r C. Calcul deterministe des racienes d'un polynome dans un corps fini.- C.r. Acad. sci., 1988, ser I, 306, №12, 467-472.
1152. M i h a j l o v i c B o r i v o j, P e c k a F r a n t i s e k. Primena matematickih spektara na metodu Bernulli-a za iznalazenje korena algebarske jedracine. – Матем. Весн., 1964, Кн. 1, №3, 187-191.
1153. M i h a j l o v i c B o r i v o j. Primena modifikovanih pseudospektara (spectri Mihaila Petrovica) nu metodu Lobacevski-Grefe i izrada prorama na "Algolu 60."- Матем. весн., 1966, 3, №2, 101-104.
1154. M i k o l a j s k a Z. Remarque sur la note de A.B. Turowicz sur l'approximation des racines de nombres positifs. – Ann. polon. math., 1960, 8, №3, 285-289.
1155. M i k u s i n s k i J. Sur La methode d'approximatica de Newton. Ann. polon. math., 1954, 1, №1, 184-194.
1156. M i l l e r D. A. Practical solution of quartic and cubic equations. – Control, 1960, 3, №22, 133-134.
1157. M i l l e r J o h n. On the location of zeros of certain classes of polynomials with applications to numerical analysis.- J. Inst. Math. and Appl., 1971, 8, №3, 397-406.
1158. M i l l i n g t o n G. A note on the solution of the sextic equation. – Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, №3, 357-366.
1159. M i l l i n g t o n G., Sim A.C. Solution of cubics and quartics. – Wireless Engr., 1955, 32, №1, 30.
1160. M i l n – T h o m s o n L. A matrix representation of ascending and descending continued fractions. Proc. Edinburgh. Math. Soc. (2), 3, 1932, 187-200.
1161. M i l n e s H a r o l d W i l l i s. Conditions that the zeros of the polynomial lie in the interval [1-,1], when all zeros are real. – Amer. Monthly, 1963, 70, №7, 746-750.
1162. M i l o v a n n o v i c G. V., P e t c o v i c M. S. Computational efficiency of the simultaneous methods for finding polynomial zeroes: estimation of efficiency.- Numer Math. and Approxim. Theory 2 Conf., Novi Sad, 1985, 83-87.
1163. M i l o v a n o v i c G. V., P e t c o v i c M. S. On some modifications of a third order method for solving eqations.- Publ. Electrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz., 1980, №678-715, 63-67.
1164. M i n k i e w i c z J a n. Sur la resolution approchee de l'equation du cinquieme degre. – Ann. Univ. M. Curie-Scklodowska, 1951-1952, A5, 93-96.
1165. M i s e s R., Pollaczek-Geiringer H. Praktische Verfahren der Gleihungsauflosung (Практический метод решения уравнений). Z. angew. Math. Und Mech., 9, (S. 58-77, 152-164), 1929.
1166. M i t r o v i c D u s a n. Conditions graphiques pour que toutes les racines d'une equation algebrique scient a parties reelles negatives. – C. r. Akad. sci., 1955, 240, №11, 1177-1179.
1167. M i u I. M. Contribution a la theorie des equations algebriques. – Bul. Inst. Politehn. Bucuresti, 1963, 25, №5, 13-27.
1168. M i u I. M. Une nouvelle methode de separation des racines reelies des equations.- Bul. Inst. Politehn. Bucuresti, 1963, 25, №4, 19-30.
1169. M i y a k o d a T s u y a k o. Comprasison of some numerical methods for multiple zeroes of the polynomial.- Technol. Repts Osaka Univ., 1988, 38, March, 1-12.
1170. M o h T. T. On two fundamental theorems for the concept of approximate roots.- J. Math. Soc. Jap., 1982, 34, №4, 637-652.
1171. M o h a m m a d Q. C. On the zeros of polynomials.- Amer. Math. Monthly, 1962, 69, №9, 901-904.
1172. M o h a m m a d Q. G. Location of the zeros of polinomials.- Amer. Math. Mounthly, 1967, 74, №3, 290-292.
1173. M o h a m m a d Q. G. On the zeros of polynomials. – Amer. Math. Monthly, 1965, 72, №1, 35-38.

1174. M o n d B., S h i s h k a O. Zeros of polynomials in several variables and fractional order differences of their coefficients. – J. Res. Nat. Bur. Standards, 1961, B68, №3, 115-118.
1175. M o n s i M., W o l f e M. A. An algorithm for the simultaneous inchision of the real polinomical zeroes.- Appl. Math. and Comput., 1988, 25, №4, 333-346.
1176. M o o r e E. F. A New General Method for Finding Roots of Polynomial Equations (Новый общий метод нахождения корней полиномиальных уравнений). MTAC,
1177. M o o r e J. B. A consistently rapid algorithm for solving polynomial equations.- J. Inst. Math. and Appl., 1975, 17, №1, 99-110.
1178. M o o r e J. B. A convergent algoritm for solving polynomial equations.- J. Assoc. Comput. Mach., 1967, 14, №2, 311-315.
1179. M o r r i s J., Head J.W. Note on Lin's iteration process for the extraction of complex roots of algebraic equations. – Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, 6, 391-397.
1180. M o t t T h o m a s E. A theorem on college algebra. – Amer. Math. Monthly, 1958, 65, №10, 768-769.
1181. M o t t T h o m a s E. Newton's method and multiple roots. – Amer. Math. Monthly, 1957, 64, №9, 635-638.
1182. M o u r r a i l l e J. R. Traite de la resolution des equations en general. P. I. (Трактат о решении любых уравнений, Ч. I). Marseil, Paris, 1768.
1183. M u i r T. Continuants: a new special class of determinants.- Proc. R. Soc. Edinb., 8 (1874), 229-236.
1184. M u l l e n C. Families of rational maps and iterative root-finding algorithms.- Ann. Math., 1987, 125, №3, 467-493.
1185. M u l l e r M. Uber ein Eulerisches Verfahren zur Wurzelberechnung (Об одном методе Эйлера для вычисления корней). Math. Z., 51, (S. 474-496), 1948.
1186. M u l l e r S. M., S c h e e r e r D. A method to parallelize tridiagonal colvers.- Parallel Comput., 1991, 17, №2-3, 181-188.
1187. M u l l e t - D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer (Метод для решения алгебраических уравнений с использованием автоматического компьютера). Math. Tables Aids Comput., **10,** (p. 208-215),
1188. M u n r o W. D. Some iterative methods for determing zeros of functions of a complex variable. – Pacif. J. Math., 1959, 9, №2, 555-566.
1189. M u t a f i a n C. Equations algebriques et theorie de Galois.- Libr. Vuibert, 1980, 264.
1190. N a g a s h i m a Y u j i, A g a r a M a s a h i k o, N a g a s h i m a H i d e y o. Numerical solution for zeroes of a polynomial algebraic equation using stream line on the complex plane.- Res. Repts Kogakuin Univ., 1985, №58, 161-166.
1191. N a g a s h i m a Y u j i, N a g a s h i m a H i d e y o. A numerical solution of an algebraic equation with global convergence property.- Res. Repts. Kogakuin Univ., 1980, №49, 278-286.
1192. N a h m a n J. A. Einige Abshatzungen der Wurzeln algebrischer Gleischungen.- Publ. Elektrotechn. fak. Univ. Boegradu. Ser.-Mat. i fiz., 1973,№412-460, 61-66.
1193. N a t u c c i A. In memoria di Alfredo Capelli. – Period. mat., 1955, 33, №5, 257-275.
1194. N a t u c c i A. Storia della teoria delle equazioni. – Period. mat., 1963, 41, №1, 1-16.
1195. N e t t o E. Ueber einen Algorithmus zur Auglosung numerischer algebraischer Gleichungen (Об одном алгоритме решения числовых алгебраических уравнений). Mathematische Annalen, 29, (141-147), 1887.
1196. N e u m a n n J o h n von. Collected works. Vol.5. Disigh of computers, theory of automats and numerical analysis. Ed. Taub A.H. – Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press, 1963, 784pp.
1197. N e v a n l i n n a R. Einfuhrung in die Algebra und in die Theorie der algebraischen Gleichungen. Basel-Stuttgart, Birkhauser Verl,1965, 218s.
1198. N i c k a l l s R. W. D. A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed (Новый подход к решению кубического уравнения: развитие решения Кардано) The Mathematical Gazette, 77, (354-359), 1993

1199. N i c k a l l s R. W. D., Dye R. The geometry O Геометрия дискриминанта полинома). The Mathematical Gazette, 77, 1996

1200. N i c k e l K a r l. Die numerische Berechnung der Wurzeln eines Polynoms.- Numer. Math., 1966, 9, №1, 80-98.

1201. N i c k e l K. Die vollautomatische Berechnung einer einfachen Nullstelle von $F(t)=0$ einschliesslich einer Fehlerabschatzung.- Computing, 1967, 2, №3, 232-245.

1202. N i c k e l K. Fehlerschranken fur die numerisch herechneten Wurzeln eines Polynoms.- Z. angew. Math. and Mech., 1970, 50, Sonderh. 1-4, 81.

1203. N i n i m i j a S a t a k i. Uber eine numerische Methode zur auflosung der Komplexen Gleichungen.- Ann. Inst. Satist. Math., 1965, 17, №3, 385-398.

1204. N o b l e B e n j a m. Numerical methods. Vol.1. Iteration, programming and algebraic equations.- Edinburgh-London, Oliver and Boyd: New-York, Interscience, 1964, 156pp.

1205. N o r g u e t F r a n c o i s. Formules explicites pour la resolution des systemes de deur equations algebriques a l’aide de fonctions hypergeometriques.- C.r. Acad. sci., 1962, 254, №5, 801-802.

1206. N o r t h o u s e R i c h a r d A. Polynomial factorization.- Int. J. Contr., 1972, 16, №3, 523-528.

1207. N o u r e i n A b d e l – W a r h a b M. Root determination by use of Pade approximant.- BIT, Sver., 1976, 16, №3, 291-297.

1208. N o u r e i n A. W. An improvement on Nourein’s method for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial.- J. Comput. and Appl. Math., 1977, 3, №2, 109-112.

1209. N o u r e i n A. W. An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial.- Int. J. Comput. Math., 1977, 6, №3, 241-252.

1210. O b e r c h k o f f N i k o l a. Sur le theoreme de Hermite et Poulain. – C. r. Acad. sci., 1959, 249, №1, 21-22.

1211. O b e r c h k o f f N i k o l a. Uber die Worzeln von algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten. – Докл. Болгар. АН, 1956, 9, №3, 1-3.

1212. O b e r c h k o f f N i k o l a. Uber die Wurzeln algebraischer Gliechungen mit reellen koeffizienten. – Arch. Math., 1954, 5, №4-6, 506-509.

1213. O b e r c h k o f f N i k o l a. Verteilung und Berechung der Nallstellen reelier Polynome. – Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1963, VIII, 298s.

1214. O c c h i n i L u i z. Beitrag zu Walls Vertahren der getrennten Berechnungvon Real-and Imaginattellen der Nullstellen eines Polynoms. – Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, №3-4, 139-145.

1215. O k a b e J u n – i c h i. On the roots of the equation.- Repts Res. Inst. Appl. Mech., 1953, 2, №7, 150-154.

1216. O l d e n b u r g e r R u f u s. Ein schnelles Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen. Teil I. – Rogelungstechnik, 1956, 4, №10, 261-266.

1217. O l d e n b u r g e r R u f u s. Methods of solution of algebraic equations.- Appl. Mech. Rev., 1969, 22, 10, 1091-1094.

1218. O l v e r F. W. J. The evaluation of zeros of high-degree polynomials (Оценка нулей полиномов высокой степени). Phil. Trans., A244, (p. 385), 1952.

1219. O l v e r F. W.J. Evaluations of zeros of high-degree polynomials (Оценки нулей полиномов высокой степени). London, Trans. Roy. Soc., 224A, (p. 385), 1952

1220. O p i t z G u n t e r. Zum Vergleich von Interrations verfahren zur Gleichung sauflasung. – Z. angew. Math. und Mech., 1961, 41, Sonderheft, 48-40.

1221. O r a i z i H o n a y t o o n, F o s t e r G a r t h. A note on the quotient-difference algorithm.- IEEE Trans. Automat. Control., 1970, 15, №1, 134-135.

1222. O r l o f f C o n s t a n t i n. Mathematisches Spectrum der Wurzeh einer Algebraischen Gleicung. – Proc. Internat. Congr. Mat., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 47.

1223. O r l o f f C o n s t a n t i n. Simplification de la methode de Graffe an moyen dse spectres mathematiques.- Весн. Друшт. матем. и физ. Н.Р. Србиjе, 1956, 8, №1-2, 39-46.

1224. O r l o f f C o n s t a n t i n. Spectre mathimatique des racines d'une equation algebrice. – Весн. Друштна матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, 6, №1-2, 56-62.
1225. O r l o v K. Nouvelle methode spectrale de resolution des equations algebriques.- Матем. весн., 1966, 3, №4, 287-296.
1226. O r s c h o t P. S., v a n V a n s t o n e S. A. On splining sets in block designs and finding roots of polynomials.- Discrete Math., 1990, 84, №1, 71-85.
1227. O r t e g a J. M. On Sturm sequences for tridiagonal matrices. – J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, 7, №3, 260-263.
1228. O s b o r n e H. R. A new method fot the solution of eigenvalue problems. – Comput. J., 1964, 7, №3, 228-232.
1229. O s t e r m a n n F r i t z. Uber die Nullstellen einer kubischen Gleichung. – Prax. Math., 1962, 4, №3, 74-76.
1230. O s t r o v s k i A. M. A theorem on clusters of roots of polynomial equations.- SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7, №4, 567-570.
1231. O s t r o v s k i A. M. Some properties of reduced polynomial equations.- SIAM J. Numer. Anal., 1971, 8, №4, 623-638.
1232. O s t r o w s k i A .M. On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristics roots and vectors. – Arch. Ration Mech. And Analysis, 1959, 3, №4, 325-340.
1233. O s t r o w s k i A l e x a n d e r. Sur relativen Stetigkeit von Wurzeln algebraischer Gleichungen. – Jahresher. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, №3, 98-102.
1234. O s t r o w s k i A l e x a n d r e. Note sur les parties reelles et imiginaires des racines des polynomes.- J. math. pures et appl., 1965, 44, №4, 327-329.
1235. O t a k a v K o d l. Reseni rovnicpotencnimi sadami. – Casop. pestov. mat., 1953, 78, №3, 263.
1236. P a d r e s D a v e. A determinant representation for the classical orthogonal polynomials. – Amer. Math. Monthly, 1960, 67, №7, Part 1, 658-659.
1237. P a i n t e r R i c h a r d J. Extensions of theorems of Ostrowski on the zeros of polynomials. – J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1964, 80, №1, 45-48.
1238. P a i n t e r R i c h a r d J. Note on the theorem of A.Ostrowski.- Math. Nachr., 1967, 35, №1-2, 115-116.
1239. P a n V. Fast and efficient parallel evaluation of the zeroes of polynomial having only real zeroes.- Comput. and Math. Appl., 1989, 17, №11, 1475-1480.
1240. P a n V. Y. On applications of some recent techniques of the design of algebraic algorithms to the sequential and parallel evaluation of the roots of a polynomial.- Comput. and Math. with Appl., 1985, 11, №9, 911-917.
1241. P a r k B o n g – K y u, H i t o t u m a t u S i n. A study on new Muller's method.- Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1987, 23, №4, 667-672.
1242. P a r l e t t B e r e s f o r d. The development and use of methods of LR type. – SIAM Rev., 1964, 6, №3, 275-295.
1243. P a r o d i M a n r i c e. A propos de la Localisation des zeros des polynomes. – C. r. Acad. sci., 1960, 251, №18, 1851-1852.
1244. P a r o d i M a n r i c e. A propos de la methode de Graeffe.- C. r. Acad. sci., 1959, 249, №20, 1999.
1245. P a r o d i M a n r i c e. Application de la methode de chio de developpement d'an determinant, a la localisation des zeros d'un polynome. – C.r. Acad. sci., 1957, 244, №18, 2269-2270.
1246. P a r o d i M a n r i c e. Sur deux equations trinomes.- C. r. Acad. sci., 1959, 248, №2, 171-172.
1247. P a r o d i M a n r i c e. Sur la determimination d'une borne superieure des zeros d'un polynome. – C. r. Acad. sci., 1960, 250, №11, 1954.

1248. P a r o d i M a n r i c e. Sur la localisation dans le plan complexe des racines des equations abeliennes. – C. r. Acad. sci., 1959, 248, №15, 2153-2154.
1249. P a r o d i M a n r i c e. Sur la localisation des racines des equations reciproque. – C. r. Acad. sci., 1959, 248, №7, 902-904.
1250. P a r o d i M a n r i c e. Sur la localisation des racines des equations reciproques. – Bull. sci. math., 1959, 83, №1, 21-23.
1251. P a r o d i M a n r i c e. Sur quatre methodes d'etude des zeros des polynomes. – Bull. sci. math., 1958, 82, №4, 106-107.
1252. P a r o d i M a n r i c e. Un critere d'irreducttibilite des polynomes a coefficients entiers sur le corps des nombres rationnels. – C. r. Acad. sci., 1953, 237, №18, 1057-1059.
1253. P a r o d i M a u r i c e. Sur une methode de calcul des valuers propres de certains matrices.- C.r. Acad. sci., 1965, 261, №17, 3263-3264.
1254. P a r o d i M. Sur les limites des modules des racines des equations algebra iqucH (О границах модулей корней алгебраических уравнений). Bull. Sci. Mftth., 73, (p. 135-144), 1949.
1255. P a s c a l E. Die Dterminanten.- Teubner, Leipzig, 1970.
1256. P a s o u L. Asupra metode Graeffe-Lobacevski de rezdvare a ecuatiilor algebrice.- Inst. politehn. Bucuresti. Ser. transp.-aeron., 1986, 48, 11-17.
1257. P a s q u a l e L u i g i. Le equazione di tezro grado nei quesiti et inventioni diverse di Nicolo Tartaglia. – Period. mat., 1957, 35, №2, 79-93 (итал.).
1258. P a s q u i n i L., T r i g i a n t e D. Numerical methods for simultaneously approaching roots of polynomials.- Trends Theory and Pract. Non-Linear Akad., Amsterdam, 1985, 363-370.
1259. P a s q u i n i L., T r i g i a n t e D. A globally convergent method for simultaneosly finding polynomial roots.- Math. Comput., 1985, 44, №163, 135-149.
1260. P a s s a r e M., T s i k h A. Algebraic equations end hypergeometric series (Алгебраические уравнения и гипергеометрические ряды). The legacy of Niels Henrik Abel, p. 653-672. Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
1261. P a s z k o w s k i S. Optimum choice of initial approximations in interpolation methods of solving equations.- Zast. mat., 1971, 12, №2, 201-216.
1262. P a t r i c k M. L. A highly parallel algorithm for approximating all zeros of a polynomial with only real zeroes.- Communs ACM, 1972, 15, №11, 952-955.
1263. P a t r i c k M. L., S a a r i D. G. A grobally convergent algorithm for determining approximate real zeros of class of functioons.- BIT, 1975, 15, №3, 296-303.
1264. P e l t i e r J e a n. Resolution numerique des equations algebraiques. – Paris, Gauthier-Villars, Eyrolles, 1957, IV, 245p.
1265. P e l t i e r J. Resolutions numerique des equations algebraiques (Численное решение алгебраических уравнений). Paris, 1957.
1266. P e n a A u e r b a c h, L u i s d e l a. Sobre la solucion de ecuaciones algebraicas.- Rev. mexic. fis., 1966, 15, №4, 265-309.
1267. P e r r o n O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II.-Stuttgart:Teubner,1957-524s.
1268. P e t c o v i c M. S. On a generalization of the root iterations for polinomial complex zeroes in circular interval arithmetic.- Computing, 1981, 27, №1, 37-55.
1269. P e t c o v i c M. S. On an iterative method for the simultaneous determination of two adjacent roots of equation $E(x)=0$.- Publ. Electrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz., 1979, №634-677, 82-88.
1270. P e t c o v i c M. S. Some interval methods of the second order for the simultaneous approximation of polynomial roots.- Publ. Electrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz., 1979, №634-677, 75-82.
1271. P e t e r s G., W i l k i n s o n J. H. Practical problems arising in the solution of polynomial equations.- J. Inst. Math. and Appl., 1971, 8, №1, 16-35.

1272. P e t k o v i c M. Iterative methods for simultaneous inclusion of polynomial zeroes.- Lect. Notes Math., 1989.- 263p.
1273. P e t k o v i c M. S. Некоторые оценки для комплексных нулей полиномов.- Зб. рад. Прир.-мат. фак. Унив. Новом Саду, 1984, 14, №2, 123-134.
1274. P e t k o v i c M. S., M i l o v a n o v i c G. V. A note on some improvements of the simultaneous methods for determination of polynomial zeroes.- J. Comput. and Appl. Math., 1983, 9, №1, 65-69.
1275. P e t k o v i c M. S., M i l o v a n o v i c G. V., S t e f a n o v i c L. V. On the convergence order of an accelerated simultaous method for polynomial complex zeroes.- Z. angew. Math. und Mech., 1986, 66, №5, 428-429.
1276. P e t k o v i c M. S., S t e f a n o v i c L. V. Some modified square root iterations for the simultaneous determination of multiple complex zeroes of a polynomial.- Numer. Meth. and Approximat.Theory, Nis, Sept., 26-28, 1984, 19-26.
1277. P e t k o v i c M. S., S t e f a n o v i c L. V. On a second order method for the simultaneous inchision of a polynomial complex zeroes in rectangular arithmetic.-Computing, 1986, 36, №3, 249-261.
1278. P e t k o v i c M., M i l o v a n o v i c G. Computationalefficiency of the simultaneous methods for finding polynomial zeroes: comparison of various algorithms.- Numer. Meth. and Approxim. Theory 2 Conf., Novi Sad, 1985, 89-94.
1279. P e t r i c J o v a n, J o v a n o v i c M i l o v a n, S t a m a t o v i c S r b i s l a v. Algoritam za simultano odredjivanje svih korena algebarskih polimoma.- Naucno-tehn. pregl. INTDI, 1971, 21, №2, 3-10(серб.)
1280. P e t r i c J o v a n, J o v a n o v i c h M i l o v a n, S t a m a t o v i c S r b i s l a v. Algorithm for simulaneous determination of all roots of algebratic polynomial equations.- Мат. весн., 1972, 9, №4, 325-332.
1281. P h a m D., Chinea Monique. Sur une methode d'iteration dans la theorie des equations. – C. r. Acad. sci., 1959, 249, №22, 2262-2264.
1282. P i e r c e L o u i s. Calculation of the eigenvalues of a tridiagonal Hermitian matrix.- J. Math. Phys., 1961, 2, 4, №5, 740-741.
1283. P i e r p o n t J. Zur Geschichte der Gleichung 5 Grades (bis 1858) (К истории уравнения 5-й степени (с 1858 г.)). Monatshefle fur Mathem., 6,1895
1284. P i n k e r t J. R. An exact method for finding the roots of a complex polynomial.- ACM Trans. Math. Software, 1976, 2, №4, 351-363.
1285. P o i n c a r e H. Sur les determinants d'order infini.- Bull. de Soc. math. de France, t. XIII, s. 13.
1286. P o l y a G. Uber das Graeffesche Verfahren (О методе Греффе). Z. Math, und Phys., 63, (S. 578-585), 1915.
1287. P o p o v B. S. Sur un procede de resolution numerique des equations.- Bull. sci. math., 1957, 81, №1, 29-31.
1288. P o p o v i c i u T i b e r i u. Sur la delimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une equation par interpolation lineaire ou quardratique.- Rev. roumaine math. pures et appl., 1968, 13, №1, 75-78.
1289. P o p o v s k i D. B. A note on King's method for finding a bracketed root.- Computing, 1982, 29, №4, 355-359.
1290. P o p o v s k i D. B. On subroutine for root finding.- Infromatica (SERJ),1980,4,№3,23-24.
1291. P o r t e r M. B. On the roots of functions connected by a linear recurrent relation of the second order.- Ann. Math., (2) 3(1901-1902), 55-70.
1292. P o r t e r A., MackC. New Methods for the Numerical Solution of Algebraic Equations (Новые методы для численного решения алгебраических уравнений). Phil. Mag., (7), **40,** (p. 578-585), 1949.
1293. P r a t t J. W. Finding how many roots a polynomial has in (0,1) or (0,∞).- Amer. Math. Mon., 1979, 86, №8, 630-637.

1294. Presic Marina D. Un procede iteratif pour determiner k zeros d'un polynome.- C. r. Acad. sci., 1971, 273, №11, A446-A449.
1295. Presic M. D. A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeroes of a polynomial.- Publ. Inst. math., 1980, 28, 159-168.
1296. Press W. И., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. Quadratic and Cubic Equations (Квадратные и кубические уравнения). In Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing (В: Численные рецепты на Фортране: Искусство научных вычислений). Cambridge University Press, 1992.
1297. Rado Kerenc. Az algebrai egyenletex numerikus megoldasarol. – Kolozsvari egyet. kozl. Termeszettud. Sor., 1957, 2, №1-2, 13-24.
1298. Rahman Q .I. On the zerous of a class of polynomials. – Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, A22, №3, 137-139.
1299. Ralston A. A symmetric matrix formulation of the Hurwitz-Routh stability criterion.- IRE Trans. Automat. Control., 1962, 7, №4, 50-51.
1300. Rao D. Rameswar. Solvable cases of general sixth and eight degree equations.- Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1966, A36, №1, 112-114.
1301. Raphson J. Analysis aequationum universalis (Общий анализ уравнений). London, 1690.
1302. Redish K. A. on Laguerre's method.- Int. J. Magh. Educ. Sci. and Technol., 1974, 5, №1, 91-102.
1303. Reducing Quartics to Cubics (Сведение уравнений четвертой степени к уравнениям третьей степени), http://www.mathpages.com/home/kmath296.htm
1304. Reichbach M. Generalizations of the fundamental theorem of algebra. – Bull. Res. Council. Israel, 1958, F7, №4, 155-164.
1305. Renagur J. On the cost of approximating all roots of a complex polynomial.- Math. Program, 1985, 32, №3, 319-336.
1306. Reny Kato. Egy vegtelen linearis egynletrendszeerrol.- Mat. lapok,1957,8,№1-2,61-67.
1307. Renyi A., Turan P. On the zerosof polynomials. – Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3, №4, 275-284.
1308. Riaz M. Geometric solution of algebraic equation. – Amer. Math. Monthly, 1962, 69, №7, 654-658.
1309. Rice John R. On the conditioning of polynomials and rational forms.- Numer Math., 1965, 7, №5, 426-435.
1310. Rich RobertP., Shaw Harry. A method for finding all the zeros of $f(z)$. – J. Assoc. Comput. Mach, 1963, 10, №4, 545-549.
1311. Riddel R. C. Location of the zeros of a polynomial relative to certain disks.- Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 205, 37-45.
1312. Riedel W. Verfahren zur Nullstellenberechnung bei Polynomen.- Weiterbildungs-zentr.- Math. Kybern. und Rechentechn. Inform. Techn. Univ. Dresden, 1982, №58,90-101.
1313. Rigal Jean–Louis, Huu Vinh Nguyen. Sur une serie d'inficateurs de stabilite des solutions numeriques d'un polynome norme. – C. r. Acad. sci., 1965, 260, №6, 1558-1559.
1314. Rionero Mario. Le equazioni di 2^0, 3^0 e 4^0 grado risolte secondi Galois. – Period. mat., 1961, 39, №5, 305-315.
1315. Rissanen J. On optimum root-finding algorithms.- J. Math. Anal. and Appl., 1971, 36, №1, 220-225.
1316. Rivero L. G., Calle G. Algoritmo para localizacion relativa de raices, en un polinomio de coeficientes reales.- Actas Jornalas mat. lusoesp., Jaca, 1977, t.1, Zaragoza,245-252.
1317. Rivlin T. J. Bounds on a polynomial.- J. Res. Nat. Bur. Stand., 1970, B74, №1, 47-54.
1318. Rixecker H. Bestimmung der nullstellen eines polynoms.- Prax. Math., 1981, 23, №11, 339-342.

1319. R o b e r t s M. Note sur les equations du cinquieme degree (Замечание об уравнениях пятой степени). Annali di Matematica, Ser. II, vol. 1,1867.

1320. R o b e r t s o n J. E., T r i v e d i K. S., The status of investigations into computer hardware design based on the use of continued fractions.- IEEE Trans. Comput, 1973, 22, №6, 555-560.

1321. R o b i n s o n A. On the mechanization of the theory of equations.- Bull. Res. Council Israel, 1960, F9, №2, 47-70.

1322. R o b i n s o n R a p h a e l M. Algebraic equations with span less 4. – Math. Comput., 1964, 18, №88, 547-559.

1323. R o d e j a E. G. Investigaciones sobre un grupo de methodes de resolucion numerica de ecuaciones algebraicas. – Madrid, C. S. de I. C., 1956, 144p.

1324. R o n b e r g W., A a s e n J. Bestimmung einzelner Eigenwerte grosser symmetrischer Matrizen.- Wiss. Z. Hochschule Archit. Und Bauwesen Weimar, 1965, 12, №5-6, 522-523.

1325. R o s e D o n a l d J., W i l l o u g h b y R a l p h A. Symposium on sparse matrices and their applications.- Sparse Matrices and Appl., New York-London, 1972,3-22.

1326. R o s e n b l a t t - R ot h M i l l u. De la geometria elementara la entropia multimilor si masivitatea lor.- Progres. stintel, 1965, 1, №3, 67-74.

1327. R o s e n M. I. Niels Hendrik Abel and Equations of the Fifth Degree (Нильс Генрих Абель и уравнения пятой степени). Amer. Math. Monthly, 102,1995.

1328. R o u x D e l f i n a. Una demonstrazione del teorema fondamentale dell’algebra. – Bull. Unione mat. ital., 1959, 14, №4, 563-567.

1329. R o y o d o s S u n t o s. Um conjunto de rotinas didaticas para solucao de sistemas lineares exparsos.- An 1^o Encontro rey. mat. apl. e comput., Campos, 23-25 fevr. 1983, 149-165.

1330. R o z s a P. On periodic continuants.- Linear Algebra and Applic., 1969, 2, №2, 267-274.

1331. R u d S. H. Determination des valuers propres d’une matrice generale a coefficients reels. – C. r. Acad. sci., 1961, 252, №13, 1893.

1332. R u f f i n i P. Algebra e suo appendici, vol. I, II (Алгебра и ее приложения, т. I и П). Modena, 1807-08.

1333. R u f f i n i P. Theoria generate delle equazione, in cui si dimostra impossible la soluzi- one algebraica delle equazione generali di grado superiore al quarto (Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени). Modena, 1799.

1334. R u h m a n Q. L. On the zeros of a polynomial and its derivative.- Pacif. J. Math., 1972, 41, №2, 525-528.

1335. R u n c k e l H. J. Pole- and Zero- free Regions for Analytic Continued Fractions.- Proc. Amer. Math. Soc. 97(1986), 114-120.

1336. R u n g e K a r l. Eine Vorzeichenregel in der Theorie der algebraischen Gleichungen. – Jahresher. Dtsch. Math.-Ver. 1964, 66, №2, 52-66.

1337. R u n g e K. Praxis der Gleichungen (Практика решения уравнений). Berlin, 1921.

1338. R u n g e C. Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summer von rationalen Functionen der Coefficienten (Изменение корней одного алгебраического уравнения в сумме из рациональных функций коэффициентов). Acta Math., 6,1885.

1339. R u n g e C. Ueber die aufloesbaren Gleichungen von der Form x^5 + их + v = O (О разрешимости уравнения в форме x^5 + их + v = 0). Acta Math. 7,1885.

1340. R u p p e r t W. M. On the Bring Normal Form of a Quintic in Characteristic 5 (О нормальной форме Бринга уравнения пятой степени). Arch. Math. 58, 44-46, 1992.

1341. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus. - Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, №6, 496-508.

1342. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Solution of eigenvalue problems with the LR-Transformation. – Nat. Bur. Standarts. Appl. Math. Ser., 1958, №49, 47-81.

1343. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Stabile Sonderfalle des Quotienten-Differenzen-Algoritmus. – Numer. Math., 1963, 5, №2, 95-112.

1344. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Uber eine Kubisch konvergente Variante der LR-transformation. – Z. angew. Math. and Mech., 1960, 40, №1-3, 49-54.
1345. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Une methode pour la determination des valeurs propers d'une matrice. – C. r. Acad. sci., 1955, 240, №1, 34-36.
1346. R u t i s c h a u s e r H e i n z. Une methode pour le calcul des valeurs properes des matrices non symetriques. – C. r. Acad. sci., 1964, 259, №17, 2758.
1347. R u t i s c h a u s e r H. Betrachtungen zur Quadratwarzeliteration. – Monatsh. Math., 1963, 67, №5, 452-464.
1348. R u t i s c h a u s e r H. Deflation bei Bandmatrizen. – Z. angew. Math. und Phys., 1959, 10, №3, 314-319.
1349. R u t i s c h a u s e r H. Numerical experiments with the QD-transformation of J.G. Francis. – Inform. Process, 1962, Amsterdam, N.Holland Publ. Co., 1963, 202-203.
1350. R u t i s c h a u s e r H. On a modification of the QD-algorithm with Graeffe-type convergence. – Inform. Process, 1962, Amsterdam,N.Holland Publ. Co., 1963, 92-96.
1351. R u t i s c h a u s e r H., S c h w a r z H. R. The LR transformation method for symmetric matrices. – Numer. Math., 1963, 5, №3, 273-289.
1352. R u t i s c h a u s e r H., B a u e r F r i d r i c h L. Determination des vecteurs propres d'une matrice par une methode iterative avec cinvergence quadratique. – C. r. Acad. sci., 1955, 240, №17, 1680-1681.
1353. R u t i s h a u s e r H. Bestimmung der Eigenwerte ortogonaler Martizen.- Numer. Math., 1966, 9, №2, 104-108.
1354. R u t i s h a u s e r H. The Jacobi method for real symmetric matrices.- Numer. Math., 1966, 9, №1, 1-10.
1355. R y e E., W a a d e l a n d H. Reflections on value regions, limit regions and truncation errors for continued fractions.- Numer Math., 1985, 47, №2, 191-215.
1356. R y t i H e n r i k. Eras 3, ja 4 asteen yhtaloiden numeenmen ratkaisutapa. – Tekn. Aikakanslehti, 1953, 43, №16, 335-336, 352 (фин.).
1357. S a b a t J. B. Note on an application of the δ - functions in the representation of solutions of algebraic equatins.- Canad. Math. Bull., 1967, 10, №5, 735-738.
1358. S a c t e r O. Elemente de teoria equatilor algebrice si transcendente. – Bucuresti, Ed. tehn., 1962, 252р.
1359. S a g a s t u m e B e r r a. Pasado presente y futuro de la teoria de las ecuaciones. – An Acad. nac. cienc. exact., fis y natur. Buenos Aires, 1958, 13, 33-49 (исп.).
1360. S a i c h i n A. Asupra aplicari simultane a metodei partilor proportionale. – Studii si cercetari mat. Acad. RPR F.I. Cluj, 1957, 8, №3-4, 331-337.
1361. S a l l e s F r a n s i q u e. Lien des racies d'une equatione algebrique dependant d'un parametre. Application a la stabilite et an quidage des fusees. – Publs scient. et techn. Ministere air, 1959, №351, IV, 69р.
1362. S a l z e r H e r b e r t E. A note the solution of quartic equations. – Math. Comput., 1960, 14, №71, 279-281.
1363. S a l z e r H e r b e r t. Some extensions of Bairstow's method. – Numer. Math., 1961, 3, №2, 120-124.
1364. S a m u e l s o n P. A. Iterative computation of complex roots (Итеративное вычисление комплексных корней). J. Math. Phys., **28,** (p. 259-267), 1949.
1365. S a n J u a n R. Resolution d'un systeme infini d'equations lineanes.- C.r. Acad. sci., 1953, 236, №19, 1841-1843.
1366. S a n c e r y L. De la methode des substitutions successives pour le calcue des racines des equations (Метод последовательных подстановок при вычислении корней уравнений). Nouvelles ann. Math., (2), 1, (305-315), 1862.
1367. S a n g E. Approximation to the roots of cubic equations by help of recurring chain fractions.- Proc. Roy. Soc. Edinb., 12(1882-1884), 387-388.

1368. S a n g E. On the approximation to the roots of cubic equations by the help of recurring chain fractions.- Trans. Edinburgh Roy. Soc. (2) 32(1885), 311-326.
1369. S a r a f y a n D i r a n. Nested series, computation of square roots and solution of third degree equations. – Mat. Mag., 1953, 27, №1, 19-36.
1370. S a r d A. Remainders: Functions of Several Variables (Остатки: функции нескольких переменных). Acta Math., **84,** (p. 319-346), 1951.
1371. S a s a k a w a T a t u y a. New method for solving eigenvalue problems. – J. Math. Phys., 1963, 4, №7, 970-972.
1372. S a w h n ey M a t h u r a D. The computation of eigenvalues. Real symmetric matrices. – J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1964, 12, №4, 726-733.
1373. S a y e r P. P. Some aspects of infinite systems of linear simultaneous equations IMA.- J. Numer. Anal., 1983, 3, №3, 333-340.
1374. S a y e r P. P. The eigenvalue problem for infinite systems of linear equations.- Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc., 1977, 82, №2, 269-273.
1375. S c a g n i G i a n c a r l o. Sul calcolo numerico delle radici n-esime. – Rend Cl. Sci. Mat. Nat., Ist. Lombardo Sci. Lett., 1956, 90, 255-266.
1376. S c a l e s J. A., C e r s z t e n k o r n A., T r e i t e l S. Fast L_p solution of large linear systems: application to seismic travel time tomography.- J. Comput. Phys., 1988, 75, №2, 314-333.
1377. S c h a f a r e w i t s c h J. R. Uber die Auflosung von Gleichungen hoheren Grades. (Sturmsche Methode). Ein Anhang: Das Hornrsche Schema. Karl H., Uber aus dem Russ, Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss, 1956, 29s.
1378. S c h a u m b e r g e r N o r m a n, J u s t Er w i n. Concerning the rational zeros of polynomials.- Math. Teacher, 1968, 61, №3, 284-286.
1379. S c h e l i n C. W. Counting zeros of real polynomials within the unit disk.- SIAM J. Numer. Anal., 1983, 20, №5, 1023-1031.
1380. S c h e l k u n o f f S. A. Applied mathematics for engineers and scientist. 4^{th}. print. Princeton, N.J., 1957. - 472pp.
1381. S c h m i d t J o c h e n W., D r e s s e l H a r m u t. Fehlerabschatzangen bei Polynomgleichungen mit dem Fixpunktsatz von Brouwer.- Numer. Math., 1967, 10, №1, 42-50.
1382. S c h m i d t J. W., S c h w e t l i ck H. Ableitungsfreie Verfahren mit hoherer Konvergenzgeschwidigkeit.- Computing, 1968, 3, №3, 213-226.
1383. S c h m i d t m a y e r J o s e f. Vuhodne feseni algebraickych rovnic. 3 az 5 stupne.- Pokroky mat. fys. a astron., 1958, 3, №6, 659-671.
1384. S c h o n h a d e A. Equation solving in terms of computational complexity.- Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, Calif., Aug, 3-11,1986. vol1,Providence,R.L., 1987, 131-153.
1385. S c h r a c k G u n t h e r F r i e d e m a n n. Lower bounds to the abscissa of stability of stable polynomials.- Diss. Doct. Math. Swiss Feder. Inst. Technel. Tubinger, 1967,77pp.
1386. S c h w a r t z B. L. A supplementary note on solution of cubic equations on a slide rule (Дополнительное замечание о решении кубических уравнений по правилу скользящей полоски). Math. Mag., 32, № 1,1958.
1387. S c h w a r z H a n s - R u d o l f. Die Reduktion einer symmetrischen Bandmatrix auf tridiagonale Form.- Z. angew. Math. und Mech., 1965, 45, 175-177.
1388. S c h w e r d t f e g e r H a n s. Notes on numerical analysis. 1. Polynomial iteration. – Canad. Math. Bull, 1959, 2, №2, 97-110.
1389. S c h w e t ma n H e r b e r t D., B u r m e i s t e r C h a r l e s. Solution of polynomials by use of an electromechanical synthesizer. – Rev. Scient Instrum., 1959, 30, №2, 94-97.
1390. S c o u a r n e c C h r i s t i a n. Resolution des equation algebriques Application a la recherche des racines de $P(x)$=0.- Rev. CETHEDEC. 1970, 7, №21, 1-49.
1391. S c r ö d e r J o h a n u. Eine Bemerkung zur Konvergenz der Iterationsverfahren für linear Gleichungs systeme.- Arch. Math., 1953, 4, №4, 322-326.

1392. S e d i l i R o d o l f o. Equazioni algebriche. Soluzione del problema generale. – Firenze, Ind. tipogr. fiiorent, 1955. –47p.
1393. S e g r e B e n i a m i n n. Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota II. – Atti Acad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis. mat. e natur., 1961, 29, №5, 225-231.
1394. S e g r e B e n i a m i n n. Sulla teoria delle equazion e delle congraenze algebriche. – Atti Accad. naz. Lincel Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1959, 27, №5, 155-161.
1395. S e i d e l L. Untersuchungen über die Konvergenz und Divergencz der Kettenbruche. Munchen: Hebilschrift, 1846.
1396. S e l i g e r C h a r l e s R. Finding quintic-equation roots.- Control Engng, 1964, 11, №5, 107-108.
1397. S e m e r d z h i e v K h r. Iteration methods for simultaneons finding all roots of generalized polynomial equations.- Math. Balkan.- 1994.- 8, №4, 311-335.
1398. S e n D. K. A note on Newton's method for evaluating roots of $f(x)=0$.- Math. Student, 1955, 23, №3, 109-112.
1399. S e n S y a m a l K u m a r. A second order process for solving polynomial equations.- J. Indian Inst. Sci., 1971, 53, №2, 169-175.
1400. S h a m a s h Y. Application of Koenig's theorem to model reduction.- IEEE trans. Circiuts and Syst., 1975, 22, №8, 702-704.
1401. S h a n G. M. Monotonic variation of the zeros of Stieltjes and Vau Vlec polynomials.- J. Indian Math. Soc., 1969(1970), 33, №2-4, 85-92.
1402. S h a v i t t I s a i a h. Modification of Nesbert's algorithm for the iterative evaluation of eigenvalues and eigenvectors of large matrices.- J. Comput. Phys., 1970, 6, №1, 124-130.
1403. S h e p h e r d s o n J. C. On the factorisation of polynomials in a finite number of steps. - Math. Z. , 1955, 62, №4, 331-334.
1404. S h i n g o T a k a i c h i. An exact method of solving the linear simultameous equations with the principal diagonal coefficients and those adjacent to then only.- Trans. Japan Soc. Civil Engrs, 1954, №19, 1-7.
1405. S h i n o h a r a Y o s h i t a i c e. The geometric method and a generalized Bairstow method for numerical solution of polynomial equation.- J. Math. Tokushima Univ., 1970, 4, 19-32.
1406. S h i v a k u m a r P. N., W i l l i a m s J. J. An iterative method with trancation for infinite linear systems.- J. Compit. and Appl. Math., 1988, 24, №1-2, 199-207.
1407. S h o j i F. F., A b e K., T a k e d a H. On the simplification of large linear systems using Pade-type approximations and Gauer continued fractions.- Int. J. Syst. Sci., 1985, 16, №3, 325-336.
1408. S h r a g e r R. A rapid robast rootfinder.- Math. Comput., 1985, 44, №169, 151-165.
1409. S h u r m a n J. Geometty of the Quintic (Геометрия уравнения пятой степени). New York: Wiley, 1997.
1410. S i e d e n b u r g R. Beitrag zum Auffindenvon reellen Losungen algebraischer und transzendenter Gleichungssysteme belliebigen Grades.-Stahlban,1974, 43, №4, 114-119.
1411. S i k o r s k i R. On determinants of Lezanski and Ruston.- Studua math., 1957, 16, №2, 99-112.
1412. S i m A. C. Solution of cubics and quartics. – Wireless Engr., 1954, 31, №11, 294-300.
1413. S i m A. C. Solution of cubic and quarties (Решение уравнений третьей и четвертой степени). Wireless Eng., 31, № 11, (p. 294-300), 1954.
1414. S i m e c J o z e l, S z a b o V e n d e l i n. Riesenie systemu linearnych algebraickych rovnic s trojdiagonalnou maticou.- Appl. mat., 1977, 22, №6, 470-472.
1415. S i m e u n o v i c D. M. Sur le cercle qui contient au moins un zero d'un polynome et les questions qui s'y rattachent.- Матем. весн., 1968, 5, №3, 339-342.
1416. S i m e u n o v i c D. M. Sur les limites des modules zeros des polynomes.- Матем. весн., 1967, 4, №3, 293-298.

1417. S i m p s o n A., T a b a n o k B. On Kron's eigenvalue procedure and related methods of frequency analysis.- Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1968, 21, №1, 1-39.
1418. S i s p a n o v S e r g i o. Geometric solution of equations of third, fourth and fifth degree. – Rev. Chiv. Mat. Argentina, 1955 (1956), 17, 265-278.
1419. S k a n Chr. Gjesyn med Abels og Ruffins, bevis for umuligheten av a lase den generelle n'tegrasligninger algebraisk nar $n \geq 5$.- Normat, 1990, 38, №2, 53-84.
1420. S l u i s A. Upper bounds for roots of polynomials.- Numer. Math., 1970, 15, №3, 250-262.
1421. S m a h e l J o s e l. Numericke reseni algebraickych rovnic metodon Bernoulli-Whitakerovou.- Zpravod. VZLU, 1962, №1, 7-9.
1422. S m a l e S. On the efficiency of algorithms of analysis.- Bull. Amer. Math. Soc., 1985, 13, №2, 87-121.
1423. S m a l e S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory.- Bull. Amer. Math. Soc., 1981, 4, №1, 1-36.
1424. S m a l e S. On the efficiency of algorythms of analysis.- Bull. Amer. Math. Soc., 1985, 13, №2, 87-121.
1425. S m a l l D. B. A matrix sequence associated with a continued fraction expansion of number.- Fibonacci Quart, 1977, 15, №2, 123-130.
1426. S m i t h B r a i n T. Error bounds for zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorems.- J. Assoc. Comput. Mach., 1970, 17, №4, 661-674.
1427. S m i t h D. History of Mathematics, vol. 1. (История математики, т. 1). New York: Dover., 1951.
1428. S m i t h D. History of Mathematics, vol. 2. (История математики, т. 2). New York: Dover., 1953.
1429. S m i t h G. S. A new method of calculating roots of algebraic equations. – Math. Gaz., 1960, 44, №350, 241-245.
1430. S m i t h G. S. On a new method of calculating the roots of algebraic equation.- Math. Gaz., 1967, 51, №377, 233-236.
1431. S o e l a i m a n T. M., H e l w i g W. F. Partical analysiss of quartic polynomials.- Res. J. Ministry High Educat. and Sci. Republ. Indonesia, 1963, B1, №1, 1-10.
1432. S o r k i n S. Using an interactive computer programm in the calculus classroom to find complex roots of polynomial equations.- Math. and Comput.Educ., 1984, 18, №2, 93-99.
1433. S o u k u p J i f f. A method for finding the roots of a polynomial.- Numer. Math., 1969, 13, №4, 349-353.
1434. S p a n i e r J., O l d h a m K. B. The Cubic Function $x^2 + ax^1 + bx + c$ and Higher Polynomials (Кубическая функция $x^3 + ax^2 + bx + c$ и полиномы высших степеней). Ch. 17 in An Atlas of Functions. (Гл. 17 в: Атлас функций). Washington, DC: Hemisphere, 1987.
1435. S p a n i e r J., O l d h a m K. B. The Quadratic Function and (Квадратичная функция ax^2 +Ъx+c и ее обратная величина). Ch. 16 in An Atlas of Functions. Washington, DC: Hemisphere, 1987.
1436. S p e a r m a n B. K., W i l l i a m s K. S. Characterization of Solvable Quintics x^5+ax+b (Критерий разрешимости уравнений пятой степени $x^5 + ax+ b$). Amer. Math. Monthly, 101,1994.
1437. S p e c h t W i l h e l m. Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. III. – Math. Nachr., 1957, 16, №5-6, 369-389.
1438. S p e c h t W i l h e l m. Zur Verteilung der Nullstellen Komplexer Polynome. – Math. Nachr., 1960, 21, №1-2, 109-126.
1439. S p e c h t W i l h e l m. Zut Werteverteilung der Polynome. – J. reine und angew. Math., 1963, 212, №1-2, 73-79.
1440. S p e c h t W. Algebraische Gleichngen mit realen oder komplexen Koeffizienten Enzyklopadie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 1, Ht 3, Teil 2, Stuttgart, B.G. Teubner Verlagsges, 1958, 76s.

1441. S q u i r e W i l l i a m. The Lienard-Chipart criteria for the stability of polynomials.- J. Aero/Space Sci., 1961, 28, №3, 255-256.
1442. S q u i r e W. Solution of quartic equations.- Int. J. Math. Educ. Sci and Technol., 1979, 10, №2, 299-302.
1443. S r e w a r t G. W. On the convergence of Sebastiao e Silva's method for finding a zero of a polynomial.- SIAM Rev., 1970, 12, №3, 458-460.
1444. S t a b r o w s k i M. M. An algorithm for the solution of very large banded unsymetric linear equation systems.- Int. J. Numer Meth. Eng., 1981, 17, №7, 1103-1117.
1445. S t a d e C. Ein Verfahren mit quadratischer Konvergenzgeschwindigkeit zur simultanen Berechnung zweier Nullstellen beliebiger Ordnung.- Rostock. Math. Kolloq., 1981, №16, 95-101.
1446. S t a m m b e r g e r A. Nomographische Auflosung von Gliechungen 4 Grades. – Wiss. Z. Hochschule Electrotechn. Ilmenau, 1959, 5, №2-3, 121-124.
1447. S t e f a n o v i c L. V., P e t c o v i c M. S. On the computational efficiency of root-finding methods with recursive corrections.- Facta univ. nis. ser. math. and inf., 1990, №5, 115-128.
1448. S t e f a n o v i c L. V., P e t c o v i c M. S. The *R*-order of convergence of a modified iterative method of Weierstrass' type for finding polynomial zeroes.- Numer. Math. and Approxim. Theory 2 Conf., Novi Sad, 1985, 95-102.
1449. S t e i f e l E. Zur Iterpolation von tabellierten Funktionen durch Exponentialsummen und zur Berechnung von Eigenwerten aus den Schwarzschen Konstanten. – Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, №8-9, 260-262.
1450. S t e i n S. The fundamental theorem of algebra.- Amer. Math. Mounthy,1954,61,№2, 109.
1451. S t e r n M. A. Über die Summierung gewisser Kettenbruche.- J. Reine Angew. Math., 8 (1832), 42-50.
1452. S t e s i n I .M. An estimate of the precision of computation of eigenvalues by means of continued fractions. – Amer. Math. Soc. Translat., 1959, 12, 149-154.
1453. S t e w a r t G. W. On Lehmer's method for finding the zeros of a polynomial.- Math. Comput., 1969, 23, №108, 829-835.
1454. S t e w a r t G. W. Some iterations for factoring a polynomial. A generalization of the secant method.- Numer. Math., 1973, 22, №1, 33-36.
1455. S t e w a r t G. W. Some iterations for factoring a polynomial.- Numer. Math., 1969, 13, №5, 458-471.
1456. S t e w a r t G. W. The behavior of a multiplicity independent root-finding scheme in the presence of error.- BIT, 1980, 20, №4, 526-528.
1457. S t o j i c M i l i c R., B i n g u l a c S t a n o j e P. Solution of algebraic equations and plotting of root loci by steepest descent method.- Publ. Elekrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser.- Mat. i fiz., 1969, №274-301, 139-148.
1458. S t o n e H a r o l d S. Paralled tridiagonal equation solvers.- ACM Trans. Math. Software, 1975, 1, №4, 289-307.
1459. S t o n e H. S. An effecient of algorithm for the solution of a tridiagonal linear system of equations.- J. Assoc. Comput. Math., 1973.
1460. S t r a e t e r T. A. , P a r k S. K. A modified algorithm for the simultaneous extraction of polynomial roots.- Int. J. Comput. Math., 1972, 3, №2-3, 271-273.
1461. S t r a n g G. A proposal for Toeplitz matrix calculations.- Stud. Appl. Math., 1986, 74, 171-176.
1462. S t r a n g G. Patterns in linear algebra.- Amer. Math. Mon., 1989, 96, №2, 105-117.
1463. S t r e c k e i s e n P a u l T h e o p h i l. Die konvergenz der Abschnittsinversen von spaziellen unedlichen Matrizen.- Diss. Dokt. Math Eidgenoss. Techn. Hochschule Zurich. Zurich, Juris Druck Verl., 1966, 98s.
1464. S t r e c k e i s e n P a u l. Une propriete de certaines matrices infinies.- C.r. Acad. sci., 1963, 256, №9, 1902-1903.

1465. S t u d n i c k a F. J. Ueber einen besondere Art von symmetralen Determinanten und deren Verwendung in der Theorie der Kettenbruche.- Sitz. Bohm. Ges. Wiss. (1872), 74-78.
1466. S t u r m C. Démonstration d'un theóréme d'algebre de M.Sylvester.- J. Math. Pures Appl., (1) 7(1842), 356-368.
1467. S t u r m C. Mémoire sur la résolution des éqquationes numériques.- Mémoiren présentés par divers savants à l'Acad. Roy. de l'Institut de France, 6(1835), 271-318.
1468. S t u r m C. Memoire sur la resolution des equations numeriques (Мемуар о решении численных уравнений). Bull, de Ferussac., И, 1829.
1469. S u Y a n g f e n g. A parallel method for banded equation solver.- Numer Math.: J. Chin. Univ., 1989, 11, №4, 341-347.
1470. S u d b e r y A. The number of distinct roots of a polynomial and its derivetives.- Bull. London Math. Soc., 1973, 5, №1, 13-17.
1471. S u h a d o l c A n t o n. Cauchjeva metoda resevanja algebraicnich enaob. – Obz. mat. in fiz., 1964, 11, №2, 58-61.
1472. S u r d A. A view of mathematics.- Multivar Approxim. Theory 2: Proc. Conf. Oberworfach Black Forest Febr. 8-12? 1982, Basel e.a. 1982, 327-330.
1473. S u s t e r O. Elemente de teoria ecuatiilor algebrice si transcendente. – Bucurest, Ed. tehn., 1962, 252p.
1474. S u z u k i T a k a o. On an infinite system of ordinary differential equations with an isolated singularity.- Bull. Fac. Liberal. Arts. Ibaraki Univ, 1959, №10, 9-16.
1475. S y k a s s A. J. The roots of polynomials. – Electro-Technol., 1964, 73, №4, 109-116.
1476. S y l v e s t e r J. J. Theoréme sur les determinants de M.Sylvester.- Nouv. Ann. Math., 13 (1854), 305.
1477. S z a s z O. Über gewisse unendliche Kettenbrüche-Determinanten und Kettenbrüche mit Komplexen Elementen.- Sb. München, (1912), 323-361.
1478. S z e n a s s y B a r n a. Segner Andras matematikai tevekenysege. – Acta Univ. debrecen., 1960, 6, №2, 37-42 (венгр.).
1479. S z i d a r o v s z k y F e r e n c. Polinomok gyikeinek gyökeinek redukeios hibairo.- Magy tud. akad. Mat. es fiz. tud. oszt. Közl., 1973, 21, №1-2, 53-62(венг.)
1480. S z m e l t e r J. Eine Methode zur Berechnung aller wurzeln eines Polynoms.- Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, 1965, 9, №4, 409.
1481. T a m a s h i t a S h i n – I c h i ra. Numerical solution of algebraic equations. – Inform. Process Japan, 1962, 2, 13-16.
1482. T a m u r a H i d e y u k i, F u k a t a S a t o r u. Some algorithms for the trial solution.- Technol. Repts. Kyushu Univ., 1988, 61, №3, 265-272.
1483. T a n g I. Detecting multiple roots of a polynomial.- Z. angew Math. und Mech., 1975, 55, №7-8, 449-451.
1484. T a n g J i a n k a n g. On the convergence of the single-step method for finding all roots of polynomial simultaneously.- J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed., 1985, 12, №2, 161-165.
1485. T a s n y – T s c h i a s s n y L. The location of the roots of polynomial equations by the repeated evaluation of linear forms. – Quart. Appl. Math., 1953, 11, №3, 319-328.
1486. T a y l o r W. C. A neglected method for resolution of polynomial equations (Метод малых величин для решения полиномиальных уравнений). J. Franclin Inst., **257,** 1954.
1487. T a y l o r W. C. A neglected method for resolution of polynomial equations (Метод малых величин для решения полиномиальных уравнений). J. Franclin Inst., **257,** 1954.
1488. T c h a k a l o f f L. Sur la destribution des zeros d'une classe de polynomes algebricues. – Докл. Болг. АН, 1960, 13, №3, 249-252.
1489. T e m p e r t o n C l i e v e. Algorithm for the solution of cyclic tridiagonal systems.- J. Comput. Phys., 1975, 19, №3, 317-323.
1490. T e n c a L u i g i. Su una classe di matrici infinite.- Period. mat., 1957, 35,№4,219-223.

1491. Teodorescue P. P. Asupra unor sisteme infinite de ecuatii limare care intervin in problema plana a teorie elasticitatii pentru un domeniu dreptunghiular.- Studii si cercetari mec. alp. Acad. RPR,1960, 11, №4, 925-935.

1492. Tessler Lawrence, Eisenberg Lawrence. A new algorithm for factoring polynomials.- Proc. IEEE, 1972, 60, №6, 737-738.

1493. The Fundamental Theorem for Palindromic Polynomials (Фундаментальная теорема для палиндромических полиномов), http://www.mathpages.com/home/kmath294.htm

1494. Theichroew D. Use of continued fraction in high speed computing.- MTAC, 1952, 6, №39, 127-132.

1495. Theremin F. Recherches sur la resolutiondes equations des tous les degrees (Исследования по решению уравнений всех степеней). J. reine angev. Math, 49, (187-243), 1855.

1496. Theremin F. Recherches sur la resolutiondes equations des tous les degrees (Исследования по решению уравнений всех степеней). J. reine angev. Math, 49, (187-243), 1855.

1497. Thirion R. La resolution de l'equation du 3-me degre.- Mec. Industr., 1959, 6, №52, 20-25.

1498. Tignol J. P. lecons sur la theorie des equations.- Cabay, 1980, Louvain-Nueve, Inst. math. pure et appl. Univ. Cathol. Louvain, s.a. 250p.

1499. Timpler F. F. An iterative method for finding the quadratic factors of a fourth- degree polynomials (Итеративный метод для нахождения квадратичных множителей полиномов четвертой степени). Industr. Math., 6, (p. 23-26), 1955.

1500. Timpler F. F. An iterative method for finding the quadratic factors of a fourth- degree polynomials (Итеративный метод для нахождения квадратичных множителей полиномов четвертой степени). Industr. Math., 6, (p. 23-26), 1955.

1501. Ting Kuan Shu – Cuang. A note on the numerical solutions of the equation $x^m + ax^n + b=0$. Quart. Appl. Math,12, № 3, 1954

1502. Tomic M. Sur la borne superieure des modules des zeroes des polynomes.- Bull. Acad. Serbe sci.et aerts, 1981, 76, №11, 11-19.

1503. Tomie Bosko S. Les relations asymptotiques pour les zeros croissant indefiniment des polynomes a coefficients positifs.- Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1963, 49,№8,799-818.

1504. Törning W. Zur konvergenz der Differenschemaverfahren.- Z. angew. Math. und Mech., 1960, 40, №9, 423-424.

1505. Torres Noguera Juan. La resolution de la ecuacion cubica mediante las funciones circulares e hiperbolicas. – Gac. Mat., 1957, 9, №2-3, 54-59.

1506. Tortolini B. Rivista bibliografica sopra a transformazione del Sig. Jerrard per l'equaziom di quinto Grado (Журнальная библиография по преобразованию Жерара уравнения пятой степени) Annali di Mat. pura appl., 6, 1864.

1507. Tosic D. D., Milovanovic G. V. An application of Newton's method to simultaneous determonation of zeros of a polynomial.- Publ. Electrotechn. fak. Univ. Beogradu. Ser.-Mat. i fiz., 1973, №412-460, 175-177.

1508. Tosic D. D., Tosic D. V. A modification of Bernoulli's method for evaluations of zeroes of polynomials.- Numer. Math. and Approxim. Theory 2 Conf., Novi Sad, 1985, 149-154.

1509. Toth B. Polinom osszes zerushelyenek erintoparaboloid modszerrel valo meghatarozasa.- Nehezipari musz. egyet. kozl., 1980, Sorozat 4, 25, №3, 131-140.

1510. Tournier Evelyne. Methode generale de localisation des racines d'une equation algebrique a coefficients complexex.- Rev. franc. automat., inform., rech. oper., 1972, 6, №R-2, 84-90.

1511. Traenkle C. A. Determination of root system of algebraic equations by affinity transforms. – Quart. Appl. Math., 1955, 13, №1, 1-18.

1512. T r a t n i k M. V. Multivariable Meixner, Krawtchuk and Meixner-Pollaczek polynomials.- J. Math. Phys., 1989, 30, №12, 2740-2749.

1513. T r a u b J. B. Comparison op n-th roots.- Communs Assoc. Comput. Math., 1961, 4, №3, 143-145.

1514. T r a u b J. E. A class of globally convergent iteration functions for the solution of polinomial equations.- Math. Comput., 1966, 20, №93, 113-138.

1515. T r a u b J. F. Constraction of globally convergent iteration functions for the solution of polynomial equations.- Bull. Amer. Math. Soc., 1965, 71, №6, 894-895.

1516. T r a u b J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations (Итеративные методы для решения уравнений). N. J., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

1517. T r a u b J. F., W a z n i a k o w s k i H. On the optimal solution of large systems.- J. Assoc. Comput. Math., 1984, 31, №3, 545-559.

1518. T r o t t M. Solution of Quintics with Hypergeometric Functions (Решение уравнений пятой степени с использованием гипергеометрических функций). In The Mathematica Guide Book for Symbolics. New York: Springer- Verlag, 2006.

1519. T r u d i N. Teoria de determinanti e loro applicazioni.- B. Pellerano Napoli, 1862.

1520. T s c h i r n h a u s E. W. Nova methodus auferendi omnes terminus intermedios ex data aequatione (Новый способ исключения всех промежуточных членов в данном уравнении). Leipzig, Acta eruditorum, Bd. 2,1683.

1521. T s i l i m i g r a s P a n. Upper and lower limits of the roots of polynomials.- Int. J. Contr., 1970, 12, №2, 347-350.

1522. T u r a n P. Remark on the preceding paper of J. Cassels. Application to approximation solution of algebraic equations. – Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, №3-4, 291-294.

1523. T u r n b u l l B. W. The theory of determinants, matrices and invariants.- Blackie and Son Ltd. London, 1928.

1524. T u r n b u l l H. W. Theory of Equations (Теория уравнений). Oliver and Boyd, 1946.

1525. T u r n b u l l H. W. Theory of equations. 5th. rept. Edinburg – London, Oliver and Boyd; New York, Interscience, 1957, 166pp.

1526. T u r o w i c s A. B. Sur l'approximation des racines de nombres positifs. – Ann. polon. math., 1960, 8, №3, 265-269.

1527. The Fundamental Theorem for Palindromic Polynomials (Фундаментальная теорема для палиндромических полиномов), http://www.mathpages.com/home/ kmath294.htm

1528. U c i y a m a S. Sur les sommes de puissances des nombres complexes. – Acta math. Acad. scient. hung., 1958, 9, №3-4, 245-278.

1529. U n b e h a u e n R o l d. Uber ein neues Verfahren zur Auflosung von Polynomgleischungen. – Z. Mod. Rechentechn. und Automat., 1963, 10, №3, 109-112.

1530. U s h e r T h e r o n. A new application of the Hurvitz-Routh stability critera. – Common and Electronics, 1957, №33, 530-533.

1531. U s p e n s k y J. V. Theory of equations (Тёория уравнений). N. Y., McGraw Hill, 1948.

1532. V a n d e r m o n d e A. T. Memoire sur la resolution des equations (Мемуар о решении уравнений). Paris, Mem. Acad., 1771.

1533. V a r g a G y u l a I. Polinomfaktorizalas masodfoku tenyezokre.- Kozl. Magyar tud. akad. Szamitastechm. Kozp., 1969, 5, 3-6.

1534. V a r o l i G u i s e p p e. Sulla ricerca delle radici di una equazione algebrica a coefficienti razionale. – Period. Mat., 1939, 37, №3, 147-155.

1535. V e n t a r e l l i F., H e h l M. MIDREM – um metodo iterativo de determinacao de uma raiz e sua multiplicidade.- An. 7 Congr. nac. mat. apl. e. comput., Campinas, 24-28 set., 1984. Abstr., 1984, 238-242.

1536. V e n t a r e l l i F., H e h l M. Fase inicial – a determimacao de valores iniciais para a resolucao numerica de equacoes polinomials.- An. 7 Congr. nac. mat. apl. e. comput., Campinas, 24-28 set., 1984. Abstr., 1984, 243-247.

1537. V e r n o t t e P i e r r e. A propos des systemes a une infinite d'inconnues, constitues par des equations lineaires don't les premiers members apparaissent comme des developpments divergents.- C.r. Acad. Sci., 1962, 255, №3, 457-459.
1538. V e r n o t t e P i e r r e. Resolution d'une equation du 4-e degre, a racines toutes imaginaires. – Publs. scient. et techn. Ministere air, 1961, №1, 99, 75-76.
1539. V e r r i e s t G. Le pin grande scoperta del'algebra. – Civilta macchine, 1957, 5,№4,57-65.
1540. V e y s s e y r e R e n e e, B o u b e l D o m i n i q u e, V i l l e m i n J e a n-P a u l. Nombre de zeros d'un polynome interieurs a un cercle du plan complexe.- C. r. Acad. sci., 1972, 274, №12, A951-A954.
1541. V i c h R o b e r t. Adaptive strategy for the solution of polynomial equations.- Pr. Ustavu radiotechn. a electron, 1968, №39, 38s.
1542. V i c h R. Auflösung von Polynomgleichungen in der Signalanalyse.- 29 Int. Wiss. Kolloq., Limenau, 1984, 119-121.
1543. V i c h R. Eine Methode zur Losung algebraischer Gleichungen hoheren Grades mit Hilfe eines Digitalrechners. – Nachrichtechnik, 1964, 14, №6, 223-226.
1544. V i e t e F. In artem analyticam isagoge (Введение в аналитическое искусство). Paris, 1591.
1545. V i l l a M a r i o. Niccolo Tartaglia a quarto secdi dalla morte.- Atti Accad. sci. Ist. Bologna. Cl. sci. fis. Rend., 1963-1964, 1, №1, 5-24.
1546. V i n c i g u e r r a R e n a t o. Polinomi di Tchebycheff generalizatti.- Rend. mat., 1968, 1, №1-2, 177-189.
1547. V i s w a n a t h a n K. Solution of complex polynomial equations.- Indian Engr., 1968, 12, №8, 1-7.
1548. V i s w a n a t h a n K. Solution of polynomial equation by method of steepest descent.- Int. J. Comput. Math., 1970, 2, №3, 193-199.
1549. V i t a l i O r n e l l o. La determinazione dei valori propri.- Statistica, 1964, 24, №2 ,281-294.
1550. V l a d i s l a v T., B u t u l e s c u I. Monte Carlo aplicata la rezdvarea iterotiva a sistemelor de ecuatii algebrise liniare.- Rev. Statist., RSR, 1985, 34, №1, 49-54.
1551. V o g t H. Lecons sur la resolution algebraiques des equations (Лекции по решению алгебраических уравнений). Paris, 1895.
1552. V o o y s C. J. De vinding van Ferrari-Eclides, 1959, 34, №7, 200-204 (гол.).
1553. V u r c f e l d J a r o m i r. Nomogram pro feseni rovnic ctvrteho stupne.- Aplikace mat., 1958, 3, №3, 223-232. (чешск.).
1554. W a k a s h i m a K. On the computation of the general eigenproblem.- Inform. Process., 1962, Amsterdam, N. Holland Publ. Co., 1963, Discuss., 201.
1555. W a l l H. S. Analitic theory of continued fraction.-NewYork,VanNostrand,1948.-433.
1556. W a l l H. S. Concerning harmonic matrices.- Arch. Math., 1954, 5, №1-3, 160-167.
1557. W a l l i s J. Arithmetice infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturum, aliaque difficiliora matheseos problematu.- Oxford, 1655.
1558. W a l l I s J. Mathesis universalis (Универсальная математика). Oxford, 1657.
1559. W a l l i s c h W a l t e r, H ö l n e r G e r t. Ein Verfahren fur digitale Rechenautomaten zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen.- Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena. Math.- naturwiss. Reine, 1969, 18, №2, 335-338.
1560. W a l t m a n n W i l l i a m L., L a m b er t R o b e r t J. T-algorithm for tridiagonalization.- J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, 13, №4, 1069-1078.
1561. W a n g D e r e n, W u Y u – j i a n g. Some modifications of the parallel Halley iteration method and their convergence.- Computing, 1987, 38, №1, 75-87.
1562. W a n g D e r e n, Z h a o F e n g g u a n g. Complexity analysis of a process for simultaneously obtaining all zeroes of polynomials.-Computting,1989, 13, №2,187-197.

1563. W a n g X i n g – h u a, Z h e n g S h i m i n g. A family of parallel and interval itera-tions for finding simultaneously all roots of a polynomial with rapid convergence.- Math. numer. sin., 1985, 7, №4, 438-444.
1564. W a n g X i n g – h u a, Z h e n g S h i m i n g. Parallel Helley iteration method with circular arithmetic for finding all zeroes of a polynomial.- Numer. Math. J. Chin. Univ., 1985, 7, №4, 308-314.
1565. W a n g Z e k e, X u S e n l i n. A pivoting algorithm which cost of finding a zero grows linearly with the degree of the polynomial.- Numer. Math. J. Chin. Univ., 1985, 7, №4, 293-299.
1566. W a n g Z e k e. A cost estimate for Kuhn's root-finding algorithm.- Acta math. appl. sin., 1984, 7, №3, 321-327.
1567. W a r d J. A. The down-hill method of solving f(z)=0 (Метод спуска для решения уравнения f(z) = 0). J**.** Assoc**.** Comput, Mach., 4, 1957
1568. W a r i n g E. Miscellanea analytica (Аналитические этюды). Cambridge, 1762.
1569. W a r m u s M. Rozwiazywanie numeryczne rownan trzeciego i czwartego stopnia o wspolczynnkach rzeczywistych. – Zastosow. mat., 1961, 6, №1, 127-135 (полск.).
1570. W a s z c z y s z y n Z., Z y c z k o w s k i M. Wzory aproksymacyjne na pierwiastki rzeczywiste rownania stopnia trzeciego.- Zastosow. mat., 1966, 18, №3, 243-254.
1571. W a t k i n s D. S. Understanding the *QR* algorithm.-SIAM Rev.,1982, 24, №4,427-440.
1572. W e e g G e r a r d P. Truncation error in the Graeffe root-squariny method. – J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, 7, №1, 69-71.
1573. W e g s t e i n J. H. Accelerating convergence of iterative processes (Ускорение сходимости итерационных процессов). Gomm. Assoc. Comput. Mach., 1, № 6, 1958.
1574. W e i n b e r g L o u i s. Test for zeros in the unit cicle. – J. Appl. Phys. (N.Y.), 1953, 24, №9, 1251-1252.
1575. W e i n b e r g e r P. J., R o t h s c h i l d L. P. Factoring polynomials over algebraic number fialds.- ACM Trans. Math. Software, 1976, 2, №4, 335-350.
1576. W e i s e n h o rn F r a n z. Ein Beitrag zar Bestinmung der Nullstellen.- Arch. elek. Ubertrag, 1970, 24, №7-8, 372-378.
1577. W e l d L. G. Theory of determinants.- New York, 2 nd. edition, 1896.
1578. W e n z l F. Iterationsverfahren zur Berechnung komplexer Nullstellen von Gleichun- gen (Итерационный метод вычисления комплексных нулей уравнений). Z. angev. Math. UndMech., **32,** (S. 85-87), 1952.
1579. W e r n e r W. On the simultaneous determination of polynomial roots.- Lect. Notes Math., 1982, 953, 188-202.
1580. W e s t e r f i e l d E. C. A new bound for the zeros of polynomials (Новая граница для нулей полиномов) Amer. Math. Monthly, **40,** № 1, (p. 18-23), 1933.
1581. W h i t e P a u l A. The computation of eigenvalues and eigenvectors of matrix. – I. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, №4, 393-437.
1582. W h i t e P a u l A., B r o w n R o b e r t R. A comparison of methods of computing the eigenvalues and eigenvectors of a real symmetric matrix. – Math. and Comput., 1984, 18, №87, 457-463.
1583. W h i t t a k e r E. T., Robinson G. The Solution of the Cubic (Решение кубического уравнения). § 62 in «The Calculus of Observations: A Treatise on Numerical Mathematics». New York: Dover, 1967.
1584. W i d e m H a r o l d, W i l f H e r b e r t. Small eigenvalues of large Hankel matrices.- Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, №2, 338-344.
1585. W i l f H e r b e r t S. Perron-Frobenius theory and the zeros of polinomials. – Proc. Amer. Math. Soc., 1961, 12, №2, 247-250.
1586. W i l k i n s o n J. H. Housholder's method for the solution of the algebraic eigenproblem. – Comput. J., 1960, 3, №1,23-27.

1587. W i l k i n s o n J. H. Rigorous error bounds for computed eigensystems. – Comput. J., 1961, 4, №3, 230-241.
1588. W i l k i n s o n J. H. The evaluation of the zeros of illconditioned polynomials. – Part I, II. – Numer. Math., 1959, 1, №3.
1589. W i l l e r s F. A. Methoden der practischen analysis. – Berlin, de Gruyter, 1957, 429p.
1590. W i l l i a m s K. S. A generalisation of Cardan's solution of the cubic. – Math. Gaz., 1962, 46, №357, 221-223.
1591. W i s n i e w s k i H. Oszacowanie liczby zer rzeczywistych pewnego wielomianu stopnia n-tego.- Fasc. math., 1969, №4, 71-78.
1592. W o h l r a b e K. Gleichheit von Nullstellenadjunktionen.- Prepr. Akad. wiss. DDR. Zentralinst. Math. und Mech., 1979, №25, 17s.
1593. W o o d G r a i g A. Multiple zeros of polynomials.- Tex. J. Sci., 1973, 24, №4, 445-456.
1594. W o o d h o u s e D. A note on the secant method.- BIT, 1975, 15, №3, 323-327.
1595. W o r p i t z k y J. Untersuchungen über die Entwickelung der monodronen und monogenen Functionen durch Kettenbrüche.- Friedrischs-Gymnasium und Realschule, Jahresbericht, Berlin, (1865), 3-39.
1596. W o z n i a k o w s k i H. Polynomial decomposition into quadratic factors with controlled accuracy by Bairstow's method.- Zastosow. mat., 1970, 11, №2, 215-220.
1597. W o z n i a k o w s k i H. Some remarks on Bairstow's method.- Zastosow. mat., 1970, 11, №2, 207-214.
1598. W r o n a W l a d i s l a w. Sur une methode de localisation des zeros d'un polynome.- Studia Univ. Babes-Bolyal. Ser. math.-phys., 1967, 12, №2, 17-24.
1599. W u s i n g H a n s. Zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppen theori.- Schriften. Geschichte Naturwiss., Techn. Und Med., 1965, 2, №5, 1-16.
1600. W. d e 'T o s c h i d i F a g n an o G. C. Produzione matematiche (Математические произведения). Pezaro, 1750.
1601. Y a h y a Q. A. On rational and integral roots of a polynomial.- Port. math., 1968, 27, №1-2, 119-122.
1602. Y a l a v i g i C. C. Nature of the roots of a cubic equation.- Math. Stud., 1967(1969), 35, №1-4, 210-211.
1603. Y a m a m o t o T e t s u r o. On Lanczos algorithm for tri-diagonalization.- J. Sci. Hiroshima Univ., 1968, Ser. A., Div. 1, 32, №2, 259-284.
1604. Y o u n g D a v i d M. Solution of linear systems of equations.- Numerical solution Partial Differential Equations. Dordrecht-Boston, 1973, 35-54.
1605. Y o u n g G. P. Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, without the Aid of a Resolvent Sextic (Решение разрешимых неприводимых уравнений пятой степени, без помощи резольвенты шестого порядка). Amer. J. Math., 1885.
1606. Y o u n g J. R. Theory and solution of algebraic equations of the higher order.- Souter and Law, London, 1843.
1607. Y o u n g L a e l M. A solution of general cyclic quintic.- Bul. Inst. politehn. Lasi, 1966, 12, №1-2, 21-26.
1608. Z a j t a A. Untersuchungen uber die Newton-Raphsonschen Wurzelelapproximation. II. - Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, 19, №1-2, 25-60.
1609. Z e n g W e n – P i n g. On convergence of the Jacobi the Gauss-Zeidel the SOR and the AOR iteration methods.- Math. J. Chin. Univ., 1985, 7, 327-339.
1610. Z e r v o s S p i r o s P. Aspects modernes de la localitsation des zeros des polynomes d'une variable. – Ann. scient. Ecde norm. super., 1960, 77, №4, 303-410.
1611. Z e r v o s S p i r o s. Sur la localisation des zeros de polynomes d'une variable complexe. – Semin. P. Dubreil, M.-L. Dubrel-Jacobin et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1957-1958, 11 annes. Vol. 1, Paris, 1958, 3-1-3-38.
1612. Z h a o F a n g - x i o n g. Routh's method for finding complex roots.- Chinese Math., 1967, 9, №4, 420-432.

1613. Z h a o J i n x i. The modified Kaczmarz method for solving linear system.- J. Nanjing Univ. Math. Biquart, 1988, 5, №1, 121-123.

1614. Z h a o S h u g i n. A method to solve the srecial triple diagonal systems.- J. East China Norm. Univ. Nat. Sci – 1990, №4, 10-12.

1615. Z i m m e r H. Factorization of polynomials according to a method of Zassenhaus.- SIGSAM Bull., 1976, 10, №4, 43-45.

1616. Z o h a r S h a l h a v. Fortran subroutines for the solution of Toeplitz sets of linear equations.- IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process, 1979, 27, №6, 656-658.

1617. Z u n Z h a n s h a n. A local convergence theorem of Halley’s iteration method for finding complex zeroes.- Numer. Math. J. Chin. Univ., 1984, 6, №3, 222-227.

1618. Z u r m u h l R. Praktische Mathematik fur Ingenieure und Physiker. – Berlin-Gottingen-Helderburg, Springer-Verlag, 1953, -481p.

Научное издание

Шмойлов Владимир Ильич

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ПРИ ПОМОЩИ r/φ – АЛГОРИТМА

Работа печатается в авторской редакции

Сдано в набор 03.08.2011 Подписано к печати с оригинала-макета 25.08.2011
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 41,6. Уч.–изд л. 41,0.
Тираж 100 экз. Заказ №

Типография Технологического института Южного федерального университета,
ГСП 17А, Таганрог,28, Энгельса,1